Table des matières

NOTATIONS

•$C(\Omega)$: Espace des fonctions continues sur l'intervalle Ω.

•$\mathbb{P}_n(\Omega)$: Espace des polynômes sur l'intervalle Ω.

• $\langle .,. \rangle$: Produit scalaire.

•L_j : fonction de base de Lagrange et de Newton.

•A : Opérateur linéair continu.

•$\omega(x)$: Fonction de poids.

•P_n : Polynôme orthogonaux.

•$K(x,t)$: Noyau d'opérateur intégrale.

•$e_n(x)$:l'erreur d'interpolation.

•$\Pi f(x)$:l'interpolation de fonction f.

•$\Pi^h f(x)$:interpolation linéaire par morceaux.

•$S_n(f)$: la série de fourier de f.

•$\tilde{\varphi}$:l'approximation de φ sur l'espace polynômiale.

Introduction

En Mathématique, pour calcul d'un intégrale on utilise la théorie des formules de la quadrature pour un calcul approché à la solution exact, cette méthode et basé sur la décomposition de l'intervalle et calcul les valeurs en certain nœud. Comme

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j \varphi(x_j)$$

Il existe plusieurs méthode pour le calcul approché par exemple les méthodes de projection (Collocation, Galérkin) et la méthode de Nyström.

Pour l'étude de la convergence de ces méthodes on utilise la théorème de Banach-Steinhaus 2 qui utilisé par l'école de Russie, par contre on se trouve que la théorème de Banach-Steinhaus 1 utilisé par des autres écoles.

Dans cette mémoire, on utilise la deuxième édition du théorème de Banach-Steinhaus.

Ce mémoire est réparti en deux chapitres :

Le premier chapitre consacré à l'approximation d'une fonction par l'interpolation, et l'erreur entre l'interpolation el la fonction exact est tend vers 0. On propose quelques types d'interpolation (interpolation de Lagrange, interpolation de Hermite, interpolation par morceaux, polynôme de Newton et polynôme de Chebyshev...), et on défini le phénomène de Runge et les choix des points d'interpolation pour obtenir la meilleure approximation.

Le deuxième chapitre présente quelques théorème du Banach-Steinhaus 1 et 2, la dernière est la base dans ce chapitre, comme l'application du théorème pour étude la convergence des méthodes numérique. On peut applique cette théorème sur les formules de quadrature et sur les série de fourier, Sur les méthodes de projection (collocation), et la méthode de Nyström.

Chapitre 1

Interpolation et Approximation

Ce chapitre est présenter quelque types de l'interpolation des fonction comme (interpolation de Lagrange, interpolation de Hermite, interpolation par morceaux, polynôme de Newton et polynôme de Tchebyshev), on utilise les interpolation pour obtenir la meilleur approximation pour simplification de calcul dans les méthodes numérique.

1.1 Introduction :

La problématique de l'interpolation est la suivante : On cherche une fonction la plus simple possible (polynômes, polynômes par morceau,...) qui vérifie certaines contraintes typiquement :

1. On pose la valeur y_i de la fonction sur une famille des points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$.
2. On impose la valeur g_i de la dérivée de la fonction en ces même points.

Définition 1.1

L'interpolation est une opération consistant à approcher une courbe qui n'est connue que par la donnée d'un nombre fini des points (ou une fonction à partir de les donnée d'un nombre fini des valeurs).

Définition 1.2

Suppose que la fonction $f(x)$ est connue à $(N+1)$ points $(x_0, f_0), (x_1, f_1), ..., (x_n, f_n)$, où les points pivots x_i répartie sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$, et $f_i = f(x_i)$, et le polynôme p d'ordre n associée à la fonction f est vérifié ce condition

$$p(x_i) = f(x_i)......(1)$$

On écrit alors,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \qquad (2)$$

Puis trouver la valeur de la fonction à tout points ; cette opération noté l'interpolation.

Définition 1.3

Soit T la matrice de Vandermonde associée aux points $x_0, x_1, x_2, ...x_n$.

si a et f sont des vecteurs : $a = [a_0, a_1, ..., a_n]$,$f = [f_0, f_1, ..., f_n]$,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Nous pouvons écrire (2) sous forme matricielle :

$$Ta = f.....(3)$$

Ainsi, le problème consistant à cherche le polynôme p satisfaisant (1) peut se réduire à résoudre le système linéaire, c'est-à-dire à déterminer a puisque T et f sont connus.

1.2 Interpolation linéaire

On considère deux points (x_0, y_0), (x_1, y_1) avec

$$\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1) \end{cases}$$

pour déterminer le polynôme $p_1(x)$ de degré 1 (d'équation : $y = ax+b$) qui passe par deux points distinct (x_0, y_0),(x_1, y_1) on peut poser :

$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$, $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, On a $L_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$

Ainsi ; $p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$

$$p_1(x) = (\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0})x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

1.3 Interpolation de Lagrange

1.3.1 Base de Lagrange

Soit $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels donnés distincts, On définit $n+1$ polynômes L_i pour $i = 0$ à n par :

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Le numérateur de chacun de ces polynômes est un produit de n termes $(x - x_j)$, et est donc un polynôme de degré n le dénominateur est une constante, on a donc ;

1. L_i est un polynôme de degré n.
2. $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et $0 \leq j \leq n$.
3. $L_i(x_j) = 1$ si $i = j$.

Réciproquement, pour i fixé, il existe un unique polynôme L_i vérifiant les trois propriétés précédentes.

Définition 1.4 *(base de Lagrange)*

Les polynômes $L_i(x)$ sont les polynômes forment une base de Lagrange p_n associés aux points $x_0, x_1, ..., x_n$.

Exemple 1.5

Prenons $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

La base de Lagrange de P_2 associée aux points -1, 0 et 1 est formée par les polynômes L_0, L_1, L_2 définis par :

1. $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x.$
2. $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x1-x_0)(x_1-x_2)} = -(x+1)(x-1) = -x^2+1.$
3. $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{2}(x+1)x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$

1.3.2 Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, ...x_n$, $n+1$ réelles données distinctes.

