

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° :



DOMAINE : PHYSIQUE THEORIQUE
FILIERE : PHYSIQUE
OPTION : PHYSIQUE DES
PARTICULES A HAUTE ENERGIE

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par : **BENYETTOU Houda**

Intitulé

**Les niveaux d'énergie produit par le potentiel inverse-
racine carrée dans l'espace phase non commutatif à
trois dimensions**

Soutenu le 31 / 05 /2017 devant le jury composé de :

N.BAADJI	Université de M'sila	Président
A.MAIRECHE	Université de M'sila	Rapporteur
A. GHOMAID	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire : 2016/2017

Remerciements

Tout d'abord remercions Dieu tout puissant qui nous a éclairé vers le bon chemin.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de Mémoire professeur : Abdelmadjid Maireche.

Je remercie les membres de jury qui ont accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion 2017.

Je tiens à remercier mes parents qui sont fatigués à cause de moi. Et ma famille, mes amies.

Enfin je tiens à remercier mon collègue Sahraoui Khaled qui m'a aidé à accomplir ce travail.

Sommaire

Table de matière

Introduction générale (01)

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase non Commutatif

I.1.Introduction (04)

I.2.Rappelle sur la structure de la mécanique quantique ordinaire (04)

I.2.1. Le moment angulaire (06)

I.2.2. Le moment de spin (07)

I.3.la structure quantique de l'espace-phase Noncommutatif..... (08)

I.3.1. Introduction (08)

I.3.2. Algèbre Noncommutatif (08)

I.4. La quantification de Weyl – Le produit de Moyal (09)

I.4.1. Propriétés du produit star (Le produit de Moyal) (11)

I.5. la Méthode de Boopp's Shift (12)

I.6. Application sur le potentiel d'inverse- racine carrée..... (15)

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel d'inverse-racine carrée dans l'espace ordinaire à 3Dimensions

II-1-Introduction (18)

II.2. L'équation de Schrödinger (18)

II.3. Présentation de l'équation de Schrödinger (19)

II.4. Le moment cinétique orbital (20)

II.5. La méthode de séparation des variables et l'équation de Schrödinger en coordonnées

Sphérique..... (22)

II.6. Etude de l'équation de Schrödinger pour le potentiel d'inverse- racine carrée..... (24)

Sommaire

II.6.1. L'équation radiale	(25)
II.6.2. Solution régulière	(25)
II.6.3. État liés	(27)
II.7. La fonction d'onde et l'énergie pour l'état fondamental	(30)
II.8. La fonction d'onde et l'énergie Pour le premier état excité	(30)

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel d'inverse- racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

III.1. Introduction	(32)
III.2. L'équation de Schrödinger sur un espace –temps Non commutatif	(32)
III.3. L'opérateur d' Hamiltonien pour le potentiel d'inverse- racine carrée dans l'espace- Phase Non Commutatif (NC : 3D-RSP)	(32)
III.4. L'opérateur Spin-Orbite d' Hamiltonien pour le potentiel d'inverse- racine carrée dans L'espace-phase Non Commutatif (NC : 3D-RSP)	(34)
III.5. Le spectre exacte de Spin-orbite pour le potentiel d'inverse- racine carrée en (NC : 3D- RSP)	(36)
III.5.1 Le spectre exacte d'état fondamental produit par l'effet de Spin-orbite pour le Potentiel d'inverse- racine carrée en (NC : 3D-RSP)	(37)
III.5.2 Le spectre exacte de premier état excité produit par l'effet de Spin-orbite pour le Potentiel d'inverse- racine carrée en (NC : 3D-RSP)	(41)
Conclusion et interprétation physique	(48)
Références Bibliographiques	(5 0)

Introduction générale

Introduction générale

La physique moderne et la physique fondamentale sont deux grands domaines ont révolutionné le monde. Qui ont changé les concepts et la vision de la physique classique [1].

En physique classique, le mouvement des corps matériels est étudié par deux théories : la mécanique classique de Newton et la mécanique relativiste. La première théorie est fondée sur quatre grands principes : les trois lois de Newton et le principe de conservation de l'énergie, par contre, la relativité restreinte (1915) et la relativité générale (1916) qui est une théorie relativiste d'interaction gravitationnelle basé sur le principe de l'équivalence masse-gravitationnelle inertielle qui permet de formuler toutes les autres lois de la physique en présence d'un champ gravitationnel ainsi qu'il décrit le grand infiniment (les planètes, les galaxies,...).

Au début du 20^{ème} siècle, il devient possible de faire des expériences à l'échelle microscopique, on découvre certaines situations où la physique classique ne s'applique pas. Donc la mécanique quantique est la théorie qui décrit les systèmes microscopique (les atomes, Les électrons,...), cette théorie a connu son essor grâce aux travaux de Planck, Bohr, Schrödinger, Heisenberg et bon nombre d'autres.

Parmi les principes les plus importants en mécanique quantique, le principe d'incertitude D'Heisenberg qui énonce que la position et la vitesse d'une particule ne peuvent pas être mesurée en même temps, avec une très grande précision, car l'incertitude Δx sur la mesure de sa position et l'incertitude Δp sur son impulsion doit satisfaire à la relation $\Delta x \Delta p = \hbar$.

En fait, ce principe est une conséquence spontanée des relations de commutation canonique entre les variables x_i et p_i avec $i=1,2,3$ qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert ($x_i \rightarrow \hat{x}_i, p_i \rightarrow \hat{p}_i$), ces deux opérateurs sont définis par leur action sur un être mathématique $\Psi(x)$ [1].

La mécanique quantique sur espace noncommutatif [2], dans un premier temps, été proposée par Heisenberg dans les années 30 puis développée par Snyder à la fin des années 40, dans l'espoir que les propriétés de non-localisabilité induite par la non-commutativité des coordonnées d'espace permettraient de résoudre le problème des divergences à courte distance (ultra violette) de la théorie des champs. Mais les succès de la renormalisation rendirent cette piste caduque et elle fut abandonnée. Récemment, certains développements de la théorie des cordes l'ont sortie de l'oubli [2].

La mécanique quantique en espace noncommutatif correspond à l'étude d'Hamiltonien dépendant des opérateurs de position et d'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canonique. L'étude de modèles exactement en mécanique quantique peut nous permettre

Introduction générale

d'avoir une meilleure compréhension de certains phénomènes survenant en théorie quantique des champs Non-commutative [2].

Le but principal de ce travail

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel d'inverse-racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions (3D-NC-RPS). Ce travail se divise en trois chapitres principaux avec une conclusion générale.

Le premier chapitre

Consacré la structure quantique de l'espace-phase non commutatif en utilisant le produit de Moyal-Weyl (produit star) et la méthode de Boopp's Shift, et on applique cette méthode sur le potentiel d'inverse-racine carrée.

Deuxième chapitre

Nous avons présenté les résolutions de l'équation de Schrödinger pour le potentiel d'inverse-racine carrée dans l'espace ordinaire à trois dimensions et en déduire les fonctions d'onde et les énergies.

Troisième chapitre

Nous avons étudié l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel d'inverse-racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions (3D-NC-RPS) pour obtenir les nouveaux spectres d'énergies.

Et en termine par une conclusion qui résume les résultats obtenus de ce travail.

Chapitre I

**La structure quantique de
l'espace-phase non
commutatif**

I.1.Introduction :

Dans ce chapitre on a traité les postulats et les hypothèses caractérisé la structure quantique et physique de l'espace-phase noncommutatif, les éléments principales sont :

- *-Rappelle sur la structure quantique ordinaire,
- *-Les nouveaux postulats de l'espace-phase noncommutatif,
- *- Produit star et ces propriétés, la formule de Moyal-Weyl
- *-La méthode de Boopp's Shift et ces application pour un potentiel d'inverse -racine carrée de la forme $V(r) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}}$.

I.2.Rappelle sur la structure physique de la mécanique quantique ordinaire :

Malgré les succès de la physique classique à l'échelle macroscopique, est totalement inadéquate pour les phénomènes observés à l'échelle atomique, et cette nouvelle théorie de l'univers physique est conventionnellement appelée la mécanique quantique dans ses grandes lignes, elle a été conçue entre 1925 et 1930, et elle est l'œuvre principalement de N. Bohr, Heisenberg, Schrödinger et Dirac [3].

La mécanique quantique est une majeure révolution scientifique qui modifie radicalement un certain nombre de concepts de base de physique pour décrit les systèmes microscopiques dans le cadre non-relativiste et relativiste.

