Remerciements

Tout remerciement est du à dieu, et tout effort est à l'aide de dieu, grâce à dieu toutes les portes sont ouvertes, il nous a offert la volonté, et nous a éclairé toutes les chemins, et comme notre prophète que le salut soit sur lui.

Un grand merci à mon encadreur: Dr. A. Sengouga, qui est toujours à nos côtés pour nous consulter, et nous guider, durant toute la période de la préparation de cette recherche. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie les membres de jury, pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers; ma famille qui ont en un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci.

Table des matires

Introduction

Les équations aux dérivées partielles, notées en abrégé "EDP" dans la suite constituent une branche importante des mathématiques appliquées, elles sont utilisées dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes.

Les équations d'évolutions (hyperbolique, paraboliques,$\cdots$), i.e. les équations avec temps t en tant que variable indépendante, résultent non seulement de beaucoup de champs des mathématique, mais également d'autres branches de la science, telle que la physique, la mécaniques, et la science des matériaux,$\cdots$

L'équation d'onde, établie par D'Alembert en 1746, obtenue lors de l'étude des cordes vibrantes, relie les variations temporelles du déplacement transversal d'une corde vibrante, à ses variations dans l'espace par l'intermédiaire de la vitesse de propagation de l'onde.

Dans ce travail, on détaille deux article, l'article de Balazs [2], et l'article de Vesnitskii et Potapov [7]. Les deux articles ont comme bute de donner une solution exacte du problème oscillation, en dimension un, d'une corde un, avec une longueur variable que dépend de t, i.e. dire une corde ayant deux bordure: un fixe ($x = 0$), et l'autre variable ($x = \ell(t)$) ou les deux sont variable ($x = \ell_-(t)$) et ($x = \ell_+(t)$).

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on rappel sur la solution de D'Alembert, et séparation de variable, de l'équation d'onde dans un domaine fixe $0 < x < \ell$, puis quelques préliminaires sur les série de Fourier (simple et généralisé), et comment calculer les coefficients de la série. Dans le deuxième chapitre, on détaille le travail de Vesnitskii et Potapov, qui donne la solution exact de l'équation d'onde, dans un domaine, avec une frontière variable $0 < x < \ell(t)$, sous forme d'une série. En fin dans le dernier chapitre, on considère différents domaines $\ell_-(t) < x < \ell_+(t)$, comme dans le travail de Balazs, on obtient la solution dans deux cas. la première est donnée sous forme de série, lorsque la vitesse de variation du domaine est constante, $\ell(t) = vt$, v est une constante

$0 < v < 1$. La deuxième est plus simple, obtenue pour le cas $0 < x < \sqrt{t^2 + 1}$. Une conclusion et quelque références sont donnée a la fin du manuscrit.

Chapitre 1

Préliminaires sur l'équation d'onde

Dans ce chapitre, on rappel quelque résultats sur l'équation d'onde, dans un domaine fixe, et quelques notions sur les séries de Fourier.

1.1 L'équation d'onde en dimension un

On considérant une corde, en position horizontale, et de longueur l (de $x = 0$ à $x = l$) au repos tendue avec tension constante T, les point de cette corde peuvent se déplacer dans un plan vertical, on note ρ la densité massique de la corde, que l'on suppose et constante, on s'intéresse aux petits déplacements verticaux des points de la corde, comme l'aire la résistance sont négliges. On note $h(x,t)$ la déplacement vertical du point, d'abaisse x à l'instant t, après avoir appliquée le principe fondamental de la dynamique, voir [1], on obtient alors l'équation suivante $T\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x} - \rho\frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} = 0$ et pour $c = \left(\frac{T}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ on définie l'équation d'onde en dimension un

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} = c^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x}, \tag{1.1}$$

avec les conditions aux bornes

$$h(0,t) = h(l,t) = 0 \quad (t \geq 0), \tag{1.2}$$

et les conditions initiales

$$h(x,0) = \varphi(x)\ ,\ \frac{\partial h}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{1.3}$$

Remarque 1.1 *Soit φ et ψ deux fonction définies sur $\mathbb{R}$, si $\varphi \in C^2$ et $\psi \in C^1$. Alors le problème définies par l'équation (1.1) et les condition (1.2), (1.3) admet une solution unique, h de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$*

1.1.1 La formule de D'Alembert

Théorème 1.2 *La solution h du problème (1.1)-(1.2) -(1.3) est donnée par la formule de D'Alembert*

$$h(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct),$$

avec f et g sont des fonction à détermine. De plus

$$h(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds. \tag{1.4}$$

Démonstration. Nous utiliserons le changement de variable suivant:

$$\xi = x + ct \ , \quad \eta = x - ct,$$

on introduit la fonction:

$$H(\xi,\eta) = h(x,t).$$

Pour vérifier que H satisfait l'équation (1.1) on dérive H para port ξ et η deux fois on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= c^2 H_{\xi\xi} - 2c^2 H_{\xi\eta} + c^2 H_{\eta\eta}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= H_{\xi\xi} + 2H_{\xi\eta} + H_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'équation (1.1), alors:

$$H_{\xi\eta} = 0.$$

On intégrant, on déduit il existe deux fonction f et g telles que :

$$H(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

En revenant à l'inconnue originale h, nous obtenons:

$$h(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

Pour obtenir f et g nous utilisons les condition initiales:

$$\begin{cases} h(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int\limits_{0}^{x} \psi(s)ds + A. \end{cases}$$

d'ou nous tirons les identités:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x_0}^{x+ct} \psi(s)ds. \\ g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int\limits_{x_0}^{x-ct} \psi(s)ds. \end{cases}$$

expressions dont le résultat annoncé (1.4) se déduit en prenant la somme ■

Exemple 1.3 *Posons* $h(x,0) = \varphi(x) = \sin(x)$, $\frac{\partial h}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = 0$ *alors:*

$$h(x,t) = \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)),$$

Donc

$$h(x,t) = \sin(x)\cos(ct).$$

1.1.2 Domaine de dépendance et d'influence

La formule de D'Alembert (1.4) définie la valeur de h au point (x,t) et elle ne dépends que de la valeur de φ au points $x - ct$ et $x + ct$ et la valeur de ψ sur l'intervalle $[x - ct, x + ct]$. cette intervalle est nommée domaine de dépendance de (x,t). D'autres parts, la valeur de φ et ψ au point z influe sur la valeur de h au point (x,t) qui appartient au secteur

$$z - ct \leq x \leq z + ct,$$

qui est appelé domaine d'influence de z.

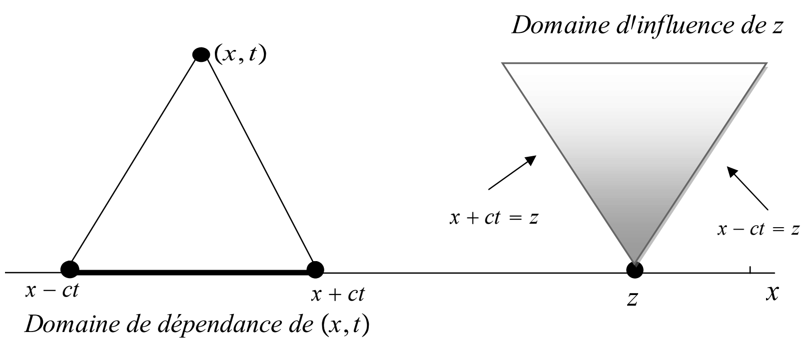

Figure 1.1: Domaine de dépendance et d'influence

1.1.3 Solution avec séparation de variables

La séparation des variables consiste à rechercher sur la solution de (1.1), (1.2), (1.3) qui prendraient la forme

$$h(x,t) = k(t)u(x),\ t > 0,\ x \in [0,l]\,, \tag{1.5}$$

En injectant formellement cette formule dans l'équation (1.1), on obtient:

$$k^{''}(t)u(x) \ = c^2 k(t)u^{''}(x),$$

Donc

$$\frac{u^{''}(x)}{u(x)} = c^2\frac{k^{''}(t)}{k(t)} = \lambda,$$

Nécessairement, on a alors

$$\begin{cases} u^{''}(x) = \lambda u(x) & x \in [0,l]\,, \\ u(0) = u(l) = 0, & \\ k^{''}(t) = \lambda c^2 k(t) & t > 0. \end{cases}$$

