

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Etude de l'influence de la Tension Superficielle et l'angle d'Inclination sur
un Ecoulement Potentiel.*

Présentée par :

M^{elle} SILINI Narimane Nour Elhouda

Soutenu publiquement le : 14/06/2025.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r Basti Bilal*

Encadreur : *M^m BOUNAB Noura*

Examineur : *M^m Delloum wahiba*

prof, Université de M'sila

M.C.B, Université de M'sila

M.C.B, Université de M'sila

Année universitaire 2024/2025.

Contents

Introduction	iii
1 Définitions et préliminaires	1
1.1 Définition des fluides	2
1.2 Les écoulements des fluides	2
1.2.1 Écoulement stationnaire	3
1.2.2 Écoulement irrotationnel	3
1.2.3 Écoulement uniforme	3
1.2.4 Écoulement incompressible	3
1.3 Débit	4
1.3.1 Débit massique	4
1.3.2 Débit volumique	4
1.4 Description d'un fluide en mouvement	4
1.4.1 Description de Lagrange	4
1.4.2 Description d'Euler	5
1.5 Quelques équations de la mécanique des fluides	5
1.5.1 Conservation de l'énergie du fluide	5
1.5.2 Ligne et fonction de courant	6
1.5.3 Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ	7
1.5.4 Théorème de Bernoulli	7
1.5.5 Équation de continuité	8
1.5.6 Les équations de Stokes	8
1.6 Transformation de Schwarz-Christoffel	9
1.7 Utilisation de la théorie de la variable complexe	11
1.8 Analyse dimensionnelle	11
1.8.1 Théorème de π ou théorème de Vaschy-Buckingham	12
1.8.2 Nombre de Weber[16]	13
1.8.3 Remarques	13
2 Étude de L'influence de la Tension Superficielle et L'angle d'Inclination sur un Écoulement Potentiel	14
2.1 Position du problème	15

2.2	Formulation du problème	16
2.3	Résolution Numérique	19
2.3.1	Comportement de la vitesse au voisinage des points critiques	22
2.3.2	Formulation de la série	22
3	Discussion des résultats	25
3.1	Forme de la surface libre	25
3.2	Discussions des résultats	27
3.3	Application de logiciel: Fluent	27

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents ma mère et mon père

A ma sœur Ibtihal

A mes frères soheyb et El Mouatassim bialleh

Remerciements

Louange à *Allah*, Le tout-Puissant, le Miséricordieux, qui m'a donné la force, la patience et la volonté nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Dr.BOUNAB Noura, mon en-cadrante, pour sa disponibilité, sa bienveillance, ses conseils avisés et son accompagnement tout au long de la réalisation de ce mémoire. Son expertise et sa rigueur scientifique ont été d'un apport inestimable pour l'avancement de ce travail.

Mes sincères remerciements vont aussi à l'ensemble des enseignants du Département de Mathématiques de l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila, pour la qualité de l'enseignement reçu durant mes années de formation.

Je n'oublie pas d'exprimer toute ma reconnaissance à ma famille, notamment mes parents, leurs encouragements constants, et leur soutien moral inconditionnel. Sans eux, rien de tout cela n'aurait été possible.

Enfin, je remercie mes camarades et amis pour les moments de partage, de motivation, et d'entraide tout au long de ce parcours.

Notation

ρ	La masse volumique.
\vec{u}	Le vecteur vitesse.
\vec{a}	L'accélération.
m	La masse.
P	La pression.
S	La surface.
V	La volume.
C	Une courbe.
n	La normale.
f	La force.
(x,y)	Le plan.
i	Le nombre complexe.
z	La variable complexe.
ϕ	Fonction potentiel.
ψ	Fonction de courant.
D_m	Débit massique.
D_v	Débit volumique.
$M_0(x_0, y_0, z_0)$	Position initiale.
g	La gravité.
T	La tension de surface.
H	Hauteur d'eau.
α	Nombre de Weber.

Introduction Générale

La mécanique des fluides est une branche essentielle de la physique qui étudie le comportement des liquides et des gaz soumis à diverses forces. Elle joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques, notamment l'aérodynamique, l'hydraulique, la météorologie, l'océanographie, et l'ingénierie industrielle. Cette discipline repose sur l'analyse des lois qui régissent l'écoulement des fluides, qu'ils soient parfaits ou réels, visqueux ou non visqueux, compressibles ou incompressibles.

Parmi les phénomènes majeurs affectant les écoulements fluides, la tension superficielle occupe une place centrale. Elle intervient particulièrement dans les écoulements à l'interface entre deux fluides, comme l'air et l'eau, et influence la forme des gouttes, des jets ou des vagues. De même, l'angle d'inclinaison d'une surface ou d'une conduite peut fortement modifier le comportement du fluide, en agissant sur la direction, la vitesse et la stabilité de l'écoulement.

Dans ce contexte, notre travail s'intéresse à l'analyse d'un écoulement potentiel d'un fluide incompressible et non visqueux sortant d'une buse inclinée, en prenant en compte l'effet de la tension superficielle et de l'angle d'inclinaison. Ce problème, bien que théorique, trouve des applications concrètes dans la conception de dispositifs de pulvérisation, de micro-canaux, ou encore dans l'analyse de phénomènes naturels impliquant des interfaces fluides.

Afin d'étudier ce phénomène de manière rigoureuse, nous avons recours à des outils mathématiques avancés tels que l'analyse complexe, les fonctions analytiques, la transformation de Schwarz-Christoffel, et la formulation de séries asymptotiques. Une méthode numérique est ensuite mise en œuvre pour résoudre le système issu des conditions aux limites, notamment à l'aide de la méthode de Newton.

L'écoulement d'un fluide parfait a été étudié par plusieurs chercheurs tel Dias et J.M Vanden-Broeck; où ont étudié un écoulement en émergeant un bec bidimensionnel sous un angle. Différents problèmes de ce genre ont été étudié par, A.Gasmi et H.Mekias,

B.Bouderah et H.Mekias [3] [7] et N.Bounab [13] [14] et d'autres.

Ce mémoire est structurée en trois chapitres:

- **Chapitre 1:** est consacré aux définitions et notions préliminaires concernant la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement de fluide.
- **Chapitre 2:** On étudié numériquement un problème d'un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle incliné forme avec l'axe (oy) un angle $\gamma = \frac{\pi}{4}$ et d'hauteur H où les forces de la tension de la surface sont considéré et les gravité est négligée. En utilisant la technique de troncation de la série.
- **Chapitre 3:** Englobe une lecture et discussion des résultats trouvés dans le chapitre précédent basons sur des différentes valeurs de nombre de Weber et pour quelques ongles d'inclination de l'obstacle considéré.

En fin , on a terminé ce travail par une conclusion générale et un annexe.

DÉFINITIONS ET PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et concepts de base de la mécanique des fluides. Il englobe

- Définition des fluides.
- Les écoulements des fluides.
- Débit.
- Description d'un fluide en mouvement.
- Quelques équations de la mécanique des fluides.
- Transformation de Schwarz-Christoffel.
- Utilisation de la théorie de la variable complexe.
- Analyse dimensionnelle.

1.1 Définition des fluides

Les fluides sont des substances qui peuvent s'écouler et se déformer de manière continue sous l'effet d'une force contrairement aux solides conservent leur forme. Ils englobent *les liquides* et *les gaz*, qui se distinguent par leurs propriétés physiques. Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles:

- *La famille des fluides newtoniens*: comme l'eau, l'air et la plupart des gaz.
- *La famille des fluides non newtoniens*: quasiment tout le reste: le sang, les gels, les boues, les pâtes...etc.

Les fluides parfaits(idéals)

Le fluide est dit parfait lorsque un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres sans aucun frottement.

Les fluides visqueux (réels)

le fluide est dit visqueux lorsque un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres avec frottement.

1.2 Les écoulements des fluides

Les écoulements des fluides désignent le mouvement des liquides et des gaz sous l'effet de forces comme la gravité, la pression ou la viscosité. Ils sont étudiés en mécanique des fluides et se classent en plusieurs catégories:

- *Écoulement laminaire*: Les couches de fluide s'écoulent parallèlement sans mélanger, avec peu de turbulence. Il se produit à faible vitesse et viscosité élevée.
- *Écoulement turbulent*: Le fluide se déplace de manière chaotique, avec des tourbillons et des fluctuations de vitesse. Cela se produit à grande vitesse et faible viscosité.
- *Écoulement transitoire*: Il se situe entre la laminaire et le turbulent.

