REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algèbre et Mathématiques Discrètes

Thème

Groupe d'automorphismes de certaines formes trilinéaires alternés

Présentée par :
M^r SEDRAYA Sarra Mebarka et SERIBLI Ahlam

Devant le jury composé de :

ZEDAM Lemnaouar	Prof,	Université de M'sila	**Président**.
MIDOUNE Noureddine	MCA,	Université de M'sila	**Encadreur.**
MILLES Soheyb	MCA,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Avant tout Nous remercions **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volanté pour finie ce travail.

Nous tenons à remercier particuliérement notre directeur de thése Monsieur **MiDOUNE Noureddine et RakDi Mohamed Anouar**, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et leur patience leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intéret.

Nous tenons à remercier aussi Monsieur **ZEDAM Lemnaouar,** d'avoir accepté de présider notre mémoire.

Nous tenons à remercier Monsieur **MILLES Soheyb,** pour avoir accepté d'examiner notre mémoire.

Nos remerciements s'adressent à tous les professeurs du département de mathématiques sans oublies aussi nos collègues et amies, tous les étudiants et étudiantes de notre promotion, ainsi tous ceux qui participé de loin ou de près à l'elaboration de ce mémoire.

Nous accordons tout notre respect à ceux qui nous ont soutenus, en particulier à nos chers parents,nos mères, nos grandes parents, nos soeurs, nos frères et nos conjoints **Zellagui Riyad** et **Bouranene Abdelhak**, et notre chère soeur **Sedraya Aya** et notre fils **Zellagui Adam Firas** à qui nous dédions ce travail pour leur grand soutien.

Nous remercions toutes les personnes, fammille, amis, qui directement ou indirectement on contribué à la réalisation de ce travaile.

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **3**
- 1.1 Produit tensoriel 3
- 1.2 produit extérieure 4
  - 1.2.1 Support et Rang 5
  - 1.2.2 Radical 5
  - 1.2.3 Vecteure décomposable 5
  - 1.2.4 Vecteur divisible 5
  - 1.2.5 L'action d'un groupe sur un ensemble 5
  - 1.2.6 Formes trilinéaires alternées 6
  - 1.2.7 Parties stables 6
  - 1.2.8 Eléments scindables 8
  - 1.2.9 Suite exacte 9
  - 1.2.10 Invariant et trivecteurs : l'invariant $Aut\,(\omega)$ 10

2 Classification des trivecteurs et groupes d'automorphismes **11**
- 2.1 Classification des trivecteurs 11
  - 2.1.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure 6 11
  - 2.1.2 Classification des trivecteurs en dimension 6 12
  - 2.1.3 Classification des trivecteurs en dimension 7 12
  - 2.1.4 Classification des trivecteurs en dimension 8 13
- 2.2 Groupes d'automorphismes des trivecteurs 13
  - 2.2.1 Groupe d'automorphismes des trivecteur inférieur à 6 13
  - 2.2.2 Groupe d'automorphismes des trivecteur de rang 6 15

Bibliographie **21**

Introduction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K.

La classification des trivecteurs (ou formes trilinéaires alternées), c'est-à-dire la détermination des orbites, et un représentant typique de chaque orbite, est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel des trivecteurs $\Lambda^3 E$ (ou des formes trilinéaires alternées $Alt_3(E)$).

De l'isomorphisme $\Lambda^3 E^* \simeq (\Lambda^3 E)^* \simeq Alt_3(E)$, on parle indifféremment des formes trilinéaires alternées et des trivecteurs .

Plusieurs auteurs ont étudié les formes trilinéaires alternées. Il n'y a qu'un nombre fini d'orbites pour $n \leq 8$ dont la liste est donnée dans [4], [5], [9],

[12] et [13].

Pour classifier les trivecteurs, on utilisera le plus souvent les invariants algébriques, par exemple, le groupes d'automorphisme d'un trivecteur ω, $Aut(\omega)$, car, deux trivecteurs ω_1 et ω_2 sont équivalents si et seulement si leurs groupes d'automorphismes $Aut(\omega_1)$ et $Aut(\omega_2)$ le sont.

si $Aut(\omega_1)$ et $Aut(\omega_2)$ ne sont pas isomorphes, alors, leurs trivecteurs ω_1 et ω_2 ne le sont pas comme on le verra au chapitre II.

Donc, pour classifier les trivecteurs, il est indisponsable de déterminer les groupes d'automorphismes de chaque trivecteur sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque.

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des trivecteurs de rang $n \leq 7$,

puis nous déterminons les groupes d'automorphismes de chaque trivecteur sur un corps algébriquement clos, pour $n \leq 6$.

Dans le premier chapitre, on donne des généralités sur le produit tensoriel, produit exterieure, scindabilité , invariants , groupe d'automorphismes,

commutant et parties stables.