Interpoler la fonction f par un polynôme de degré n aux points $x_0, x_1, ..., x_n$, consiste à résoudre le problème suivant :

$$(p1) : \begin{cases} \text{trouver un polynôme } p \text{ de degré } \leq n \\ p(x_i) = f(x_i) \ ,0 \leq i \leq n \end{cases}$$

Si un tel polynôme existe, ils'écrit de manière unique

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x)$$

Car les $L_i(x)$ forment une base de $\mathbb{P}_n$

en prenant $x = x_j$ pour $0 \leq j \leq n$ et en utilisant que $L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & si \ \ i \neq j \\ 1 & si \ i = j \end{cases}$

On obtient : $\qquad \alpha_j = p(x_j) = f(x_j)$

L'unique solution du problème $(p1)$ est donc,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Ce polynôme s'appelle l'interpolation de la fonction f de degré n aux points $x_0, x_1, ..., x_n$.

Remarque 1.6

1. *Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ est un polynôme de degré $\leq n$*
2. *Si l'on prend pour f le polynôme égale à 1, d'après la remarque précédente, f est égale à son interpolation et on obtient $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$*

• Le but de l'interpolation est de remplacer une fonction f plus moins compliquée par une fonction plus simple car polynômiale, mais pour justifier cet échange, il nous faut une estimation de l'erreur commise. On rappelle le théorème de **Rolle** :

Théorème 1.7 *(théorème de Rolle)*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue et dérivable sur* $[a, b]$ *telle que :* $f(a) = f(b)$*, alors il existe* $c \in]a, b[$ *telle que* $f'(c) = 0$*.*

Théorème 1.8

Il existe un unique $p \in \mathbb{P}_n = \{$*polynôme de degré* $n\}$ *tel que ;*
$p(x_i) = f(x_i) \quad$ *pour* $i = 0, 1, .., n$*.*

L'erreur d'interpolation de Lagrange :

Théorème 1.9 *(Erreur d'interpolation de Lagrange)*

Soit $f \in C^{n+1}([a, b])$*, alors pour tout* $x \in [a, b]$*, il existe* ξ_x *appartenant au plus petit intervalle fermé* I *contenant* $x_0, x_1, ..., x_n$*, tel que :*

$$\boldsymbol{e}_n(x) = f(x) - p_n(x) = K(x).\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

avec $K(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$.

Démonstration.

Si $x = x_i$, $\forall i = \overline{0, n}$, alors la relation est vérifiée

Si $x \neq x_i$, supposons que $g(t) = e_n(t) - \frac{K(t)}{K(x)} en(x)$, telle que g est de $\boldsymbol{C}^{(n+1)}$ comme f et s'annule pour $t = x, x_0, x_1, ..., x_n$, elle admet au moins $(n + 2)$ racines.

Le théorème de Rolle montre que g' admet au moins $(n + 1)$ racines dans $[a, b]$, D'où, la fonction $g^{(n+1)}$ admet au moins une racine dans $[a, b]$.

Soit ξ_x cette racine, on a :

$$g^{(n+1)} = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{K(x)} e_n(x) \Longrightarrow g^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{(n+1)!}{K(x)} e_n(x) = 0$$

donc,

$$e_n(x) = K(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

■

Corollaire 1.10 $\|f - p_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|K\| \left\| f^{(n+1)} \right\|$

• Ces formules montrent que la taille de l'erreur d'interpolation $f(x) - p_n(x)$ dépend à la fois de la quantité $\left\| f^{(n+1)} \right\|$, qui peut être grand si f oscille trop vite, et de la quantité $\|K\|$, qui est liée a la répartition des points x_i dans l'intervalle $[a, b]$.

1.4 Polynôme de Newton

Les polynôme $L_k(x)$ sont des base de Newton sont définis comme suite :

$L_i(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})$,$k = 1, 2, ..., n.$

avec pour une condition $L_0 = 1$, On obtient alors :

$L_1 = (x - x_0)$

$L_2 = (x - x_0)(x - x_1)$

$\vdots$

$L_n = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$

• L'ensemble des polynômes $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ forment une base de l'espace $\mathbb{P}_n$ des polynômes de degré au plus n, puisqu'il s'agit d'une famille de $(n + 1)$ polynômes de degré 0 à n.

• Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n relatif aux données$\{(x_0, f(x_0), ..., (x_n, f(x_n))\}$ s'écrit :

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

avec, $p_n(x_i) = f(x_i)$,$\forall i = 0, 1, ..., n.$

Il faut alors détermine les coefficients $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Définition 1.11 *(différences divisées)*

Soit f dont on connaît les valeurs en $n+1$ points, On appelle différences divisées d'ordre $0, 1, ..., n$ *les quantités :*

$\delta^0 f(x_k) = f(x_k)$,$\forall 0 \leq k \leq n$

$\delta^1 f(x_0, x_1) = \frac{\delta^0 f(x_1) - \delta^0 f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$\delta^2 f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\delta^1 f(x_1,x_2) - \delta^1 f(x_0,x_1)}{x_2 - x_0}$

$\vdots$

$\delta^2 f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{\delta^{n-1} f(x_1,x_2,...,x_n) - \delta^{n-1} f(x_0,x_1,...,x_{n-1})}{x_n - x_0}$

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n s'écrit alors à l'aide des différences divisées successives :

$$p_n(x) = \delta^0 f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \delta^k f(x_0, x_1, ..., x_k) L_k(x)$$

Remarque 1.12

Le polynôme d'interpolation de Newton conduit à la même estimation d'erreur que le polynôme de Lagrange.

1.5 Choix des points d'interpolation :

Le polynôme $K(x) = \sum_{j=0}^{n}(x - xj)$ est un polynôme de degré $(n+1)$ donc le coefficient de x^{n+1} est 1. Le meilleur choix de $\{x_i\}_{i=0,n}$ est alors les racines du polynôme $L(x)$ vérifiant : $\max\limits_{x\in[a,b]} |L(x)| \leq \max |q(x)|$,

$\forall q \in \mathbb{P}_{n+1}$ et $q(x) = x^{n+1} + a_n x^n + ...$

Nous allons voir que le polynôme de **Chebyshev** répondent à cette question**.**

Définition 1.13 *(polynôme de Chebyshev)*

On rappelle polynôme de Chebyshev de degré n le polynôme T_n défini sur $[-1, 1]$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Proposition 1.14 *Les points d'interpolation de Chebyshev d'ordre n sur* $[-1, 1]$ *sont les racines du polynôme de Chebyshev, qui correspondent aux points*

$$x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\Pi) \quad 0 \leq i \leq n$$

Les points de Chebyshev sur intervalle $[a, b]$ *que sont définis par :*

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(\frac{2i+1}{2n+2}\Pi), \ 0 \leq i \leq n$$

L'interpolation de **Chebyshev** est l'interpolation de Lagrange de f prise aux points de **Chebyshev**.