La mécanique Quantique ordinaire à l'espace de Hilbert est définie en remplaçant les variables et les moments canoniques par des opérateurs et postuler les règles de commutations canonique.

$$\begin{cases} [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [x_i, x_j] = 0 \\ [p_i, p_j] = 0 \end{cases} \dots\dots\dots \text{(I.1)}$$

Ou $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et δ_{ij} sont la constant de Planck réduit et le symbole ordinaire de Kronecker, respectivement, qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert $(x_i \rightarrow \hat{x}_i)$ et $(p_i \rightarrow \hat{p}_i)$ ces deux opérateurs sont définis par leur action sur un être mathématique $\Psi(x)$ [3-1].

$$\hat{x}\Psi(x) = x\Psi(x) \dots\dots\dots \text{(I.2)}$$

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif

Et

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) \dots\dots\dots \text{(I.3)}$$

La structure présentée par (I.1) connue par les relations des commutations canonique (canonical commutation relations CCRs), les procédures de quantification satisfait par les deux principes fondamentales concernant l'énergie et l'impulsion E et p_i [4] :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ p_i &\rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \dots\dots\dots \text{(I.4)}$$

En mécanique classique l'énergie d'une particule de masse m_0 soumise des forces produit par potentiel extérieurs $V(\vec{r}, t)$ est donnée par :

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(\vec{r}, t) \dots\dots\dots \text{(I.5)}$$

Maintenant on applique les deux principes de quantification canonique présentée dans l'équation (I.4), on trouve directement :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \dots\dots\dots \text{(I.6)}$$

L'équation (I.6) connaît par l'équation de Schrödinger dans l'espace-temps ordinaire, cette équation fondamentale basée sur les postulats présentés par (I.1). $\Psi(\vec{r}, t)$ Est connue par la fonction d'onde, qui déterminer la probabilité de trouver d'une particule à l'instant t dans un volume d^3r entourant le point \vec{r} [4] :

$$dP = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r \dots\dots\dots \text{(I.7)}$$

Et Δ est l'opérateur Laplacien, en trois dimensions prendre l'expression suivant :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots\dots\dots \text{(I.8)}$$

Le point fondamentale qui représente la différence entre la mécanique classique et la mécanique quantique ordinaire est appelée relation d'incertitude d' Heisenberg :

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \frac{\hbar}{2} \dots\dots\dots (I.9) \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

Une valeur très important caractérisée la mécanique quantique ordinaire, connaît par la valeur moyenne d'un opérateur \hat{A} noté par $\langle a \rangle$, prendre les deux expressions dans le cas à deux et trois dimensions, respectivement [4] :

$$\langle a \rangle = \int \Psi(\vec{r}, t)^* \hat{A} \Psi(\vec{r}, t) d^2 r \dots\dots\dots (I.10)$$

Et

$$\langle a \rangle = \int \Psi(\vec{r}, t)^* \hat{A} \Psi(\vec{r}, t) d^3 r \dots\dots\dots (I.11)$$

Avec l'élément de surface $d^2 r$ et l'élément de volume $d^3 r$.

Le moment angulaire global :

I.2.1- le moment angulaire :

Le moment angulaire en mécanique classique introduit par la quantité $L = r \wedge p$, en mécanique quantique $\hat{L} = (L_x, L_y, L_z)$ $\hat{P} = (p_x, p_y, p_z)$, $\hat{r} = (x, y, z)$ ces les opérateurs dans certain coordonnés donc on a trouvé [5-6-7-8] :

$$\begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \dots\dots\dots (I.12) \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases}$$

Et on a :

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \dots\dots\dots (I.13)$$

Dans certain coordonnés les relations de commutation de L_j avec (i, j, k=x, y, z).

$$[L_i, L_j] = i\hbar \xi_{ijk} L_k \dots\dots\dots (I.14)$$

Et on a ;

$$[L_i, r_j] = i\hbar \sum_{jk} \xi_{ijk} r_k \dots\dots\dots (I.15)$$

Et

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif

$$[L_i, p_j] = i\hbar \sum_{jk} \xi_{ijk} p_k \dots\dots\dots \text{(I.16)}$$

I.2.2- Le moment de spin :

Le spin c'est une propriété intrinsèque des particules la formulation de définition de l'opérateur de spin S est analogie au moment angulaire \vec{L} [5-6-7-8].

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \dots\dots\dots \text{(I.17)}$$

Les relations des commutations :

$$[S_i, S_j] = i\hbar \xi_{ijk} S_k \dots\dots\dots \text{(I.18)}$$

En mécanique quantique le moment angulaire global \vec{J} est la somme des deux moments angulaire \vec{L} et le moment de spin \vec{S} , donc :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \dots\dots\dots \text{(I.19)}$$

Ce qui permet de trouver le couplage spin-orbite $\vec{L} \cdot \vec{S}$ de la façon suivante :

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \dots\dots\dots \text{(I.20)}$$

Les valeurs propres des opérateurs \vec{J}^2, \vec{L}^2 et \vec{S}^2 en mécanique quantique ($\hbar = 1$) :

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \Psi &= j(j+1) \Psi \\ \vec{L}^2 \Psi &= \ell(\ell+1) \Psi \dots\dots\dots \text{(I.21)} \\ \vec{S}^2 \Psi &= s(s+1) \Psi \end{aligned}$$

Les relations (I.20) et (I.21) permettent d'obtenir :

$$\vec{L} \cdot \vec{S} \Psi = \frac{1}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \Psi \dots\dots\dots \text{(I.22)}$$

Avec $\left| l - \frac{1}{2} \right| \leq j \leq \left| l + \frac{1}{2} \right|$, ce qui permet de donnée deux valeurs possible :

$$\begin{cases} j = l + \frac{1}{2} \\ j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \dots\dots\dots \text{(I.23)}$$

Si $j = l + \frac{1}{2}$ on dit que l'électron de spin up et si $j = l - \frac{1}{2}$ l'électron de spin down.

I.3. La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif :

I.3.1 Introduction :

Avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, l'espace géométrique des états d'un système microscopique d'un atome par exemple, s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position qui ne commutent plus.

La première apparition de la notion de l'espace-temps noncommutatif en physique des particules remonte aux travaux de Snyder en 1947, Le but été de pouvoir se éliminer des divergences ultraviolettes de la théorie quantique des champs tout en conservant la covariance de Lorentz, mais, comme parallèlement à cela, la théorie de la normalisation produisait des résultats remarquables.

La mécanique quantique en espace noncommutatif correspond à l'étude de Hamiltonien dépendant des opérateurs de position et d'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canonique [2].

L'étude de modèles exactement solubles en mécanique quantique peut nous permettre d'avoir une meilleure compréhension de certains phénomènes survenant en théorie quantique des champs Noncommutatif.

- Il très important de noter que, les relations de commutation dans l'espace non commutatif, satisfait par nouveaux produit connue par le produit star et les champs classiques remplacés par les champs non commutatif
- Le produit ordinaire commutatif remplacé par le produit de Moyal-Weyl (produit star) [9-10-11-12-13].

I.3.2 Algèbre non commutative :

La géométrie espace-temps Non commutatif est une géométrie ou les coordonnées de l'espace et de temps ne commutent pas, probablement, elle est une géométrie microscopique qui se manifeste à très haute énergies guidée par les deux équations Klein-Gordon et Dirac et aux niveaux d'énergie bas par l'équation de Schrödinger.

Elle est en quelque sorte la généralisation de la géométrie classique (macroscopique) qu'on connaît (Euclidienne, Minkowskienne, Riemannienne etc....). Dans l'espace non commutatif, les relations de commutation devraient être changées comme suivant :

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i, p_i \rightarrow \hat{p}_i [9] :$$

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif

$$\begin{aligned}
 [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar \delta_{ij} \\
 [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\hbar \theta_{ij} \dots\dots\dots (I.24) \\
 [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar \bar{\theta}_{ij}
 \end{aligned}$$

Ou $(i, j = \overline{1, D})$ et D la dimensions de l'espace. Les deux paramètres :

$$\begin{cases}
 \theta^{ij} = -\theta^{ji} = \varepsilon^{ij} \theta \\
 \bar{\theta}^{ij} = -\bar{\theta}^{ji} = \varepsilon^{ij} \bar{\theta} \dots\dots\dots (I.25)
 \end{cases}$$

Sont deux tenseurs antisymétriques induits par le non commutativité position-position et impulsion-impulsion, respectivement [4].

Dans ce travail on s'intéresse par l'espace-phase a trois dimensions $N = 3$, donc les indices prendre les valeurs $(i, j = \overline{1, 3})$, dans ce cas particulière, les règles de commutations canonique devient [4-14] :

$$\begin{aligned}
 [\hat{x}_1, \hat{p}_2] &= [\hat{x}_1, \hat{p}_3] = [\hat{x}_2, \hat{p}_3] = 0 \\
 [\hat{x}_1, \hat{x}_2] &= i\theta_{12} \\
 [\hat{x}_1, \hat{x}_3] &= i\theta_{13} \dots\dots\dots (II.26) \\
 [\hat{x}_2, \hat{x}_3] &= i\theta_{23}
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 [\hat{x}_1, \hat{p}_1] &= [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = [\hat{x}_3, \hat{p}_3] = i \\
 [\hat{p}_1, \hat{p}_2] &= i\bar{\theta}_{12} \\
 [\hat{p}_1, \hat{p}_3] &= i\bar{\theta}_{13} \dots\dots\dots (II.27) \\
 [\hat{p}_2, \hat{p}_3] &= i\bar{\theta}_{23}
 \end{aligned}$$

I.4 La quantification de Weyl – Le produit de Moyal

Le formalisme du produit star initié par Harman Weyl et Wigner pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace phases [15-16-17].

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique, c'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variables de l'espace de phase (variable canonique).

Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie sur l'espace phase, pour chaque fonction $f(x)$ on note $\tilde{f}(k)$ transformation de Fourier.

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D k e^{ik_m x_m} \tilde{f}(k) \\
 \tilde{f}(k) &= (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D x e^{-ik_m x_m} f(x)
 \end{aligned}
 \tag{I.28}$$

Remarque que si $f(x)$ est une fonction réelle alors :

$$\tilde{f}(k)^* = \tilde{f}(-k)
 \tag{I.29}$$

On définit un espace-temps non commutatif en remplaçant les coordonnées locales x_i de R^D par des opérateurs hermétiques \hat{x}_i qui vérifient la relation de commutation :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i \theta_{ij}
 \tag{I.30}$$

La quantification de Weyl basé sur le lien entre l'algèbre des fonctions $f(x)$ définies sur R^D et l'algèbre des opérateurs.