Le deuxième chapitre est consacré aux trivecteurs de rang au plus 7 et leur groupes d'automorphismes.

Après avoir donné la classification des trivecteurs pour $n \leqslant 7$, nous déterminons les groupes d'automorphismes des trivecteurs pour $n \leqslant 6$ par les suites exactes, en utilisant les parties stables.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Produit tensoriel

Définition 1.1 Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K.

Il existe un espace vectoriel sur K, notée $E \otimes E$ qui se lit E tenseur E et une forme bilinéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & E \times E & \to & E \otimes E \\ & (u, v) & \to & \varphi_1 (u, v) \end{array}$$

tel que, pour toute forme bilinéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & E \times E & \to & E \otimes E \\ & (u, v) & \to & \varphi_2 (u, v) \end{array}$$

il existe une unique application linéaire $\varphi : E \otimes E \to K$ telle que $\varphi_2 = \varphi \circ \varphi_1$.

$$\begin{array}{ll} E \times E & \underrightarrow{\forall \varphi_2} K \\ \exists \varphi_1 \downarrow & \nearrow_{\exists ! \varphi} \\ E \otimes E & \end{array}$$

l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times E$ dans K, s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de $E \otimes E$ dans K

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(E,E;K) & \simeq & (E\otimes E;K) \\ \varphi_2 & \to & \varphi \end{array}$$

et cette propriété caractérise $E\otimes E$.

On pose $T^3(E)=E\otimes E\otimes E=\otimes^3 E$.

1.2 produit extérieure

Définition 1.2 On note $\Lambda^3 E$ le quotient de $T^3(E)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $x_1\otimes x_2\otimes x_3$ où $x_i=x_j$ pour 2 indices $i\neq j$.On appelle $\Lambda^3 E$ la puissance extérieure $3-$ième de E.

On note $x_1\wedge x_2\wedge x_3=x_1\otimes x_2\otimes x_3$ qui se lit x_1 extèrieur x_2 extèrieur x_3.

1. La puissance extérieure $\Lambda^3 E$ est définininissable d'une manière analogue au produit tensoriel.

$$\begin{array}{ccc} \omega: E\times E\times E & \overset{\forall\omega_1}{\to} & K \\ (x_1,x_2,x_3) & \to & \omega(x_1,x_2,x_3) \\ \omega_2\downarrow & \nearrow_{\exists!\omega} & \\ \Lambda^3\omega & & \end{array}$$

$$\omega_1=\omega\circ\omega_2$$

$$\omega(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge x_2\wedge x_3$$

$$\omega(x_1\wedge x_2\wedge x_3)=\omega(x_1,x_2,x_3)$$

2.

$$\begin{array}{rcl} (x+y)\wedge(x+y) & = & 0 \\ & = & x\wedge x+y\wedge y+x\wedge y+y\wedge x \\ x\wedge y & = & -y\wedge x. \end{array}$$

1.2.1 Support et Rang

On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \Lambda^3 F$; la dimension de S_ω s'appelle le rang de ω qu'on note $rg\left(\omega\right)$.

1.2.2 Radical

Soit $\omega \in \Lambda^3 E^*$ une forme trilinéaire, le radical de ω est l'ensemble :

$$Rad\left(\omega\right) = \{x \in E \diagup \omega(x, y, z) = 0, \forall y, z \in E\}$$

Si $Rad\ \omega = \{0\}$, on dit que ω est non dégénérée ou de rang maximal.

1.2.3 Vecteure décomposable

Un trivecteur non nul ω est appelé décomposable s'il existe x, y, z dans E tel que $\omega = x \wedge y \wedge z$ (produit extérieur).

-Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables, et le nombre minimal de trivecteurs nécessaires est un invariant intéressant, c'est la longueur.

Remarque 1.1 On écrit souvent $x_1 x_2 x_3$ ou lieu de $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

1.2.4 Vecteur divisible

Soit ω un trivecteur non nul, ω est un trivecteur divisible s'il existe un

$$x \in E - \{0_E\} \quad \text{et } u \in \Lambda^2 E_2 \quad \text{tel que} \quad E = Kx \oplus E_2 \text{ et } \omega = x \wedge u.$$

1.2.5 L'action d'un groupe sur un ensemble

Définition 1.3 L'action du groupe linéaire $GL\left(E\right)$ sur l'ensemble des formes trilinéaires alternées $Alt_3\left(E\right)$, est définie par :

Pour $f \in GL\left(E\right)$ et $\omega : E \times E \times E \to K$ une forme trilinéaire alternée, on a $f.\omega\left(x, y, z\right) = \omega\left(f\left(x\right), f\left(y\right), f\left(z\right)\right)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

pour tous $f_1, f_2 \in GL\left(E\right)$, ω une forme trilinéaire alternée

1. $(f_1 \circ f_2) .\omega = f_1 . (f_2 .\omega)$
2. $Id_E .\omega = \omega.$

Définition 1.4 L'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^3 E$, est définie par : pour tous $f \in GL(E)$, $\omega \in \Lambda^3 E$, $f.\omega = (\Lambda^3 f)(\omega)$ où $\Lambda^3 f$ est un endomorphisme de $\Lambda^3 E$, définie par :$\Lambda^3 f(x \wedge y \wedge z) = f(x) \wedge f(y) \wedge f(z)$.