Définition 1.15 *(polynôme normalisé de Chebyshev)*

On appelle polynôme normalisé de Chebyshev, le polynôme $\overline{T_n}$ *définie par :*

$$\overline{T_n} = \frac{1}{2^{n-1}} T_n; n \geqslant 1$$

propriétés :

1. T_n est paire si n est paire, T_n est impaire si n est impaire.
2. Pour tous les entiers n, m, on a $T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x)$.
3. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) + T_{n-1}(x)$.

Exemple 1.16

1. $T_0(x) = 1$.
2. $T_1(x) = x$.
3. $T_2(x) = 2x^2 - 1$.
4. $T_3(x) = T_{2+1}(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$

L'erreur d'interpolation de Chebyshev :

Pour tout polynôme $p \in \mathbb{P}_n([-1, 1])$, on a

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{x \in [-1,1]} \left|\overline{T_n}(x)\right| \leq \sup_{x \in [-1,1]} |p(x)|$$

Théorème 1.17 *(erreur d'interpolation de Chebyshev)*

Sur l'intervalle $[a, b]$ *, en choisissant les points d'interpolation :*

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\Pi), 0 \leq i \leq n$$

On obtient la majoration suivante :

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}} \sup_{x \in [a,b]} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$$

1.6 Défaut d'interpolation polynômiale-phénomène de Runge

Le polynôme d'interpolation p ne converge pas toujours uniformément vers la fonction f quel que soit le choix des points d'interpolation. Un contre exemple célèbre a été proposé par Runge, on considère la fonction $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, la fonction f infiniment dérivable sur l'intervalle $[-1, 1]$, on a le graphe d'interpolation pour $n = 5$, $n = 10$ et la fonction f

• Nous observant que, au voisinage des extrémités de l'intervalle $[-1, 1]$, l'interpolant présente de grandes oscillations (instabilités numériques). Nous concluons donc qu'il n'est pas indiqué d'interpoler une fonction par un polynôme de degré n élevé en des points $x_0, x_1, ..., x_n$ équidistantes.

• Par contre, si nous choisissons les points dits de Chebyshev $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(\frac{(2i+1)}{2(n+1)}\Pi)$, pour construire l'interpolation p_n de f, alors l'erreur $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)|$ tend vers zéros lorsque n tend vers l'infini. on a le graphe d'interpolation d'ordre 10 et la fonction f

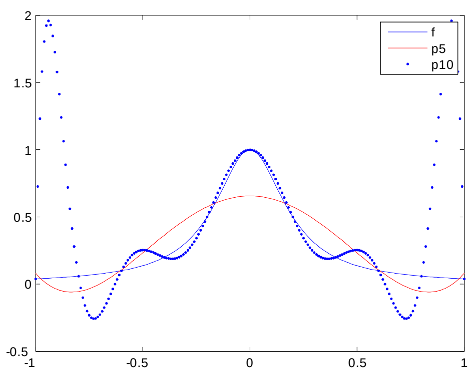

fig 1 :point equipartie

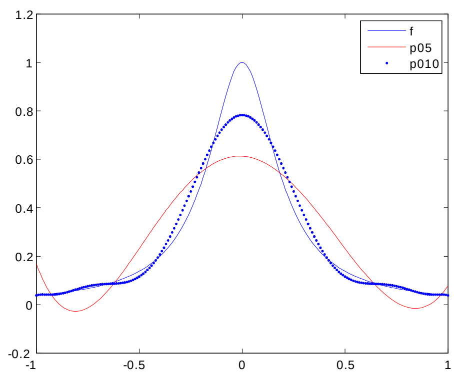

fig 2 :point de tchepychev

1.7 Interpolation d'Hermite

De la même manière que dans l'interpolation de Lagrange, on impose que le polynôme prenne un certain nombre de valeurs, mais de plus, on fixe les valeurs de dérivés en ces points. Soit $n+1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))$ pour $i = 0, ..., n$ où les x_i sont tous distincts ; on cherche un polynôme p tel que ;

$$(p2) : \begin{cases} p(x_i) = f(x_i) \\ p'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$$

Théorème 1.18 *(l'existence et l'unicité)*

Il existe un polynôme p unique de degré au plus $2n+1$ tel que

$$\begin{cases} p(x_i) = f(x_i) \\ p'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$$

est vérifie.

Démonstration. Unicité :

Supposons qu'il existe deux polynôme p et q de degré au plus $2n+1$ vérifie $(p2)$.

Le polynôme $r = p - q$, qui est aussi de degré au plus $2n+1$, admet chaque x_i comme racine double $(r(x_i) = r'(x_i) = 0)$. Il possède donc $2n+2$ racines au moins, r est donc polynôme nul.

Existence :

On montre que le polynôme p suivant satisfait les conditions précédent :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} K_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} M_i(x) f'(x_i)$$

où $K_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i^2$

$M_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x)$.

avec,$L_i(x) = \prod\limits_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ ■

Erreur d'interpolation :

Étude de l'erreur $\boldsymbol{e}_n = f(x) - p_n(x)$, pour tout $x \in [a, b]$

Théorème 1.19 *(erreur de l'interpolation d'Hermite)*

On considère le polynôme d'interpolation d'Hermite p_{2n+1}*, on suppose que* $f \in \boldsymbol{C}^{(2n+2)}([a,b])$ *alors pour tout* $x \in [a,b]$*, Il existe* ξ_x *appartenant au plus petit intervalle fermé* I *contenant* $x, x_0, x_1, ..., x_n$ *tel que :*

$$e_n(x) = f(x) - p_{2n+1}(x) = L_i^2(x)\frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}$$

avec, $L_i(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$

Exemple 1.20 *Soit* f *une fonction de* C^2 *sur l'intervalle* $I = [0,1]$*. Soit* $p(x)$ *un polynôme de degré* ≤ 3 *tel que*

$$\begin{cases} p(0) = f(0) \\ p(1) = f(1) \\ p'(0) = f'(0) \\ p'(1) = f'(1) \end{cases}$$