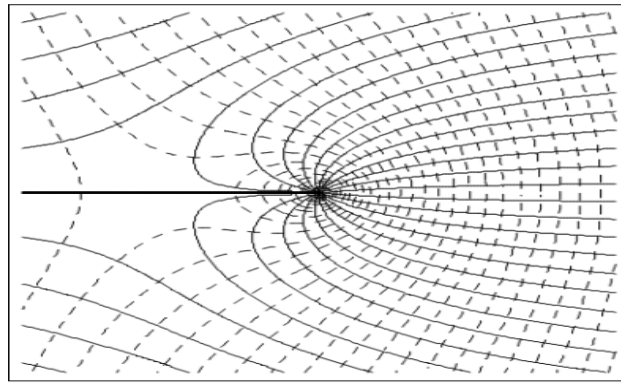


Figure 1.1: figure d'écoulement plan

1.2.1 Écoulement stationnaire

les écoulements stationnaires est un écoulement dans lequel le vecteur vitesse en chaque point (par rapport à un certain référentiel) reste constant au cours du temps, En régime stationnaire:

$$\partial_t u = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t p = 0 \quad (1.1)$$

1.2.2 Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si un écoulement à potentiel des vitesses et inversement qui écrire par l'équation suivant:

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (1.2)$$

1.2.3 Écoulement uniforme

Un écoulement est dit uniforme si les vitesses de toutes les particules sont les mêmes en tout point du fluide : elles ne dépendent pas de leur position.

1.2.4 Écoulement incompressible

Un écoulement incompressible est déplacement d'une quantité de fluide dont la masse volumique est considérée comme constante au cours du processus, soit une dérivée particulaire du champ scalaire de masse volumique négligeable.

considère l'écoulement incompressible alors:

$$\text{div}(v) = 0 \quad (1.3)$$

1.3 Débit

Le débit est la *quantité* d'une *grandeur* qui traverse une surface donnée par unité de temps. Il permet de quantifier un déplacement de matière ou d'énergie.

1.3.1 Débit massique

Le débit massique caractérise la masse qui traverse la surface par unité de temps. Il s'agit de notions centrales dans une situation d'écoulement de fluide.

défini par:

$$D_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.4)$$

1.3.2 Débit volumique

Le débit volumique quantifie alors le volume qui traverse une surface, une section, par unité de temps. défini par:

$$D_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.5)$$

1.4 Description d'un fluide en mouvement

1.4.1 Description de Lagrange

La description lagrangienne est une méthode de description du mouvement d'une particule fluide qui consiste à la suivre dans le temps le long de sa trajectoire: c'est une description intuitive du mouvement, en ce qu'elle est identique à l'étude classique du mouvement d'un point matériel au cours du temps, le point matériel au cours du temps, en déterminer le vecteur position $\vec{r}(M_0, t)$ à tout instant t pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = \vec{r}M(x_0, y_0, z_0, t) \quad (1.6)$$

C'est-à-dire

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t) \quad (1.7)$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t) \quad \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(M_0, t) \quad (1.8)$$

1.4.2 Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à décrire en donnant les composantes des vecteur de vitesse et les autres quantités physiques en chaque point de l'espace c'est-à-dire, on fixe un point dans leur et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passent par point.

À l'instant t_1 , on détermine en M une particule p_1 de vitesse \vec{u} et d'autres caractéristiques physique.

À l'instant $t_2 = t_1 + \partial t$, on trouve au même point M, une autres particule p_2 de vitesse et des caractéristiques physique différentes.

Donc, on a M et l'instant t_1 :

$$\vec{u} = \vec{u}(p_1, t_1) = \vec{u}(x, y, z, t_1) \quad (1.9)$$

Et à l'instant t_2 , on a même point M:

$$\vec{u} = \vec{u}(p_2, t_2) = \vec{u}(x, y, z, t_2) \quad (1.10)$$

1.5 Quelques équations de la mécanique des fluides

1.5.1 Conservation de l'énergie du fluide

La conservation de l'énergie d'un fluide est décrite par la *premier principe de la thermodynamique* et peut être exprimée sous forme de l'*équation de Bernoulli* ou de l'*équation générale de l'énergie*.

L'énergie totale d'un fluide comprend trois formes principales: *énergie interne* (U), *énergie cinétique* ($\frac{1}{2}mv^2$), *énergie potentielle* (mgz), *transfert de chaleur* (Q) et du *travail* (W).

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit:

$$\frac{d}{dt}(U + \frac{1}{2}mv^2 + mgz) = Q - W \quad (1.11)$$

Pour un fluide incompressible et sans viscosité, l'équation de Bernoulli relie *pression* P , la *vitesse d'écoulement* v , la *masse volumique du fluide* ρ , l'*accélération gravitationnelle* g et l'*altitude* z c'est:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{constant} \quad (1.12)$$

1.5.2 Ligne et fonction de courant

ligne de courant:

La ligne de courant est une ligne imaginaire qui représente la trajectoire suivie par une particule fluide en mouvement à un instant donné. Elle est définie de telle sorte que vecteur de vitesse du fluide est tangent en chaque point de la ligne.

L'équation des lignes de courant se déduit directement de cette définition en écrivant que :

Un petit déplacement dx sur la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse :

$$\vec{v} \wedge dx = 0 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{jk} v_j dx_k = 0. \quad (1.13)$$

En explicitant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} v_2 dx_3 - v_3 dx_2 = 0 \\ v_3 dx_1 - v_1 dx_3 = 0 \\ v_1 dx_2 - v_2 dx_1 = 0 \end{cases}$$

Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t)} \quad (1.14)$$

Dans lequel t à la valeur fixée. Les lignes de courant ne peuvent pas se couper.

fonction de courant

La fonction de courant $\psi(x, y)$ est une fonction scalaire utilisée pour décrire les écoulements bidimensionnels incompressibles d'un fluide. Elle permet de tracer les lignes de courant et simplifie l'analyse mathématique des écoulements.

$$\psi(x, y) = \text{constante} \quad (1.15)$$

La fonction de courant est définie de telle sorte que les composantes de la vitesse du fluide (u, v) dans un écoulement bidimensionnel sont obtenues par:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

1.5.3 Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ

Les équations différentielles associées à des fonctions ϕ et ψ peuvent être de différentes formes, en fonction de leur nature et du type d'équation différentielle que vous souhaitez traiter.

1.5.4 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est un principe fondamental de la mécanique des fluides qui décrit le comportement d'un fluide incompressible en mouvement.

Première théorème de Bernoulli

Le premier théorème de Bernoulli est un cas particulier du théorème général de Bernoulli, qui s'applique spécifiquement aux écoulements d'un fluide incompressible et idéal (sans viscosité) dans conditions particulières.

Cela peut se formuler par l'équation:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = C \tag{1.16}$$

- P est la pression statique du fluide.
- ρ est la densité du fluide.
- v est la vitesse du fluide.
- g est l'accélération due à la gravité.
- h est la hauteur (altitude) du fluide par rapport à un niveau de référence.
- C est une constante qui dépend des conditions initiales du fluide et du système.

Deuxième théorème de Bernoulli

Le deuxième théorème de Bernoulli est souvent associé à une extension du premier théorème, mais il est également parfois présenté comme un principe distinct dans la contexte des écoulements de fluides compressibles.

Cela peut être formulé par l'équation suivante:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + W = \text{constante} \quad (1.17)$$

- W est représenté le travail par unité de volume effectué par une force externe (comme une pompe ou un moteur).

1.5.5 Équation de continuité

L'équation de continuité est un principe fondamental de la mécanique des fluides qui exprime la conservation de la masse dans un écoulement fluide. Soit une partie d'un fluide de masse volumique ρ délimitée par une surface fermée S (de volumique V) et dS un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée. La partie de fluide a une masse $m = \iiint_V \rho dV$. Le débit massique sortant de la surface S est égal à $\iint_S \rho \vec{u} dS$. La conservation de la masse s'écrit:

$$\frac{dm_s}{dt} - \iint_S \rho \vec{u} dS = m = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.18)$$

1.5.6 Les équations de Stokes

Les équations de Stokes sont une simplification des *équations de Navier-Stokes* qui décrivent l'écoulement des fluides visqueux à faible nombre de Reynolds (ou les effets visqueux dominant sur les effets inertiels). Elles sont particulièrement utiles pour modéliser les écoulements, comme ceux des microfluides ou des objets en mouvement dans un fluide très visqueux. L'équation de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

En négligeant dans l'équation de Navier-Stokes incompressible stationnaire les termes proportionnels à la masse volumique du fluide $(u \cdot \nabla)u$, on obtient l'équation de Stokes:

$$\begin{cases} -v\Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

1.6 Transformation de Schwarz-Christoffel

On considère un polygone, ayant pour sommets A_1, A_2, \dots, A_n et pour angle intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Soit A_1, A_2, \dots, A_n les points correspondant respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel. Transformation de Schwarz-Christoffel, transforme l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan.