On cherche la solution pour $\lambda < 0$, $(\lambda = -\alpha^2)$

1. Pour l'équation

   $$u^{''}(x) + \alpha^2 u(x) = 0,$$

   On a $\Delta = (2\alpha i)^2 < 0$, donc la solution de ceci est donne par :

   $$u(x) = c_1\cos(\alpha x) + c_2\sin(\alpha x).$$

   On appliquant les condition aux bord on obtient:

   $$u_n = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \tag{1.6}$$

2. Pour l'équation

   $$k^{''}(t) + c^2\alpha^2 k(t) = 0,$$

   On a $\Delta = (2\alpha c i)^2 < 0$, donc la solution de ceci est donne par :

   $$k(t) = C_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + D_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right),$$

   On utilisant (1.6) et le principe de superposition des solutions on obtient la sérier:

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Calcule des coefficients A_n, B_n:

Pour calculer les coefficients A_n et B_n on utilise les condition initiales (1.3)

1. $h(x,0) = \varphi(x)$, alors:
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \varphi(x),$$
En multipliant ceci par $\sin(\frac{m\pi}{l}x)$ et intégrer sur l'intervalle $[0,l]$ nous obtenons:
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx = \int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx.$$
On peut vérifier que :
$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}. \tag{1.7}$$
Donc
$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

2. $\frac{\partial h}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, alors :
$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \psi(x),$$
En multiplie ceci par $\sin(\frac{m\pi}{l}x)$ et intégrer sur l'intervalle $[0,l]$, nous obtenons:
$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^l \frac{n\pi}{l}c\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx = \int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx,$$
et on utilisant (1.7), on obtient:
$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Remarque 1.4 *On peut considérer d'autres conditions aux bord, i.e. des conditions de Neumann, conditions mixtes,* $\cdots$.

1.2 Séries de Fourier

Nous allons étudier maintenant de façon approfondie les fonctions sin et cos, puisqu'elle peuvent constituer une base dans l'espace vectoriel $L^2(0,l)$, c'est à dire celui des fonctions de carré sommable définies sur l'intervalle $[0,l]$ voir [1],[5], [6]

Théorème 1.5 *Les fonctions*

$$1, \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \cdots, \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right), \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) \cdots$$

constituent une base orthogonale de $L^2\,(0,l)$

Ensuite, une fonction f quelconque de $L^2\,(0,l)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)\right\}. \tag{1.8}$$

et comme notre base est orthogonale, les coefficients a_n et b_n sont donnés par le produit scalaire de f par les éléments de la base:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^l f(x)dx,\; a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx$$

Soit:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left\{a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)\right\}$$

la somme partial de série Fourier de f, alors on a le théorème de convergence suivant

Théorème 1.6 *Soit f une fonction carré intégrable sur l'intervalle $[-l,l]$ on a:*

$$\lim_{N\to-\infty}\int_{-l}^{l}\left[S_N(x) - f(x)\right]^2 = 0.$$

Un autre résultat de convergence est le suivant:

Théorème 1.7 (de Dirichlet) *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T=2l$ satisfaisante aux condition suivantes:*

D1): f et f' sont continues par morceaux sur $[-\pi,\pi]$.

D2): f admet en tout point une dérivée à droit et une dérivée à gauche

Alors la série de Fourier associée à f est convergent et on a:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \begin{cases} f(x), & \textit{si } f \textit{ est continue en } x, \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \textit{si } f \textit{ est discontinue en } x. \end{cases}$$

de plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue

1.2.1 Séries de Fourier avec poids

Dans le chapitres suivants, on a besoin de considérer des série de Fourier dans un sens plus générale

Définition 1.8 *Soit* $\{\phi_n : n = 0, 1, \dots\}$ *une famille des fonctions continues dans une intervalle fini* $[0, l]$, *ou infini. On dit que sont orthogonale dans* $[0, l]$ *avec la fonction ne pas négatif* $r(x)$ *si:*

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_0^l r(x)\phi_m \phi_n dx = 0 \quad \forall m \neq n \qquad et \qquad \int_0^l r(x)\phi_n^2 dx \neq 0 \quad \forall n.$$

la fonction $r(x)$ *est nommé fonction poids.*

La famille $\{\phi_n : n = 0, 1, \dots\}$ dans $[0, l]$ avec la fonction poids est dite orthonormée si:

$$\int_0^l r(x)\phi_n^2 \, dx = 1 \quad \forall n.$$

1.2.2 Expansions en série de Fourier

On considère la base $\{e^1 \dots e^n\}$ (e^k la vecteur unité de $\mathbb{R}^n$), telle que $\forall u \in \mathbb{R}^n$ on choisit un unique constants $\alpha_1, \alpha_{2\dots,}\alpha_n$:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i.$$

Pour généraliser se résultats on suppose, l'ensemble $\{\phi_n : n = 0, 1, \dots\}$ est une famille orthogonale avec la fonction poids $r(x)$

Prenons d'abord une fonction $f(x)$ définit sur $[0, l]$ la sérier

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_n \phi_n(x). \tag{1.9}$$

est appelée série de Fourier généralisé de f.

Pour déterminer c_n on multiple (1.9) par $r(x)\phi_m(x)$ et intégrer sur $[\alpha, \beta]$ on obtient:

$$\int_0^l f(x)r(x)\phi_m(x)dx = \int_0^l \sum_{i=1}^n c_n \phi_n(x)r(x)\phi_m(x)dx,$$

alors

$$c_m \int_0^l r(x)\phi_m^2(x)dx = c_m \|\phi_m\|^2,$$

donc

$$c_n = \frac{\int\limits_0^l f(x)r(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n\|^2},$$

Si la famille $\{\phi_n(x)\}$ est orthonormée pour i.e. $\|\phi_n\| = 1$ alors :

$$c_n = \int\limits_\alpha^\beta f(x)r(x)\phi_n(x)dx.$$

1.2.3 Représentation complexe d'une série de Fourier

Soit la fonction réale $f(x)$, définie sur l'intervalle $-l < x < l$, la sérier de Fourier complexe de $f(x)$ est donne par

$$f(x) = \sum_{-n}^{n} C_n \exp(\frac{in\pi}{l}x),$$

Avec:

$$C_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\exp(-\frac{in\pi}{l}x)dx \; si \; n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots .$$

Pour justifient ces deux résultats. On utilise ces relations d'Euler

$$\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) + \exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) - \exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)}{2},$$

On substituant ce relation dans la série (1.8), on obtient:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) + \exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)}{2} + b_n \frac{\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) - \exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)}{2i} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2}\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) + \frac{a_n + ib_n}{2}\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right). \end{aligned}$$

Posons $C_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, $C_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ on obtient:

$$\begin{aligned} f(x) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right), \end{aligned}$$

Donc:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n \exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique

Pour déterminer les C_n on multiplie la dernière expression par $\exp(-i\frac{m\pi}{l}x)$ et intégrer sur $[-l,l]$, alors:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\exp\left(-i\frac{m\pi}{l}x\right)dx=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n\int_{-l}^{l}\exp\left(i\frac{(n-m)\pi}{l}x\right)dx,$$

Avec :

$$\int_{-l}^{l}\exp\left(i\frac{(n-m)\pi}{l}x\right)dx=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq m,\\ 2l & \text{si } n=m,\end{cases}$$

on déduit:

$$C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Chapitre 2

Equation d'onde dans un domaine avec des frontières variables

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'équation d'onde dans un intervalle avec des frontières variable, c-à d, $0 < x < \ell(t)$.

