

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED MOHAMED BOUDIAF
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES**

Exposé présenté en analyse fonctionnelle

Deuxième année Master

THÈME

Sur Une Classe de Problèmes aux Limites

Présenté par:

Abdellaoui Asma

Sous la direction de:

Dr.Memou Ameur

Table des matières

1	Rappel d'analyse fonctionnelle	3
1.1	Espace de Hilbert	3
1.1.1	Espace de Hilbert séparable	4
1.1.2	Somme Hilbertienne. Base Hilbertienne	4
1.1.3	Dual d'un espace de Hilbert	5
1.2	Opérateurs non-bornés dans un espace de Hilbert	5
1.2.1	Opérateurs fermés	6
1.2.2	Opérateurs auto-adjoints	6
1.2.3	Opérateurs compacts	7
1.2.4	Spectre d'un opérateur compact	8
1.3	L'espace de Sobolev	9
1.3.1	Dérivées d'une distribution	9
1.3.2	Définition des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	10
1.3.3	L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$	11
1.3.4	Injections de Sobolev	12
2	Illustration et Motivation	13
2.1	L'équation de la chaleur	13
2.1.1	L'existence et l'unicité de la solution	15
2.1.2	La régularisation par rapport à t	16
2.1.3	La solution faible	18
2.1.4	La solution au sens des distributions	19

3	L'équation des ondes	21
3.1	L'équation des ondes	21
3.1.1	L'existence et l'unicité de la solution	21
3.1.2	La solution au sens faible	22
3.1.3	La solution au sens des distributions	24
	Bibliographie	27

Résumé:

A travers notre étude, nous étudions les solutions faibles et au sens des distributions de l'équation de la chaleur et de l'équation des ondes, nous montrons l'existence et l'unicité de ses solutions en utilisant des notions et résultats fondamentales d'analyse fonctionnelle.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique et sont d'une grande utilité dans la modélisation de nombreux problèmes de la physique mathématique. Ces équations peuvent être classées en plusieurs catégories.

Dans ce mémoire, nous avons étudié les hypothèses adéquates pour l'existence des solutions classiques, faibles et au sens de distribution des équations aux dérivées partielles linéaires dans un rectangle en utilisant quelques résultats d'analyse fonctionnelle.

Ce travail est divisé en trois chapitres qui sont les suivants :

Dans le premier chapitre, nous donnons un aperçu général des différentes notions nécessaires sur l'analyse fonctionnelle pour la compréhension du contenu de ce mémoire, notamment, les espaces de Hilbert, les opérateurs non-bornés dans un espace de Hilbert les espace de Sobolev.

Le deuxième chapitre est consacré sur l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy de l'équation de la chaleur sur $L^2(\Omega)$, en utilisant des notions de base d'analyse fonctionnelle, ensuite on a étudié la régularisation de la solution par rapport à $t \in [0; T]$, et nous discutons dans quel sens l'équation du problème de Cauchy est satisfait.

Le troisième chapitre est consacré sur l'existence et l'unicité des solutions faibles et au sens de distribution de l'équation des ondes dans l'espace $L^2(\Omega)$.

CHAPITRE I

Rappel d'analyse fonctionnelle

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 Soient E et F deux $\mathbb{C}$ espaces vectoriels. Une application $L : E \rightarrow F$ est dite anti-linéaire si. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $\forall x, y \in E$;

$$\forall x, y \in E L(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda}L(x) + \bar{\mu}L(y)$$

Définition 1.1.2 Une application $\langle ., . \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire si l'application linéaire partielle $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire et $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est anti-linéaire.

1. Elle est dite symétrique hermitien si , $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pour tous $x, y \in E$.
2. Elle est dite définie positive si, $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tous $x \in E$ et si $(\langle x, x \rangle = 0)$.
3. Un produit (scalaire) hermitien est une formes sesquilinéaire, symétrique hermitien, définie positive.

Définition 1.1.3 Soit $\langle ., . \rangle$ un produit scalaire hermitien sur E . On définit sur E la norme associe à $\langle ., . \rangle$ par $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Définition 1.1.4 On appelle espace préhilbertien un $\mathbb{C}$ —espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ est de la norme associée $\| . \|$. Un espace préhilbertien peut être muni d'une structure d'espace métrique pour la distance $d(x, y) = \| x - y \|$.

Définition 1.1.5 (Espace de Hilbert) On dit qu'un espace préhilbertien H , muni de la norme $\| \cdot \|$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace de Hilbert si $(H, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé complet.

(Par définition, un espace de Hilbert est donc un espace de Banach)

Exemple 1.1.1 $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour tout Ω mesurable avec le produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

1.1.1 Espace de Hilbert séparable

Un espace métrique est séparable s'il possède un sous-ensemble dénombrable dense. La plupart des espaces de Hilbert utilisés en pratique sont séparables. Tout espace de Hilbert possède une suite totale $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est séparable.