D'après l'isomorphisme $\Lambda^3 E^* \simeq (\Lambda^3 E)^*$, on emploi les deux définitions.

1.2.6 Formes trilinéaires alternées

L'espace vectoriel $\Lambda^3 E$ peuvent être défini d'une autre manière en utilisant les formes trilinéaires alternées pour tout espace vectoriel E sur un corps commutatif K, l'ensemble $Alt_3(E)$ des formes trilinéaires alternées $h\colon E \times E \times E \longrightarrow K$ est lui-même un K espace vectoriel pour les opérations terme à terme habituelles.

Définition 1.5 Une forme trillinéaire

$$\begin{array}{rccc} \omega : & E \times E \times E & \to & K \\ & (x, y, z) & \to & \omega(x, y, z) \end{array}$$

est dite alternée si $\omega(x, y, z) = 0$ dèsque $x_i = x_j$; pour un couple d'indices $i \neq j$.

Pour chaque application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \to & E \\ \Lambda^3 f : & \omega^3 E & \to & \omega^3 E \\ & x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 & \to & \Lambda^3 f(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\ & & = & f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge f(x_3) \end{array}$$

1.2.7 Parties stables

Lemme 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps K et considérons la forme bilinéaire alternée définie par :*

$\omega^x(y, z) = \omega(x, y, z)$*($\omega$ une forme trilinéaire alternée).*

Alors, l'ensemble $R_i = \{x \in E / rg\omega^x = 2i\}$ $(0 \leq 2i \leq n)$ *est stable par* $Aut(\omega)$*, c'est-a-dire* $f(R_i(\omega)) \subset R_i(\omega)$ *pour* $f \in Aut(\omega)$*.*

L'ensemble $R_i(\omega) = \{x \in E / \varpi(x)$ *est de type* $\omega_i\}$ *une partie stable pour* $Aut(\omega)$*.*

Preuve. On utilise les parties stables pour déterminer les groupes d'automorphismes.

■

Lemme 1.2 *Soit* E *un espace vectoriel sur le corps* K*, de dimension finie,* V_1 *et* V_2 *deux sous-espace de* E *différents et tel que* $\dim V_1 = \dim V_2$*.*

Si f *est un endomorphisme de* E *qui laissent stable la réunion de* V_1 *et* V_2*, c'est-a-dire* $f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$*, alors on a* $[f(V_1) \subset V_1$ *et* $f(V_2) \subset V_2]$ *ou* $[f(V_1) \subset V_2$ *et* $f(V_2) \subset V_1]$*.*

Preuve. Comme $f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$, on obtient :

$$\begin{cases} f(V_1) \subset V_1 \cup V_2 \\ f(V_2) \subset V_1 \cup V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(V_1) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_1) \\ f(V_2) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f(V_1) \cap V_1) \cup (f(V_1) \cap V_2) = f(V_1) & \mathbf{I} \\ (f(V_2) \cap V_1) \cup (f(V_2) \cap V_2) = f(V_2) & \mathbf{II} \end{cases}$$

Or, la réunion de deux sous- espaces vectoriels est un sous espaces vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre, ainsi :

$$\begin{cases} ((f(V_1) \cap V_1) \subset (f(V_1) \cap V_2)) \text{ ou } ((f(V_1) \cap V_2) \subset (f(V_1) \cap V_1)) \\ \text{et} \\ ((f(V_2) \cap V_1) \subset (f(V_2) \cap V_2)) \text{ ou } ((f(V_2) \cap V_2) \subset (f(V_2) \cap V_1)) \end{cases}$$

On remplace dans I et II on obtient :

$$\begin{cases} ((f(V_1) \cap V_1) = f(V_1)) \text{ ou } ((f(V_1) \cap V_2) = f(V_1)) \\ \text{et} \\ ((f(V_2) \cap V_1) = f(V_2)) \text{ ou } ((f(V_2) \cap V_2) = f(V_2)) \end{cases}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{cases} (f(V_1) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2) \\ \text{et} \\ (f(V_2) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_2) \subset V_2) \end{cases}$$

On a quatre cas qui figurent :

$$\begin{cases} (f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \\ \text{et} \\ (f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_2) \end{cases}$$

Les deux derniers cas sont impossibles car par exemple :

Si $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_1$ comme $\dim f(V_1) = \dim V_1$ et $\dim f(V_2) = \dim V_2$.