2.1 Le problème

On considère un fil élastique, de longueur variable $\ell(t)$, est tendu entre deux supports de même niveau, en horizontal, et on note $h(x,t)$ représentant le déplacement vertical dans un points x, a l'instante t. La fonction $h(x,t)$ satisfait l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad \text{si } 0 < x < \ell(t), \tag{2.1}$$

avec les conditions initiale

$$h(x,0) = h_0, \qquad \frac{\partial h}{\partial t}(x,0) = u_0, \tag{2.2}$$

et les conditions aux bords

$$h(0,t) = h(\ell(t),t) = 0, \tag{2.3}$$

Dans ce cas, il est difficile de résoudre ce problème, car la méthode de séparation de variable utilise dans le cas fixe, sa marche plus pour ce la on détailles l'article de Vesnitskii et Potapov [7], qui donne la solution comme sous forme d'une série

2.2 Formule de d'Alembert

La solution h de l'équation (2.1) est donnée par la formule de D'Alembert

$$h(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

En substituant par les conditions (2.3) dans la solution générale:

On a $h(0,t) = 0 \Rightarrow g = -f$, alors la solution générale est:

$$h(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

et on a $h(\ell(t),t) = 0$, on obtient l'équation suivante:

$$f\left(t + \frac{\ell(t)}{c}\right) - f\left(t - \frac{\ell(t)}{c}\right) = 0. \tag{2.4}$$

En substituant par les conditions (2.2) dans la solution générale

On a $h(x,0) = h_0(x)$, alors

$$f\left(\frac{x}{c}\right) - f\left(-\frac{x}{c}\right) = h_0(x). \tag{2.5}$$

et on a $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,0) = u_0(x)$, donc

$$f^{'}\left(\frac{x}{c}\right) - f^{'}\left(-\frac{x}{c}\right) = u_0(x)$$

En intégrant cette dernière expression par rapport à x on trouve:

$$\int_0^x f^{'}\left(\frac{\xi}{c}\right) - f^{'}\left(-\frac{\xi}{c}\right) d\xi = \int_0^x u_0(\xi) d\xi,$$

donc

$$f\left(\frac{x}{c}\right) + f\left(-\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{c}\int_0^x u_0(\xi) d\xi. \tag{2.6}$$

Par addition entre (2.5) et (2.6) on obtient:

$$f\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\int_0^x u_0(\xi) d\xi + h_0(x)\right], \qquad 0 \leq x \leq \ell(0), \tag{2.7}$$

et par la soustraction entre (2.5) et (2.6) alors:

$$f\left(-\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\int_0^x u_0(\xi) d\xi - h_0(x)\right], \qquad 0 \leq x \leq \ell(0). \tag{2.8}$$

Supposons $u_0(x)$ et $h_0(x)$ sont des fonction impaire définie sur l'intervalle $[-\ell(0), \ell(0)]$, alors en substituant par $(-x)$ dans l'équation (2.8). On a:

$$f\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\int_0^{-x} u_0(\xi)d\xi - h_0(-x)\right].$$

puisque $h_0(x)$ est impaire, alors

$$f\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\int_0^{-x} u_0(\xi)d\xi + h_0(x)\right],$$

Posant $\xi = -\sigma \Rightarrow d\xi = -d\sigma$, alors

$$f\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\int_0^{x} -u_0(-\sigma)d\sigma + h_0(x)\right],$$

et puisque $u_0(x)$, on a

$$f\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\int_0^{x} u_0(\sigma)d\sigma + h_0(x)\right], \quad -\ell(0) \leq x \leq \ell(0) \tag{2.9}$$

2.3 Solution sous forme de série

Le problème originale est réduire à déterminer la solution de l'équation (2.4), celui vérifie la condition (2.9), maintenant on cherche la solution de l'équation (2.4) sous forme de série

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n y(t)) + b_n \sin(2\pi n y(t)). \tag{2.10}$$

où $y(t)$ est une fonction à déterminer, et a_n et b_n sont des coefficients à déterminer, par les conditions initiales (2.9).

Pour déterminer une condition sur y on substitue (2.10) dans l'équation (2.4)

$$\begin{aligned} f\left(t+\frac{\ell(t)}{c}\right) - f\left(t-\frac{\ell(t)}{c}\right) \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(2\pi n y\left(t+\frac{\ell(t)}{c}\right)\right) + b_n \sin\left(2\pi n y\left(t+\frac{\ell(t)}{c}\right)\right)\right] \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(2\pi n y\left(t-\frac{\ell(t)}{c}\right)\right) + b_n \sin\left(2\pi n y\left(t-\frac{\ell(t)}{c}\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

En utilisant les formules trigonométriques:

$$\begin{aligned}\cos(p) - \cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right),\\ \sin(p) - \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

On déduit alors:

$$\begin{aligned}f(t+\frac{\ell(t)}{c}) - f(t-\frac{\ell(t)}{c}) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{ & a_n \cos\left(\pi n\left[y\left(t+\frac{\ell(t)}{c}\right)+y\left(t-\frac{\ell(t)}{c}\right)\right]\right)\\ & +b_n\sin\left(\pi n\left[y(t+\frac{\ell(t)}{c})+y(t-\frac{\ell(t)}{c})\right]\right)\Bigg\}\\ & \times\sin\left(\pi n\left[y\left(t+\frac{\ell(t)}{c}\right)-y\left(t-\frac{\ell(t)}{c}\right)\right]\right).\end{aligned}$$

Donc pour que la solution (2.10) satisfait l'équation (2.4), il suffit que l'équation $y(t)$ satisfait l'équation suivante:

$$y\left(t+\frac{\ell(t)}{c}\right) - y\left(t-\frac{\ell(t)}{c}\right) = \gamma, \text{ où } \gamma \text{ est constante.} \tag{2.11}$$

Une fois y est déterminé, la solution générale de problème (2.1) ,(2.2) et (2.3) est:

$$\begin{aligned}h(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(2\pi n y\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)+b_n\sin\left(2\pi n y\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)\right\}\\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(2\pi n y\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)+b_n\sin\left(2\pi n y\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\right\}.\end{aligned}$$

2.4 Détermination des coefficients a_n et b_n

Pour déterminer les coefficients a_n et b_n on utilise (2.9) et (2.10):

$$f(\frac{x}{c}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) + b_n\sin\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) \tag{2.12}$$

Comme dans le cas cylindrique, on utilise l'orthogonalité des fonctions f_n dense $L^2\left(\frac{-\ell(t)}{c}, \frac{\ell(t)}{c}\right)$ mais cette fois avec la fonction de poids $y^{'}(t)$

1. Pour déterminer a_m, on multiplie l'équation (2.12) par $\cos\left(2m\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right)y^{'}\left(\frac{x}{c}\right)$, et intègre

sur l'intervalle $[-\ell(0), \ell(0)]$, on obtient

$$\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} f\left(\frac{x}{c}\right) \cos\left(2m\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \cos\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) \cos\left(2m\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \sin\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) \cos\left(2m\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx \right\}$$

D'Après (2.11), si $n = m$ on a

$$-\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \sin\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) \cos\left(2n\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \sin\left(4\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx = 0$$

$$-\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \cos^2\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \left(1 + \cos\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx = 1$$

Donc :

$$a_m = \frac{1}{2}\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \left[\frac{1}{c}\int_0^x u_0(\xi)d\xi + h_0(x)\right] \cos\left(2n\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx$$

Et si $n \neq m$, on a

$$-\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \sin\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) \cos\left(2n\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx = 0$$

$$-\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} \cos\left(2\pi n y\left(\frac{x}{c}\right)\right) \cos\left(2\pi m y\left(\frac{x}{c}\right)\right) y'\left(\frac{x}{c}\right) dx = 0$$