Théorème 1.1.1 Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

1.1.2 Somme Hilbertienne. Base Hilbertienne

Définition 1.1.6 Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous espaces fermés de H .

On dit que H est une somme Hilbertienne des (E_n) et on note $H = \oplus_n E_n$ si:

(i) Les E_n sont deux à deux orthogonaux i.e.

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in E_m, \quad \forall v \in E_n, \quad m \neq n$$

(ii) L'espace vectoriel engendré par les (E_n) est dense dans H .

Théorème 1.1.2 (1) On suppose que H est une somme Hilbertienne des $(E_n)_{n \geq 1}$. Soit $u \in H$ et soit $u_n = P_{E_n} u$.

Alors on a

(a) $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ i.e. $u = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k u_n$

(b) $|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$ (égalité de Bessel-Parseval)

Réciproquement, étant donnée une suite (u_n) de H telle que $u_n \in E_n, \forall n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente et $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ vérifie $u_n = P_{E_n} u$.

Définition 1.1.7 On appelle base Hilbertienne une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H tels que

(i) $|e_n| = 1 \quad \forall n, (e_m, e_n) = 0 \quad \forall m, n, m \neq n$.

(ii) L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H .

Il résulte du théorème (1) que si (e_n) est une base Hilbertienne alors tout $u \in H$ s'écrit

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n \quad \text{avec} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2.$$

Inversement étant donné une suite $(\alpha_n) \in L^2$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge vers un élément noté u ; on a

$$\langle u, e_n \rangle = \alpha_n \quad \text{et} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.$$

1.1.3 Dual d'un espace de Hilbert

Définition 1.1.8 L'espace vectoriel $H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{C})$ des formes linéaires continues définies sur H appelé le dual topologique de H .

1.2 Opérateurs non-bornés dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur dans H , c'est-à-dire, une application linéaire définie sur un espace vectoriel $D(A) \subset H$ à valeurs dans H .

$D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A .

Dans la suite, on suppose que $D(A)$ est dense dans H .

Exemple 1.2.1 Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $D(A) = \{u \in H : xu \in H\}$. On définit A par

$$(Au)(x) = xu(x). \text{ pour } u \in D(A).$$

Alors A est un opérateur linéaire non borné avec un domaine de définition dense.

Définition 1.2.1 On dit q'un opérateur $(A, D(A))$ est borné s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|Au\| \leq c \|u\| \quad \forall u \in D(A).$$

Remarque 1.2.1 Il peut donc arriver qu'un opérateur non borné soit borné.

Précisons quelques notations et définitions importantes

$$\textbf{Graphe de } A = G(A) = \cup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset H \times H$$

$$\textbf{Image de } A = R(A) = \cup_{u \in D(A)} Au \subset F$$

$$\textbf{Noyau de } A = N(A) = \{u \in D(A); Au = 0\} \subset H$$

1.2.1 Opérateurs fermés

Définition 1.2.2 L'opérateur A est dit fermé si $G(A)$ est fermé dans l'espace $H \times H$

Remarque 1.2.2 En pratique, la plupart des opérateurs non-bornés que l'on rencontre sont fermés et à domaine $D(A)$ dense dans H .

Théorème 1.2.1 Soit H un espace de Hilbert, et $A : D(A) \rightarrow H$. Alors, $G(A)$ est fermé dans $H \times H$ si A est continue

Définition 1.2.3 Soit A un opérateur fermé dans H . L'ensemble résolvant de A , noté $\rho(A)$ est constitué de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'opérateur $\lambda I - A$ est une bijection de $D(A)$ sur H avec un inverse borné. Si $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ . Le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$, noté $\sigma(A)$, s'appelle le spectre de A .

1.2.2 Opérateurs auto-adjoints

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non-borné à domaine dense. On va définir un opérateur non-borné $A^* : D(A^*) \subset H' \rightarrow H'$ comme suit. On pose

$$D(A^*) = \left\{ v \in H'; \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\| \quad \forall u \in D(A) \right\}.$$

Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de H' . On va maintenant définir A^*v pour $v \in D(A^*)$. Etant donné $v \in D(A^*)$ on considère l'application $g : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u) = \langle v, Au \rangle, \quad u \in D(A).$$

On a

$$|g(u)| \leq c \|u\| \quad \forall u \in D(A).$$

Grâce au théorème de Hahn Banach forme analytique on sait que g peut être prolongée à une application linéaire $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$|f(u)| \leq c \|u\| \quad \forall u \in H.$$

Par suite $f \in H'$. On remarquera que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur H et que $D(A)$ est dense.