Déterminons p :

$$\begin{aligned} p(x) &= f(0)(1-x)^2(1+2x) + f(1)x^2(3-2x) + f'(0)x(1-x^2) + f'(1)x^2(x-1) \\ &= f(0) + f'(0)x + (-2f'(0) - 3f(0) + 3f(1))x^2 + (2f(0) + f'(0) - 2f(1) + f'(1))x^3 \end{aligned}$$

1.8 Interpolation linéaire par morceaux

Etant donné un distribution (non nécessairement uniforme) de noeuds $x_0 < x_1 < ... < x_n$, on note I_i l'intervale $[x_i, x_{i+1}]$. On approche f par une fonction continue qui, est définie par le segment joingnant les deux point $(x_i, f(x_i))$,$(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cette fonction notée Πf, est appelée interpolation linéaire par morceau et son expression est

$$\Pi^h f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \text{ pour } x \in I_i$$

L'exposant h désigne la longueur du plus grand intervalle I_i.

Proposition 1.21

Soit $f \in C(I)$, avec $I = [x_0, x_n]$, Alors, pour l'erreur d'interpolation linéaire par morceaux, nous avons l'estimation suivante :

$$e = \left| f - \Pi^h f(x) \right| \leq \frac{1}{8} h^2 \left\| f'' \right\|_\infty$$

Démonstration. Soit $x \in [x_i, x_{i+1}]$, Alors

On a

$$f(x) \backsimeq \Pi^h f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

et

$$f(x) = f(xi) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + \frac{f''(c_i x)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Alors, on obtient

$$f(x) = \Pi^h f(x) + \frac{f''(c_i x)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Donc,

$$\begin{aligned} e &= \left| f - \Pi^h f(x) \right| = \left| \frac{f''(c_i x)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{c_i \in [xi, x_{i+1}]} |f''(c_i x)| \max |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \end{aligned}$$

posons que $x = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$, car $x \in [x_{i+1}, x]_i$

Alors, $\max |(x - x_i)(x - x_{i+1})| = \max \left| \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i+1}) \right| = \frac{h^2}{4}$

Donc,

$$\begin{aligned} e &\leq \frac{1}{2} \max_{c_i \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(c_i x)| \left| \frac{h^2}{4} \right| \\ &\leq \frac{h^2}{8} \left\| f'' \right\| \end{aligned}$$

■

1.9 Meilleure approximation

Définition 1.22

Soit $U \subset E$ est un sous espace dans un espace normé E, et soit $\varphi \in E$. un élément $\psi \in U$ est dite meilleur approximation à φ avec respect à U. Si

$$\|\varphi - \psi\| = \inf_{u \in U} \|\varphi - u\|$$

c'est-à-dire que $\psi \in U$ est la plus petite distance de φ

1.10 Polynômes orthogonaux

On se donné une fonction w définie sur $]a, b[$,intégrable sur $[a, b]$ et a valeur positive ou nulles. Cette fonction est appelée fonction de poids.

On définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ par la relation

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)w(x)dx$$

A ce produit scalaire, on associe la normes $\|f\|^2 = \int\limits_a^b |f|^2 w(x)dx$

Définition 1.23

On appelle polynômes orthogonaux relativement au poids w la suite des polynôme $p_0, p_1, ...p_n, ...$ayant les propriétés suivantes :

1. *Pour tout n, p_n est de degré n et les coefficient de le terme de plus haut degré est* 1.
2. *$(p_0, ..., p_n)$ forme une base ortogonale de $\mathbb{P}_n$.*

Chapitre 2

Théorème de Banach-Steinhaus et Applications

Ce chapitre représente le but de ce mémoire, où l'utilisation de théorème de Banach-Steinhaus 2 pour démontre la convergence des méthodes numérique (les formules de quadrature, les méthodes de projection et la méthode de Nyström, et pour l'analyse, étudie la divergence des série de fourier.

2.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 2.1 *(Banach-Steinhaus 1)*

Soit $\{A_n(x)\}$ une suite d'opérateurs définie sur un espace de Banach E dans un espace normé F, Si la suite $\{A_n(x)\}$ est bornée en chaque point x de E, alors les normes de ces opérateur $\|A_n\|$ sont aussi bornées. Autrement dit, on a

$$\forall x \in E, \ \ \sup \|A_n(x)\| < \infty \Longrightarrow \sup \|A_n\| < \infty$$

Théorème 2.2 *(Banach-Steinhaus 2)*

Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateur linéaire continues, définie sur un espace de Banach E dans un espace de Banach F, la suite $\{A_n\}$ converge vers un opérateur linéaire continu A si et seulement si :

1. *Les normes $\|A_n\|$ des opérateurs A_n sont bornées.*

2. La suite $\{A_n(x)\}$ est de Cauchy pour tout élément de l'ensemble G dense dans E.

Démonstration.

Condition suffisante :

La densité de l'ensemble G dans E donne

$$\overline{G} = E \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall x \in E; \exists y \in G, telque \, \|x - y\| < \epsilon$$

La suite $\{A_n\}$ étant de Cauchy pour les élément de G alors on a :

$$\forall \epsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}, \text{tel que } \forall p, q \geq N, \text{ on a } \|A_p(y) - A_q(y)\| < \epsilon$$

D'où pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|A_p(x) - A_q(x)\| &= \|A_p(x) - A_q(x) + A_p(y) - A_p(y) + A_q(y) - A_q(y)\| \\ &\leq \|A_p(y) - A_q(y)\| + \|A_p(x) - A_p(y)\| + \|A_p(x) - A_q(y)\| \\ &< \epsilon + (\|A_p\| + \|A_q\|)\, \|x - y\| \\ &< (1 + 2c)\epsilon \end{aligned}$$

L'espace F étant complet alors il existe un opérateur linéaire continu A, tel que

$$\lim A_n(x) = A(x)$$

Condition nécessaire :

La suite d'opérateurs linéaires continus $\{A_n\}$ converge vers l'opérateur linéaire continu A, d'où elle est de Cauchy pour tout élément de E et par conséquent pour tout élément de G dense dans E. De plus, les normes $\|A_n\|$ et $\|A\|$ sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Remarque 2.3

Le théorème (ou au mois la condition suffisante) est vrai si on remplace la condition $\{A_n(x)\}$ soit une suite de Cauchy par la condition qu'elle converge vers $A(x)$ $\forall x \in G$ dense dans E, Ici, nous n'avons pas nécessaire F est complet.