2. Pour déterminer b_n, on multiplie l'équation (2.12) par $\sin(2m\pi y(\frac{x}{c}))y'(\frac{x}{c})$, et intègre

sur l'intervalle $[-\ell(0), \ell(0)]$

$$\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)} f\left(\frac{x}{c}\right)\sin\left(2n\pi g\left(\frac{x}{c}\right)\right)y'\left(\frac{x}{c}\right)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)}\cos\left(2\pi ny\left(\frac{x}{c}\right)\right)\sin\left(2m\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right)y'(\frac{x}{c})dx\right.$$
$$\left.+b_n\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)}\sin\left(2\pi ny\left(\frac{x}{c}\right)\right)\sin\left(2m\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right)y'\left(\frac{x}{c}\right)dx\right\}.$$

D'Après (2.11), si $n = m$

$$-\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)}\cos\left(2\pi ny\left(\frac{x}{c}\right)\right)\sin\left(2n\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right)y'\left(\frac{x}{c}\right)dx = 0$$

$$-\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)}\sin^2\left(2\pi ny\left(\frac{x}{c}\right)\right)y'\left(\frac{x}{c}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)}\left(1-\cos\left(2\pi ny\left(\frac{x}{c}\right)\right)\right)y'\left(\frac{x}{c}\right)dx = 1$$

Donc :

$$b_m = \frac{1}{2}\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)}\left[\frac{1}{c}\int_0^x u_0(\xi)d\xi + h_0(x)\right]\cos\left(2n\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right)y'\left(\frac{x}{c}\right)dx$$

Et si $n \neq m$,on a

$$-\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)}\cos\left(2\pi ny\left(\frac{x}{c}\right)\right)\sin\left(2m\pi y\left(\frac{x}{c}\right)\right)y'\left(\frac{x}{c}\right)dx = 0$$

$$-\int_{-\ell(0)}^{\ell(0)}\sin\left(2\pi ny\left(\frac{x}{c}\right)\right)\sin\left(2\pi my\left(\frac{x}{c}\right)\right)y'\left(\frac{x}{c}\right)dx = 0$$

Remarque 2.1 *Reste à déterminer la fonction $y\,(t)$. On peut voire ce problème de deux façons différentes*

i) Problème directe: $\ell(t)$ est donné et on cherche $y(t)$. Quelques exemples sont considéré dans le chapitre suivant.

ii) Problème inverse : $y(t)$ est donné et on cherche $\ell(t)$. Quelques solutions sont donnée *par Vesnitskii et Potapov [7], avec $\gamma = 2$ dans l'équation (2.11)*

$$
\begin{aligned}
y(t) &= (\alpha t + \beta); \qquad \ell(t) = \frac{c}{\alpha}, \\
y(t) &= \ln(\alpha t + \beta); \quad \ell(t) = \frac{c}{\alpha}\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}(\alpha t + \beta), \\
y(t) &= (\alpha t + \beta)^{\frac{1}{2}}; \quad \ell(t) = \frac{2c}{|\alpha|}(\alpha t + \beta - 1)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

avec α,β sont des constante.

Chapitre 3

Quelques exemples

Dans ce chapitre, on donne la solution explicite, de différents problèmes. On détaille le travail de Balazs [2] avec quelque vérifications numérique.

3.1 Equation d'onde dans l'intervalle $[0, vt]$

3.1.1 Solution avec des conditions aux bords de Dirichlet

Soit $t_0 > 0$,on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}, & si\ 0 \leq x \leq vt,\ t \geq t_0 \\ h(0,t) = h(vt,t) = 0, & \\ h(x,t_0) = h_0,\ \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t_0) = u_0. & \end{cases} \tag{3.1}$$

La solution générale de (3.1) est s'écrite comme:

$$h(x,t) = f(t+x) + g(t-x),\ 0 \leq x \leq vt,\ t \geq t_0$$

Vérification des conditions aux bords:

On a $h(0,t) = 0 \Rightarrow g = -f$, donc :

$$h(x,t) = f(t+x) - f(t-x). \tag{3.2}$$

et on a $h(vt,t) = f(t+vt) - f(t-vt)$, alors:

$$f(t(1+v)) = f(t(1-v)).$$

Posons $z = t(1-v)$ et $\alpha = \dfrac{(1+v)}{(1-v)}$, on obtient:

$$f\left(\frac{(1+v)}{(1-v)}t(1-v)\right) = f(t(1-v)),$$

donc il est nécessaire que

$$f(\alpha z) = f(z). \tag{3.3}$$

Détermination de la fonction f

La solution de (3.3) est étudie par la périodicité de la fonction f en $\log(z)$. Posons

$$f(\exp(\log(z))) \ = w(\log(z)),$$

Si on note $y = \log(z)$, et $T = \log(\alpha)$, alors $\log(\alpha z) = y + T$, et on a:

$$w(y+T) = w(y),$$

Donc: w est une fonction périodique, à période $T = \log(\alpha)$, et on peut développer en utilisant la sérier de Fourier, i.e.

$$f(\exp(\log(z))) \ = w(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp\left(i\frac{2\pi}{T}ny\right),$$

Ce que implique

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp(ink\log(z)) \quad , \ k = \frac{2\pi}{\log(\alpha)}. \tag{3.4}$$

Pour déterminer la forme générale de h on substitue par (3.4) dans l'équation (3.2) on obtient:

$$h(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp(ink\log(t+x)) - \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp(ink\log(t-x)),$$

On multiplie cette équation par $\exp(ink\log(t_0))\exp(-ink\log(t_0))$ on déduit alors:

$$h(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \left\{\exp\left(ink\log\left(\frac{t+x}{t_0}\right)\right) - \exp\left(ink\left(\frac{t-x}{t_0}\right)\right)\right\}. \tag{3.5}$$

Détermination des C_n

on a $h(x,t_0) = h_0(x)$ c.-à-d.:

$$h_0(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \left\{\exp\left(ink\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right) - \exp\left(ink\log\left(\frac{t_0-x}{t_0}\right)\right)\right\}.$$

et on a $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t_0)=u_0(x)$ c.-à-d.:

$$u_0(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} inkC_n\left\{\frac{\exp\left(ink\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)}{(t_0+x)}-\frac{\exp\left(ink\log\left(\frac{t_0-x}{t_0}\right)\right)}{(t_0-x)}\right\}.$$

En dérivé h_0 par rapport à x, et par addition puis la soustraction enter la résultat et u_0 on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0 &= \frac{2}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} 2inkC_n\frac{\exp\left(ink\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)}{(t_0+x)},\\ \frac{\partial h_0}{\partial x}-u_0 &= \frac{2}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} 2inkC_n\frac{\exp\left(ink\log\left(\frac{t_0-x}{t_0}\right)\right)}{(t_0-x)}.\end{aligned}$$

c.-à-d.

$$(t_0+x)\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} inkC_n\exp\left(ink\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right), \tag{3.6}$$

$$(t_0-x)\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}-u_0\right)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} inkC_n\exp\left(ink\log\left(\frac{t_0-x}{t_0}\right)\right). \tag{3.7}$$

$h(0,t)=0$, $t\geq t_0$, alors on peut prolonger u_0, h_0 sur $[-vt_0,0]$, alors les deux équation précédente (3.6) et (3.7)sont égaux

Pour déterminer C_m, on multiplie la première équation par $\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)$, et intègre sur $[-vt_0,vt_0]$

$$\begin{aligned}&\int_{-vt_0}^{vt_0}(t_0+x)\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\\ &\qquad=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} inkC_n\int_{-vt_0}^{vt_0}\exp\left(i(n-m)k\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right).\end{aligned}$$

1. Si $n=m$

$$\frac{1}{m}\int_{-vt_0}^{vt_0}\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)=\frac{1}{2}C_m\int_{-vt_0}^{vt_0}\frac{ik}{(t_0+x)}dx$$

$$\Rightarrow C_m=\frac{1}{mi\pi}\int_{-vt_0}^{vt_0}\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)dx.$$

Finalement on a:

$$C_m=-\left(\frac{i}{m\pi}\right)\int_{-vt_0}^{vt_0}\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)dx. \tag{3.8}$$