La transformation est donnée par:

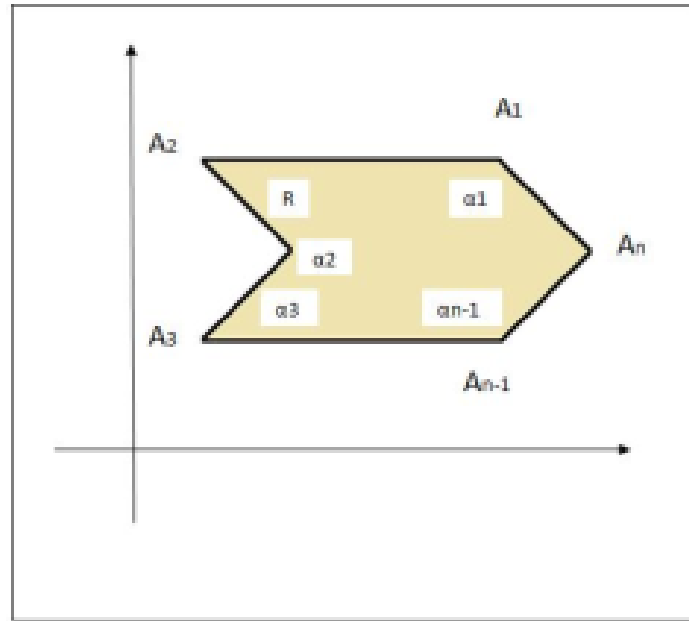
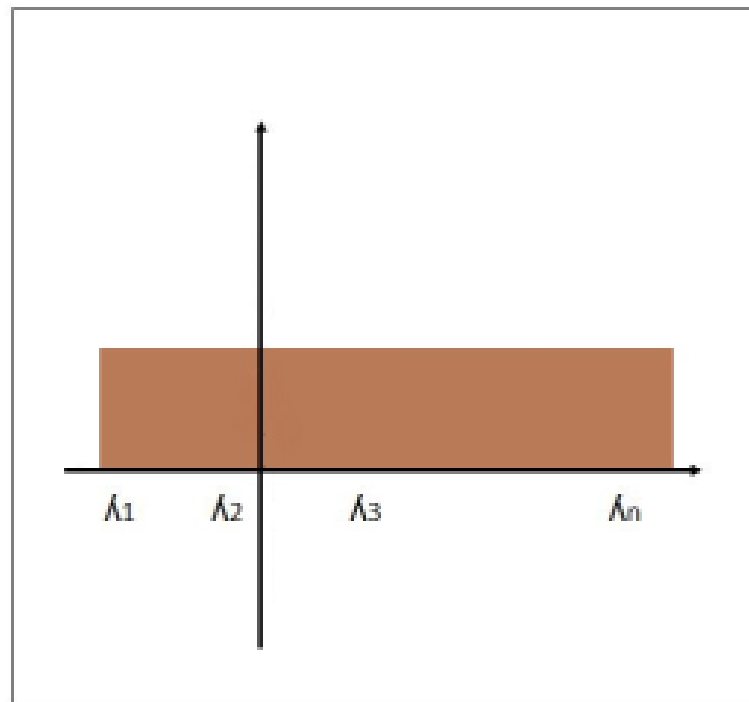
$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \quad (1.21)$$

ou bien

$$\Omega = \alpha \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} + \beta \quad (1.22)$$

ou α et β sont des constantes complexes. On notera que:

1. Parmi les points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ on peut choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes α et β déterminent l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple λ_n , à l'infini, cas dans lequel facteur de (1.22) n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme limités de polygone.

FIGURE 3.2.1 : Plan de Ω FIGURE 3.2.2 : Plan de variable λ

1.7 Utilisation de la théorie de la variable complexe

L'analyse complexe est un outil puissant en mécanique des fluides, en particulier dans l'étude des écoulements bidimensionnels incompressibles et irrotationnel. Elle permet de simplifier la résolution des équations de Navier-Stokes dans certains cas et d'analyser les écoulements potentiels.

Ces deux fonctions forment une fonction analytique $F(z)$, la fonction potentielle $\phi(x, y)$, la fonction de courant $\psi(x, y)$ appelée fonction complexe d'écoulement:

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.23)$$

Les fonctions ϕ et ψ doivent satisfaire les *équations de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.24)$$

Le *champ de vitesse* $V = (u, v)$ peut être obtenu à partir de $F(z)$:

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = u - iv \quad (1.25)$$

$$* \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{composante horizontale de la vitesse})$$

$$* \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{composante verticale de la vitesse})$$

1.8 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est une technique qui interprète les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu. Il est utilisé particulièrement en physique, en chimie et en ingénierie. Elle est utile également pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses.

L'analyse dimensionnelle repose sur le fait que ne peuvent être comparées que des grandeurs ayant la même dimension: il est possible de comparer deux longueurs entre elles, mais pas une longueur et une masse entre elles par exemple. Mathématiquement, cette assertion est fondée sur le théorème de Vaschy-Buckingham.

1.8.1 Théorème de π ou théorème de Vaschy-Buckingham

Le théorème de Vaschy-Buckingham est fondamental dans la théorie de la similitude. Il permet de dire combien des nombres sans dimension indépendants peuvent être construits dans un problème physique qui implique n variables. Son énoncé est un peu technique et sa mise en œuvre laisse croire qu'il s'agit d'une procédure mathématique qu'il suffit d'appliquer méthodiquement. En fait, son utilisation à l'aveugle peut conduire à de graves erreurs et il faut de la pratique pour éviter les nombreux pièges.

Son application est relativement aisée quand on a déjà une idée du résultat, c'est-à-dire de la nature des nombres adimensionnels qui peuvent jouer un rôle dans le problème étudié. Soit un phénomène physique comprenant n variables, dont les dimensions des quelles interviennent p grandeurs fondamentales.

L'équation

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1.26)$$

qui régit le phénomène peut s'écrire sous forme:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0 \quad (1.27)$$

avec $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}$ sont des grandeurs sans dimensions physique indépendantes. Il y a une série de termes π possible.

Certains termes π sont particulièrement intéressant à mettre en évidence.

- Rapport de deux grandeurs physique de même espèce ($d/D, \varepsilon/detc...$).
- Certain produit sans dimension (nombre de Froude F , nombre de Reynolds \mathfrak{R} , nombre de Match M).

Alors, on peut écrire comme suit:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, w_1, w_2, \dots) = 0$$

π : produit sans dimension ($\mathfrak{R}, F, M, \dots$).

w : rapport de deux grandeurs physiques de même espèce.

1.8.2 Nombre de Weber[16]

Le nombre de Weber (α) est une grandeur adimensionnelle utilisée en mécanique des fluides pour caractériser le rapport entre les forces d'inertie et les forces de tension de surface dans un écoulement fluide. Il est défini par :

$$\alpha = \frac{\rho U^2 H}{T} \quad (1.28)$$

- Le nombre de Weber est particulièrement important pour déterminer l'effet de la tension de surface sur un écoulement fluide.

1.8.3 Remarques

- **Cas $\alpha \gg 1$:** dominance de l'inertie.
 - Les forces d'inertie dominent largement la tension de surface.
 - Les gouttes ou les jets de fluide sont instables et se fragmentent facilement.
 - **Exemple:** pulvérisation d'un liquide à haute vitesse (ex: carburant dans un moteur).
- **Cas $\alpha \ll 1$:** dominance de la tension de surface.
 - La tension de surface est prédominante et maintient des formes stables.
 - Les gouttes restent bien définies et ne se fragmentent pas.
 - **Exemple:** formation de gouttelettes sur une surface solide.
- **Cas $\alpha \approx 1$:** équilibre des forces.
 - Les forces d'inertie et de tension de surface sont du même ordre de grandeur.
 - Le fluide peut présenter des instabilités modérées, et la fragmentation dépendra des conditions spécifiques.
 - **Exemple:** écoulement capillaire dans des micro-canaux.

ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA TENSION SUPERFICIELLE ET L'ANGLE D'INCLINATION SUR UN ÉCOULEMENT POTENTIEL

Dans ce chapitre, nous étudions les effets des forces de la tension de surface et l'angle d'inclination de l'obstacle sur la forme de la surface libre. La technique de troncature de la série est appliquée pour calculer la solution approchée pour différentes valeurs de nombre de Weber.

Ce chapitre contient:

- Position du problème
- Formulation du problème
- Résolution Numérique

2.1 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux, devant une barre inclinée forme un angle $0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ avec l'axe (oy) qui termine par une sortie d'une forme d'orifice hauteur H . L'effet de la tension superficielle est pris en considération mais les forces de la gravité sont négligées.