D'où $f(V_1) = V_1$ et $f(V_2) = V_1 \Rightarrow V_1 = V_2\,(f$ injective) ce qui est absurde car $V_1 \neq V_2$. ■

1.2.8 Eléments scindables

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E, $\Lambda^3 E$ s'identifie à :

$$\bigoplus_{k=0}^{k=3} \left(\Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{3-k} E_2\right).$$

Un élément $\omega \in \Lambda^3 E$ est dit scindabl, s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que : $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$ vu comme facteur direct de $\Lambda^3 E$. Si $\dim E_1 = r$, on dit que ω est r-scindable. La scindabilité est une généralisation de la divisibilité. en effet ω est divisible si et seulement si ω est 1-scindable, propriété qui ne dépend pas du corps de base car c'est équivalent à dire que l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \Lambda^4 E \\ x & \longrightarrow & x\omega \end{array} \text{ n'est pas injective,}$$

Soit ω un élément r-scindable et $\{e_1, ..., e_r\}$ une base de E_1, $\omega = \sum_{i=1}^{r} e_i u_i$ où $u_i \in \Lambda^2 E_2$. Les u_i sont déterminés de façon unique par la base $e_1, ..., e_r$ de E_1. Alors

ω est déterminé par le sous-espace vectoriel F de $\Lambda^2 E_2$ engendré par les u_i, en effet, si on change de base dans E_1, et si la nouvelle base f_j est donnée par :

$$e_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} f_j,$$

$$\omega = \sum_{1}^{r} e_i u_i = \sum_{j=1}^{r} f_j \left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij} u_i \right) = \sum_{j=1}^{r} f_j v_j,$$

les v_j s'obtiennent donc à partir des u_i par le changement de base contragrédient de celui qui fait passer de la base $\{f_j\}$ à la base $\{e_i\}$. Cela se voit aussi en utilisant l'isomorphisme naturel entre $E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$ et $Hom\left(E_1^*, \Lambda^2 E_2\right)$, si φ est l'élément de $Hom\left(E_1^*, \Lambda^2 E_2\right)$ canoniquement associé à ω, F n'est autre que $\varphi\left(E_1^*\right)$.

un même trivecteur peut être scindable pour plusieurs valeurs de l'entier r comme le montre l'exemple :

$\omega_{7,3} = e_1 e_2 e_3 + e_3 e_4 e_5 + e_5 e_6 e_7$ qui est 2 et 3$-$scindable :

$\omega_{7,3} = e_3\left(e_1 e_2 + e_4 e_5\right) + \left(e_5 e_6\right) e_7 = e_1\left(e_2 e_3\right) + e_4\left(e_5 e_3\right) + \left(e_5 e_6\right) e_7.$

1.2.9 Suite exacte

Définition 1.6 Soit $G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G''$ une suite d'homomorphismes de groupes . Nous dirons que cette suite est exacte si

$$\operatorname{Im} f = \ker g.$$

Exemple 1.1 Si H est un sous groupe distingué de G, la suite

$$H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\varphi} G/H$$

est exacte (j étant l'injection et φ la projection canonique).

Remarque 1.2 Dire, la suite

$$1 \longrightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \longrightarrow 1$$

est exacte, signifie que f est injectif, que $\operatorname{Im} f = \ker g$ et que g est surjectif .

1.2.10 Invariant et trivecteurs : l'invariant $Aut\,(\omega)$

Le groupe des automorphismes de ω, $Aut\,(\omega)$ est le stabilisateur de ω dans l'action de $GL\,(E)\,,$ c'est à dire le sous-groupe de $GL\,(E)$ des automorphismes de E qui laissent ω invariant $Aut\,(\omega) = \{f\ /\ f \in GL(E)$ et $\Lambda^3 f(\omega) = \omega\} = \{f\ \ /f \in GL(E)$ et $f.\omega = \omega\}\,.$ L'orbite de ω par $GL(E)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes à gouche $GL(E)/Aut(\omega)$.

Chapitre 2

Classification des trivecteurs et groupes d'automorphismes

2.1 Classification des trivecteurs

Soit K un corps algebriquement clos, et E un K-e.v.