2. Si $n \neq m$

$$\int_{-vt_0}^{vt_0} (t_0+x)\ \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} inkC_n\int_{-vt_0}^{vt_0}\exp\left(i(n-m)k\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right).$$

On multiplie le deuxième terme par $(n-m)$ et diviser par $(n-m)$, ainsi:

$$\int_{-vt_0}^{vt_0} (t_0+x)\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_n}{(n-m)}\int_{-vt_0}^{vt_0} ink(n-m)\exp\left(i(n-m)k\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right).$$

Par intégration, le second terme vaut:

$$\int_{-vt_0}^{vt_0} (t_0+x)\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_n}{(n-m)}n\left\{\exp(i(n-m)k\log(1+v))-\exp\left(i(n-m)k\log(1-v)\right)\right\}.$$

En remplaçant k par sa valeur dans le second terme on obtient:

$$\int_{-vt_0}^{vt_0} (t_0+x)\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_n}{(n-m)}n\left\{\exp\left(i(n-m)\frac{2\pi(\log(1+v)-\log(1-v)+\log(1-v))}{\log(1+v)-\log(1-v)}\right)\right.$$
$$\left.-\exp\left(i(n-m)\frac{2\pi\log(1-v)}{\log(1+v)-\log(1-v)}\right)\right\}.$$

et puisque $\exp(i(n-m)2\pi))=1$, on a

$$\int_{-vt_0}^{vt_0} (t_0+x)\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{C_n}{(n-m)}n\exp\left(i(n-m)\frac{2\pi\log(1-v)}{\log(1+v)-\log(1-v)}\right)\right.$$
$$\left.-\exp\left(i(n-m)\left(\frac{2\pi\log(1-v)}{\log(1+v)-\log(1-v)}\right)\right)\right\}=0.$$

Exemple 3.1 *On prend* $v = \frac{1}{2}$, $t_0 = 1$, *et le conditions initiales*

$$h_0(x) = \sin(2\pi x)\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}, \qquad u_0(x) = 0$$

A partir l'équation (3.8), C_m *prend la forme de*

$$C_m = -\left(\frac{2i}{m}\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(-imk\log(1+x))\cos(2\pi x)dx,$$

alors:

$$h(x,t) = \sum_{-n}^{+n} C_m \left(\exp(ink\log(t+x)) - \exp(ink\log(t-x))\right).$$

On obtient les graphes suivants:

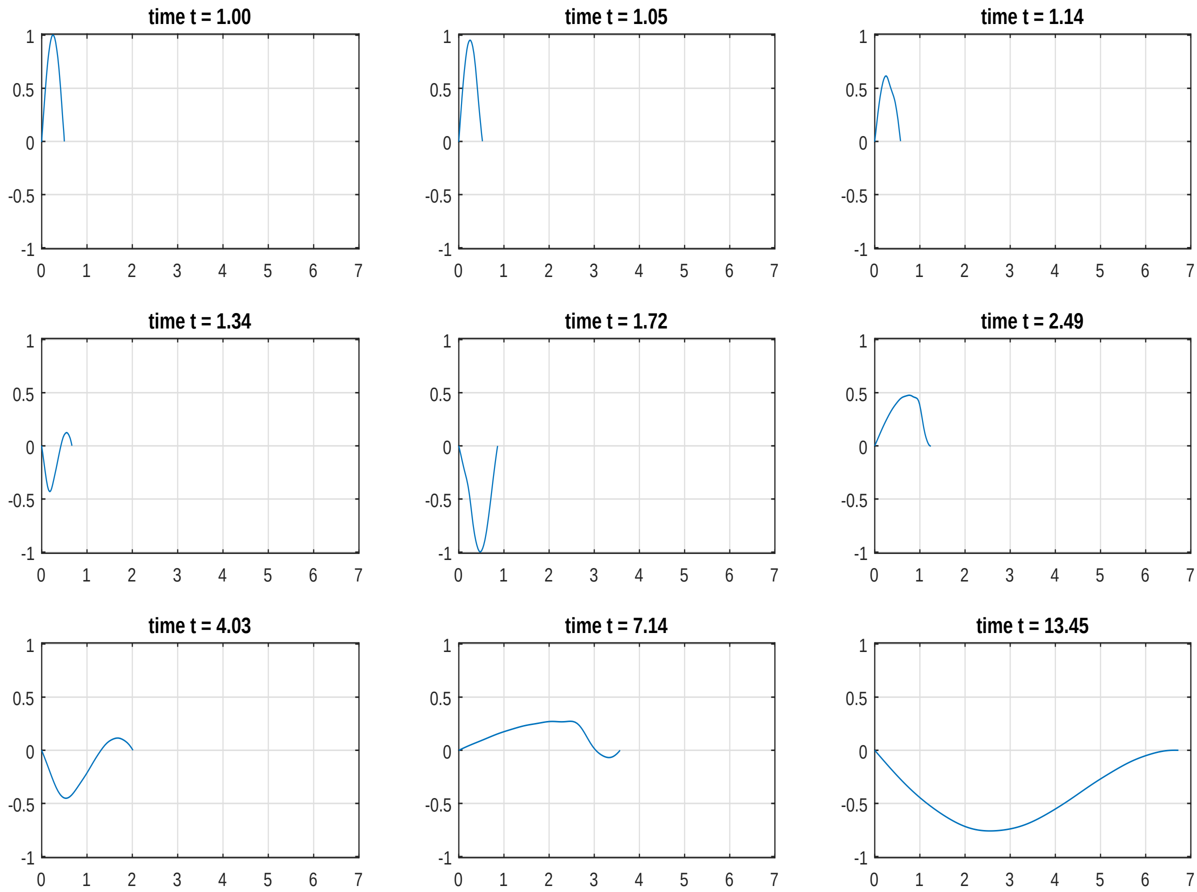

Figure 3.1: Solution pour différents temps

L'algorithme de programme

ENTRÉE v `vitesse constante;`

$t0$ `le temps initiale;`

n`;` $Tmax$`;`

h_0 `(l'état initiale);`

u_0 `(la vitesse initiale);`

SORTIE `wave (la solution` $h(x,t)$`), for t=1,`$\cdots$`,`$Tmax$`;`

pas 1 `Set` $k = \frac{2\pi}{\log(1+v/1-v)}$;

$x = -vt_0, \cdots, vt_0$;

$t = 1$

pas 2 *wihle* $t \leq Tmax$;

`Set` $z = -vt, \cdots, vt$;

pas 3 `For` $m = -n, \cdots, n$;

`for i=1,`$\cdots$`,length(`x`);`

$C_m = -\left(\frac{i}{m\pi}\right) \int\limits_{-vt_0}^{vt_0} \left(\frac{\partial h_0}{\partial x} + u_0\right) \exp\left(-imk \log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right) dx$`;(calcule les coefficients de la sérier)`

pas 4 `For` $j = 1, \cdots$`,length(`z`)`

`wave=`$h(x,t) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_n \left\{\exp\left(ink \log\left(\frac{t+x}{t_0}\right)\right) - \exp\left(ink\left(\frac{t-x}{t_0}\right)\right)\right\}$;

`SORTIE (wave).`

pas 5 `STOP.`

Remarque 3.2 *Dans (3.5) posons* $p = ink \log\left(\frac{t+x}{t_0}\right)$ *et* $q = ink \log\left(\frac{t-x}{t_0}\right)$, *alors:*

$$h(x,t) = \sum_{1}^{+\infty} (C_n + C_{-n}) \cos(p) + i(C_n - C_{-n}) \sin(p) - (C_n + C_{-n}) \cos(q) - i(c_n - c_{-n}) \sin(q),$$