Remarque 2.4

La condition 2) *peut être remplacer par la convergence sur un sous ensemble fondamentale G de E. pour la convergence sur G implique la convergence sur $\mathcal{L}(G)$, et G est dense dans E.*

- Les théorèmes précédente admit des diverses applications dans plusieurs domaine par exemple (les formules des quadratures, séries de fourier,...)
- Maintenant, Appliquer le deuxième théorème (**Banach-Steinhaus 2**).

2.2 Convergence des formules de quadrature

Définition 2.5 *(formule de quadratur)*

Pour l'évaluation approximation des intégrales, on utilise habituellement des formules quadrature sous la forme :

$$\int_b^a \varphi(x)dx \backsimeq \sum_{i=0}^{n} C_i\varphi(x_i), \qquad (a \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq b)$$

Définition 2.6

Les formules rectangulaires, trapèzien et simpson sont des exemples plus compliqués exactement du même type sont les formules Newton-cotes et Gauss. Il est naturel de considérer des suites de formule

$$\int_a^b \varphi(x)dx \backsimeq \sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)}\varphi(x_i^{(n)}) \qquad (1)$$

avec,$(a \leq x_0^{(n)} \leq x_1^{(n)} \leq ... \leq x_n^{(n)} \leq b)$

Exemple 2.7

On considère la convergence de formule quadrature pour calcule de l'intégrale

$$A\varphi(x) = \int_0^1 \varphi(x)dx$$

Remarque 2.8

Plusieurs approches pour construir des formules quadratures numérique, une approche consiste à remplacer la fonction φ par un interpolant de cette fonction, on noté par $\Pi\varphi$, puis définissez la quadrature numérique par la formule

$$A\varphi(x) = \int_0^1 \Pi\varphi(x)dx$$

Si $\Pi\varphi$ est considéré comme l'interpolation polynômiale de Lagrange de φ sur une partition uniforme de l'intervalle d'intégration, est on a

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\varphi(x_i), \qquad (a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b)$$

comme,

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0}^{n}(x_i - x_j)}, i \neq j$$

pour garantir la convergence, on peut utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi\varphi$ de φ sur une partition correctement choisie avec plus de nœuds placés prés de la frontière. Puis, Nous approchons l'intégrale par une suite des sommes finies

$$A_n\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)}(x)\varphi(x_i^{(n)})$$

et choissez les poids $\left\{C_i^{(n)}\right\}_{i=0}^{n}$ et les nœuds $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{i=0}^{n} \subset [0,1]$.

Soit la suite de quadrature donnée par :

$$A_n\varphi = \sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)}\varphi(x_i^{(n)})$$

où $(0 < x_0^{(n)} \leq x_1^{(n)} \leq ... \leq x_n^{(n)} < 1)$ est une partition de $[0,1]$, on considère A_n comme une fonctionnelle linéaire (c'est-à-dire un opérateur linéaire continue avec des valeurs scalaires) définie sur $C([0,1])$ avec la norme uniforme standard. Il est simple de montre que

$$\|A_n\| = \sum_{i=0}^{n} \left|C_i^{(n)}\right|$$

Remarque 2.9

L'espace polynômial $\mathbb{P}_n([a,b])$ *est dense dans l'espace* $C([a,b])$.

Ici, $\mathbb{P}_{d(n)}$ est l'espace de tout les polynômes de degré inférieur ou égale à précision de $d(n)$, et posons que $d(n) \to \infty$ comme $n \to \infty$.noté que le sous espace V_0 ($V_0 = \mathbb{P}_{d(n)}$) de tout les polynômes est dense dans $V = C([0,1])$; puis, applique théorème de **Banach-Steinhaus 2** pour montre que

$$A_n\varphi \to A\varphi, \quad \forall\varphi \in C([0,1])$$

Si cette condition est vérifie :

$$\sum_{i=0}^{n} \left|C_i^{(n)}\right| < \infty$$

Alors les normes $\|A_n\|$ sont bornées.

Enfin, en montre que la suite $A_n\varphi$ est de Cauchy $\forall\varphi \in V_0$ dense dans $C([0,1])$.

$$\overline{V_0} = V \iff \forall\epsilon > 0, \forall\varphi \in V; \exists\psi \in V_0, \text{tel que } \|\varphi(x) - \psi(x)\| < \epsilon, \forall x \in [0,1]$$

La suite $\{A_n\}$ étant de Cauchy pour les élément de V_0 alors on a

$$\forall\epsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}, \text{tel que } \forall p, q \geq N, \text{ ona } \|A_p\psi - A_q\psi\| < \epsilon$$

D'où pour tout $\varphi \in V$, on a

$$\begin{aligned}
\|A_p\varphi - A_q\varphi\| &= \|A_p\varphi - A_q\varphi + A_p\psi - A_p\psi + A_q\psi - A_q\psi\| \\
&\leq \|A_p\psi - A_q\psi\| + \|A_p\varphi - A_p\psi\| + \|A_p\varphi - A_q\psi\| \\
&< \epsilon + (\|A_p\| + \|A_q\|)\|\varphi - \psi\| \\
&< (1+2c)\epsilon \text{ car } \|A_n\| \text{ sont bornée}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|A_p\varphi - A_q\varphi\| < \epsilon$$

Alors, la suite $\{A_n\}$ est de Cauchy dans V_0 dense dans $C([0,1])$

Summary 2.10

On a V_0 *est dense dans* $V = C([0,1])$ *,avec*

1. *Les normes* $\|A_n\|$ *sont bornées.*
2. *La suite* $\{A_n\varphi\}$ *est de Cauchy dans* V_0 *dense dans* $C([0,1])$.

Alors, d'aprés théorème de ***"Banach-Steinhaus 2"*** *on trouve que*

$$A_n\varphi \to A\varphi, \quad \forall\varphi C([0,1]).$$

Alors, l'intégrale $A\varphi(x) = \int\limits_0^1 \varphi(x)dx$ *est converge.*

2.3 Applications sur séries de fourier

Dans cette application on va étudie la convergence d'une série de fourier d'une fonction 2π périodique.

On suppose que $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, Continue et 2π périodique.