2.1.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure 6

1. Pour dim $E = 3$, il n'y a qu'un orbite de trivecteurs non nuls : si $\omega \in \Lambda^3 E - \{0\}$ il existe $\{e_1, e_2, e_3\}$, une base de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$.
2. Pour dim $E = 4$, tous les trivecteurs non nuls sont décomposables, donc $\Lambda^3 E$ a deux orbites, dans une base (e_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, un représentant de chaque orbite est donné par :

   0

   $e_1 e_2 e_3$
3. Pour dim $E = 5$, l'isomorphisme $\Lambda^3 E \backsimeq \Lambda^2 E^*$ montre qu'il y a trois orbites dans $\Lambda^3 E$: en effet si un trivecteur est non nul et non décomposable, il est nécessairement de rang maximal, donc divisible par un vecteur e_1 : $\omega = e_1 u$ où u est un bivecteur de rang 4 ; on peut choisir pour S_u, tout supplémentaire de Ke_1 dans E et il existe une base (e_i),$1 \leqslant i \leqslant 5$, de E telle que un représentant de chaque orbite est donné par :

0

$e_1e_2e_3$

$e_1(e_2e_3 + e_4e_5)\cdot$

2.1.2 Classification des trivecteurs en dimension 6

Soit E un e.v de $dim\ E = 6$ et soit $\omega \in \Lambda^3 E$ un trivecteur de rang maximal $rg(\omega) = dim\ E = 6$.

Il existe une base (e_i),$1 \leqslant i \leqslant 6$, de E telle que ω s'écrit :

$$\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$$
$$\omega_{6,2} = e_1e_2e_3 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6.$$

i.e. Il existe donc 2 orbites de rang maximal.

2.1.3 Classification des trivecteurs en dimension 7

Il ya cinq orbites de rang 7, et deux orbites de rang 6, une orbites de rang 5, une orbites de rang 3, et l'orbites 0 :

$\omega_3 = e_1e_2e_3, rg(\omega_3) = 3$

$\omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5), rg(\omega_5) = 5$

$\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$

$\omega_{6,2} = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6, rg(w_{6,1}) = rg(\omega_{6,2}) = 6$

$\omega_{7,1} = e_1\left(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7\right)$

$\omega_{7,2} = w_{7,1} + e_2e_4e_6$

$\omega_{7,3} = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7$

$w_{7,4} = e_1\left(e_2e_3 + e_4e_5\right) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7$

$\omega_{7,5} = w_{7,2} + e_3e_5e_7$

$rg\left(\omega_{7,i}\right) = 7, i = \overline{1,5}.$

2.1.4 Classification des trivecteurs en dimension 8

Il existe 13 classes d'équivalence de trivecteurs de rang 8. Dans une base (e_i) de E,$1 \leqslant i \leqslant 13$, un représentant de chaque classe est donné par $\omega_{8,i}$,$1 \leqslant i \leqslant 13$, de la table 1.

Table 1

$\omega_{8,i}$	Expression d'un représentant de l'orbite
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$
$\omega_{8,7}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_6 + e_5e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$
$\omega_{8,8}$	$e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$
$\omega_{8,9}$	$e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$
$\omega_{8,10}$	$e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$
$\omega_{8,11}$	$e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$
$\omega_{8,12}$	$e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,13}$	$e_1[e_5(e_3 - e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$

2.2 Groupes d'automorphismes des trivecteurs

2.2.1 Groupe d'automorphismes des trivecteur inférieur à 6

Proposition 2.1 *Le groupe d'automorphismes $Aut(\omega_3)$, $\omega_3 = e_1e_2e_3$ est le groupe spécial $SL_3(E)$.*

$$Aut(\omega_3) \simeq SL_3(E).$$

Preuve. On a $Aut(\omega_3) = \{f \quad / f \in GL(E) \text{ et } f.\omega_3 = \omega_3\}$.

Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E.

Comme $\omega_3(e_1, e_2, e_3) = 1$, $\omega_3(e_i, e_j, e_k) = 0$ sinon.

$f \in Aut(\omega_3) \Rightarrow f.\omega_3 = \omega_3$.

$$\begin{aligned} f.e_1e_2e_3 &= f(e_1)\,f(e_2)\,f(e_3) \\ &= e_1e_2e_3 \end{aligned}$$

Soit $M_B(f)$ la matrice de f :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

On a,

$$e_1e_2e_3 = f(e_1)\,f(e_2)\,f(e_3)$$

$$e_1e_2e_3 = (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3)(z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3)$$

$$\begin{aligned} e_1e_2e_3 = {} & x_1y_2z_3(e_1e_2e_3) + x_1y_3z_2(e_1e_3e_2) + x_2y_1z_3(e_2e_1e_3) + x_2y_3z_1(e_2e_3e_1) \\ & + x_3y_1z_2(e_3e_1e_2) + x_3y_2z_1(e_3e_2e_1). \end{aligned}$$

$$e_1e_2e_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} e_1e_2e_3.$$

Ce qui donne :

$$\det(M_B(f)) = 1$$

$Aut(\omega) = \{f \in GL(E), \det(M_B(f)) = 1\}$.