Posons

$$A_n = C_n + C_{-n} \quad et \quad B_n = (C_n - C_{-n})$$

et avec les relations triangulaires on obtient le solution générale de forme sin *et* cos

$$h(x,t) = \sum_{1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{nk}{2} \log\left(\frac{t^2 - x^2}{t_0^2}\right)\right) + B_n \sin\left(\frac{nk}{2} \log\left(\frac{t^2 - x^2}{t_0^2}\right)\right) \sin\left(\frac{nk}{2} \log\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right).$$

3.1.2 Solution avec des conditions aux bords mixtes

On cherche la solution pour le problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad si\ 0 \leq x \leq vt, \\ h(0,t) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(vt,t) = 0, \\ h(x,t_0) = h_0,\ \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.9}$$

La solution générale de (3.9) est

$$h(x,t) = f(t+x) + g(t-x).$$

Vérification les conditions aux bords:

1. $h(0,t) = 0 \Rightarrow g = -f$, donc

$$h(x,t) = f(t+x) - f(t-x).$$

2. $\dfrac{\partial h}{\partial x}(vt,t) = f^{'}(t(1+v)) + f^{'}(t(1-v)) = 0,$

   Posons $z = t(1-v)$ et $\alpha = \dfrac{(1+v)}{(1-v)}$, alors:

$$f^{'}(\alpha z) = -f^{'}(z) \tag{3.10}$$

Détermination de la fonction f

d'après (3.10) on a:

$$\begin{aligned} f^{'}(\alpha^2 z) &= -f^{'}(\alpha z), \\ &\Rightarrow f^{'}(\alpha(\alpha z)) = -f^{'}(\alpha z) = -(-f^{'}(z)), \\ &\Rightarrow f^{'}(\alpha^2 z) = f^{'}(z). \end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$f^{'}(\exp(2\log(\alpha) + \log(z))) = f^{'}(\exp(\log(z))),$$

Posons $f^{'}(\exp(\log(z))) = w(\log(z))$, alors

$$w(\log(z) + 2\log(\alpha)) = w(\log(z)),$$

w est une fonction périodique à période $T = 2\log(\alpha)$, alors:

$$f^{'}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \exp(ink_2 \log(z)) \quad , \; k_2 = \frac{2\pi}{2\log(\alpha)}.$$

Pour déterminer f on intègre cette équation sur l'intervalle $[0, z]$ on obtient:

$$\int_0^z f^{'}(s) ds = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \int_0^z \exp(ink_2 \log(s)) ds,$$

dans le second terme, posons $y = \log(s) \Rightarrow dy = \frac{1}{s}\, ds$ et $s = \exp(y)$ alors:

$$\begin{aligned} \int_0^z f^{'}(s) dy &= \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \int_{-\infty}^{\log(z)} \exp((ink_2 + 1)y) dy, \\ &\Rightarrow \;\; f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \exp(ink_2 \log(z) + \log(z)). \end{aligned}$$

Donc:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n z \exp(ink \log(z)), \; k_2 = \frac{2\pi}{2\log(\alpha)}.$$

Alors la forme générale de la solution est:

$$h(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \left\{ (t+x) \exp\left(ink_2 \log\left(\frac{t+x}{t_0}\right)\right) - (t-x) \exp\left(ink_2 \log\left(\frac{(t-x)}{t_0}\right)\right)\right\}.$$

Détermination des R_n

on a $h(x, t_0) = h_0(x)$ c.-à-d.:

$$h_0(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \left\{ (t_0+x) \exp\left(ink_2 \log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right) - (t_0-x) \exp\left(ink_2 \log\left(\frac{t_0-x}{t_0}\right)\right)\right\}.$$

et on a$\frac{\partial h}{\partial t}(x, t_0) = u_0(x)$ c.-à-d.:

$$u_0(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \left(1 + ink_2\right) \left\{ \exp\left(ink_2 \log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right) - \exp\left(ink_2 \log\left(\frac{t_0-x}{t_0}\right)\right)\right\}.$$

En dérivé h_0 par rapport à x, et par la dussions enter ceci et u_0, puis la soustraction entre ceci et u_0 on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial x} + u_0 &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \left(1 + ink_2\right) \exp\left(ink_2 \log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right), \\ \frac{\partial h_0}{\partial x} - u_0 &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n \left(1 + ink_2\right) \exp\left(ink_2 \log\left(\frac{t_0-x}{t_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Pour u_0 et h_0 sont des fonction impaires alors les deux équation sont égaux, on multiplie la première équation par $\exp\left(-imk_2\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)$ et intègre sur $[-vt_0, vt_0]$,alors:

$$\int_{-vt_0}^{vt_0}(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0)\exp\left(-imk_2\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}R_n\left(1+ink_2\right)\int_{-vt_0}^{vt_0}\exp\left(i(n-m)k_2\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)d\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right).$$

De la même manière, nous déduisions que:

$$R_m=\left(\frac{2}{\log(\alpha)+in\pi}\right)\int_{-vt_0}^{vt_0}\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\frac{\exp\left(-imk_2\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)}{(t_0+x)}dx.$$

3.2 Equation d'onde dans l'intervalle $[-wt, vt]$

On cherche la solution pour le problème suivant

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad si \quad -wt\leq x\leq vt,\\ h(-wt,t)=h(vt,t)=0,\\ h(x,t_0)=h_0,\ \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t_0)=u_0.\end{cases}\tag{3.11}$$

la solution générale de (3.11) est

$$h(x,t)=f(t+x)-g(t-x).\tag{3.12}$$

Vérification des conditions aux bords:

1. $h(-wt,t)=f(t(1-w))-g(t(1+w))\ =0$, donc

   $$f(t(1-w))=g(t(1+w)).$$

   Posons $z=t(1-w)$ et $\alpha=\dfrac{1+w}{1-w}$, alors

   $$f(z)=g(\alpha z).\tag{3.13}$$

2. $h(vt,t)=f(t(1+v))-g(t(1-v))$, donc

   $$f(t(1+v))=g(t(1-v)),$$

   Posons $z=t(1+v)$ et $\beta=\dfrac{1+v}{1-v}$, on obtient:

   $$g(z)=\ f(\beta z).\tag{3.14}$$

Détermination des fonction f et g

Et à partir de (3.13) et (3.14) on a :

$$\begin{cases} f(z) = g(\alpha z), \\ g(z) = f(\beta z). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} f(z) = g(\alpha z), \\ g(\alpha z) = f(\alpha\beta z). \end{cases}$$

Donc

$$f(z) = g(\alpha\beta z).$$

D'autre part, on a:

$$f(\exp(\log(z))) = f(\exp(\log(\alpha\beta) + \log(z))),$$

Posons $y = \log(z)$, et $T = \log(\alpha\beta)$, d'Après la solution de problème précédent on obtient:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \exp(ink_{\alpha\beta} \log(z)) \quad , \quad k_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\log(\alpha\beta)}. \tag{3.15}$$

Et à partir de (3.14), on a:

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \exp(ink_{\alpha\beta} \log(\beta z)) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \exp(ink_{\alpha\beta} \log(\beta)) \exp(ink_{\alpha\beta} \log(z)), \end{aligned}$$

donc:

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} G_n \exp(ink_{\alpha\beta} \log(z)), \text{ et } G_n = F_n \exp(ink_{\alpha\beta} \log(\beta)). \tag{3.16}$$

Pour déterminer la forme générale de h, on substitue par l'équation (3.15) et (3.16) dans (3.12), on obtient:

$$\begin{aligned} h(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \exp(ink_{\alpha\beta} \log(t+x)) - \sum_{-\infty}^{+\infty} G_n \exp(ink_{\alpha\beta} \log(t-x)) \\ = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \left\{ \exp(ink_{\alpha\beta} \log(t+x)) - \exp(ink \log(t-x)) \exp(ink_{\alpha\beta} \log(\beta)) \right\}, \end{aligned}$$

donc:

$$h(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \left\{ \exp\left(ink_{\alpha\beta} \log\left(\frac{t+x}{t_0} \right) \right) - \exp\left(ink_{\alpha\beta} \log\left(\frac{\beta(t-x)}{t_0} \right) \right) \right\}.$$