Définition 2.11

Pour $f \in C_{2\pi}$, *on peut définie la série de fourier de* f *sous la forme :*

$$S_n(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{aligned}$$

Ou, on utilise la forme suivante :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)e^{ikx}$$

avec,

$$C_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Mais, Pour calcul la série de fourier en 0 *on utilise cette formule*

$$S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)$$

Théorème 2.12

Il existe une fonction continue 2π *périodique qui n'est pas égale à sa série de fourier.*

- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n : \begin{cases} C_{2\pi} \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \sum_{k=-n}^{n} C_k(f) \end{cases}$$

A_n est la somme partiel de fourier en 0.

Lemme 2.13

Pour tous n *et* x *on a :*

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikx} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$$

- On a donc, pour tout $f \in C_{2\pi}$

$$A_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)} f(x)dx$$

On pose que $|f(x)| \leq 1$ alors,

$$\begin{aligned} \|A_n\| &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right| dx \\ &\geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left|\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right| dx \end{aligned}$$

Comme $\left|\sin(\frac{x}{2})\right| \leq \left|\frac{x}{2}\right|$ pour tout x, On a donc

$$\|A_n\| \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin((2n+1)x/2)}{x}\right| dx$$

Posons que $t = \frac{(2n+1)}{2}x$ alors, On trouve que,

$$\|A_n\| \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$$

Comme $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \to \infty$, Alors,

$$\|A_n\| = \infty$$

• Par une application du théorème de **Banach-Steinhaus 2** on trouve que le premier condition de cette théorème n'est pas vérifie. Alors, la série de fourier n'est pas converge vers la fonction f au point 0.

2.4 Applications sur l'opérateur intégrale

On définie l'operateur intégrale sur un espace de Banach dans un espace de Banach comme suite :

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad C(\Omega) \to C(\Omega) \\ \varphi \quad &\mapsto \quad A\varphi = \int_{\Omega} K(x,y)\varphi(y)dy, \qquad x, y \in \Omega \end{aligned}$$

Avec Ω est un ensemble compact.

Proposition 2.14

Tout opérateur linéaire compact entre deux espaces de Banach est un opérateur borné.

Théorème 2.15

Soit l'opérateur intégral A définie sur $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, avec Ω est un ensemble compact

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x,y)\varphi(y)dy\,; \qquad x,y \in \Omega$$

Avec le noyau $K(x,y)$ continue est un opérateur compact.

• Soit l'opérateur A définie sur $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$; il est claire que $C(\Omega)$ est un espace ce Banach

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad C(\Omega) \to C(\Omega) \\ \varphi \quad &\mapsto \quad A\varphi \\ \text{avec, } A\varphi(x) \quad &= \quad \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy\,; \qquad x,y \in [a,b] \end{aligned}$$

On pose que $\{A_n\}$ est une suite d'opérateur linéaire continue sur l'espace de Banach $C(\Omega)$ dans un espace de Banach $C(\Omega)$, et on a

$$A_n\varphi(x) = \int_a^b K_n(x,y)\varphi(y)dy\,; \qquad x,y \in [a,b]$$

Avec, on suppose que $K_n(x,y)$ est l'interpolation de Noyau $K(x,y)$ (interpolation de Lagrange, Newton, ou Hermite...).

Soit $\tilde{\varphi}$ est la projection de φ sur l'espace polynômiale $\mathbb{P}_n$, $\tilde{\varphi} = \Pi\varphi(x)$, donc $\tilde{\varphi} \in \mathbb{P}_n([a,b])$. Soit $V = \mathbb{P}_n([a,b])$ est un ensemble borné dans $C([a,b])$, et trouve que, pour tout $\tilde{\varphi} \in V$

$$\left\|\widetilde{\varphi}\right\| \leq M$$

De plus, pour tout $x \in [a,b]$ et $\tilde{\varphi} \in V$, on a

$$\begin{aligned} |A_n\tilde{\varphi}(x)| \quad &= \quad \left|\int_a^b K_n(x,y)\tilde{\varphi}(y)dy\right| \\ &\leq \quad \int_a^b |K_n(x,y)|\,dy \int_a^b |\tilde{\varphi}(y)|\,dy \\ &\leq \quad \max|K_n(x,y)|\,.\,\|\tilde{\varphi}\| \int_a^b dy \\ &\leq \quad M.\max|K_n(x,y)|\,(b-a) \end{aligned}$$

Alors $A_n(V)$ est borné.

Théoriquement, le noyau $K_n(x,y)$ est continu sur le compact $[a,b]\times[a,b]$, donc il est uniformément continu et donc

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x,y,z\in[a,b]\,, \text{tel que } |x-y|<\delta \Longrightarrow |K_n(x,z)-K_n(y,z)|<\epsilon$$

donc, pour chaque $\tilde{\varphi}\in V$ et $x,y\in[a,b]$, avec $|x-y|<\delta$

$$\begin{aligned}
|A_n\tilde{\varphi}(x)-A_n\tilde{\varphi}(y)| &= \left|\int_a^b (K_n(x,z)-K_n(y,z))\tilde{\varphi}(z)dz\right| \\
&\leq \epsilon\left|\int_a^b \tilde{\varphi}(z)dz\right| \\
&\leq \epsilon M\int_a^b dz \\
&\leq \epsilon M(b-a)
\end{aligned}$$

Cette relation exprime que $A_n(V)$ est équicontinu.

Donc $A_n(V)$ est relativement compact. Alors par théorème d'Arzelà-Ascoli A_n est compact.

• D'aprés la prosition précidente, On a A_n est une suite d'opérateures bornées, En d'autre termes $\|A_n\|$ sont bornées.

• On a $K_n(x,y)$ est dit l'interpolant de noyau $K(x,y)$, avec K_n est converge vers K, on se trouve

$$\|K_n-K\|\to 0$$

De plus, On a $A_n\tilde{\varphi}(x)=\int_a^b K_n(x,y)\tilde{\varphi}(y)dy$, Alors

$$\|A_n\tilde{\varphi}(x)-A\tilde{\varphi}(x)\| = \left|\int_a^b [K_n(x,y)-K(x,y)]\tilde{\varphi}(y)dy\right| \to 0$$

car

$$\|K_n(x,y)-K(x,y)\|\to 0$$

alors, $A_n\tilde{\varphi}$ est une suite converge vers $A\tilde{\varphi}$ dans V dense dans $C\left([a,b]\right)$.