Donc : $Aut(\omega) = SL_3(E)$. ■

Proposition 2.2 *Le groupe d'automorphisme $A = Aut(\omega_5)$, $\omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$ est donné par les suites exactes suivantes :*

$$1 \to A' \to A \to K^* \to 1$$
$$1 \to K^4 \to A' \to Sp_4(K) \to 1.$$

Preuve. Considérons l'ensemble $E_1 = \{x \in E\ /x \wedge \omega_5 = 0\}$;soit $x = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i e_i \in E_1$, $x = \alpha_1 e_1$ et $E_1 = Vect\{e_1\}$.

Donc, $x \wedge \omega_5 = 0 \Rightarrow (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_5 e_5) \wedge (e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5) = 0$:

$$\begin{array}{rcl} \Psi : A & \to & K^* \\ f & \to & \Psi(f) = \lambda.f \end{array}$$

pour $\alpha \in K^*$, on prend pour antécédent l'application linéaire $f : E \to E$ défnie par $f(e_1) = \alpha_1$,$f(e_{2i}) = \alpha^{-1}e_{2i}$,$f(e_{2i+1}) = e_{2i+1}$,pour $i = 1, 2$. Soit $f \in A' = \ker \psi$,comme $f.\omega_5 = \omega_5$, $e_1\Lambda^2 f\,(e_2e_3 + e_4e_5) = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$, autrement dit

$\Lambda^2 f\,(e_2e_3 + e_4e_5) = e_2e_3 + e_4e_5 + xe_1$ avec $x \in E_2 = Vect\,\{e_2, e_3, e_{4,}e_5\}$.

Considérons $g : E_2 \to E$, $M_B\,(g) = B$, l'application linéaire dont la matrice est B : $\Lambda^2 g\,(e_2e_3 + e_4e_5) = e_2e_3 + e_4e_5$ l'homomorphisme $\varphi : A' \to Sp_4(K)$ définit par :

$\varphi(f) = B$ est surjectif et de noyau isomorphe à K^4, d'où le résultat. ■

2.2.2 Groupe d'automorphismes des trivecteur de rang 6

Proposition 2.3 *Le groupe d'automorphisme $A = Aut(\omega_{6,1})$ est déterminé par la suite exacte suivante :*

$$1 \to SL_3(K) \times SL_3(K) \to Aut(\omega_{6,1}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

Preuve. $\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$

On a $R_1 = vect\,\{e_1, e_2, e_3\} \cup vect\,\{e_4, e_5, e_6\} = V_1 \cup V_2$ est une partie stable pour f, donc si $f \in Aut\,(\omega_{6,1})$,$f\,(R_1) \subset R_1$.

On pose $V = V_1 \cup V_2$ où $V_1 = vect\,\{e_1, e_2, e_3\}$ et $V_2 = vect\,\{e_4, e_5, e_6\}$.$f\,(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$.

Alors,

$\{f\,(V_1) \subset V_1$ et $f\,(V_2) \subset V_2\}$ou $\{f\,(V_1) \subset V_2$ et $f\,(V_2) \subset V_1\}$.

Ce qui permet de définir un homomorphisme de groupe de $A = Aut\,(\omega_{6,1})$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A & \to & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ f & \to & \varphi\,(f) \end{array}$$

où :

$$\varphi(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2 \\ -1 & \text{si } f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1 \end{cases}$$

Calculons $Ker\ \varphi = \{f\ /\ f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2\}$.

Soit $f_1 = f/V_1$ et $f_2 = f/V_2$.

Donc, la matrice de f est de la forme :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, A_1 = M_B(f_1) \text{ et } A_2 = M_B(f_2).$$

Comme $f \in A = Aut(\omega_{6,1})$ i.e. $f.\omega_{6,1} = w_{6,1}$.

Donc,

$e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6 = \det A_1.e_1e_2e_3 + \det A_2.e_4e_5e_6$.

Ce qui preuve que $\det A_1 = 1$ et $\det A_2 = 1$

i.e.$A_1, A_2 \in SL_3(K)$

D'où $Ker\ \varphi = SL_3(K) * SL_3(K)$

φ est surjectif car :

$\varphi(id_E) = 1$ et $\varphi(f_0) = -1$, f_0 est définit par :

$$\begin{cases} f_0(e_1) = e_4 \\ f_0(e_2) = e_5 \\ f_0(e_3) = e_6 \\ f_0(e_4) = e_1 \\ f_0(e_5) = e_2 \\ f_0(e_6) = e_3 \end{cases}$$

D'où l'exectitude de la suite

$$1 \to SL_3(K) \times SL_3(K) \to A \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

■

Proposition 2.4 *Le groupe d'automorphisme* $A = Aut(\omega_{6,2})$ *est déterminé par la suite exacte suivante :*

$$1 \to K^8 \to Aut(\omega_{6,2}) \to GL_3(K) \to 1.$$

Preuve. On a :

$\omega_{6,2} = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$

Soit $V_1 = vect\{e_1, e_2, e_3\}$, V_1 est une partie stable.