On définit l'opérateur de Weyl par $w(f)$, qui peut être construit par la forme de transformation de Fourier qui englobe l'opérateur \hat{x}_i et la transformation de Fourier ordinaire $f(x)$. Si $f(x)$ est fonction réelle alors l'opérateur de Weyl $w(f)$ est hermitien.

$$w^+(f) = w(f)
 \tag{I.31}$$

Ou f devient en opérateur de Weyl :

$$w(f) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D k e^{ik_m \hat{x}_m} \tilde{f}(k)
 \tag{I.32}$$

Et

$$w(g) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D l e^{il_n \hat{x}_n} \tilde{g}(l)
 \tag{I.33}$$

On multiplie les opérateurs $w(f)$ et $w(g)$ pour donner d'autres opérateurs [4-15-16-17] :

$$w(f) \cdot w(g) = w(f * g)
 \tag{I.34}$$

Et

$$w(f) \cdot w(g) = (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l e^{ik_m \hat{x}_m} e^{il_n \hat{x}_n} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l)
 \tag{I.35}$$

En utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[[A,B],B] - \frac{1}{12}[[A,B],A] + \dots}$$

Valable pour les opérateurs A et B tel que :

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \dots \dots \dots \text{(I.36)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} w(f).w(g) &= (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l e^{i(k_m+l_n)\hat{x}^m - \frac{i}{2}k_m l_n \theta^{mn}} \tilde{f}(k)\tilde{g}(l) \\ &= w(f * g) \dots \dots \dots \text{(I.37)} \end{aligned}$$

Et (f*g) c'est la fonction de *Moyal – Weyl* [4]:

$$\begin{aligned} w(f * g) &= w \left[(2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l \left[e^{\frac{i\theta^{mn}}{2} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} e^{ik_m \hat{x}^m + il_n y^n} \right] \tilde{f}(k)\tilde{g}(l) \right] \\ &= w \left[e^{\frac{i}{2}\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y) \right] \dots \dots \dots \text{(I.38)} \end{aligned}$$

Et

$$(f * g) = \left[e^{\frac{i}{2}\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y) \right] \Big|_{y \rightarrow x} \dots \dots \dots \text{(I.39)}$$

Donc [18-19-20-21-22] :

$$\begin{aligned} (f * g)(x, p) &= (fg)(x, p) + \frac{i}{2}\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} f(x, p) \frac{\partial}{\partial x^n} + O(\theta^2) + \\ &\quad \frac{i}{2}h\bar{\theta}^{mn} \frac{\partial}{\partial p^m} f(x, p) \frac{\partial}{\partial p^n} g(x, p) + O(\bar{\theta}^2) \dots \dots \dots \text{(I.40)} \end{aligned}$$

Ou $(f(x, p) * g(x, p))$ représentée le nouveau produit en mécanique quantique non commutatif.

Notation :

La quantité : $\exp \left[\frac{i}{2} \theta^{mn} k_n q_m \right]$ est appelée le facteur de la phase non commutatif, avec :

$$k \wedge q = \frac{1}{2} \theta^{mn} k_n q_m \dots \dots \dots \text{(I.41)}$$

I.4.1 Propriétés du produit star (Le produit de Moyal) :

Dans cette partie, nous récapitulons quelques identités utiles de l'algèbre de produit star [4-13-15].

1)-lorsque $\theta = 0$

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) \dots \dots \dots \text{(I.42)}$$

On retrouve donc le cas commutatif.

2)-le produit star entre exponentiels :

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}(k \wedge q)} \dots\dots\dots (I.43)$$

Avec : $k \wedge q = k^i q^j \theta_{ij}$

3)-Non commutatif :

$$f(x, p) * g(x, p) \neq g(x, p) * f(x, p) \dots\dots\dots (I.44)$$

4)-Associatif :

$$(f(x, p) * g(x, p)) * h(x, p) = f(x, p)(g(x, p) * h(x, p)) \dots\dots\dots (I.45)$$

5)-La relation du complexe conjugué :

$$(f(x, p) * g(x, p))^* = g(x, p)^* * f(x, p)^* \dots\dots\dots (I.46)$$

6)-La relation d'intégrale :

$$\int d^D x (f * g)(x, p) = \int d^D x (g * f)(x, p) = \int d^D x f(x, p) g(x, p) \dots\dots\dots (I.47)$$

7)-Permutation cyclique :

$$\int d^D x (f * g * h)(x, p) = \int d^D x (h * f * g) = \int d^D x (f * h * g) \dots\dots\dots (I.48)$$

8)-Satisfait la règle de Leibniz :

$$\partial_\mu (f * g) = \partial_\mu f * g + f * \partial_\mu g \dots\dots\dots (I.49)$$

Remarque :

Si on veut travailler avec un espace - temps non commutatif (pour coder le non commutativité de l'espace-temps) ils existent deux manières différentes : .

- *Utiliser un produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl. .
- *Déformer le produit ordinaire en un produit star et utiliser des fonctions ordinaires définies sur un espace - temps commutatif.

I.5. La Méthode de Boopp's Shift :

Pour écrire l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase noncommutatif, on applique les étapes suivant [23-24-25-26-27] :

- 1-On remplace la fonction d'onde ordinaire $\Psi(\vec{r}, t)$ par nouvelle fonction d'onde $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$,
- 2- On remplace l'opérateur d'Hamiltonien ordinaire $H(p_i, x_i)$ par nouveau opérateur $\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$
- 3- On remplace l'énergie ordinaire E par nouvelle valeur E_{nc} ,

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif

4-On remplace le produit ordinaire par le produit star.

Les quatre étapes permirent d'obtenir l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase noncommutatif.

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = E_{nc} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \dots \dots \dots \text{(I.50)}$$

La fonction d'onde $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ est peut être écrite :

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \hat{\Psi}(\vec{r}) f(t) \dots \dots \dots \text{(I.51)}$$

Ce la permet de simplifier l'équation (I.50) :

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{r}) = E_{nc} \hat{\Psi}(\vec{r}) \dots \dots \dots \text{(I.52)}$$

La méthode Boopp's Shift permet de traiter l'équation de Schrödinger déformée (I.52) comme une équation ordinaire à condition d'appliquer les deux translations :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \Psi(\vec{r}) = E_{nc} \Psi(\vec{r}) \dots \dots \dots \text{(I.53)}$$

Avec l'opérateur d'Hamiltonien $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ peut être écrit en trois variétés :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \text{ pour NC-ND:RSP} \dots \dots \dots \text{(I.54)}$$

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \text{ pour NC-ND:RS} \dots \dots \dots \text{(I.55)}$$

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i\right) \text{ pour NC-ND:RP} \dots \dots \dots \text{(I.56)}$$

C'est-à-dire, les variétés (I.54), (I.55) et (I.56) correspondent [18-19-20] :

$$\begin{cases} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \end{cases} \dots \dots \dots \text{(I.57)}$$

Et

$$\begin{cases} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \end{cases} \dots \dots \dots \text{(I.58)}$$

Et

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase noncommutatif

$$\begin{cases} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i \end{cases} \dots\dots\dots \text{(I.59)}$$

Notre travail est fait dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions, on introduit Les notations :

$$\begin{cases} i = 1 & \hat{x}_1 = \hat{x}p_1 = p_x \\ i = 2 & \hat{x}_2 = \hat{y}p_2 = p_y \\ i = 3 & \hat{x}_3 = \hat{z}p_3 = p_z \end{cases} \dots\dots\dots \text{(I.60)}$$

Et la relation (I.57) peut être écrierai explicitement dans l'espace-phase non commutatif a trois dimensions.

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 - \frac{\theta^{12}}{2} p_2 - \frac{\theta^{13}}{2} p_3 \\ \hat{x}_2 = x_2 - \frac{\theta^{21}}{2} p_1 - \frac{\theta^{23}}{2} p_3 \\ \hat{x}_3 = x_3 - \frac{\theta^{31}}{2} p_1 - \frac{\theta^{32}}{2} p_2 \end{cases} \dots\dots\dots \text{(I.61)}$$

ET

$$\begin{cases} \hat{p}_1 = p_1 - \frac{\bar{\theta}^{12}}{2} x_2 - \frac{\bar{\theta}^{13}}{2} x_3 \\ \hat{p}_2 = p_2 - \frac{\bar{\theta}^{21}}{2} x_1 - \frac{\bar{\theta}^{23}}{2} x_3 \\ \hat{p}_3 = p_3 - \frac{\bar{\theta}^{31}}{2} x_1 - \frac{\bar{\theta}^{32}}{2} x_2 \end{cases} \dots\dots\dots \text{(I.62)}$$

Avec la carré de \hat{r}^2 et \hat{p}^2 sont donné par :

$$\begin{aligned} \hat{r}^2 &= \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i^2 \\ \hat{p}^2 &= \sum_{i=1}^3 \hat{p}_i^2 \end{aligned} \dots\dots\dots \text{(I.63)}$$

La méthode de Boopp's Shift est considéré comme une conséquence direct du produit star elle permet de traité l'équation de Schrödinger déformé comme une équation ordinaire, de la façon suivant :

$$\left[\frac{\tilde{\hat{p}}^2}{2m_0} + V(\hat{x}) \right] * \hat{\Psi}(\hat{x}) = E_{nc} \hat{\Psi}(\hat{x}) \rightarrow \left[\frac{\tilde{\hat{p}}^2}{2m_0} + V(\hat{x}) \right] \Psi(\hat{x}) = E_{nc} \Psi(\hat{x}) \dots\dots\dots \text{(I.64)}$$

On basé sur les travaux scientifique [37], pour écrier les deux opérateurs \hat{r}^2 et \hat{p}^2 dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions :

$$\begin{cases} \hat{r}^2 = r^2 - \vec{L}\vec{\theta} \\ \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{\vec{L}\vec{\theta}}{2m_0} \end{cases} \dots\dots\dots \text{(I.65)}$$

Avec les notations :

$$\begin{aligned} L\Theta &= L_x\Theta_{23} + L_y\Theta_{13} + L_z\Theta_{12} \\ L\bar{\theta} &= L_x\bar{\theta}_{23} + L_y\bar{\theta}_{13} + L_z\bar{\theta}_{12} \end{aligned} \dots\dots\dots \text{(I.66)}$$

Et $\theta = \frac{\theta}{2}$.