Summary 2.16

Par une application du théorème de ***Banach-Steinhaus 2*** *et la remarque* (2.3) *on déduit que la suite d'opérateurs* $\{A_n\}$ *est converge vers une opérateur linéaire continue* A*, En d'autre terme*

$$A_n\varphi \to A\varphi$$

2.5 Sur les méthodes de projection

Dans toutes les méthodes de projection, on étude la résolution des équations intégrale sous la forme

$$A\varphi = f$$

Avec $A\varphi(x) = \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)dy$.

Où G est fermé et borné.

Définition 2.17

Soit E *un espace vectoriel normé,* $G \subset E$ *un sous espace. Un opérateur borné* $P : E \to G$ *est appelé opérateur de projection ou projecteur de* E *dans* G *s'il vérifie*

$$\forall \varphi \in G,\ P\varphi = \varphi$$

Définition 2.18

On dit qu'un sous espace normé G *d'un espace normé* E *possède la propriété de densité en norme si*

$$\forall \varphi \in E, \inf_{\psi \in G} \|\psi - \varphi\| \to 0, si\ n \to \infty$$

• La méthode de projection pour une équation de type

$$A\varphi = f$$

Est définie seulement par $G \subset E$ est d'une suite d'opérateurs de projection $P_n : E \to G$, et on considère l'équation approchée

$$P_n A\varphi = P_n f$$

Lemme 2.19

Soit E,F deux espaces de Banach, et soit $\{P_n\}$ *est une famille de projection borné dans E avec*

$$P_n\varphi \to \varphi, \text{ si } n \to \infty$$

Si $A : E \to F$ *est un opérateur compact, puis*

$$\|A - P_nA\| \to 0, \text{ si } n \to \infty$$

2.5.1 Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée d'opérateur équation

$$A\varphi = f \qquad (1)$$

Consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons un sous espaces $G \subset E$, de dimension finie, généralement est un sous espace de $C(\Omega)$ ou de $L^2(\Omega)$. Soit $\Omega = [a, b]$ et soit $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ une base de G. On cherche une fonction $\tilde{\varphi} \in G$, de la forme

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_j\psi_j(x), \; x \in G$$

Pour déterminer les coefficients (c_j), On substituant, Cette fonction dans l'équation (1) , et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le reste

$$\begin{aligned} r_n(x) &= A\tilde{\varphi}(x) - f(x) \\ &= P_nA\tilde{\varphi}(x) - P_nf(x) \end{aligned}$$

On pose que $P_nA = A_n$ et $P_nf = f_n$ et $f_n(x_i) = f(x_i)$, alors ;

$$r_n(x) = A_n\tilde{\varphi}(x) - f_n(x)$$

Cette méthode est basé sur un produit scalaire par une fonction $w(x)$ est dite fonction de poids, la méthode de collocation est proposer que $w(x) = \delta(x - x_i)$, avec $\{x_i\}$ les point de collocation.

On a $\int\limits_a^b f(x)\delta(x - x_i)dx = f(x_i)$, Alors on a

$$\begin{aligned} \langle r_n, w\rangle &= \langle A_n\tilde{\varphi} - f_n, w\rangle \\ &= \langle A_n\tilde{\varphi}, w\rangle - \langle f_n, w\rangle \to 0 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \langle A_n\tilde{\varphi}, w\rangle &= \langle f_n, w\rangle \\ &\Updownarrow \\ \int\limits_a^b A_n\tilde{\varphi}(x)w(x)dx &= \int\limits_a^b f_n(x)w(x)dx \\ \int\limits_a^b A_n\tilde{\varphi}(x)\delta(x - x_i)dx &= \int\limits_a^b f_n(x)\delta(x - x_i)dx \end{aligned}$$

Donc,

$$A_n\tilde{\varphi}(x_i) = f_n(x_i)$$

On remplacer $\tilde{\varphi}$ dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} c_j A_n\psi(x_i) &= f_n(x_i) \\ \sum_{j=0}^{n} c_j \int\limits_a^b K_n(x_i, y)\psi(y)dy &= f(x_i) \qquad\qquad y \in [a, b] \end{aligned}$$

Pour montrer la convergence de la méthode de collocation, il faut que représenter

$$\|A - A_n\| \to 0, \text{ si } n \to \infty$$

Étant donné que le lemme (2.19) ne peut pas être utilisé, Nous devons examiner $\|A - A_n\|$ directement.

L'opérateur A_n est un opérateur intégrale, avec

$$A_n\tilde{\varphi}(x) = \int\limits_a^b K_n(x_i, y)\tilde{\varphi}(y)dy$$

avec, $K_n(x,y) = P_n K(x,y)$

Pour montre la convergence de $\|A - A_n\|$ vers zéro, on utilise la relation

$$\|A - A_n\| = \max \int_a^b |K(x,y) - K_n(x,y)| \, dy$$

On a $K_n(x,y) \to K(x,y)$, donc $|K(x,y) - K_n(x,y)| \to 0$, Alors

$$\|A - A_n\| \to 0$$

Donc, $A_n\tilde{\varphi} \to A\tilde{\varphi}$, si $n \to \infty$, pour tout $\tilde{\varphi} \in G$ dense dans E.

On montre que A_n est bornée :

$$A_n\tilde{\varphi}(x) = \int_a^b K_n(x,y)\tilde{\varphi}(y)dy$$

$$\|A_n\| = \max \left| \int_a^b K_n(x,y)dy \right|$$

$K_n \in \mathbb{P}_n$, et $\mathbb{P}_n$ est un ensemble borné dans C, donc $\|K_n\| \leq M$.

Alors, $\|A_n\|$ est bornée

- On a la suite d'opérateurs $\{A_n\}$ est converge dans G dense dans E vers A et les normes $\|A_n\|$ des opérateurs A_n sont bornées.
- Alors, Par une application de théorème de **Banach-Steinhaus 2**, on déduit qu'il existe un opérateur linéaire continue tel que, $\{A_n\}$ converge vers A d'autre part

$$A_n \to A$$

Summary 2.20

*D'aprés la théorème de **Banach-Steinhaus 2** on peut dire que la méthode de collocation est converge dans E.*

2.6 Méthode de Nyström

Cette méthode, aussi appelée méthode de quadrature, consiste à appliquer les méthodes numériques de calcule d'intégrales pour obtenir à un système linéaire.

