UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option:** Mathématiques appliquées et discrètes

Par

**Aichaoui Daifa**

**SUJET**

# CALCULABILITÉ ET FONCTIONS RÉCURSIVES

**Soutenu publiquement le :** 23/06/2013 **devant le jury composé de :**

| | | |
|---|---|---|
| N. MIDOUNE | Président | M.C/B Université de M'sila |
| D. MIHOUBI | Rapporteur | Prof. Université de M'sila |
| N. GHADBANE | Examinateur | M.A/A. Université de M'sila |

**Promotion : 2012 / 2013**

# Table des matières

# Introduction

L'objectif dans ce mémoire Master est l'étude de quelques notions sur la calculabilité que les anglo-saxons désignent par "Theory of computation". Cette théorie s'intéresse géneralement aux trois questions fondamentales suivantes:

1. Quels problèmes peut-on (pratiquement) résoudre à l'aide d'un ordinateur ? telle est la question centrale que pose la théorie de calculabilité.

2. Existe-t-il un meilleur algorithme pour un problème démontré soluble? On peut comparer les algorithmes entre eux, on a ce qu'on appelle une hiérarchie de complexité.

3. Existe-t-il un algorithme pour résoudre tel ou tel problème ? c'est la question que pose la théorie de la décidabilité.

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude d'un modèle de calcul qui est les fonctions récursives dont l'origine débute depuis les années 1930 par l'étude de la notion de processus effectif de calcul. Différents modèles équivalents pour cette notion ont vue le jour: à l'aide des fonctions récursives par Gödel et Kleene, le $\lambda$ calcul par Church (1936), les systèmes de post (1936-37) et enfin les Machines de Turing par Turing (1936-37). Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des fonctions récursives qui sont obtenu à partir des fonctions de base et les constructeurs : composition, récursion et la minimisation.

Notre travail est organisé en quatre chapitres:

1. Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions sur la calculabilité.

2. Dans le deuxième chapitre nous étudions les fonctions et les prédicats primitifs récursifs.

3. Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une fonction non primitive récursive, qui est la fonction d'Ackremann.

4. Dans le quatrième chapitre nous étudions un autre modèle de calcul qui est la machine de Turing.

## Conclusion

Dans ce mémoire, on a vue l'étude des fonctions récursives qui est une modèle de calcul construit à partir de trois fonctions de bases et les trois opérateurs: composition, récursion et minimisation.

Toute fonction calculable mécaniquement (à l'aide d'un algorithme) peut être obtenue par ces fonctions de bases et ces constructeurs.

On présente aussi un autre modèle plus puissant qui sont les machines de Turing.

# Bibliographie


[1] B. Mariou. *Logique et complexité,* Cours university Paris 8, 2005.

[2] Ch. Boitet. *Récursivité, calculabilité, application à la théorie des langages: notes de cours -Grenoble* : Université scientifique et médicale, 1983, 1987.

[3] D. Davis, J. weyuker. *Computability, Complexity, and Languages* Academic Press, 1983.

[4] D. Lascar. *Logique mathématique*, tome 2. René Cori, 2011-2012.

[5] E. Asarin. *Calculabilité,* Cours université de Grenoble, 2003.

[6] G A. Giraldi. *Concepts in Theory of Computation and Applications for Automata-Based Modeling*, Petrópolis, RJ - Brasil, 2005.

[7] H. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, MIT Press, 1987.

[8] J. Hein. *Discrete Structures, Logic, and Computability,* Portland State University, 1995.

[9] J-P. Delahaye. *Calculabilité et décidabilité,* Cours université des Sciences et Technologies de Lille Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille.

[10] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation, Second Edition,* Thomson, 2006.

[11] P. Wolper. *Introduction à la calculabilité : Cours et exercices corrigés*, 2e édition, Dunod, 2001.

# Résumé

Ce travail constitue une introduction à la théorie de la calculabilité .

Le contenu est composé de quatres chapitres. Le premier «Notions sur la calculabilité» présente les notions génédreaux de la calculabilité. Le deuxième «Fonctions et prédicats primitifs récursifs» donne des définitions formelle des fonctions et prédicats primitifs récursifs et on donnons quelque exemples.

Le troisième chapitre est un «Étude d'une fonction non primitive récursive» on particulions la fonction d'Ackremann.

Le dernier chapitre «Fonctions récursives et machines de Turing» on utilisons un autre modèle du calcul pour étudier les fonctions primitives récursives.



# Abstract

This work provides an introduction to the theory of computability.

The content consists of four chapters. The first "Basics computability" presents the notions of computability-generous. The second "Functions and primitive recursive predicates" gives formal definitions of functions and primitive recursive predicates and give some examples.

The third chapter is a "Study of a non-primitive recursive function" based on the Ackremann partécullions.

The last chapter "recursive functions and Turing machines" we use another model of computation to study the primitive recursive functions.