I.6.Application sur le potentiel d'inverse- racine carrée :

On applique les notions du paragraphe précédent sur le potentiel $V(r) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}}$ L'opérateur Hamiltonien correspond, dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions [28] :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(\hat{r}) \dots\dots\dots \text{(I.67)}$$

Avec :

$$\begin{cases} V(\hat{r}) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\hat{r}}} \\ \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{\vec{L}\vec{\theta}}{2m_0} \end{cases} \dots\dots\dots \text{(I.68)}$$

Les résultants de l'équation (I.65) aprée le calcule nous arrivons :

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\hat{r}}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}} - \frac{\alpha}{4} \frac{\vec{L}\vec{\theta}}{r^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots \text{(I.69)}$$

Donc le potentiel $V(\hat{r})$ est

$$V(\hat{r}) = V(r) - \frac{\alpha}{4} \frac{\vec{L}\vec{\theta}}{r^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots \text{(I.70)}$$

La combinaison entre deux équations (I.68) et (I.70) permet d'obtenir donné

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \text{ de la façon suivant :}$$

$$\begin{aligned}
 H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) &= H(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j) = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(\hat{r}) \\
 H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) &= H(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j) = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{\bar{L}\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{\sqrt{r}} - \frac{\alpha}{4} \frac{\bar{L}\bar{\theta}}{r^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots (I.71) \\
 H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) &= H(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j) = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{\alpha}{\sqrt{r}} + \frac{\bar{L}\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\bar{L}\bar{\theta}}{r^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

L'opérateur $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right)$ est la somme deux opérateurs $H(p_i, x_i)$ et

$H_{pert}(p_i, x_i)$ avec :

$$H(p_i, x_i) = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{\alpha}{\sqrt{r}} \dots\dots\dots (I.72)$$

Et

$$H_{pert}(p_i, x_i) = \frac{\bar{L}\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\bar{L}\bar{\theta}}{r^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots (I.73)$$

Alors :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = H(p_i, x_i) + H_{pert}(p_i, x_i) \dots\dots\dots (I.74)$$

Chapitre II

**Etude l'équation de Schrödinger pour
le potentiel inverse-racine carrée dans
l'espace ordinaire à trois dimensions**

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

II.1.Introduction :

Dans ce chapitre on a traité les différents formalismes mathématiques de l'espace ordinaire (commutatif), et on étudier l'équation de Schrödinger à trois dimensions pour le potentiel d'inverse- racine carrée.

Le grand moment historique de la naissance de la description quantique de la matière s'est produit lorsque Schrödinger a écrit pour la première fois son équation.

Pendant de longues années, la structure atomique interne de la matière était restée une grande énigme. Dans le cadre de la mécanique classique, l'état d'un système physique est bien défini par la connaissance des variables dynamiques du système, solutions des équations de Newton ou celles de Hamilton et Lagrange, qui sont des quantités continues d'où la continuité des grandeurs qui déterminent l'état du système tel que l'énergie [29,30]. Alors pour ce faire, il fallait d'abord trouver l'analogue des équations de la mécanique classique, une telle équation, qui ne peut pas être directement déduite d'une manière rigoureuse des anciens principes, mais intuitivement devinée sera l'un des postulats de la théorie, cette équation c'est celle qu'on appelle aujourd'hui l'équation de Schrödinger.

La découverte par Schrödinger des équations propres du mouvement des électrons à l'échelle atomique a fourni une théorie à partir de laquelle on peut calculer des phénomènes atomiques de façon quantitative, précise et détaillée. En principe, l'équation de Schrödinger permet d'expliquer tous les phénomènes atomiques sauf ceux qui font intervenir le magnétisme et la relativité.

II.2. L'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger est une équation fondamentale de la mécanique quantique. Elle s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde d'un système physique [30]. Elle prend la forme suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\Psi(\vec{r}, t) \dots\dots\dots (II.1)$$

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

II.3. Présentation de l'équation de Schrödinger :

L'équation de Schrödinger, dans sa forme générale, est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire. Lorsque l'opérateur H du système physique ne dépend pas explicitement du temps, on est ramené par séparation des variables spatiales et temporelles à une équation aux valeurs propres, appelée équation de Schrödinger stationnaire [30]. L'énergie totale E est conservée, donc l'équation de Schrödinger admet des solutions particulières sous forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \Psi(\vec{r}) \dots\dots\dots (II.2)$$

Où $\Psi(\vec{r})$ est la fonction d'onde qui satisfait l'équation de Schrödinger stationnaire. Avec :

$$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \dots\dots\dots (II.3)$$

Tel que $\vec{\nabla}$ représente l'opérateur de dérivés partiels (nabla). En coordonnées cartésiennes il est défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \dots\dots\dots (II.4)$$

Peut-être obtenir, si on applique les principes de quantification canonique

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \text{ Et } p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i} \dots\dots\dots (II.5)$$

On note que la grandeur E est une valeur propre de l'Hamiltonien H qui vérifie l'équation :

$$H\Psi(\vec{r}, t) = E\Psi(\vec{r}, t) \dots\dots\dots (II.6)$$

Et l'Hamiltonien s'écrit sous forme :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r, t) \dots\dots\dots (II.7)$$

Avec :

$$\Psi = \Psi(\vec{r}) \dots\dots\dots (II.8)$$

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

Donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de trouver des états stationnaires parmi tous les états possibles du système qui est en effet un cas particulier d'une équation générale dépendante du temps qui donne l'évolution de la fonction quel que soit l'état du système

II.4. Le moment cinétique orbital :

Le moment cinétique joue déjà un rôle important soit en mécanique classique ou en mécanique quantique. La grandeur qui se conserve lors d'une rotation pour un système d'une seule particule. Pour une particule de mass m et d'impulsion P située à une distance r de l'origine o d'un référentiel $R(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ moment cinétique L est défini comme le produit vectoriel [6,31].

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = -i\hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla} \dots\dots\dots \text{(II.9)}$$

Les composantes L_x, L_y et L_z de \vec{L} s'obtiennent en associant les variables de positions x, y et z aux variables d'impulsion p_x, p_y et p_z Il est alors intéressant de calculer le moment cinétique, d'abord en coordonnées cartésiennes, puis le convertir en coordonnées sphériques. Avec l'aide de formule (II.4), Les trois composantes de moment cinétique s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ L_y &= \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \dots\dots\dots \text{(II.10)} \\ L_z &= \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Au lieu de caractériser le vecteur \vec{r} , par ses composantes cartésiennes x, y, z nous repérons le point M correspondant de l'espace ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) [31].

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \dots\dots\dots \text{(II.11)} \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Avec la transformation inverse :

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \dots\dots\dots (II.12) \\
 \varphi &= \arctan \frac{y}{x}
 \end{aligned}$$

L'élément de volume $dr^3 = dx dy dz$ s'écrit en coordonnées sphériques :

$$dr^3 = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = r^2 dr d\Omega \dots\dots\dots (II.13)$$

Avec : $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ et $d\Omega$ représente l'élément d'angle solide autour de la direction des angles θ et φ . En appliquant la technique classique du changement de variables, on obtient à partir des formules (II.10), (II.11) les expressions suivantes [31] :

$$\begin{aligned}
 L_x &= \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
 L_y &= \frac{\hbar}{i} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \dots\dots\dots (II.14) \\
 L_z &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

Qui forment l'opérateur $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ lequel on peut considérer comme étant l'observable correspondant au carré L^2 du vecteur moment cinétique :

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \dots\dots\dots (II.15)$$

Notons que les opérateurs H, L^2 et L_z commutent entre eux et ils ont formé un ensemble commun de fonctions propres $\Psi(r, \theta, \varphi)$ mais les trois composantes du moment cinétique (L_x, L_y, L_z) ne commutent pas entre eux [31].

$$\begin{aligned}
 [H, L^2] &= [H, L_z] = 0 \\
 [L_i, L_j] &= i\hbar \xi_{ijk} L_k \dots\dots\dots (II.16)
 \end{aligned}$$

D'où l'on tire le carré du moment cinétique :

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] = -\hbar^2 l^2 \dots\dots\dots (II.17)$$

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

Par identification, on remarque alors que le carré du moment angulaire l^2 est écrit comme suivant :

$$l^2 = \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \dots \dots \dots \text{(II.18)}$$

Les valeurs propres de L^2 et L_z :

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 \Psi(r, \theta, \varphi) &= \hbar^2 l(l+1) \Psi(r, \theta, \varphi) \\ \hat{L}_z \Psi(r, \theta, \varphi) &= m \hbar \Psi(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \dots \dots \dots \text{(II.19)}$$

II.5. La méthode de séparation des variables et l'équation de Schrödinger en coordonnées sphérique :

Pour une particule qui se déplace dans un potentiel de racine carrée inverse on choisit le système de coordonnées sphériques pour résoudre l'équation de Schrödinger, pour cette raison on écrit la fonction d'onde en fonction du rayon r et les angles directions θ et φ .