On suppose que: $x \rightarrow +\infty$, l'écoulement est uniforme avec une vitesse potentiel U . la ligne de courant de l'écoulement est caractérisée par la surface libre BC (Figure 2.1).

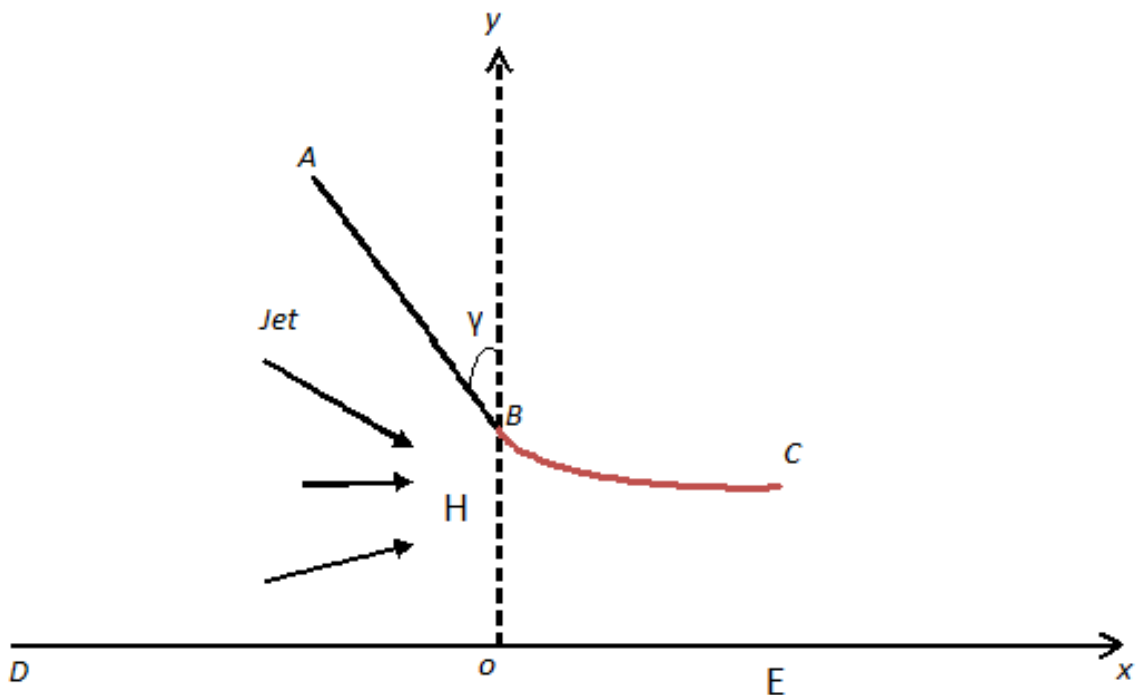


Figure 2.1: figure d'écoulement dans plan z

2.2 Formulation du problème

On définit la variable complexe $z = x + iy$. La vitesse complexe conjuguée est donnée par $\xi = u - iv$ où u et v sont respectivement les composantes de la vitesse du fluide, et par $f = \phi + i\psi$ la complexe fonction potentiel, où ϕ et ψ indiquent respectivement la fonction de potentiel et la fonction de courant.

On choisit $\phi = 0$ au point $B(x, y) = (0, H)$ et $\psi = -1$ sur la ligne de courant BC , il en résulte que $\psi = UH$, $\psi = -UH$ sur la ligne de courant BC .

Dans ces conditions, l'équation de Bernoulli sur la surface libre est donnée par:

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{\rho} = \text{const} \quad (2.1)$$

Avec:

P est la pression du fluide

ρ : la masse volumique du fluide

$q = \sqrt{u^2 + v^2}$ indique le module de la vitesse.

Just au-dessus de la surface libre, nous considérons P_0 est constante. Ainsi, la constante dans le deuxième membre (le membre à droite) de l'équation (2.1) est évaluée loin en amont et est donnée par:

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P_0}{\rho} = \text{const} \quad , \text{on } BC \quad (2.2)$$

La formule de Laplace donne la relation entre P et P_0 comme:

$$P - P_0 = -TK \quad (2.3)$$

Où K est la courbure de la surface libre et T est tension superficielle. Et par substitution (2.3) dans (2.2), nous obtenons:

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{T}{\rho}K = \frac{1}{2}U^2 \quad (2.4)$$

Nous introduisons les variables sans dimension en prenant H comme unité de longueur et U comme unité de vitesse. Les variables sans dimension sont donnée par:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad Q = \frac{q}{U}, \quad K = H.R., \quad const = \frac{y_c}{H} \quad (2.5)$$

La fonction potentielle complexe dimensionnelle et la vitesse complexe données par:

$$f = \phi + i\psi \quad \text{et} \quad \xi = \frac{df}{dz} = u - iv.$$

Par conséquent

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

ϕ est la fonction potentielle dimensionnelle, ψ est la fonction de ligne de courant (figure 2.2).

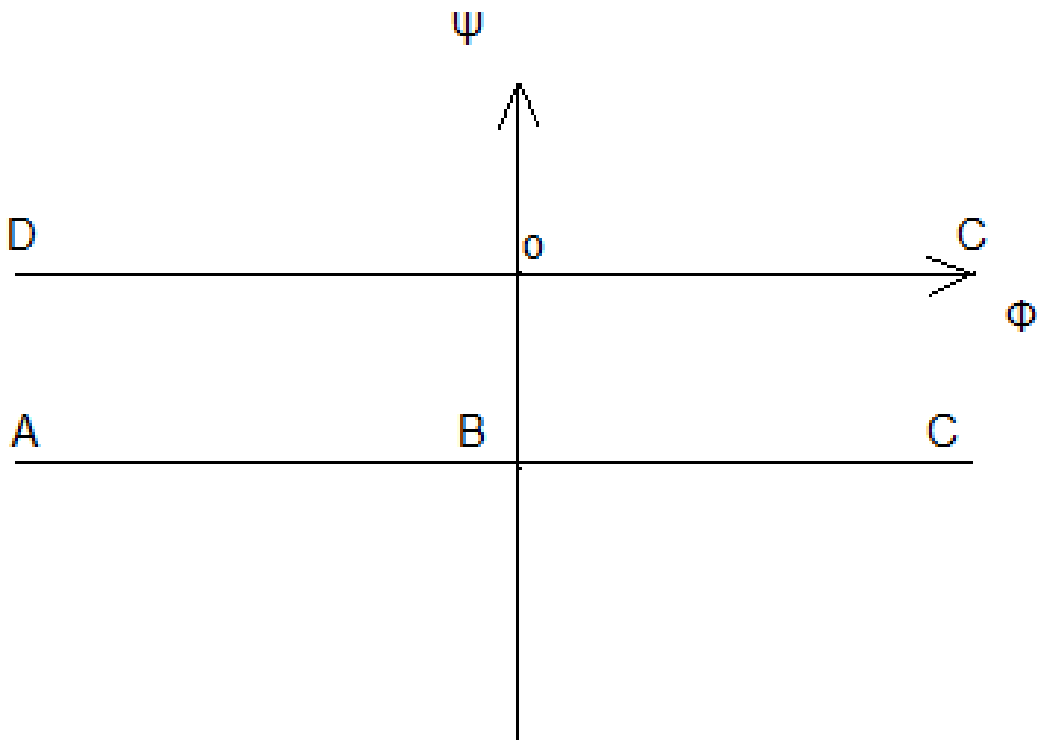


Figure 2.2: Écoulement potentiel dans le plan potentiel f

Sous la forme dimensionnelle, l'équation de Bernoulli(2.4) devient

$$q^2 - \frac{2}{\alpha}K = 1. \quad (2.6)$$

avec α le nombre de Weber défini dans (1.28).

Alors le problème d'écoulement considéré dans ce travail sera formulé comme un problème aux limites par rapport à la fonction potentielle $\phi(x, y)$, comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{dans la domaine de l'écoulement.} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0 & \text{sur la frontière rigide.} \\ q^2 - \frac{2}{\alpha}K = 1 & \text{sur la surface libre} \\ \phi(0, 0) = 0 & \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Résoudre le problème sous cette forme est très difficile, d'autant plus que la condition limite non linéaire est spécifiée sur une frontière inconnue (la surface libre).

Au lieu de résoudre le problème sous sa forme d'équation aux dérivées partielles en ϕ , nous tirons parti de la propriété que pour l'écoulement potentiel bidimensionnel et si le plan dans lequel l'écoulement est identifié au plan complexe, la vitesse complexe $\xi = u - iv$ et la fonction potentielle complexe $f = \phi + i\psi$ sont des fonctions analytiques de la variable complexe $z = x + iy$.