Par le choix d'une suite de règles de quadrature (Q_n) convergente, on approxime l'opérateur intégrale

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,y)\varphi(y)dy \ ,x \in G$$

à noyau k continu, pour ce faire, on se donne des règles de quadrature (Q_n) pour calculer l'intégrale de noyau des points (y_j). Ainsi que des poids (a_j), d'où l'introduction d'un nouvel opérateur A_n

$$\forall x \in G,\ A_n\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j k(x,y_j)\varphi(y_j)$$

Alors, la solution de l'équation intégrale de type

$$A\varphi = f$$

Est approché par la solution de

$$A_n\tilde{\varphi} = f$$

Théorème 2.21

Les formules de quadrature (Q_n) converge si et seulement si $Q_n(g) \to Q(g)$,$n \to \infty$, pour tout g élément d'un ensemble U dense dans $C(G)$ et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} |a_j| < \infty$$

• Pour démontre que $A_n\varphi \to A\varphi$, d'autre part

$$\begin{aligned} \|A\varphi - A_n\varphi\| &\to 0 \\ \left\| \int_G k(x,y)\varphi(y)dy - \sum_{j=0}^{n} a_j k(x,y_j)\varphi(y_j) \right\| &\to 0 \end{aligned}$$

On applique le théorème de **Banach-Steinhaus 2** pour la démonstration

• On va utilise la norme associe à l'opérateur de quadrature A_n est donnée par

$$\|A_n\|_\infty = \max_{a\le x\le b} \sum_{j=1}^{n} |a_j k(x,y_j)|$$

Comme $$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{n}|a_j| < c\,;$$

et $k \in C[a,b]$, Alors k est bornée

Alors,

$$\begin{array}{rcl} \|A_n\| & \leq & c\max|k(x,y)| \\ i.e \qquad \max|k(x,y)| & \leq & M \\ & \Longrightarrow & \|A_n\| \leq C \end{array}$$

Donc, les normes $\|A_n\|$ des opérateurs A_n sont bornées.

• Puis, on va utilise la projecteur de l'espace $C([a,b])$ sur l'espace polynômiale $\mathbb{P}_n([a,b])$ tel que $\varphi \to \tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x)$, $\{\psi_1,...,\psi_n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n([a,b])$.

• D'après l'approximation polynômiale, on a

$$\forall\varphi \in C([a,b]), \exists\tilde{\varphi} \in \mathbb{P}_n([a,b]),\ \text{tq},\ \forall\epsilon > 0; \|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \epsilon$$

On a

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \text{tq}\ \forall p,q > N,\ \text{on a}\,; \|A_p\tilde{\varphi} - A_q\tilde{\varphi}\| < \epsilon$$

D'où pour tout $\varphi \in C([a,b])$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|A_p\varphi - A_q\varphi\| & = & \|A_p\varphi - A_q\varphi + A_p\tilde{\varphi} - A_p\tilde{\varphi} + A_q\tilde{\varphi} - A_q\tilde{\varphi}\| \\ & \leq & \|A_p\tilde{\varphi} - A_q\tilde{\varphi}\| + \|A_p\varphi - A_p\tilde{\varphi}\| + \|A_p\varphi - A_q\tilde{\varphi}\| \\ & < & \epsilon + (\|A_p\| + \|A_q\|)\,\|\varphi - \tilde{\varphi}\| \\ & < & (1+2c)\epsilon \text{ car } \|A_n\| \text{ sont bornée} \end{array}$$

Alors, la suite $\{A_n\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{P}_n([a,b])$ dense dans $C\,([a,b])$.

• Donc,$\{A_n\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{P}_n([a,b])$ et les normes $\|A_n\|$ sont bornés. Alors, par une application du théorème de **Banach-Steinhaus 2** on peut déduit que $A_n\varphi \to A\varphi, n \to \infty$.

• D'autre part, on peut dire

$$\|A\varphi - A_n\varphi\| \to 0$$

Summary 2.22

Par une application du théorème de ***Banach-Steinhaus 2*** *on peut déduire que la méthode de* ***Nyström*** *est converge.*

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié la convergence des méthodes numérique, Par l'utilisation des méthodes d'approximation (les interpolations polynômiales), il consiste à beaucoup types comme (Lagrange, Hermite et Chebyshev ...). Pour obtenir la meilleur approximation des polynômes vers la fonction exacte, et qui par les points de Chebyshev, mais pour la deuxième chapitre, on utilise l'application du théorème de Banach-Steinhaus 2, pour l'étude de la convergence des méthodes numériques, Ou on l'analyse, appliqué pour la divergence des séries de Fourier. Ce théorème admet à diverses applications dans plusieurs domaines de recherche.

Bibliographie

[1] ALFIO QUARTERONI, *Calcule Scintifique,*Springer-Verlag Italia.2008

[2] ATKINSON.V & W.HAN, *Theoretical Numérical Analysis,*

[3] FISCHER.P & W.LISL & C.DOSSAL, *Approximation Numérique,* Université Bordeaux 1,France.

[4] FRANCK BOYER,*Agrégation Externe de Mathématiques Analyse Numérique,* Aix-Marseille Université, 14/10/2013.

[5] FRANCK JEDRZEJEWSKI, *Intraduction Aux Méthode Numérique 2id,* paris, 2005.

[6] GOURDON, XAVIER. *Analyse, Les math en tete, analyse.*

[7] KANTOROVICH.L.V & AKILOV.G.P, Functional Analysis, pergamon press ltd & "Nauka" second edition, 1982.

[8] MAZEN SAAD, *Analyse Numérique,* Ecole centrale de Nantes Département Info-Math, 2011 – 2012.

[9] NADIR.M, *Cours d'analyse fonctionalles*, Université de M'sila, 2015.

[10] NADIR.M, *Cours sur les équations intégrales*, Université de M'sila, 2016

[11] RAHMOUN.A, *Résolution Numérique Des Équation Intégrales En Utilisant Des fonctions Spéciales (Thése de Doctorat en Sciences),* Département de Mathématique, Université de Batna, 2011.

[12] RAPPAZ.J & PICASSO.M, *Introduction à l'analyse Numérique,* press polytechniques et universitaires romandes, 1998.