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(r, \theta, \varphi) \dots \dots \dots \text{(II.20)}$$

Dans ce système l'équation de Schrödinger stationnaire devient

$$H\Psi(r, \theta, \varphi) = E\Psi(r, \theta, \varphi) \dots \dots \dots \text{(II.21)}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{p^2}{2m} + V(r) \right] \Psi(r, \theta, \varphi) &= E\Psi(r, \theta, \varphi) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(r, \theta, \varphi) &= E\Psi(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \dots \dots \dots \text{(II.22)}$$

Avec L'opérateur Laplacien s'écrit dans les coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \end{aligned} \dots \dots \dots \text{(II.23)}$$

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

Donc l'équation de Schrödinger devient :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + V(r) \right\} \Psi(r, \theta, \varphi) = E \Psi(r, \theta, \varphi)$$

..... (II.24)

Avec l'opérateur du moment conjugué dans les coordonnées sphériques est écrit sous la forme :

$$p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \dots\dots\dots (II.25)$$

Avec $p_r^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \right)$ Donc :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right] + V(r) \right\} \Psi(r, \theta, \varphi) = E \Psi(r, \theta, \varphi) \dots\dots\dots (II.26)$$

Généralement on peut écrire les solutions sous la forme d'un produit d'une fonction radiale $R_{nl}(r)$ et d'une fonction angulaire $Y_m^l(\theta, \varphi)$:

$$\Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \dots\dots\dots (II.27)$$

Avec $R_{n,l}(r)$ Fonction radiale dépend seulement de rayon et $Y_l^{m_l}(\theta, \varphi)$ la Fonction angulaire appelée aussi harmonique sphérique dépend de θ et φ . Nous pouvons toujours supposer que les fonctions $R_{nl}(r)$ et $Y_m^l(\theta, \varphi)$ sont normalisées séparément :

$$\int_0^\infty \Psi^*(r, \theta, \varphi) \Psi(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\infty r^2 R^*(r) R(r) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta Y_l^{*m_l}(\theta, \varphi) Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) d\theta = 1$$

..... (II.28)

On remplace (II.27) dans l'équation (II.26) :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right] + V(r) \right\} R_{n,l}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) = E R_{n,l}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \dots\dots\dots (II.29)$$

À travers l'équation (II.19) on va trouver :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + [E - V(r)] \frac{2m}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} r R_{n,l}(r) = 0 \dots\dots\dots (II.30)$$

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

On pose

$$R_{n,l}(r) = \frac{U_{n,l}(r)}{r} \dots\dots\dots (II.31)$$

Donc l'équation de Schrödinger devient [7] :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + [E - V(r)] \frac{2m}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} U_{n,l}(r) = 0 \dots\dots\dots (II.32)$$

II.6. Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel d'inverse racine carrée.

Dans le cas où la particule se déplace dans un potentiel d'inverse - racine carrée c'est mieux d'utiliser le système de coordonnées sphériques (trois dimensions) pour résoudre l'équation de Schrödinger. Une question pertinente a été posée d'une façon naturelle : Qu'est-ce qu'un potentiel d'inverse - racine carrée ? Pour répondre à cette question il faut définir le

potentiel d'inverse- racine carrée. En bref, le potentiel d'inverse- racine carrée $V(r) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}}$ est

un potentiel à longue portée qui a les deux états de diffusion et états liés [40,44]. En tant que potentiel à long terme, le potentiel d'inverse - racine carrée a une gamme beaucoup plus longue que le potentiel Coulomb. Son état de diffusion a une asymptotique très différente Comportement de celui du potentiel Coulomb. Son état lié, autre que celui du potentiel Coulomb, N'a pas d'orbites classiques fermées. Une solution exacte du potentiel d'inverse - racine carrée nous permet d'Étudier profondément le comportement des potentiels à long terme [32-33]. Le

potentiel de puissance inverse $V(r) \approx \frac{1}{r^S}$ avec $0 < S < 2$ est un potentiel à long terme et à les deux états de diffusion et les états liés ; tandis que $V(r) \approx \frac{1}{r^S}$ Avec $S \geq 2$ est un potentiel à courte

portée et à Seuls les états de diffusion. Le potentiel de puissance à court terme, $\frac{1}{r^S}$ avec $S \geq 2$, n'a que des états de diffusion et peuvent généralement être traités .Le potentiel de puissance à longue portée, $\frac{1}{r^S}$ avec $0 < S < 2$, seulement quand $S = 1$, Le potentiel Coulomb, a été résolu exactement. Dans ce chapitre, nous présentons une solution exacte de potentiel d'inverse - racine carrée un autre potentiel à long terme [32-33].

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

II.6.1 L'équation radiale.

Pour le potentiel d'inverse - racine carrée définie comme suivante :

$$V(r) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}} \dots\dots\dots (II.33)$$

La fonction d'onde radiale de l'équation (II.32) écrit comme suite :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\alpha}{\sqrt{r}} \right] \right\} U_{n,l}(r) = 0 \dots\dots\dots (II.34)$$

Et les conditions aux limites $r=0$ et $r \rightarrow \infty$. A $r=0$ à la fois pour les états de diffusion et les états liés, la condition aux limites est $U_{n,l}(0) = 0$ (En réalité, Pour la solution régulière, nous mettons en œuvre une condition plus forte $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{U_{n,l}(r)}{r^{l+1}} = 1$). A $r \rightarrow \infty$ Pour les états de diffusion, la condition limite est $U_{n,l}(r \rightarrow \infty) = U_{n,l}^\infty(r)$, où $U_{n,l}^\infty(r)$ est la grande portée Solution asymptotique de l'équation radiale (II.34) ; Pour les états liés, la condition au limite est $U_{n,l}(r \rightarrow \infty) = 0$. En introduisant $z = \sqrt{-2ikr}$ et :

$$U_l(z) = A_l \exp \left[-\left(\frac{z^2}{2} + \lambda z \right) \right] z^{2(l+1)} f_l(z) \dots\dots\dots (II.35)$$

Où $\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{2ik^3}}$ et A_l Une constante, on convertit l'équation radiale (II.34) dans une équation de $f_l(z)$:

$$z f_l''(z) - [2z^2 + 2\lambda z - (4l+3)] f_l'(z) + \{ [\lambda^2 - (4l+4)]z - (4l+3)\lambda \} f_l(z) = 0 \dots\dots\dots (II.36)$$

L'équation de $f_l(z)$, l'équation (II.36), est juste l'équation soi-disant bi conflente de Heun [34].

II.6.2 Solution régulière :

La solution régulière est une solution qui satisfait la condition aux limites à $r=0$, à $r \rightarrow 0$, Les conditions aux limites pour les états liés et les états de diffusion est :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{U_l(r)}{r^{l+1}} = 1 \dots\dots\dots (II.37)$$

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

Parce que la solution asymptotique de l'équation radiale (II.34) à $r \rightarrow 0$ est $U_l(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{l+1}$ [35].

L'équation biconfluite de Heun, Eq (II.36), a deux solutions linéairement indépendantes

$$\begin{aligned}
 y_l^{(1)}(z) &= N(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, z) \\
 y_l^{(2)}(z) &= cN(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, z) \ln z + \sum_{n \geq 0} d_n z^{n-4l-2} \dots \dots \dots \quad \text{(II.38)}
 \end{aligned}$$

Où $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z)$ Est la fonction bi confluite Heun [34-36], la constante

$$c = \frac{1}{4l+2} [d_{4l+1} \lambda (4l+1)] - d_{4l} (\lambda^2 - 4l) \dots \dots \dots \quad \text{(II.39)}$$

Et le coefficient d_ν est donné par la relation de récurrence

$$\begin{aligned}
 d_{-1} &= 0, d_0 = 1 \\
 (\nu+2)(\nu-4l)d_{\nu+2} - \lambda(2\nu+1-4l)d_{\nu+1} + [\lambda^2 - 2(\nu+1) + 4l+2]d_\nu &= 0 \dots \dots \dots \quad \text{(II.40)}
 \end{aligned}$$

La solution peut être déterminée par la condition aux limites (II.37). La fonction bi confluite de Heun a l'expansion [34].

$$N(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, z) = \sum_{n \geq 0} \frac{A_n}{(4l+3)_n} \frac{z^n}{n!} \dots \dots \dots \quad \text{(II.41)}$$

Où le coefficient A_n est donné par :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1, A_1 = (4l+3)\lambda \\
 A_{n+2} &= \lambda(4l+2n+5)A_{n+1} - (n+1)(4l+n+3)[\lambda^2 - (4l+2n+4)]A_n \dots \dots \dots \quad \text{(II.42)}
 \end{aligned}$$

Et $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ est le symbole de Pochhammer. Évidemment, seulement $f_l(z) = y_l^{(1)}(z)$

Satisfait la condition limite de la solution régulière, Eq (II.37) Par Eq (II.35). Et $z = \sqrt{-2ikr}$

Nous arrivons à :

$$U_l(r) = A_l (-2ikr)^{l+1} \exp \left[i \left(kr + \frac{\alpha}{k} \sqrt{r} \right) \right] N(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, \sqrt{-2ikr}) \dots \dots \dots \quad \text{(II.43)}$$

C'est la solution régulière.