Par conséquent, nous utilisons toutes les propriétés nécessaires des fonctions analytiques d'une variable complexe : (formulation intégrale, transformation conforme).

comme la fonction $(u - iv)$ est analytique, on peut définir la fonction $(\tau - i\theta)$ par la relation suit:

$$\xi = u - iv = \tau - i\theta \quad (2.8)$$

avec θ est l'angle entre le vecteur de trajectoire et l'horizontale.

Par conséquent, l'équation (2.5) devient:

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}q \left| \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \right| = \frac{1}{2} \quad , \text{on } BC \quad (2.9)$$

On sait que $\theta(\phi)$ est une fonction croissante lorsque $-\infty < \phi < +\infty$ sur le surfaces libre BC .

L'équation de Bernoulli dans le plan f s'écrit:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{2}{\alpha}(e^\tau - e^{-\tau}) \quad , \text{on } ABC \quad (2.10)$$

Avec les conditions

$$\begin{cases} |Re(\xi)/Im(\xi)| = -\cos \gamma, & \psi = 0 & \text{on } DO \\ Im(\xi) = 0 & \psi = -1, & \text{on } OC \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce problème mathématique consiste à déterminer la fonction $\tau - i\theta$ qui est analytique dans la bande $-1 < \psi < 0$ qui vérifie les conditions (2.10) et (2.11).

2.3 Résolution Numérique

Dans cette étape, nous avons utilisé la transformation de Schwartz-Christoffel, où la bande $-1 < \phi < 0$ est transformée dans le plan f (Figure 2.2) en un disque d'unité dans le plan t (Figure 2.3) par la transformation:

$$f = \frac{2}{\pi} \log \left(\frac{-2it}{1-t^2} \right) \quad (2.12)$$

Les points	la variable complexe t
A	$t = 0$
B	$t = i$
C	$t = 1$
D	$t = 0$

Les points de la surface libre dans le plan t (Figure 2.3) sont donnés par:

$$t = |t|e^{i\sigma} = e^{i\sigma}, 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{on } ABC \quad (2.13)$$

Et dans le le plan f :

$$f = \phi, \quad \phi \geq 0, \text{on } BC$$

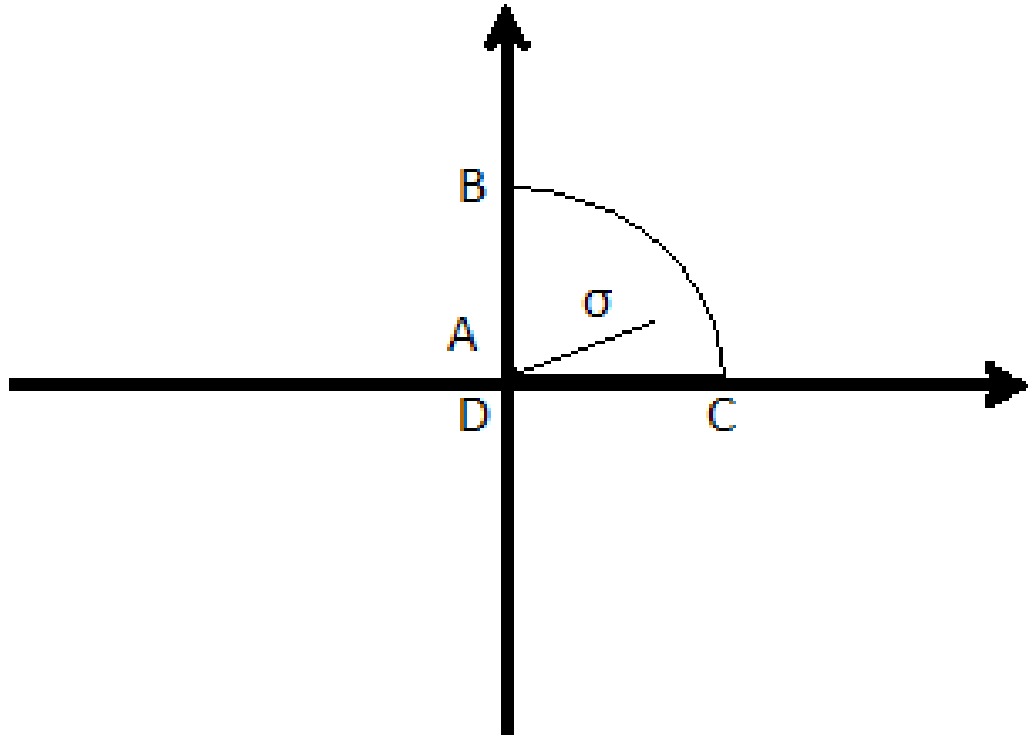


Figure 2.3: Écoulement dans le plan t

Pour résoudre le problème, on écrit l'équation (2.10) dans le plan t . Pour cela, on évalue $\frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ dans la figure (2.3).

En substituant (2.13) dans l'équation (2.12) on trouve:

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log \left(\frac{-2ie^{i\sigma}}{1 - e^{i\sigma}} \right) = \frac{2}{\pi} \log \left(\frac{1}{\sin \sigma} \right)$$

Ce qui implique que

$$df = d\phi = \frac{2}{\pi} \cot \sigma d\sigma$$

D'où

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = -\frac{2}{\pi} \tan \sigma$$

D'autre part, on a sur la surface libre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} &= \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \\ &= -\frac{2}{\pi} \tan \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

On écrit l'équation de Bernoulli dans le plan f comme suit:

$$e^{2\tau} + \frac{2}{\pi} e^{\tau} \tan \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 1 \quad \text{on } BC \quad (2.14)$$

2.3.1 Comportement de la vitesse au voisinage des points critiques

La configuration de l'écoulement dans le plan z au point $w_B = b$, or l'écoulement au voisinage est un écoulement dans un angle γ , dont la fonction complexe f est donnée par:

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{1}{\pi - \beta} \log(z) \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \arg z < \gamma \\ &\sim \frac{1}{\pi - (\frac{\pi}{2} + \gamma)} \log(z) \\ &\sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \gamma} \log(z) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$z \sim e^{(\frac{\pi}{2} - \gamma)f} \quad \text{lorsque } \phi \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad 0 < \psi < 1$$

En utilisant la transformation (2.12). Cette condition devient:

$$\xi = O(t)^{1 - \frac{2\gamma}{\pi}} \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

2.3.2 Formulation de la série

on prend la fonction $\xi(t)$ ce la forme:

$$\xi(t) = w(t)\Omega(t)$$

avec $w(t)$ ces la fonction qui contient les singularités et les zéros de ξ , et la fonction $\Omega(t)$ une fonction analytique cu écris de forme un série c'est-à-dire le comportement local de l'écoulement au voisinage au point singulier $w_B = b$, telle que:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= w(t) \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \right) \\ &= (t)^{1 - \frac{2\gamma}{\pi}} \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Où:

• a_k : sont des coefficients des réelles à déterminer.

En utilisant les conditions aux limites (2.11), l'équation (2.17) devient:

$$e^{\tau-i\theta} = t^{1-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{2n}\right) \quad (2.17)$$

Où les a_n est de constante réelle à déterminer.

L'équation (2.17) vérifie toutes les conditions aux limites

$$e^{2\tau} + \frac{2}{\pi} e^{\tau} \tan \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 1 \quad \text{on } BC$$

sauf la condition de Bernoulli (2.14). On détermine a_n de sorte que cette dernière soit vérifiée.

Après des simplifications on trouve:

$$\xi(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\sigma) + i\left(1 - \frac{2\gamma}{\pi}\right)\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n\sigma)\right) \quad (2.18)$$

Donc

$$\theta(\sigma) = -\left(\sigma - \frac{2\gamma}{\pi}\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n\sigma)\right) \quad (2.19)$$

et

$$\tau(\sigma) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\sigma)\right) \quad (2.20)$$

En substituant (2.19) et (2.20) dans l'équation (2.14) on trouve:

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos(2n\sigma)\right) - \frac{\pi}{2\alpha} \tan(\sigma) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\sigma)\right) \\ \left(1 - \frac{2\gamma}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos(2n\sigma)\right) = 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pour déterminer les coefficients a_n et l'angle γ , nous tronquons la série après N termes.

Ainsi, on introduit la discrétisation de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en N points:

$$\sigma_i = \frac{\pi}{N} \left(i - \frac{1}{2}\right), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.22)$$

Satisfaisant l'équation de Bernoulli en ces n points. On obtient un système de N équations à N inconnues a_n et l'angle γ .