Détermination des $F_n$par les conditions initiales

On a $h(x,t_0)=h_0(x)$ c.-à-d.:

$$h_0(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}F_n\left\{\exp\left(ink_{\alpha\beta}\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)-\exp\left(ink_{\alpha\beta}\log\left(\frac{\beta(t_0-x)}{t_0}\right)\right)\right\}.$$

et on a $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t_0)=u_0(x)$ c.-à-d.:

$$u_0(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}ink_{\alpha\beta}F_n\left\{\frac{\exp\left(ink_{\alpha\beta}\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)}{(t_0+x)}-\frac{\exp\left(ink_{\alpha\beta}\log\left(\frac{\beta(t_0-x)}{t_0}\right)\right)}{(t_0-x)}\right\}.$$

En dérive h_0 par rapport à x, et par la dussions puis la soustraction entre le résultat et u_0 on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0 &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}ink_{\alpha\beta}F_n\frac{\exp\left(ink_{\alpha\beta}\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)}{(t_0+x)},\\ \frac{\partial h_0}{\partial x}-u_0 &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}ink_{\alpha\beta}F_n\frac{\exp\left(ink_{\alpha\beta}\log\left(\frac{t_0-x}{t_0}\right)\right)}{(t_0-x)}.\end{aligned}$$

Enfin de la même manière, les coefficient sont alors donnés par la relation:

$$\begin{aligned}F_n &= -\left(\frac{i}{m\pi}\right)\int_{-vt_0}^{vt_0}\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk_{\alpha\beta}\log\left(\frac{t_0+x}{t_0}\right)\right)dx.\\ G_n &= -\left(\frac{i}{m\pi}\right)\int_{-vt_0}^{vt_0}\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}+u_0\right)\exp\left(-imk_{\alpha\beta}\log\left(\frac{\beta t_0}{t_0+x}\right)\right)dx.\end{aligned}$$

3.3 Equation d'onde dans l'intervalle $\left[0,\sqrt{t^2+1}\right]$

On cherche la solution pour le problème suivant

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}, & si\ 0\le x\le\sqrt{t^2+1},\ t\ge 0\\ h(0,t)=h(\sqrt{t^2+1},t)=0, & \\ h(x,0)=h_0,\ \frac{\partial h}{\partial t}(x,0)=u_0. & \end{cases}\tag{3.17}$$

avec $c=1$, et $l_0=1$ (la distance initiale entre les deux supports $\ell(t)=\sqrt{t^2+1}$ on a:

$$\begin{aligned}l'(t) &= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\Rightarrow \text{la vitesse initiale } l^{'}(0)=0.\\ l''(t) &= \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow \text{l'accélération } \frac{c^2}{l_0}=l''(0)=1.\end{aligned}$$

La solution générale de (3.17) est s'écrite comme:

$$h(x,t)=f(t+x)+g(t-x).$$

Détermination des fonction f et g

D'Après les condition aux bords, on a $h(0,x)=0 \Rightarrow g=-f$, alors

$$h(x,t)=f(t+x)-f(t-x).$$

et on a $h\left(\sqrt{t^2+1},t\right)=f\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-f\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)=0$

On multiplie $\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)$ par sa conjuguée on obtient:

$$f\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-f\left(\frac{-1}{t+\sqrt{t^2+1}}\right)=0,$$

Posons $z=t+\sqrt{t^2+1}$ alors:

$$f(z)=f\left(\frac{-1}{z}\right). \tag{3.18}$$

Et les Conditions initiales:

On a $h(x,0)=h_0$, alors

$$f(x)-f(-x)=h_0(x)$$

et on a $\frac{\partial h}{\partial t}(x,0)=u_0$, donc

$$f'(x)-f'(-x)=u_0(x)$$

On remplace par z on obtient:

$$\begin{cases} f(z)-f(-z)=h_0(z), \\ f'(z)-f'(-z)=u_0(z). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(z)-f(-z)=h_0(z), \\ f(z)-f(-z)=\int\limits_0^z u_0(x)dx. \end{cases}$$

Par la dussions entre ceci, on obtient:

$$f(z)=\frac{1}{2}h_0(z)+\frac{1}{2}\int\limits_0^z u_0(x)dx. \tag{3.19}$$

Et par la soustraction entre ceci on obtient:

$$f(-z)=-\frac{1}{2}h_0(z)+\frac{1}{2}\int\limits_0^z u_0(x)dx. \tag{3.20}$$

La détermination de f satisfait les conditions suivantes

1. Si $0\leq z\leq 1$, il vient de (3.19)

$$f(z)=\frac{1}{2}h_0(z)+\frac{1}{2}\int\limits_0^z u_0(x)dx. \tag{3.21}$$

2. Si $z \geq 1$, De (3.19), (3.20) et du faite que $f(z) = f\left(-\frac{1}{z}\right)$, on déduit

$$f(z) = -\frac{1}{2}h_0\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{z}} u_0(x)dx. \tag{3.22}$$

3. Si $z < 0$

   Si $|z| < 1$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2}h_0(z) + \frac{1}{2}\int_0^{z} u_0(x)dx.$$

   Si $|z| > 1$ on a

$$f(z) = -\frac{1}{2}h_0\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{z}} u_0(x)dx.$$

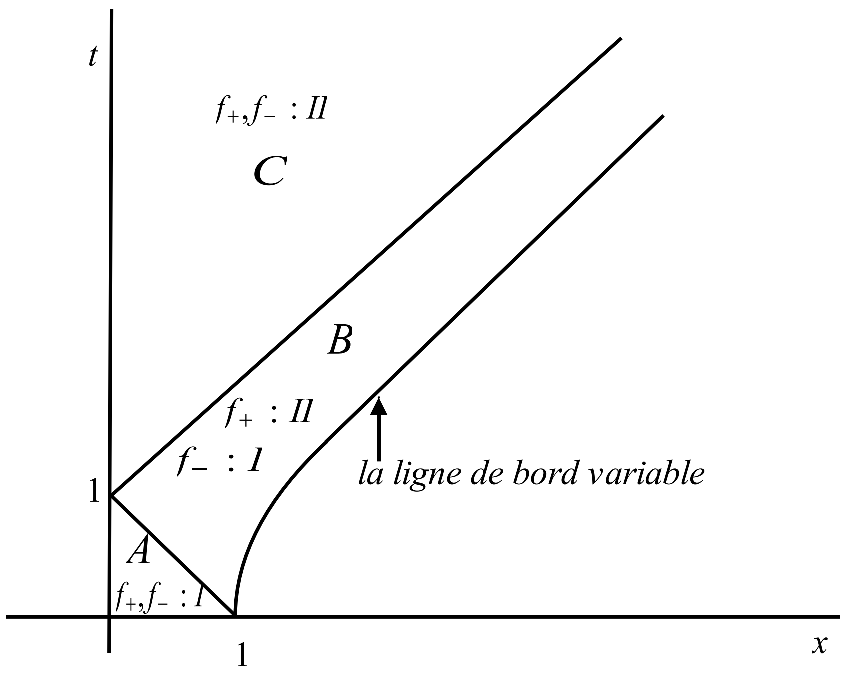

Figure 3.2: Les région A, B et C

Dans cette figure on distincte trois régions A,B et C précisées par les deux lignes $t+x = 1$ et $t - x = 1$ et on note $f(t+x), f(t-x)$ par f_+ et f_- respective et l'équations (3.21) et (3.22) par cas(I), cas(II)

1. Dans la région A

   $|t + x| < 1 \Rightarrow t < 1 - x \Rightarrow f_+ = f(z)$ dans le cas (I).

   $|t - x| < 1 \Rightarrow t < 1 + x \Rightarrow f_- = f(z)$ dans le cas (I).

2. dans la région B

$|t+x|>1 \Rightarrow t>1-x \Rightarrow f_{+}=f(z)$ dans le cas (II).