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

II.6.3 État liés :

Afin d'obtenir la solution d'état lié, nous exprimons d'abord la solution régulière (II.43) en tant que combinaison linéaire des deux solutions irrégulières [34].

$$N(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, \sqrt{-2ikr}) = k_1(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0)B_l^+(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, \sqrt{-2ikr}) + k_2(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0)H_l^+(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, \sqrt{-2ikr}) \dots\dots\dots \text{(II.44)}$$

Avec

$$B_l^+(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, z) = z^{(\lambda^2-4l-4)/2} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^n} \dots\dots\dots \text{(II.45)}$$

$$H_l^+(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0, z) = z^{-(\lambda^2+4l+4)/2} \sum_{n \geq 0} \frac{e_n}{z^n} \dots\dots\dots \text{(II.46)}$$

Avec B_l^+ et H_l^+ sont deux autres types de fonction Heun.

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}\lambda(\lambda^2 - 1)$$

$$2(n+2)a_{n+2} + [\lambda^3 + (2n+3)\lambda]a_{n+1} + \left[\frac{1}{4}\lambda^4 - (n+1)\lambda^2 + n(n+2) - 4l(l+1)\right]a_n = 0$$

..... (II.47)

Et

$$e_0 = 1, e_1 = \frac{1}{2}\lambda(\lambda^2 - 1)$$

$$2(n+2)e_{n+2} - [\lambda^3 + (2n+3)\lambda]e_{n+1} - \left[\frac{1}{4}\lambda^4 + (n+1)\lambda^2 + n(n+2) - 4l(l+1)\right]e_n = 0$$

.. (II.48)

Ou' $k_1(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0)$ et $k_2(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0)$ Sont des coefficients de combinaison. Ensuite, par l'équation (II.43)

$$U_l(r) = A_1 k_1(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0)(-2ik)^{-i\alpha^2/(8k^3)} \exp\left[i\left(kr + \frac{\alpha}{k}\sqrt{r} - \frac{\alpha^2}{8k^3}\ln r\right)\right] \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(-2ikr)^{n/2}}$$

$$+ A_1 k_2(4l+2, 2\lambda, \lambda^2, 0)(-2ik)^{-i\alpha^2/(8k^3)} \exp\left[-i\left(kr + \frac{\alpha}{k}\sqrt{r} - \frac{\alpha^2}{8k^3}\ln r\right)\right] \sum_{n \geq 0} \frac{e_n}{(-2ikr)^{n/2}}$$

..... (II.49)

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

Ici, nous utilisons les expressions (II.45) et(II.46) pour obtenir la solution asymptotique. L'énergie et la fonction d'onde obtiennent par la fonction biconfluente de Heun [32- 34-37].

Par suite de l'analyse k au plan complexe, on peut considérer k le long de l'axe imaginaire positif. Sur l'axe imaginaire positif, nous définissons :

$$K = ik, k > 0$$

Alors l'équation (II.49), avec $\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{2k^3}}$, devient

$$\begin{aligned}
 U_l(r) = & A_1 k_1(4l+2, -2\lambda, \lambda^2, 0) \exp\left(-kr + \frac{\alpha}{k}\sqrt{r}\right) (2kr)^{\alpha^2/(8k^3)} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(2kr)^{n/2}} \\
 & + A_2 k_2(4l+2, -2\lambda, \lambda^2, 0) \exp\left(kr - \frac{\alpha}{k}\sqrt{r}\right) (2kr)^{-\alpha^2/(8k^3)} \sum_{n \geq 0} \frac{e_n}{(2kr)^{n/2}} \dots \dots \dots \text{(II.50)}
 \end{aligned}$$

On peut voir directement que le premier terme disparaît lorsque $r \rightarrow \infty$ en raison du facteur $\left[\exp\left(-kr + \frac{\alpha}{k}\sqrt{r}\right)\right]$ et d'autre part, le second terme diverge quand $r \rightarrow \infty$ du facteur $\left[\exp\left(kr - \frac{\alpha}{k}\sqrt{r}\right)\right]$. De toute évidence, lorsque $k_2(4l+2, -2\lambda, \lambda^2, 0)$ égal à zéro, La solution $U_l(r)$ satisfera la condition au limite de l'état liés. C'est-à-dire, les zéros du coefficient $k_2(4l+2, -2\lambda, \lambda^2, 0)$ correspondent à l'état lié. Cela implique que les zéros de $k_2(4l+2, -2\lambda, \lambda^2, 0)$ sur l'axe imaginaire déterminent le spectre de l'état lié. En conséquence, le spectre de la valeur propre à l'état lié est déterminé par :

$$k_2(4l+2, -\frac{2\alpha}{\sqrt{2k^3}}, \frac{\alpha^2}{2k^3}, 0) = 0 \dots \dots \dots \text{(II.51)}$$

Où

$$\begin{aligned}
 k_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = & \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((\alpha-\gamma)/2)\Gamma(1+(\alpha+\gamma)/2)} J_{1+(\alpha+\gamma)/2}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\gamma), \beta, \frac{1}{2}(3\alpha-\gamma), \delta + \frac{1}{2}\beta(\gamma-\alpha)\right) \\
 & \dots \dots \dots \text{(II.52)}
 \end{aligned}$$

Avec

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

$$J_\lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \int_0^\infty X^{\lambda-1} e^{-X^2 - \beta X} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, X) dX \dots\dots\dots \text{(II.53)}$$

L'équation (II.51) est une expression implicite du spectre de l'état lié.

$$E_{n,l} = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} (b_n)^{-2/3} \dots\dots\dots \text{(II.54)}$$

Avec $b_n = n - \frac{1}{(2\pi)}$, $n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots$

Donc l'équation (II.54) devient comme suit :

$$E_{n,l} = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(n - \frac{1}{2\pi} \right)^{-2/3} \dots\dots\dots \text{(II.55)}$$

La fonction propre à l'état lié est alors :

$$U_l(r) = C_{n,l} \exp\left(-kr + \frac{\alpha}{k} \sqrt{r}\right) (2kr)^{\alpha^2/(8k^3)} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(2kr)^{n/2}} \dots\dots\dots \text{(II.56)}$$

Où la valeur propre k est donnée par l'équation (II.51) et C est une constante de normalisation.

Et par l'équation (II.31) la fonction radiale $R_{n,l}(r)$ devient de la forme suivant :

$$R_{n,l}(r) = C_{n,l} \exp\left(-kr + \frac{\alpha}{k} \sqrt{r}\right) (2kr)^{\alpha^2/(8k^3)} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(2kr)^{n/2}} \frac{1}{r} \dots\dots\dots \text{(II.57)}$$

On peut maintenant écrire les solutions sous la forme d'un produit d'une fonction radiale $R_{n,l}(r)$ et d'une fonction angulaire $Y_l^{m_l}(\theta, \varphi)$:

$$\Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \dots\dots\dots \text{(II.58)}$$

On remplaçant l'équation (II.57) dans (II.58)

$$\Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) = C_{n,l} \exp\left(-kr + \frac{\alpha}{k} \sqrt{r}\right) (2kr)^{\alpha^2/(8k^3)} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(2kr)^{n/2}} \frac{1}{r} Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \dots\dots\dots \text{(II.59)}$$

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse racine carrée dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

II.7. La fonction d'onde et l'énergie pour l'état fondamental :

La fonction d'onde $\psi^{(0)}(\vec{r})$ et l'énergie E_0 correspondant l'état fondamental est résumé par, respectivement

$$\Psi^{(0)}(\vec{r}) = C_{0,l} \exp\left(-kr + \frac{\alpha}{k}\sqrt{r}\right) (2kr)^{\alpha^2/(8k^3)} \frac{1}{r} Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \dots \dots \dots \text{(II.60)}$$

Et

$$E_{0,l} = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{(2\pi)}\right)^{-2/3} \dots \dots \dots \text{(II.61)}$$

II.8 La fonction d'onde et l'énergie pour le premier état excité :

La fonction d'onde $\psi^{(1)}(\vec{r})$ et l'énergie E_1 correspondant premier état excité est résumé Par :

$$\Psi^{(1)}(\vec{r}) = C_{1,l} \exp\left(-kr + \frac{\alpha}{k}\sqrt{r}\right) (2kr)^{\alpha^2/(8k^3)} \left(a_0 + \frac{a_1}{(2kr)^{1/2}}\right) \frac{1}{r} Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \dots \dots \dots \text{(II.62)}$$

Et

$$E_{1,l} = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{(2\pi)}\right)^{-2/3} \dots \dots \dots \text{(II.63)}$$

Ou $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2} \lambda(\lambda^2 + 1)$ et $\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{2k^3}}$

Chapitre III

**L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée
pour le potentiel inverse-racine carrée dans
l'espace-phase non commutatif à trois
dimensions**

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

III.1 Introduction :

L'objectif de ce chapitre, est l'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel d'inverse-racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions, on applique la méthode de Boopp's Shift au lieu de résoudre l'équation de Schrödinger modifiée directement en utilisant le produit star et le théorème de perturbation pour trouver les corrections des énergies correspondant aux états fondamentale et première état excité [3-4-23].