On pose

$$A^*v = f.$$

Il est clair que A^* est linéaire.

Définition 1.2.4 *L'opérateur qu'on la note par $A^* : D(A^*) \subset H' \rightarrow H'$ est appelé l'adjoint de l'opérateur A . est défini par*

$$\langle v, Au \rangle_{H',H} = \langle A^*v, u \rangle_{H',H} \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Un opérateur A est dit auto-adjoint si $A = A^$.*

Proposition 1.2.1 *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non-borné à domaine dense. Alors A^* est fermé. i.e. $G(A^*)$ est fermé dans $H' \times H'$.*

1.2.3 Opérateurs compacts

Définition 1.2.5 *On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est compact si $A(B_H)$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $K(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts.*

Théorème 1.2.2 *L'ensemble $K(H)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(H)$ (pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H)}$).*

Définition 1.2.6 On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est de rang fini si $\dim R(A) < \infty$.

Remarque 1.2.3 Tout opérateur continue de rang fini est compact.

Corollaire 1.2.1 Soit (A_n) une suite d'opérateurs continus de rang finis de H dans H et soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tels que $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)} \rightarrow 0$. Alors $A \in \mathcal{L}(H)$.

1.2.4 Spectre d'un opérateur compact

Définition 1.2.7 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. L'ensemble résolvant est

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (A - \lambda I) \text{ est bijective de } H \text{ sur } H\}.$$

Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$.

On dit que λ est valeur propre et on note $\lambda \in VP(A)$ si

$$N(A - \lambda I) = 0;$$

$N(A - \lambda I) = 0$ est l'espace propre associé à λ .

Il est importante de retenir que si $\lambda \in \rho(A)$ alors $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

Proposition 1.2.2 Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|].$$

Théorème 1.2.3 On suppose que H est séparable. Soit A un opérateur auto-adjoint compact.

Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de A .

1.3 L'espace de Sobolev

1.3.1 Dérivées d'une distribution

Soit une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée est continue par morceaux. Alors $f \in L^1_{loc}(a, b)$ et on voit qu'on peut associer à la dérivée f' une distribution T_f , définie par

$$\begin{aligned}\langle T_f, \phi \rangle &= \int_a^b f'(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in D(a, b) \\ &= [f\phi]_a^b - \int_a^b f(x) \phi'(x) dx \\ &= - \int_a^b f(x) \phi(x) dx = - \langle T_f, \phi \rangle.\end{aligned}$$

Les définitions suivantes généralisent la notion d'une dérivée d'une distribution:

Définition 1.3.1 $T^{(n)}$, la dérivée d'ordre n d'une distribution T est définie par

$$\langle T^{(n)}, \phi \rangle := (-1)^n \langle T, \phi^{(n)} \rangle$$

Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la dérivée partielle de T par rapport au multi-indice α est donnée par

$$\left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x^\alpha}, \phi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x^\alpha} \right\rangle \quad \forall \phi \in D(\Omega)$$

On note que pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dont la dérivée est continue par morceaux,

$$\langle T_f, \phi \rangle = - \int_a^b f \phi' dx = \langle T_{f'}, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in D(\Omega) \Rightarrow T'_f = T_{f'}.$$

Définition 1.3.2 (Dérivée faible ou au sens des distributions) Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ associé à une distribution T_f donnée par

$$\langle T_f, \phi \rangle := \int_\Omega f(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Supposons qu'il existe une fonction $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} T_f}{\partial x^\alpha}, \phi \right\rangle = \int_\Omega g(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Alors on dit que la α -ième dérivée distributionnelle de f (ou, tout simplement, la α -ième dérivée faible de f) est représentable par une fonction intégrable g . On la notera dans la suite par $g = D^\alpha f$.

La définition de la dérivée $D^\alpha f$ coïncident avec la définition classique de la dérivée partielle lorsque celle-ci existe.

1.3.2 Définition des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.3.3 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$\begin{aligned} \exists g_1, g_2, \dots, g_N &\in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ W^{1,p}(\Omega) &= \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right. \right\} \end{aligned}$$

on pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente $\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (si $1 \leq p < \infty$).

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2};$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Proposition 1.3.1 *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ est séparable pour $1 \leq p \leq \infty$.*

L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

Exemple 1.3.1

1. $W_2^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}$. $W_2^k(\Omega)$ est plus souvent connu sous le nom $H^k(\Omega)$.
2. $H^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3, \dots, N\right\}$ où on a abusé la notation $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ pour vouloir dire que la dérivée est au sens des distributions.
3. $H^1(\Omega) \supset H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. On peut définir un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$ sur $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx,$$

et ainsi une norme induite

$$\|u\|_{1,\Omega} = ((u, u)_{1,\Omega})^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.3.4 *Soit $1 \leq p \leq \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induite par $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable; il est réflexif si $1 < p < \infty$. H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1 .