$|t-x|<1 \Rightarrow t<1+x \Rightarrow f_{-}=f(z)$ dans le cas (I).

3. Dans la région C

$|t+x|>1 \Rightarrow t>1-x \Rightarrow f_{+}=f(z)$ dans le cas (II).

$|t-x|>1 \Rightarrow t>1+x \Rightarrow f_{-}=f(z)$ dans le cas (II).

Exemple 3.3 *On prend les condition initiales suivante*

$$h_0(x)=\sin(\pi x), \quad u_0(x)=0$$

1. Dans la région A

$$\begin{aligned} h(x,t) &= f(t+x)-f(t-x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(\pi(t+x))-\frac{1}{2}\sin(\pi(t-x)) \ = \sin(\pi x)\cos(\pi t). \end{aligned}$$

2. Dans la région B

$$h(x,t)=f(t+x)-f(t-x)=-\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{t+x}\right)+\sin(\pi(t-x))\right\}.$$

3. Dans la région C

$$\begin{aligned} h(x,t) &= f(t+x)-f(t-x) \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{t+x}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{t-x}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Cette solution vérifie l'équation d'onde et les conditions aux bords de la région A

$$f(0,t)=0, \qquad h(1-t,t)=-\frac{1}{2}\sin(2\pi t),$$

les conditions aux bords de la région B

$$h(t-1,t)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2t-1}\right), \qquad h\left(\sqrt{t^2+1},t\right)=0, \ \ h(1-t,t)=-\frac{1}{2}\sin(2\pi t).$$

et les conditions aux bords de la région C

$$h(0,t)=0, \qquad h\left(t-1,t\right)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2t-1}\right).$$

Dans l'intérieur de la région A, le borde variable s'influence manifeste pas, et pour chaque point (x_0, t_0) dans le triangle de domaine de dépendant, la solution dans ce point ne pas sort que ce triangle car la solution entièrement détermine par les condition de Cauchy

Dans B l'influence de le bord variable existe en gauche, et le terme $\sin(\pi(t-x))$ représente l'onde simple voyagé a la droite et l'autre onde voyagé a la gauche et réflexe sur le support variable

Dans la région C la solution lui la somme enter deux onde telle que les deux réflexe sur le borde variable, la description de ceci est l'onde change leur nature.

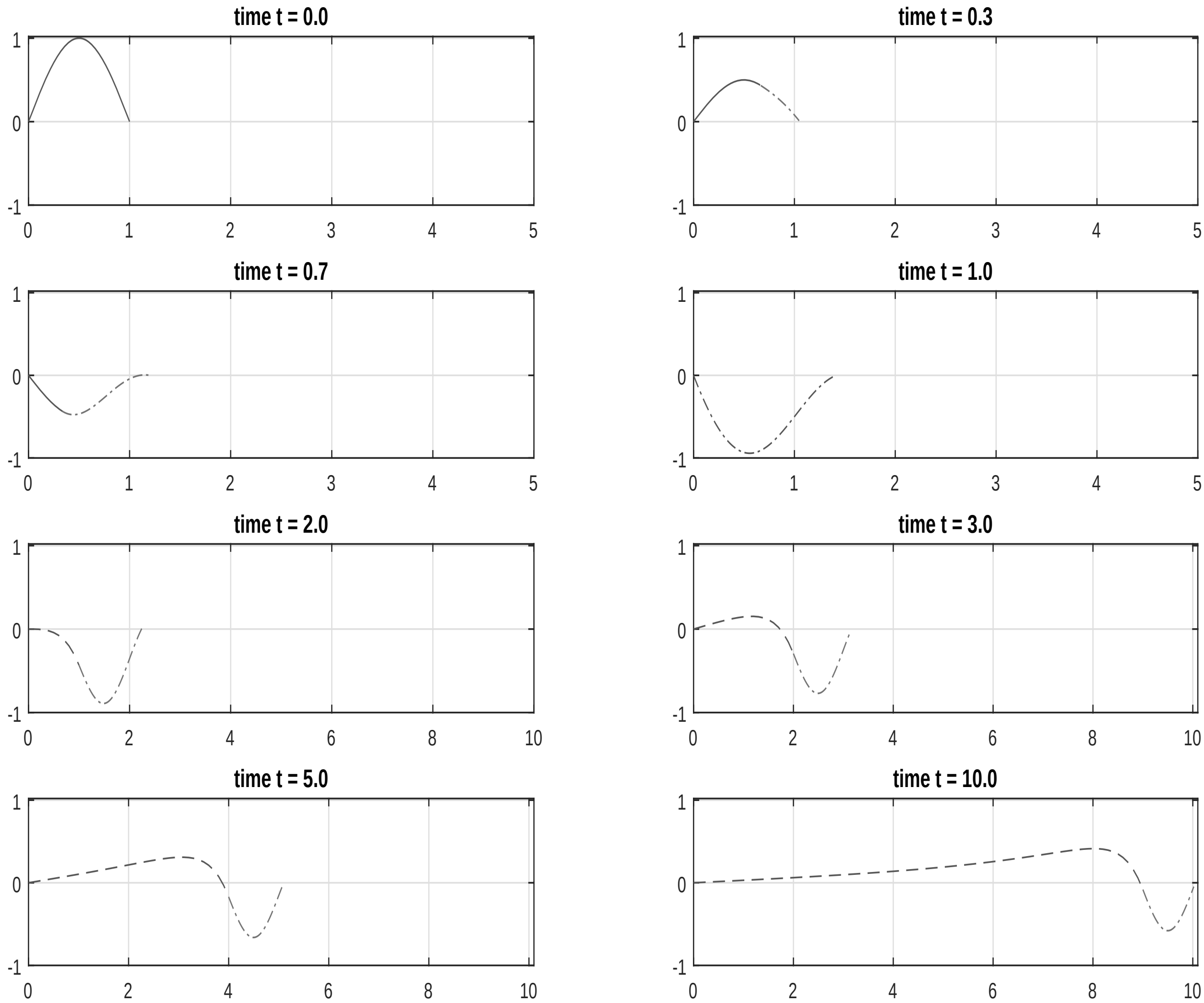

Figure 3.3: — Région A, −−. Région B, $- \cdot -$ Région C

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié l'équation d'onde en dimension un suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial^2 t} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial^2 x} \ \text{ si } \ \ell_-(t) < x < \ell_+(t), \\ h(\ell_-(t), t) = h(\ell_+(t), t) = 0, \\ h(x, t_0) = h_0, \ \dfrac{\partial h}{\partial t}(x, t_0) = u_0. \end{cases}$$

ou le bords de l'intervalle $\ell_\pm(t)$ dépendent du temps. On a obtenu la solution exacte, sous forme de série trigonométrique, et on a illustré cet résultat pour différents $\ell\,(t)$ est différents conditions au bords. On a aussi vérifier cette solution sur un exemple numérique.

Bibliography

[1] R.P.Agrwal-D.O.Regan, *Ordinary and Partial Differential Equation. Springer,* 2009.

[2] N.L.Balazs, *On the Solution of the Wave Equation with Moving Boundaries. Journal of Mathematical Analysis and Applications 3, 472-482*, 1961.

[3] J.Qin, *Initial Boundary Value Problems Associated Wiht a Spinning String. These Maste*r. *Universite of Manitoba*-.July 1997.

[4] J.Rauch, *Partial Differential Equation. Spring-Verlag*, 1999.

[5] S.Salsa, *Partial Differential Equation in Action. Springer*, 2008.

[6] W.A.Strauss,*Partial Differential Equation An Intrroduction,Second Edition ,John Wiley &Sons*, 2008.

[7] A.I.Vensnitskii, A.I.Potapov,*Some General Propettes of Wave Processes in One -Dimensional Mechanical Systems Of Variable Length ,IZd Gor'kovsk Gos .Univ.* 422-426, 1975.

[8] E.C. Zachmanoglou. D. Wthoe. *Introduction to Partial Differential Equation with Application. Dover Publication,* 1986.