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{n=1}^N 2a_n \cos(2n\sigma_i)\right) - \frac{\pi}{2\alpha} \tan(\sigma_i) \exp\left(\sum_{n=1}^N a_n \cos(2n\sigma_i)\right) \\ \left(1 - \frac{2\gamma}{\pi} + \sum_{n=1}^N 2a_n \cos(2n\sigma_i)\right) = 1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

DISCUSSION DES RÉSULTATS

3.1 Forme de la surface libre

Après avoir trouvé les coefficients a_n , la forme de la surface libre est déterminé comme suit:

De la relation

$$\frac{1}{u - iv} = \exp(-\tau + i\theta) = \frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} \quad (3.1)$$

Avec

$$dz = dx + idy = \exp(-\tau + i\theta)(d\phi + id\psi) \quad (3.2)$$

Où $\psi = 0$ sur la surface libre On a

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \sin \theta \end{cases} \quad (3.3)$$

Et

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.4)$$

On trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \exp(-\tau) \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \exp(-\tau) \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.5)$$

En substituant (2.19).(2.20) et $\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = -\frac{2}{\pi} \tan \sigma$ dans (3.5) on trouve:

$\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}$ en chaque point $\sigma_i, i = 1, \dots, N$

D'où

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_i) = \frac{2}{\pi} \tan(\sigma_i) \exp\left(\sum_{n=1}^N 2a_n \cos(2(n-1)\sigma_i)\right) \cos\left(\sigma_i - \frac{2\gamma}{\pi}\sigma_i + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n\sigma_i)\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_i) = \frac{2}{\pi} \tan(\sigma_i) \exp\left(\sum_{n=1}^N 2a_n \cos(2(n-1)\sigma_i)\right) \sin\left(\sigma_i - \frac{2\gamma}{\pi}\sigma_i + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n\sigma_i)\right) \end{cases} \quad (3.6)$$

$i = 1, \dots, N$

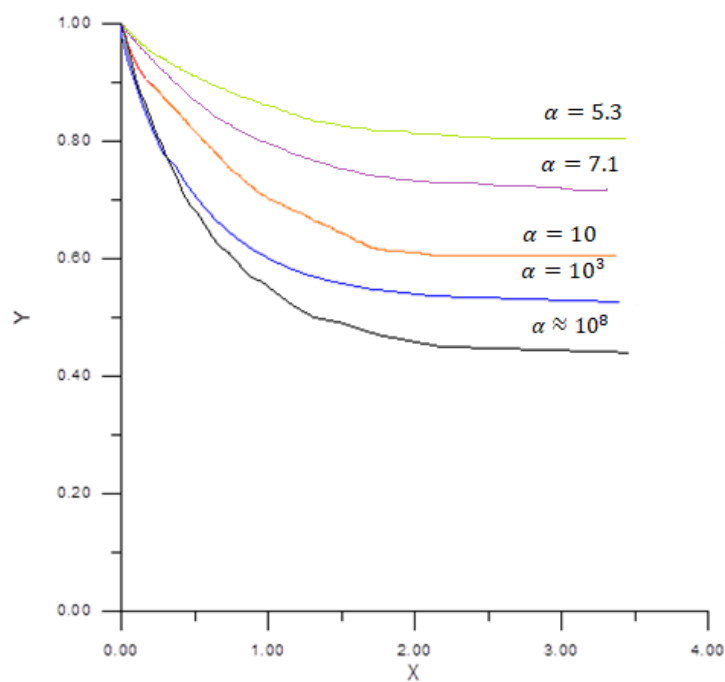


Figure 3.1: Les formes de surfaces libres pour différentes valeurs du nombre de Weber α avec $\gamma = \frac{\pi}{4}$

3.2 Discussions des résultats

La technique de troncation de la série utilisée dans le chapitre précédent, montre que si la tension de surface est apparait dans la condition de la surface libre, alors il existe une valeur α^* de nombre de Weber appelle valeur critique, telle pour tout $\alpha \geq \alpha^*$ pour chaque angle d'inclinaison, où en peut calculer la solution approchée de notre problème (forme de la surface libre).

Les tableaux (3.1) et (3.2), présentent une comparaison entre les coefficients de la série 2.16 et celles de la série convergente $\sum_{i=0}^n (\frac{3}{4})^n$ pour l'angle $\gamma = \frac{\pi}{4}$ et nombre de Weber $\alpha \gg 10^8$ une fois, et $\alpha = 10$ une notre fois.

On remarque que : si n croit les a_n décroissent rapidement, et aussi la série $\sum_n a_n t^{2n}$ est absolument convergente car:

$$\sum_n |a_n t^{2n}| \leq \sum_n |a_n| \leq \sum_n |(\frac{3}{4})^n|$$

La figure (3.1) donne les courbes de la forme de la surface libre pour des différentes valeurs de nombre de Weber $5.3 \leq \alpha < \infty$, on remarque aussi que si $\alpha \rightarrow \infty$ ces courbes se rapprochent qui confirme la convergence de la méthode de résolution utilisée.

Le table (3.4) fournit des exemples de valeurs des coefficients a_n . On constate que ces coefficients décroissent, ce qui indique un comportement bien posé de la solution.

Cependant, lorsque $\alpha < 5.3$, notre méthode numérique diverge. On remarque que des ondes capillaires commencent à apparaître sur la surface libre pour de telles valeurs.

n	a_n	$(\frac{3}{4})^n$
1	4.9540×10^{-9}	7.5000×10^{-1}
2	-3.3038×10^{-9}	5.6250×10^{-1}
3	-6.5878×10^{-10}	4.2187×10^{-1}
4	-2.8280×10^{-10}	3.1640×10^{-1}
5	-1.5660×10^{-10}	2.3730×10^{-1}
6	-9.9716×10^{-11}	1.7797×10^{-1}
7	-6.8764×10^{-11}	1.3348×10^{-1}
8	-5.0419×10^{-11}	1.0011×10^{-1}
9	-3.8378×10^{-11}	7.5084×10^{-2}
10	-3.0269×10^{-11}	5.6313×10^{-2}

Table 3.1: $\alpha \rightarrow \infty$ et $\gamma = \frac{\pi}{4}$

n	a_n	$(\frac{3}{4})^n$
1	5.2336×10^{-2}	7.5000×10^{-1}
2	-3.9300×10^{-2}	5.6250×10^{-1}
3	-5.1842×10^{-3}	4.2187×10^{-1}
4	-2.4086×10^{-3}	3.1640×10^{-1}
5	-1.4729×10^{-3}	2.3730×10^{-1}
6	-7.3162×10^{-4}	1.7797×10^{-1}
7	-4.3493×10^{-4}	1.3348×10^{-1}
8	-3.6572×10^{-4}	1.0011×10^{-1}
9	-3.4404×10^{-4}	7.5084×10^{-2}
10	-3.0946×10^{-4}	5.6313×10^{-2}

Table 3.2: $\alpha = 10$ et $\gamma = \frac{\pi}{4}$

n	a_n	$(\frac{3}{4})^n$
1	2.8303×10^{-1}	7.5000×10^{-1}
2	-4.1381×10^{-1}	5.6250×10^{-1}
3	1.1967×10^{-1}	4.2187×10^{-1}
4	-1.0148×10^{-1}	3.1640×10^{-1}
5	7.9200×10^{-2}	2.3730×10^{-1}
6	-5.2972×10^{-2}	1.7797×10^{-1}
7	4.2875×10^{-2}	1.3348×10^{-1}
8	-2.5477×10^{-2}	1.0011×10^{-1}
9	1.5488×10^{-2}	7.5084×10^{-2}
10	-9.4611×10^{-2}	5.6313×10^{-2}

Table 3.3: $\alpha = 5.5$ et $\gamma = \frac{\pi}{4}$

a	a_1	a_{20}	a_{40}	a_{60}
30	0.7972×10^{-1}	0.6997×10^{-4}	0.3167×10^{-5}	0.1053×10^{-5}
$\alpha \rightarrow \infty$	0.6264×10^{-8}	0.3123×10^{-15}	0.9756×10^{-16}	0.1275×10^{-16}

Table 3.4: Quelques valeurs des coefficients a_n pour différentes valeurs d'angles $\gamma = \frac{\pi}{3}$

3.3 Application de logiciel: Fluent

En utilisant le code Fluent-Gambit, on a essayé d'analyser notre problème décrit dans le chapitre précédent pour présenter plus clairement la forme de la surface libre et aussi pour connaître quelques propriétés (Pression, fonction de courant,...) étudié à l'intérieur du canal.