1.3.4 Injections de Sobolev

Théorème 1.3.1 (*Injections de Sobolev*) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On suppose que Ω est un borné à frontière lipschitzienne ou que $\Omega = \mathbb{R}^N$.

1. Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, avec $p^* = \frac{Np}{N-p}$, et l'injection est continue, c.à.d. qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$. $\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$: on note ceci

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) :$$

on a en particulier

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega) \text{ et } W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ pour } N = 1.$$

2. Si $p > N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$$

où, pour $\alpha < 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions holdériennes d'exposant α défini par

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C(\Omega, \mathbb{R}), \exists k \in \mathbb{R} : |u(x) - u(y)| \leq k \|x - y\|^\alpha, \forall (x, y) \in \Omega^2\}.$$

Chapitre 2

Illustration et Motivation

2.1 L'équation de la chaleur

Sur l'espace $X = L^2(\Omega = (0, 1) \times [0, T])$, on considère le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, t \in [0, T], x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Notons que $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable. Considérons l'opérateur $A = \frac{d^2}{dx^2}$ en $L^2(\Omega)$ dont le domaine de définition

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

où $H^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont les espaces de Sobolev suivants

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega), u(0, t) = u(1, t) = 0 \right. \right\}, \\ H^2(\Omega) &= \left\{ u \in H^1(\Omega) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(\Omega) \right. \right\}. \end{aligned}$$

L'opérateur A a un inverse auto-adjoint et compact, donc son spectre se compose de valeurs propres discrètes.

Preuve. En effet: soit $v \in L^2(\Omega), u \in D(A)$. On supposant que $v(0, t) = v(1, t) = 0$

$$\begin{aligned}
\langle Au, v \rangle &= \left\langle \frac{d^2 u}{dx^2}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_{\Omega} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \overline{v(x)} dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} v(x) dx \\
&= \left[\frac{du(x)}{dx} v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx \\
&= \left[\frac{du(x)}{dx} v(x) \right]_0^1 - \left[\frac{dv(x)}{dx} u(x) \right]_0^1 + \int_0^1 u(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx \\
&= \int_{\Omega} u(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx \\
&= \left\langle u, \frac{d^2 v}{dx^2} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \langle u, A^* v \rangle
\end{aligned}$$

Donc l'adjoint de $A = A^* = \frac{d^2}{dx^2}$. ■

Les fonctions propres et les valeurs propres de $-A$ peuvent être obtenues en résolvant

$$\frac{d^2 e_k}{dx^2} = -\mu_k e_k, e_k(0) = e_k(1) = 0, k \in \mathbb{N}$$

qui donne

$$\frac{d^2 e_k}{dx^2} + \mu_k e_k = 0, e_k(0) = e_k(1) = 0, k \in \mathbb{N}$$

c'est une équation différentielle du deuxième ordre, dont leur solution sont

$$e_k(x) = c_1 \cos \sqrt{\mu_k} x + i c_2 \sin \sqrt{\mu_k} x,$$

comme $e_k(0) = e_k(1) = 0$, on trouve

$$\mu_k = k^2 \pi^2 > 0, e_k = \sqrt{2} \sin k\pi x, k \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ forme une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$, alors $f \in L^2(\Omega)$ peut être s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k, \text{ où } f_k = (f, e_k)_{L^2(\Omega)}.$$

et nous avons

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.1.1 L'existence et l'unicité de la solution

Théorème 2.1.1 Si $u^0 \in L^2(\Omega)$ et $u(t) \in L^2(\Omega)$ pour chaque $t \in [0, T]$, alors le problème admet une solution unique donnée par

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k t} u_k^0 e_k.$$

Preuve. En supposant que $u^0 \in L^2(\Omega)$ et $u(t) \in L^2(\Omega)$ pour chaque $t \in [0, T]$, nous écrivons

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k, \text{ et } u^0 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 e_k.$$

Alors l'équation en (2.1.1) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= 0, t \in [0, T], x \in \Omega \\ \frac{\partial \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k}{\partial x^2} &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k \sqrt{2} \sin k\pi x}{\partial t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k \sqrt{2} \sin k\pi x}{\partial x^2} &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t} e_k + \sum_{k=1}^{\infty} u_k k^2 \pi^2 \sqrt{2} \sin k\pi x &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} e_k + u_k \mu_k e_k \right) &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \mu_k \right) e_k &= 0 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \mu_k &= 0, k \in \mathbb{N}, \\ u_k(0) &= u_k^0, \end{aligned}$$

et la solution unique de ce problème est

$$u_k(t) = u_k^0 e^{-\mu_k t}.$$

De

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k t} u_k^0 e_k.$$

on obtient l'unicité. Comme $u^0 \in L^2(\Omega)$, alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |e^{-\mu_k t} u_k^0|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^0|^2 e^{-2\mu_k t} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^0|^2 < \infty, \quad (2.1.2)$$

donc, pour tout $t \in [0, T]$, $u(t) \in L^2(\Omega)$. ■

2.1.2 La régularisation par rapport à t .

Proposition 2.1.1 *Si $u \in C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$, l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeur en $L^2(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|f\|_{C\{[0, T], L^2(\Omega)\}} = \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^1 |f(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

alors la solution est dans $C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$,