Donc, $f(V_1) \subset V_1$, ce qui permet de définir un homomorphisme de groupe de $A_2 = Aut(\omega_{6,2})$ dans $GL_3(K)$ par :

$$\begin{array}{rcc} \varphi : A_2 & \to & GL_3(K) \\ f & \to & \psi(f) = f/V_1 \end{array}$$

Donc, $Ker\ \psi = \{f \ / \ f(V_1) = id\}$.

Pour $f \in Ker\ \psi$.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 & y_6 & z_6 \end{pmatrix}$$

De $f.\omega = \omega$

$\Rightarrow f(e_1) f(e_2) f(e_4) + f(e_2) f(e_3) f(e_5) + f(e_1) f(e_3) f(e_6) = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$.

Par identification, on trouve :

$e_1e_2e_4 : x_4 = 1, x_5 = x_6 = 0$

$e_2e_3e_5 : y_5 = 1, y_4 = y_6 = 0$

$e_1e_3e_6 : z_6 = 1, z_4 = z_5 = 0$

$e_1e_2e_3 : x_3 + y_1 - z_2 = 0 \to z_2 = x_3 + y_1$.

Donc :

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 & y_2 & x_3+y_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le noyau $Ker\ \psi$ est un sous-groupe de $GL_6(K)$ formée des matrices triangulaires $\begin{pmatrix} I_3 & A \\ 0_3 & I_3 \end{pmatrix}$ où $A \in M_3(K)$ vérifier la condition $z_2 = x_3 + y_1$, c'est donc le groupe aditif K^8.

D'où $Ker\ \psi \simeq K^8$.

Montrons que ψ est surjectif :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ un élément de $GL_3(K)$, déterminons $f \in Aut(\omega_{6,2})$ telque $f/V_1 = A$.

Alors, $M(f)$ est de la forme :

$$M(f)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 & y_6 & z_6 \end{pmatrix}$$

Comme $f.\omega = \omega$, alors,

$f(e_1)f(e_2)f(e_4)+f(e_2)f(e_3)f(e_5)+f(e_1)f(e_3)f(e_6) = e_1e_2e_4+e_2e_3e_5+e_1e_3e_6.$

Donc,

$$e_1e_2e_4 : (a_1b_1 - a_2b_1)\, x_4 + (b_2c_3 - b_3c_2)\, y_4 + (a_1c_3 - a_3c_1)\, z_4 = 1$$
$$e_2e_3e_5 : (a_2b_3 - a_3b_2)\, x_5 + (b_2c_3 - b_3c_2)\, y_5 + (a_2c_3 - a_3c_2)\, z_5 = 1$$
$$e_1e_3e_6 : (a_1b_3 - a_3b_1)\, x_6 + (b_1c_3 - b_3c_1)\, y_6 + (a_1c_3 - a_3c_1)\, z_6 = 1$$
$$e_1e_3e_4 : (a_1b_3 - a_3b_1)\, x_4 + (b_1c_3 - b_3c_1)\, y_4 + (a_1c_3 - a_3c_1)\, z_4 = 0$$
$$e_2e_3e_4 : (a_2b_3 - a_3b_2)\, x_4 + (b_2c_3 - b_3c_2)\, y_4 + (a_2c_3 - a_3c_2)\, z_4 = 0.$$

Posons :

$$B = \begin{pmatrix} a_1b_3 - a_3b_1 & b_1c_3 - b_3c_1 & a_1c_3 - a_3c_1 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & b_1c_3 - b_3c_1 & a_1c_3 - a_3c_1 \\ a_2b_3 - a_3b_2 & b_2c_3 - b_3c_2 & a_2c_3 - a_3c_2 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$B \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $d\acute{e}t\ B = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

Posons :

$$\begin{cases} u_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ u_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ u_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{cases}$$

Si $V = vect\{u_1, u_2, u_3\}$,alors$\{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3\}$ est une base de Λ^2V.

Donc $dét\{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3\} \neq 0$ i.e.$dét\ B \neq 0$.

D'où l'existence de $x_4, y_4, z_4, x_5, y_5, z_5, x_6, y_6, z_6$ et $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ vérifiant les relations :

$x_1(a_2b_3 - a_3b_2) - x_2(a_1b_3 - a_3b_1) + x_3(a_2b_3 - a_3b_2) + y_1(b_2c_3 - b_3c_2) - y_2(b_1c_3 - b_3c_1) + y_3(b_1c_2 - b_2c_1) + z_1(a_2c_3 - a_3c_2) - z_2(a_1c_3 - a_3c_1) + z_3(a_1c_2 - a_2c_1) = 0$.

D'où ψ est surjective.

(on peut prendre $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$) .