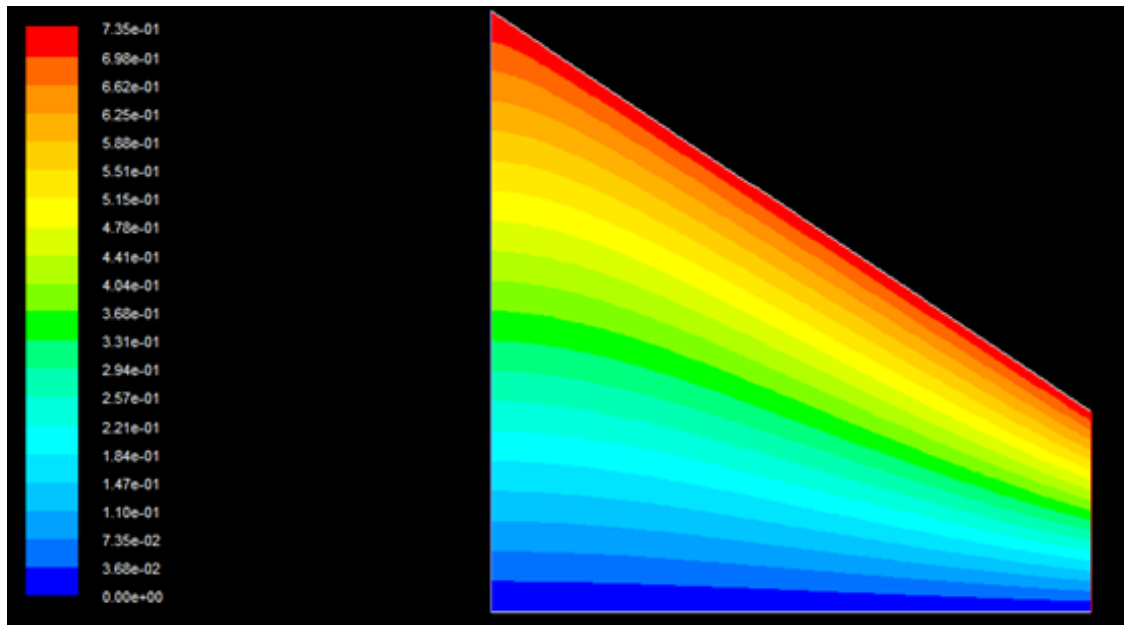


Figure 3.2: Contour de la fonction de courant

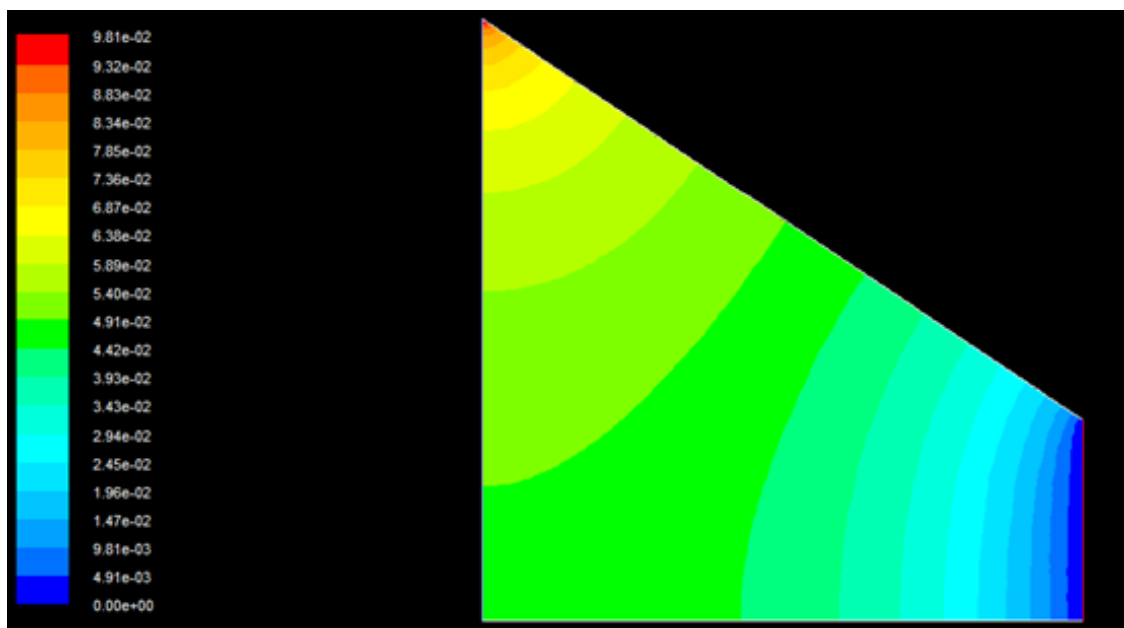


Figure 3.3: La pression statique

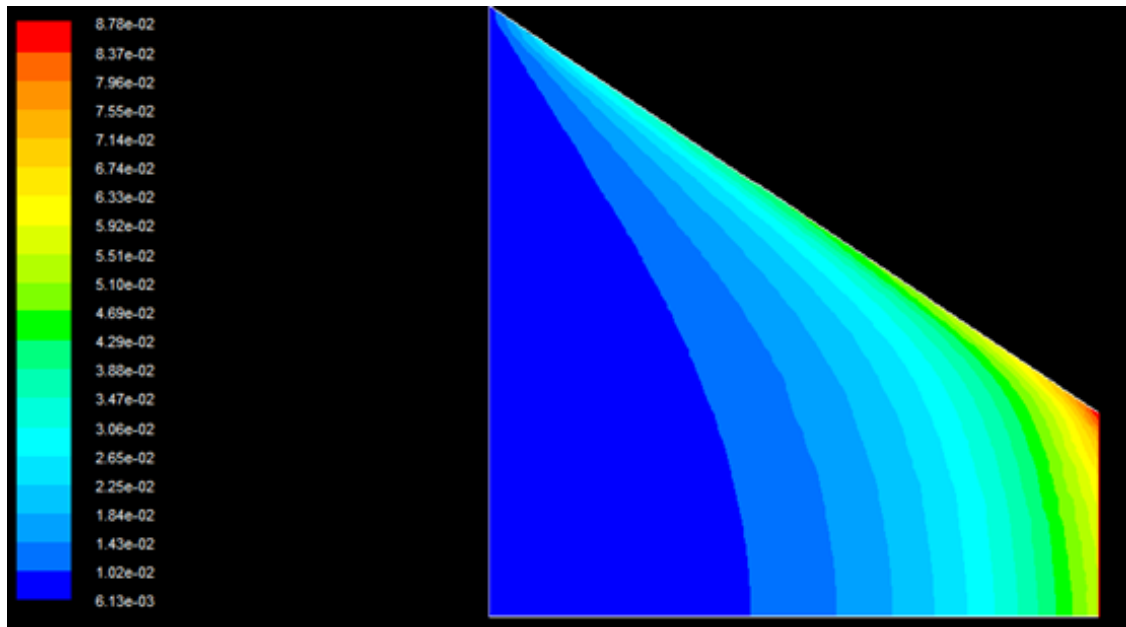


Figure 3.4: Pression dynamique

CONCLUSION

Les problèmes des écoulements de type jet apparaissent dans de nombreuses situations d'intérêt pratique: Les problèmes liés à l'industrie tel que les chambres des combustions des moteurs, les pompes à jet, ou bien ceux en relation avec l'urbanisme comme l'architecture des barrages. Ces problèmes deviennent très difficiles à résoudre explicitement, surtout si on prend en considération les effets de la tension de surface, de gravité ou de viscosité, car ces derniers ont une grande influence sur la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre.

Dans ce travail, on se propose d'étudier numériquement l'effet et de la tension superficielle et l'angle d'inclinaison de l'obstacle sur la forme de la surface libre d'un écoulement potentiel bidimensionnel, le fluide est supposé non visqueux et incompressible et l'écoulement est irrotationnel.

Les résultats aboutis, nous ont montré que la solution numérique du problèmes existe pour des différentes valeurs du paramètre nommé le nombre de Weber $\alpha \geq \alpha^* = 5.3$ valeurs critique.

On peut dire que la méthode de troncation de la série appliquée dans ce chapitre est efficace pour la détermination de la solution approchée dans le cas où le terme non linéaire apparaisse dans l'équation de Bernoulli.

Notre perspective concerne l'application de cette méthode dans des recherche basé sur la modélisation tridimensionnelle, aussi réalisation d'expériences pratiques pour valider les résultats numériques et extension du modèle à des fluides visqueux ou non newtoniens.

ANNEXE

- **Application du nombre de Weber**

- * *Aérodynamiques et pulvérisation des fluides:*

- Dans les moteurs à réaction et les moteurs à combustion le carburant est pulvérisé en gouttelettes fines.

- Un nombre de Weber élevé assure une bonne atomisation du combustion et le rendement énergétique.