Preuve. En effet l'estimation

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=m}^{m+p} |u_k(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=m}^{m+p} |u_k^0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall m \geq 1, p > 0,$$

on montre que la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$ est de Cauchy dans $C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$.

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$ est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, p \geq n_0, \quad \left\| \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) - \sum_{p=1}^{\infty} u_p(t) \right\| \leq \epsilon$$

ce qui implique que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$ est une suite de Cauchy dans $C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$.

Comme $L^2(\Omega)$ est un espace de Banach, alors $C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$ l'est aussi, donc toute série de Cauchy dans $C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$ est une série convergente. d'où

$$u \in C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$$

■

Proposition 2.1.2 *La solution du problème de Cauchy vérifiée*

1) $u(0) = u^0$ dans $L^2(\Omega)$,

2) $u \in L^2\{[0, T], H_0^1(\Omega)\}$.

Preuve. (1) Comme

$$|u_k(t) - u_k^0|^2 \leq |u_k^0|^2 (1 - e^{-\mu_k t})^2,$$

On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t) - u_k^0|^2 \leq (1 - e^{-\mu_N t})^2 \sum_{k=1}^N |u_k^0|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k^0|^2,$$

Où N est assez grand. Cela implique que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (u(t) - u^0) = 0 \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et donc

$$u(0) = u^0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

(2) On dit que $v \in H_0^1(\Omega)$ si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |v_k|^2 < \infty, \text{ ou } v_k = (v, e_k).$$

De

$$|u_k(t)|^2 \leq |u_k^0|^2 e^{-2\mu_k t}, k \in \mathbb{N}$$

donc

$$\int_0^T |u_k(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u_k^0|^2 e^{-2\mu_k t} dt \leq \frac{1}{\mu_k} |u_k^0|^2,$$

qui implique

$$\int_0^T \left(\sum_{k=m}^{m+p} \mu_k |u_k(t)|^2 \right) dt \leq \sum_{k=m}^{m+p} |u_k^0|^2, \forall m \geq 1, p > 0,$$

et donc

$$\int_0^T \left(\sum_{k=m}^{\infty} \mu_k |u_k(t)|^2 \right) dt < \infty,$$

c'est à dire $u \in L^2 \{[0, T], H_0^1(\Omega)\}$ pour tout $u^0 \in L^2(\Omega)$. ■

Notons que si $u^0 \in H_0^1(\Omega)$, alors la série $\sum_{k=m}^{\infty} \mu_k |u_k^0|^2$ est convergente, et puisque

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=m}^{m+p} \mu_k |u_k(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=m}^{m+p} \mu_k |u_k^0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall m \geq 1, p > 0,$$

nous avons $u \in C \{[0, T], H_0^1(\Omega)\}$.

Enfin, nous discutons dans quel sens l'équation (2.1.1) est satisfaite.

2.1.3 La solution faible

Définition 2.1.1 On dit que la fonction u définie par

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k t} u_k^0 e_k.$$

est satisfait l'équation du problème (2.1.1) au sens faible si

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot), v) + a(u(\cdot), v) = 0, \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega), \quad (2.1.3)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

Théorème 2.1.2 Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, le problème de Cauchy admet une solution faible.

Preuve. On pose $U_m(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t) e_k$, et $U'_m = \sum_{k=1}^m \frac{du_k}{dt} e_k$. De

$$\frac{du_k}{dt} + \mu_k u_k = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

on a

$$(U'_m(t), e_k) + a(U_m(t), e_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (2.1.4)$$

Maintenant fixer $k < m$, et soit $\phi \in D(0, T)$ (l'espace de Schwartz des fonctions de test).