III.2. L'équation de Schrödinger sur un espace -temps Non commutatif :

Il suffit de remplacer les produits de fonction d'onde (ou les champs) par le produit Star où le produit de Moyal. L'équation de Schrödinger sur un espace-temps non Commutatif aura la forme :

$$\left[\frac{\vec{\hat{p}}^2}{2m} + V(\hat{r}) \right] * \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, \hat{t}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, \hat{t}) \dots\dots\dots \text{(III.1)}$$

III.3. L'opérateur d' Hamiltonien pour le potentiel d'inverse-racine carré dans l'espace-phase non commutatif (NC : 3D-RSP) :

On a vu dans le premier chapitre, que le potentiel d'inverse - racine carrée $V(r) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}}$

Ce potentiel traité dans le cadre de l'équation de Schrödinger modifiée en utilisant la méthode de Boopp's Shift, présenté par l'équation (I.53) dans le chapitre I, au lieu de résoudre directement l'équation de Schrödinger modifiée par le produit star (I.52) (I.54). Donc L'expression explicite de l'équation de Schrödinger devient maintenant sous la forme suivant :

$$H_{nc-isr} \left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right) \Psi(\vec{\hat{r}}) = E_{nc-isr} \Psi(\vec{\hat{r}}) \dots\dots\dots \text{(III.2)}$$

Avec (nc-isr) → non commutative-inverse squart root.

L'opérateur de Hamiltonien $H_{nc-isr} \left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right)$ dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions peut être écrit sous la forme suivant :

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

$$H_{nc-isr} \left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right) = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{\alpha}{\sqrt{r}} + \frac{\bar{L}\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha \bar{L}\bar{\Theta}}{4 r^{3/2}} \dots\dots\dots (III.3)$$

On peut diviser l'équation (III.3) en deux termes principaux :

1-Le première terme est L'Hamiltonien $H_{isr} (\hat{p}_i = p_i, \hat{x}_i = x_i)$ correspond le potentiel

$$V(r) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}} \quad \text{Dans l'espace ordinaire commutatif.}$$

$$H_{isr} (\hat{p}_i = p_i, \hat{x}_i = x_i) = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{\alpha}{\sqrt{r}} \dots\dots\dots (III.4)$$

2-le deuxième terme est L'Hamiltonien noté par $H_{pert-isr} \left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right)$, est représenté les contreibungen produit par les propriétés induit par de l'espace-phase non commutatif :

$$H_{pert-isr} \left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right) = \frac{\bar{L}\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha \bar{L}\bar{\Theta}}{4 r^{3/2}} \dots\dots\dots (III.5)$$

D'après l'équation (I.66), on rappeler par les deux-couplages $L\Theta$ et $L\bar{\theta}$, qui sont donnée par [38-39] :

$$L\Theta \equiv L_x \Theta_{23} + L_y \Theta_{13} + L_z \Theta_{12} \dots\dots\dots (III.6)$$

Et

$$L\bar{\theta} \equiv L_x \bar{\theta}_{23} + L_y \bar{\theta}_{13} + L_z \bar{\theta}_{12} \dots\dots\dots (III.7)$$

Et le paramétrer $\Theta \equiv \frac{\theta}{2}$, et les composantes L_x, L_y et L_z :

$$\begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases} \dots\dots\dots (III.8)$$

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

III.4. L'opérateur Spin-Orbite d'Hamiltonien pour le potentiel d'inverse racine carrée dans l'espace-phase Non Commutatif (NC : 3D-RSP) :

D'après, les formes mathématiques du 2-couplages $\vec{L}\vec{\Theta}$ et $\vec{L}\vec{\theta}$, observé dans les équations (III.6) et (III.7), elle est possible physiquement de remplacé $\vec{L}\vec{\Theta}$ et $\vec{L}\vec{\theta}$ par $\mu\vec{\Theta}\vec{S}\vec{L}$ et $\mu\vec{\theta}\vec{S}\vec{L}$:

$$\begin{aligned} \vec{L}\vec{\Theta} &\rightarrow \mu\vec{\Theta}\vec{S}\vec{L} \\ \vec{L}\vec{\theta} &\rightarrow \mu\vec{\theta}\vec{S}\vec{L} \end{aligned} \dots\dots\dots \text{(III.9)}$$

Avec \vec{S} et μ sont le spin de système et constante ordinaire de proportionnalité, respectivement.

Ce qui permet de réécrire l'équation (III.5) comme suivant :

$$H_{pert-isr} \left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right) \equiv H_{pert-isr} (r, \Theta, \bar{\theta}) = \mu \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right] \vec{L}\vec{S} \dots\dots\dots \text{(III.10)}$$

En mécanique quantique ordinaire, les ensembles d'opérateurs $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots$ qui forment un ensemble complet d'observables complet sont commutent (ECOC). En applique ce règle sur les ensembles d'opérateurs $(\vec{J}^2, \vec{L}^2, \vec{S}^2 \text{ et } J_z)$, c'est-à-dire [4] :

$$\begin{aligned} [\vec{J}^2, \vec{L}^2] &= 0 \\ [\vec{J}^2, \vec{S}^2] &= 0 \dots\dots\dots \text{(III.11)} \\ [\vec{J}^2, J_z] &= 0 \end{aligned}$$

Et les valeurs propres correspondent sont $j(j+1)$ et $\ell(\ell+1)$, $s(s+1)$ et $m(-l \leq m \leq +l)$ dans le système ($c = \hbar = 1$), donc :

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) &= j(j+1) \Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) \\ \vec{L}^2 \Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) &= \ell(\ell+1) \Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) \\ \vec{S}^2 \Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) &= s(s+1) \Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) \\ J_z \Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) &= m \Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \dots\dots\dots \text{(III.12)}$$

Avec \vec{J} est la somme géométrique des moments \vec{L} et \vec{S} :

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \dots\dots\dots \text{(III.13)}$$

Ce qui permet de trouver le couplage spin-orbite $\vec{L}\vec{S}$ de la façon suivante [40-41] :

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2] \dots\dots\dots \text{(III.14)}$$

Les relations (III.12) et (III.14) permettent d'obtenir :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \frac{1}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\Psi \dots\dots\dots \text{(III.15)}$$

Avec $|l-s| \leq j \leq |l+s|$, alors :

$$j = |l-s|, |l-s|+1, \dots\dots\dots 0, \dots\dots\dots |l+s| \dots\dots\dots \text{(III.16)}$$

Pour les deux valeurs extrême du moment cinétique totale, on peut écrire :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \begin{cases} \frac{1}{2}\{(l+s)(l+s+1) - l(l+1) - s(s+1)\}\Psi \equiv p_+\Psi : & Si \quad j = |l+s| \\ \frac{1}{2}\{(l-s)(l-s+1) - l(l+1) - s(s+1)\}\Psi \equiv p_-\Psi : & Si \quad j = |l-s| \end{cases} \dots\dots\dots \text{(III.17)}$$

Et pour $s = \frac{1}{2}$ nous trouvons :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\left(l + \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{3}{2}\right) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right\}\Psi \equiv p_+\Psi : & Si \quad j = \left|l + \frac{1}{2}\right| \\ \frac{1}{2}\left\{\left(l - \frac{1}{2}\right)\left(l - \frac{1}{2}\right) - l(l+1) + \frac{1}{4}\right\}\Psi \equiv p_-\Psi : & Si \quad j = \left|l - \frac{1}{2}\right| \end{cases} \dots\dots\dots \text{(III.18)}$$

Ou p_+ et p_- sont donnée par :

$$\frac{1}{2}\{(l+s)(l+s+1) - l(l+1) - s(s+1)\} , \text{ Et } \frac{1}{2}\{(l-s)(l-s+1) - l(l+1) - s(s+1)\} , \text{ respectivement.}$$

Maintenant, on peut former une matrice d'ordre (3×3) pour représenter l'opérateur spin-orbite d'Hamiltonien pour le potentiel d'inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif (NC : 3D, RSP) :

$$\left(\hat{H}_{so-isr}\right) \equiv \begin{pmatrix} \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{11} & \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{12} & \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{13} \\ \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{21} & \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{22} & \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{23} \\ \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{31} & \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{32} & \left(\hat{H}_{so-isr}\right)_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots \text{(III.19)}$$

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

III.5. Le spectre exacte produit par l'effet de Spin-orbite pour le potentiel d'inverse - racine carrée en (NC : 3D-RSP) :

Nous avons observé que le potentiel modifié $H_{pert-isr}(r, \Theta, \bar{\theta})$ est proportionnel au deux paramètres infinitésimale $(\Theta, \bar{\theta})$ et cela signifie que $H_{pert-isr}(r, \Theta, \bar{\theta})$ prend une valeur très petite par rapport à la partie principale $H_{isr}(\hat{p}_i = p_i, \hat{x}_i = x_i)$, Donc on peut appliquer le théorème de perturbation pour obtenir les modifications exacte d'énergie E_{nc-per} au premier ordre en $(\Theta, \bar{\theta})$. L'énergie totale dans l'espace-temps non commutatif E_{nc-isr} est la somme de l'énergie correspondant à l'espace ordinaire E et les corrections E_{nc-per} :

$$E_{nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = E + E_{nc-per} \dots \dots \dots \text{(III.20)}$$