- * *formation des gouttes et jets liquides:*

- Dans les imprimantes à jet d'encre, le nombre de Weber contrôle la formation et la stabilités des gouttelettes.

- un α trop bas empêche la formation des gouttes, tandis qu'un α trop élevé entraine une pulvérisation incontrôlée.

- * *Dynamique de vagues et des interfaces:*

- Dans les océans et les rivières, le nombre de Weber influence la formation des vagues et la stabilité des interfaces entre différents fluide (ex: pétrole et eau).

- Dans les mousses et les émulsion, un faible α stabilise les bulles et gouttelettes.

- * *Micro-fluidique et biotechnologie:*

- Dans les élaborations sur puce (Lab-on-a-chip), α est essentiel pour contrôler le mouvement des fluides dans des canaux microscopiques.

- En biotechnologie, il influence la dispersion des cellules et des biomolécules dans les fluides.

avec:

$$E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \Big|_{X=X^*} \quad \text{pour } i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

Et

$$\Delta X_j^{(k)} = x_j^* - x_j^{(k)} \quad \text{et} \quad F_i^k = -f_i(X^{(k)}).$$

L'équation (3.8) est un système linéaire, où toutes les quantités sont connues sauf les ΔX^k . En utilisant la méthode de Jordan avec stratégie du pivot total implicite pour déterminer ΔX^k dont on présentera dans la suite son algorithme ΔX^k est l'estime de l'erreur commise en approximant X^* par X^k .

On peut donc obtenir un meilleur estimé $X^{(k+1)}$ de X^* par:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X_j^{(k)}$$

On continue jusqu'à:

$$|f(X^{(k+1)})| < \varepsilon$$

- Code numérique pour le problème du chapitre

```
clc;
```

```
clear;
```

```
*****
```

Paramètres initiaux

```
N = 10; Nombre de termes dans la série
```

```
alpha = 108; Liste des nombres de Weber a comparer
```

```
sigma = linspace(pi/(4 * N), pi/2 - pi/(4 * N), N)'; Points de discrétisation
```

```
tan_sigma = tan(sigma);
```

```
cos2ns = cos((2*(1:N))' * sigma'); Matrice (N x N)
```

```
*****
```

Fonction du système non linéaire

```
F = @(x)arrayfun(@(i) - exp(2 * sum(x(1 : N))' * cos(2 * (1 : N) * sigma(i)))) - (pi/(2 *  
alpha)) * tan_sigma(i) * exp(sum(x(1 : N))' * cos(2 * (1 : N) * sigma(i))) * (1 - 2 * x(end)/pi +  
2 * sum(x(1 : N))' * cos(2 * (1 : N) * sigma(i))) - 1, 1 : N)';
```

```
*****
```

Initial guess pour les coefficients a1..aN et gamma

```
x0 = zeros(N + 1, 1); les N premiers sont an, le dernier est gamma
```

```
*****
```

Résolution avec fsolve

```
options = optimoptions('Display','iter','FunctionTolerance',1e-10);
```

```
x_sol = fsolve(F, x0);
```

```
an = x_sol(1 : N)
```

```
gamma = x_sol(end);
```

```
*****
```

Recalculer

```
tau = cos2ns' * an;
```

```
theta = -((1 - 2 * gamma/pi) * sigma + (sin((2 * (1 : N))' * sigma)' * an));
```

```
*****
```

Calcul

```
xi = exp(tau + 1i * theta);
```

```
*****
```

Intégration (Euler) pour calculer X, Y

```
dsigma = sigma(2) - sigma(1);
```

```
X = zeros(N, 1); Y = zeros(N, 1);
```

```
*****
```

```
for i = 2 : N
```

```
dZ = 1./xi(i - 1);
```

```
X(i) = X(i - 1) + real(dZ) * dsigma;  
Y(i) = Y(i - 1) + imag(dZ) * dsigma;  
end
```

```
*****
```

Affichage des résultats

```
figure  
plot(X, Y,'LineWidth',2)  
xlabel('X'); ylabel('Y');  
title(['?coulement potentiel - alpha = ' num2str(alpha) ', gamma = ' num2str(gamma)])  
grid on  
axis equal
```

Bibliography

- [1] A. Amara et A. Gasmi, The effet of surface tension on the jet flow in U-shaped channel, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. **Vol. 118**, No. 3(2018), 625-635.
- [2] A. GASMI ,Numerical study of two-dimensional jet flow issuing from a funnel, *Adv. Appl. Math.*, **87**,(2014), pp. 161-169
- [3] A.Gasmi,, H. Mekias, .The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet,*J. Phys. A: Math. Gen*,(2003) ,851-862.
- [4] B. J. Binder, J. M. Vander Broeck et F. Dias, On satisfying the radiation condition in free-surface flows, *J .Fluid Mech*, **624**, (1986), 179-189.
- [5] B. Bouderah et H. Mekias, A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom, *Kybernetes* 31, No. 2 (2002), 305-316.
- [6] B. Bouderah, A. Gasmi, et H. Serguine, Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow,*International Mathematical Forum*. **2**, (2007), no. 66, 3273 - 3277.
- [7] B. Bouderah et H. Mekias , "The effects of surface tension on a two dimensional free surface flow produced by a source, *Far East Journal of Applied Mathematics*,**4** , (2000) 159 - 170.
- [8] F.Toison, J. Hureau, .Potential ow issuing from a two dimensional curved nozzle. *Phys. Fluids*. **13(3)**, (2001), 793-798.
- [9] F.R. CHEDALA, A. AMARA and M. MEFTAH, Numerical and analytical calculations of the free surface flow between two semi-infinite straights, *J. Appl. Math. comput. Mech.*,**19**,(2020),pp.
- [10] G. Birkho , E.H. Zarantoello, *Jets, wakes and cavities*.NewYork.,(1957).
- [11] J.M. CHUANG, Numerical studies on non linear free surface flow using generalized Schwartz-Christoffel transformation, *Int. J. Numer. Methods. fluids.*, **32**,(2000), pp. 745-772

- [12] J.M. VANDEN-BROECK and A. DOAK, .Non linear two-dimensional free surface solutions of flow exiting a pipe and impacting a wedge, *J. Eng. Math.*, **126**, (2021), pp. 1431-1434
- [13] N.Bounab and B. Bouderah. Computing solution of the flow due to a Nozzle. I. J of computer application, **67(13)**, (2013), pp. 14-18
- [14] N. Bounab, Simulation numérique de quelques écoulements potentiels en 2D 'Curved nozzle', Thèse de Doctorat, Université de Mohamed Boudiaf M'sila, (2015).
- [15] Scott Tooley. The effects of surface tension on free surface flows intersecting rigid walls. A thesis submitted to the school of mathematics of the University of East Anglia for the degree of Doctor of philosophy ,July (2002)
- [16] T.Henri, L.John, .Mécanique des Fluides.
- [17] W.PENG and D.F.PARKER, An ideal fluid jet impinging on an uneven wall, *J. Fluid. Mech.*, **333**, (1997), pp.231-255

Abstract

The aim of this work is to numerically study the effect of both surface tension and the obstacle inclination angle on the shape of the free surface of a two-dimensional potential flow. The fluid is considered incompressible, inviscid, and irrotational. Gravitational forces are neglected, but surface tension is taken into account. The study is based on the use of the series truncation method for different values of Weber number and the obstacle inclination angle of the flow.

Key word

Weber number; Potential free surface; Truncation of the series;

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier numériquement l'effet de la tension superficielle et l'angle d'inclinaison de l'obstacle sur la forme de la surface libre d'un écoulement potentiel bidimensionnel. Le fluide est considéré incompressible, non visqueux et irrotationnel. Les forces de la gravité sont négligées mais la tension de surface est tenue en compte. L'étude est basée sur l'utilisation de la méthode de troncation de la série pour des différentes valeurs de nombre de Weber et de l'angle γ d'inclinaison de l'obstacle de l'écoulement.

Mots clés

Nombre de Weber; Potentiel; Surface libre; Troncation de la série;

المخلص:

هدف هذا العمل هو دراسة تأثير كل من التوتر السطحي و زاوية ميلان العائق عدديا على شكل السطح الحر لجريان محتمل ثنائي الأبعاد. يفترض ان المائع غير قابل للانضغاط، غير لزج وغير دوامي. كما يتم إهمال قوى الجاذبية، بينما يؤخذ التوتر السطحي بعين الاعتبار. تعتمد هذه الدراسة على استخدام طريقة تقليب السلسلة لمجموعة من القيم المختلفة لعدد ويبر و زاوية الميل γ الخاصة بالعائق المؤثر في الجريان.

الكلمات المفتاحية:

عدد ويبر ؛ تدفق كموني ؛ السطح الحر ؛ تقليب السلسلة ؛