Multiplier (2.1.3) par ϕ et intégrant par parties, nous obtenons

$$-\int_0^T (U_m(t), e_k) \phi'(t) dt + \int_0^T a(U_m(t), e_k) \phi(t) dt = 0.$$

Comme $U_m \rightarrow_{m \rightarrow \infty} U$ uniformément sur $[0, T]$, nous avons que la fonction $t \rightarrow (U_m(t), e_k) \phi'(t)$ converge vers la fonction $t \rightarrow (u(t), e_k) \phi'(t)$, et par conséquent

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (U_m(t), e_k) \phi'(t) dt = \int_0^T (u(t), e_k) \phi'(t) dt.$$

De $u \in L^2\{[0, T], H_0^1(\Omega)\}$ et

$$\left| \int_0^T a(U_m(t) - u(t), e_k) \phi(t) dt \right| \leq k \int_0^T \|U_m(t) - u(t)\|^2 dt,$$

on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T a(U_m(t), e_k) \phi(t) dt = \int_0^T a(u(t), e_k) \phi(t) dt.$$

Ainsi, pour tout e_k , nous avons

$$-\int_0^T (u(t), e_k) \phi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), e_k) \phi(t) dt = 0,$$

Et puisque le système $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ est dense en $H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$-\int_0^T (u(t), v) \phi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \phi(t) dt = 0, \quad (2.1.5)$$

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et $\phi \in D(0, T)$. Ainsi, nous concluons que, pour $u^0 \in L^2(\Omega)$, la fonction u , définie par la formule (2.1.2), satisfait à l'équation (2.1.1) dans le sens faible. ■

2.1.4 La solution au sens des distributions

Définition 2.1.2 On dit que la fonction u définie par (2.1.2) est satisfait l'équation du problème (2.1.1) au sens de distribution si

$$\langle (u(\cdot), v), \phi \rangle = \langle a(u(\cdot), v), \phi \rangle = \int_0^T a(u(t), v) \phi(t) dt, \text{ pour tout } \phi \in D(0, T),$$

Aussi, nous pouvons réécrire l'équation variationnelle (2.1.3) en termes de distributions à la fois dans les variables temporelles et spatiales. Puisque $D(\Omega)$ est dense en $H_0^1(\Omega)$, on peut choisir $v \in D(\Omega)$, et (2.1.3) équivaut à

$$-\int_{\Omega_T} u(x, t) v(x) \phi'(t) d(x, t) - \int_{\Omega_T} u(x, t) v''(x) \phi(t) d(x, t) = 0, \quad (2.1.6)$$

Où $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ et $d(x, t) = dx dt$. L'ensemble $\psi = v \otimes \phi := v(x) \phi(t)$, alors $\psi \in D(\Omega_T)$ et (2.1.6) devient

$$-\int_{\Omega_T} u \frac{\partial \psi}{\partial t} d(x, t) - \int_{\Omega_T} u \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} d(x, t) = 0, \quad (2.1.7)$$

pour tout $\psi \in D(\Omega_T)$ avec $v \in D(\Omega)$, $\phi \in D(0, T)$. Comme l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions $v \otimes \phi$ avec $v \in D(\Omega)$, $\phi \in D(0, T)$, est dense dans $D(\Omega_T)$, nous avons que (2.1.6) détient pour tous $\psi \in D(\Omega_T)$:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \psi \right\rangle = 0, \forall \psi \in D(\Omega_T), \quad (2.1.8)$$

donc l'équation (2.1.1) est satisfaite dans le sens des distributions en Ω_T . Ainsi, nous avons démontré que la formule variationnelle (2.1.6) implique la formule (2.1.5) de distribution (2.1.8). Ainsi, la convergence n'est pas vraie dans cet exemple car nous savons que u avait des valeurs dans $H_0^1(\Omega)$.

Maintenant, si nous supposons une certaine régularité pour u^0 , dites-le $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ (ou $D(A)$),

puis

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2 \{[0, T], L^2(\Omega)\} \text{ and } Au \in L^2(\Omega).$$

Alors, dans ce cas l'équation en (2.1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au$$

Est satisfait en $L^2 \{[0, T], L^2(\Omega)\}$ et nous disons que u est une solution forte du problème de Cauchy (2.1.1).

Chapitre 3

L'équation des ondes

3.1 L'équation des ondes

Sur l'espace $X = L^2(\Omega = (0, 1) \times [0, T])$, on considère le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, t \in [0, T], x \in \Omega = (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x), \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

Soit

$$u^0 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 e_k, \quad u^1 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^1 e_k,$$

où $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ les valeurs propres d'un opérateur $A = \frac{d^2}{dx^2}$ dont le domaine de définition

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

forment une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$.