D'où le résultat. ■

Conclusion

L'étude présenté dans ce mémoire s'articule essentiellement sur la classification des trivecteurs de rang ≤ 7, et leurs groupes d'automorphismes.

Cette classification est interprétable pour décrire certaines classifications des courbes elliptiques [1].

Notons que l'application des courbes elliptiques à la cryptographie est relativement récente, d'où l'importance de cette classification en cryptographie.

Notons aussi que cette classification aide à résoudre certains problèmes en théorie des codes [11], [14].

Bibliographie

[1] **Abou Hashih, M., Bénéteau, L.** (2004) Analternative way to classify some Generalized elliptic

[2] **N.Bourbaki** , Algèbre, chapitres 1 à 3 , Hermann , Paris , 1970.

[3] **A.Cohen et A.Helminck** , Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7 , Communications in Algebra 16(1) , 1988 , p.1-25.

[4] **D.Djokovic's** , Classification of trivectors of an eight dimensional real vector space , Linear and multilinear Algebra , 13(3) , 1983 , p.3-39.

[5] **G.B.Gurevitch** , Theory of algebraic invariants . P.Noordhof LTD ,Groningen , the Netherland , 1964..

[6] **B.Kahn** , Sommes de tenseurs décomposables , Prépublication de l'université Paris VII , Mai 1991 , 28p.

[7] **S.Lang** , Algebra , second edition , Addisson-Wesley publishing company Inc ,California 1984.

[8] **L.Noui et Ph.Revoy**, Formes multilinéaires alternées , Ann.Math.Blaise Pascal Vol 1 , n°2 , 1994 , p.43-69

[9] **L.Noui** , Classification des trivecteurs par l'action du groupe linéaire , Thèse de Doctorat , Université de Montpellier II , France , 1995 .

[10] **V.L.Popov, E.B.Vinberg** , Invariant theory , Algebraic Geometry IV ,Encyclopaedia of Mathematical Sciences , Volume 55 , Springer-Verlag.

[11] **E.M. Rains , J.A. Sloane** , Self-dual codes , Handbook of Coding Theory , pless V.S. Huffman W.C (editors) , Elsevier , Amsterdam , 1998 , p.177-294.

[12] **Ph.Revoy** , Trivecteurs de rang 6 , in coll. Sur les formes quadratiques , Bulletin SMF , 59 , 1979 , p.141-155.

[13] **Ph.Revoy** , Formes trilinéaires alternées de Rang 7 , Bul.Sc. Math.112 ,1988 , p.357-368.

[14] **Rakdi .M.A. et Midoune N.** Weights of the Fq-forms of 2-step splitting trivectors of rank 8 over a finite field, Carpathian Mathematical Publications,Vol. 11 No. 2 (2019).

Résumé :

L'étude présenté dans ce mémoire s'articule essentiellement sur la classification des trivecteurs (ou formes trilinéaires alternées).

Pour classifier les trivecteurs, on utilise des invariants algébriques qui permettent de mieux comprendre la classification de ces formes, par exemple, le groupe d'automorphisme d'un trivecteur ω, $Aut(\omega)$, car deux trivecteurs ω_1 et ω_2 sont équivalents si et seulement si leurs groupes d'automorphismes $Aut(\omega_1)$ et $Aut(\omega_2)$ le sont.

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des trivecteurs, puis nous déterminons les groupes d'automorphismes de certains trivecteurs.

Abstract:

The study presented in this thesis focuses on the classification of trivectors(or alternating trilinear forms).

To classify the trivectors, we use algebraic invariants which make it possible to better understand the classification of this forms, for example,the automorphism group of trivector ω, $Aut(\omega)$, because two trivectors ω_1 and ω_2 are equivalent if and only if their automorphism groups $Aut(\omega_1)$ and $Aut(\omega_2)$.

In this thesis, we recall the main part of the known results on the classification of trivectors , then we determine the groups of automorphisms of some trivectors.

الملخص :

تعتمد الدراسة المقدمة في هذه الأطروحة أساسا على تصنيف الأشعة الثلاثية (أو الأشكال الثلاثية المتناوبة).

لتصنيف الأشعة الثلاثية ، نستخدم المتغيرات الجبرية التي تسمح بفهم تصنيف هذه النماذج بشكل أفضل ، على سبيل المثال ، مجموعة التشكل الآلي لشعاع ثلاثي ω ، $Aut(\omega)$ ، لأن الشعاعين الثلاثيان ω_1 و ω_2 متكافئان إذا وفقط إذا كانت مجموعة التشكل الآلي $Aut(\omega_1)$ و $Aut(\omega_2)$ متكافئة .

في هذه الأطروحة ، نذكر الجزء الرئيسي من النتائج المعروفة حول تصنيف الأشعة الثلاثية ، ثم نحدد مجموعة الأشكال الآلية لبعض الأشعة الثلاثية .