3.1.1 L'existence et l'unicité de la solution

On prend la solution de (3.1.1) dans $L^2(\Omega)$ solution on pose

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k.$$

Théorème 3.1.1 Si $u^0 \in L^2(\Omega)$, $u^1 \in H^{-1}(\Omega)$, alors le problème admet une solution unique donnée par

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k.$$

pour chaque $t \in [0, T]$

Preuve. L'unique solution de ce problème

$$\begin{aligned} \frac{du_k^2}{dt^2} + \mu_k u_k &= 0, & k \in \mathbb{N} \\ u_k(0) &= u_k^0, & u_k'(0) = u_k^1, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

est

$$u_k(t) = u_k^0 \cos(\sqrt{\mu_k} t) + u_k^1 \frac{\sin(\sqrt{\mu_k} t)}{\sqrt{\mu_k}}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.1.3)$$

Donc la solution du (3.1.1) est sous la forme

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\sqrt{\mu_k} t) u_k^0 e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu_k} t)}{\sqrt{\mu_k}} u_k^1 e_k. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

■

3.1.2 La solution au sens faible

Théorème 3.1.2 Si $u^0 \in L^2(\Omega)$, $u^1 \in H^{-1}(\Omega)$, alors la fonction u définie par (3.1.4) est satisfait l'équation du problème (3.1.1) au sens faible. Tel que $H^{-1}(\Omega) = \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$, et on a l'injection continue suivant

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Preuve. On dit que $u^0 \in L^2(\Omega)$ et $u^1 \in H^{-1}(\Omega)$ si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k^0|^2 < \infty \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u_k^1|^2}{\mu_k} < \infty,$$

respectivement. sous ces hypothèses, la série

$$U_m(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot) e_k$$

est de Cauchy dans $C \{[0, T], L^2(\Omega)\}$ puis

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_k(t)|^2 \leq 2 \left(|u_k^0|^2 + \frac{|u_k^1|^2}{\mu_k} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

De plus, comme

$$u'_k(t) = \sqrt{\mu_k} u_k^0 \sin(\sqrt{\mu_k} t) + u_k^1 \cos(\sqrt{\mu_k} t),$$

on a

$$\frac{1}{\mu_k} \sup_{t \in [0, T]} |u'_k(t)|^2 \leq 2 \left(|u_k^0|^2 + \frac{|u_k^1|^2}{\mu_k} \right), \quad k \in \mathbb{N}$$

donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $p \geq 0$

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|U'_{m+p}(t) - U'_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &= \sup_{t \in [0, T]} \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{|u'_k(t)|^2}{\mu_k} \\ &\leq 2 \sum_{k=m+1}^{m+p} \left(|u_k^0|^2 + \frac{|u_k^1|^2}{\mu_k} \right), \end{aligned}$$

et

$$U'_m(\cdot) = \sum_{k=1}^m u'_k(\cdot) e_k$$

est une série de Cauchy dans $C \{[0, T], L^2(\Omega)\}$. Donc on a démontré que U_m et U'_m converge vers

$$u \in C \{[0, T], L^2(\Omega)\} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in C \{[0, T], H^{-1}(\Omega)\},$$

respectivement, comme

$$U_m(0) = \sum_{k=1}^m u_k^0 e_k, \quad U'_m(0) = \sum_{k=1}^m u_k^1 e_k,$$

on a

$$u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u^1.$$

Donc, la fonction u définie par (3.1.4) est satisfait l'équation du problème (3.1.1) au sens faible. ■

3.1.3 La solution au sens des distributions

Théorème 3.1.3 Si $u^0 \in H_0^1(\Omega)$, $u^1 \in L^2(\Omega)$, alors la fonction u définie par (3.1.4) est satisfait à l'équation du problème (3.1.1) au sens de distribution et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et $\phi \in D(0, T)$ on a

$$-\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) \phi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \phi(t) dt = 0,$$

Preuve. Dans ce cas on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |u_k^0|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^1|^2 < \infty,$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mu_k |u_k(t)|^2 &\leq 2 \left(\mu_k |u_k^0|^2 + |u_k^1|^2 \right), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sup_{t \in [0, T]} |u_k'(t)|^2 &\leq 2 \left(\mu_k |u_k^0|^2 + |u_k^1|^2 \right), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

qui implique que

$$u \in C \{ [0, T], H_0^1(\Omega) \} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in C \{ [0, T], L^2(\Omega) \},$$

avec $u(0) = u^0$, et $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u^1$. On note que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C \{ [0, T], H^{-1}(\Omega) \},$$

comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_k} \sup_{t \in [0, T]} |u_k''(t)|^2 &\leq \mu_k \sup_{t \in [0, T]} |u_k(t)|^2 \\ &\leq 2 \left(\mu_k |u_k^0|^2 + |u_k^1|^2 \right), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

De façon similaire de l'équation de la chaleur, on écrit

$$(U_m''(t), e_k) + a(U_m(t), e_k) = 0, 1 \leq k \leq m.$$

Soit $\phi \in D(0, T)$, alors pour tout constante $k < m$, on a

$$-\int_0^T (U_m'(t), e_k) \phi'(t) dt + \int_0^T a(U_m(t), e_k) \phi(t) dt = 0.$$

La convergence uniforme de U_m vers u dans $C\{[0, T], H_0^1(\Omega)\}$ implique que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T a(U_m(t), e_k) \phi(t) dt = \int_0^T a(u(t), e_k) \phi(t) dt,$$

et la convergence uniforme de U'_m vers $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans $C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$ donne

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (U'_m(t), e_k) \phi'(t) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), e_k \right) \phi'(t) dt.$$

On conclue que u satisfait l'équation du problème (3.1.1) au sens suivant

$$- \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) \phi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \phi(t) dt = 0,$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et $\phi \in D(0, T)$. ■

D'autre part, l'équation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot), v \right) + a(u(\cdot), v) = 0$$

est satisfait dans $D'(0, T)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. De (3.1.2) on obtient

$$\int_0^T (U_m(t), e_k) \phi''(t) dt - \int_0^T (U_m(t), Ae_k) \phi(t) dt = 0,$$

pour tout constante $k < m$ et pour tout $\phi \in D(0, T)$, alors

$$\int_0^T (u(t), e_k) \phi''(t) dt - \int_0^T (u(t), Ae_k) \phi(t) dt = 0,$$

pour tout constante $k < m$ et pour tout $\phi \in D(0, T)$. Comme $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ forme une base Hilbertienne dans $D(A)$, on obtien

$$\int_0^T (u(t), v) \phi''(t) dt - \int_0^T (u(t), Av) \phi(t) dt = 0,$$

pour tout $v \in D(A)$, d'autre part, l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(\cdot), v) = (u(\cdot), Av)$$

est satisfait dans $D'(0, T)$ pour tout $v \in D(A)$

Remarque 3.1.1 Si $u^0 \in D(A)$, $u^1 \in H_0^1(\Omega)$.

on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 |u_k^0|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |u_k^1|^2 < \infty.$$

Donc (3.1.5) implique la convergence uniforme de U_m'' vers $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, et AU_m vers Au , dans l'espace $C\{[0, T], L^2(\Omega)\}$. Donc la fonction u définie par (3.1.4) est satisfait l'equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au(t)$$

dans $L^2(\Omega)$.

Bibliographie

- [1] **A. V. Bitzadze**, Urawnienija matematicheskoy ziki, M., Nauka, 1976.
- [2] **A. Bouziani**, On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, T.X, 1999, p. 61-77.
- [3] **A. Bouziani**, Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, T. VIII, 1997, p. 53-70.
- [4] **J. R. Cannon**, The solution of the heat equation subject to specification of energy. Quart. Appl. Math., 21, n2, 155-160, 1963.
- [5] **D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili**, On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary problems for one-dimensional medium oscillation equations, Matem. Modelirovanie, 12, N. 1, 2000, 94-103.
- [6] **I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik**, Tables of integrals, sums, series and products, M., 1963.
- [7] **A. K. Gushin, V. P. Mikhailov**, On solvability of nonlocal problems for second-ordered elliptic equation, Matem. Sbornik, V. 185, 1994, p. 121-160.
- [8] **V. A. Ilyin**, Necessary and sufficient properties of being a basis of a subsystem of eigenfunctions and adjoint functions for Keldysh bundle for ordinary differential operators, Doklady Acad. Nauk SSSR, 227, N. 4, 1976, p. 796-799.

-
- [9] **N. I. Ionkin**, Solutions of boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, *Differents. Uravn.*, Vol. 13, N2, 1977, p. 294-304.
- [10] **L. I. Kamynin**, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with nonclassical boundary condition, *Z. Vychisl. Mat. Fiz.*, 4, N6, 1964, p. 1006-1024.
- [11] **M. V. Keldysh**, On eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of not self-adjoint equations, *Doklady Acad. Nauk SSSR*, 87, 1951, p. 11-14.
- [12] **S. Mesloub, A. Bouziani**, On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, Vol. 22, No. 3, 1999, pp. 511-519.
- [13] **B. P. Paneiah**, On certain nonlocal boundary problems for linear differential operators, *Matem. zametki.*, 1984, v. 35, N.3, p. 425-434.
- [14] **L. S. Pulkina**, A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations, *Electron. J. Differ. Eqns.*, Vol. 1999(1999), No. 45, 1-6.
- [15] **L. S. Pulkina**, On solvability in L_2 of nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, *Differents. Uravn.*, V. N. 2, 2000.
- [16] **A. A. Samarskii**, Some problems in differential equations theory, *Differents. Uravn.*, Vol. 16, n11, 1980, p. 1221-1228.
- [17] **A. L. Skubachevski, G. M. Steblov**, On spectrum of differential operators with domain nondense in L_2 , *Dokladi AN USSR*, 1991. v. 321, N.6, p. 1158-1163.
- [18] **N. I. Yurchuk**, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, *Differents. Uravn.*, Vol. 22, N. 12, 1986, p. 2117-2126.
- [19] **Haim Brezis**, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*