Le théorème de perturbation permet d'obtenir les corrections au premier ordre de la façon suivante [40-41] :

$$E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \langle \Psi^{(p)}(\vec{r}) | H_{pert-isr}(r, \Theta, \bar{\theta}) | \Psi^{(p)}(\vec{r}) \rangle \dots \dots \dots \text{(III.21)}$$

On peut récrire l'équation (III.21) sous la forme :

$$E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \int \Psi^{(p)*}(\vec{r}) H_{pert-isr}(r, \Theta, \bar{\theta}) \Psi^{(p)}(\vec{r}) d\tau \dots \dots \dots \text{(III.22)}$$

Ou $d\tau$ représenté l'élément de volume en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , qui est donnée par :

$$d\tau = r^2 dr d\Omega \dots \dots \dots \text{(III-23)}$$

Avec l'angle solide $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ et $\Psi^{(p)}(\vec{r})$ la fonction d'onde qui est définie par :

$$\Psi^{(p)}(\vec{r}) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \dots \dots \dots \text{(III.24)}$$

Donc, on peut écrire l'équation (III.22), de la forme :

$$E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \int_0^\infty R_{n,l}^*(r) \left[\mu \left(\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha \Theta}{4 r^{3/2}} \right) \right] \bar{L} \bar{S} R_{n,l}(r) r^2 dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^{*m_l}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega \dots \dots \dots \text{(III.25)}$$

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

La fonction d'onde $\Psi^{(p)}(\vec{r})$ normalisée, cela permet d'écrire :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^{*m_l}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) d\Omega = 1 \dots\dots\dots \text{(III.26)}$$

Ce qui permet de réduire les corrections trouvées par l'équation (III.25) sont réduites sous la forme :

$$E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \int_0^\infty R_{n,l}^*(r) \left\{ \mu \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right] \right\} \bar{L}\bar{S}R_{n,l}(r) r^2 dr \dots\dots\dots \text{(III.27)}$$

On remplace le terme de couplage spin-orbite $\left\{ \frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right\} \bar{L}\bar{S}$ par :

$$\left\{ \frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right\} \bar{L}\bar{S}R_{n,l}(r) = \left\{ \frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right\} \frac{1}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} R_{n,l}(r) \dots\dots \text{(III.28)}$$

En remplaçant l'équation (III.28) dans l'équation (III.27) pour trouver les corrections au premier ordre :

$$E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} \int_0^\infty R_{n,l}^*(r) \mu \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right] R_{n,l}(r) r^2 dr \dots\dots\dots \text{(III.29)}$$

III.5.1 Le spectre exacte d'état fondamentale produit par l'effet de spin-orbite pour le potentiel d'inverse - racine carrée en (NC : 3D-RSP) :

Maintenant on applique le théorème de perturbation pour trouver les corrections d'énergie pour d'état fondamentale $E_{0nc-per}$, en utilisant la fonction d'onde présenté (II.57) et l'équation (III.29) :

$$E_{0nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} \int_0^\infty R_{0,l}^*(r) \mu \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right] R_{0,l}(r) r^2 dr \dots\dots\dots \text{(III.30)}$$

On remplaçant l'équation (II.57) dans (III.30) :

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

$$E_{0nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \mu |C_{0l}|^2 \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \times \int_0^\infty \exp\left[2\left(-kr + \frac{\alpha}{k}\sqrt{r}\right)\right] (2kr)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}}\right] dr \dots \text{(III.31)}$$

Avec $C_{n,l}$ constante de normalisation, On peut simplifier (III.31) pour trouver :

$$E_{0nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \mu |C_{0l}|^2 \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \times \left\{ \frac{\bar{\theta}}{2m_0} \int_0^\infty (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \exp\left(-2kr + \frac{2\alpha}{k}\sqrt{r}\right) (r)^{\alpha^2/(4k^3)} dr - \Theta \int_0^\infty \frac{\alpha}{4} (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \exp\left(-2kr + \frac{2\alpha}{k}\sqrt{r}\right) (r)^{\frac{\alpha^2}{(4k^3)} - \frac{3}{2}} dr \right\} \dots \text{(III.32)}$$

Donc L'énergie est donnée comme suit :

$$E_{0nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \mu |C_{0l}|^2 \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \left(\frac{\bar{\theta}}{2m_0} T_1 - \Theta T_2 \right) \dots \text{(III.33)}$$

Avec les deux termes T_i ($i = \overline{1,2}$):

$$T_1 = (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp\left(-2kr + \frac{2\alpha}{k}\sqrt{r}\right) (r)^{\alpha^2/(4k^3)} dr \dots \text{(III.34)}$$

$$T_2 = \frac{\alpha}{4} (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp\left(-2kr + \frac{2\alpha}{k}\sqrt{r}\right) (r)^{\frac{\alpha^2}{(4k^3)} - \frac{3}{2}} dr$$

Pour résoudre cette intégration, nous utilisons le changement de variable suivant ($\rho = \sqrt{r}$)

Donc :

$$T_1 = 2(2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp\left(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho\right) (\rho)^{\frac{\alpha^2}{(2k^3)} + 1} d\rho \dots \text{(III.35)}$$

$$T_2 = \frac{\alpha}{2} (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp\left(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho\right) (\rho)^{\frac{\alpha^2}{(2k^3)} - 2} d\rho$$

On peut simplifier (III.35) pour trouver :

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 2(2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp\left(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho\right) (\rho)^{\sigma-1} d\rho \\
 T_2 &= \frac{\alpha}{2}(2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp\left(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho\right) (\rho)^{\eta-1} d\rho
 \end{aligned}
 \tag{III.36}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{\alpha^2}{2k^3} + 2 \\
 \eta &= \frac{\alpha^2}{2k^3} - 1
 \end{aligned}
 \tag{III.37}$$

Pour obtenir les résultants d'intégrales (III.36), ont appliqué l'intégrale spéciale suivant [42] :

$$\int_0^\infty X^{\nu-1} \exp(-\beta X^2 - \gamma X) dX = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)
 \tag{III.38}$$

Où $D_{-\nu}$ Est la fonction cylindre parabolique, Et $\Gamma(\nu)$ represent la fonction de Gamma.

On applique l'intégrale (III.38), Nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = \sigma = \frac{\alpha^2}{2k^3} + 2 \\ \beta = 2k \\ \gamma = -\frac{2\alpha}{k} \end{array} \right\}
 \tag{III.39}$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_2 = \eta = \frac{\alpha^2}{2k^3} - 1 \\ \beta = 2k \\ \gamma = -\frac{2\alpha}{k} \end{array} \right\}
 \tag{III.40}$$

Correspondant les 2-termes (T_1) et (T_2) respectivement, donc on a les résultats suivants :

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 2(2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[(4k)^{-\frac{\sigma}{2}} \Gamma(\sigma) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\sigma} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right] \\
 T_2 &= \frac{\alpha}{2} (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[(4k)^{-\frac{\eta}{2}} \Gamma(\eta) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\eta} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{III.41}$$

On compense les valeurs de σ et η dans l'équation (III.41) :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 2(2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[(4k)^{-\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha^2}{2k^3} + 2\right) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\left(\frac{\alpha^2}{2k^3}+2\right)} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right] \\
 T_2 &= \frac{\alpha}{2} (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[(4k)^{-\frac{\alpha^2}{4k^3}+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha^2}{2k^3} - 1\right) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\left(\frac{\alpha^2}{2k^3}-1\right)} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{III.42}$$

Ce qui permet d'obtenir les corrections $E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta})$ on fonctions des paramètres $(\Theta, \bar{\theta})$ et les paramétrées de potentiel (α) . Et on remplaçant T_1 et T_2 dans l'équation (III.33).

$$\begin{aligned}
 E_{0nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) &= \frac{1}{2} \mu |C_{0,l}|^2 \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \times \\
 &\left(\frac{\bar{\theta}}{2m_0} 2(2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[(4k)^{-\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha^2}{2k^3} + 2\right) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\left(\frac{\alpha^2}{2k^3}+2\right)} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right] \right. \\
 &\left. - \Theta \frac{\alpha}{2} (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[(4k)^{-\frac{\alpha^2}{4k^3}+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha^2}{2k^3} - 1\right) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\left(\frac{\alpha^2}{2k^3}-1\right)} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right] \right)
 \end{aligned} \tag{III.43}$$

D'après l'équation (III.17) on trouve :

$$E_{0nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \mu |C_{0,l}|^2 \begin{cases} p_+ \left(\frac{\bar{\theta}}{2m_0} T_1 - \Theta T_2 \right) & Si \quad j = |l + s| \\ p_- \left(\frac{\bar{\theta}}{2m_0} T_1 - \Theta T_2 \right) & Si \quad j = |l - s| \end{cases} \tag{III.44}$$

L'énergie totale dans l'espace-phase non commutatif pour d'état fondamentale $E_{0nc-isr}$ est la somme de l'énergie de l'état fondamentale $E_{0,l}$ présenté par l'équation (II.61) et les corrections $E_{0nc-per}(\Theta, \bar{\theta})$ déterminée par (III.33) :

$$E_{0nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = E_{0,l} + E_{0nc-per} \tag{III.45}$$

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

Donc :

$$E_{0nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = \left[-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{-2/3} \right] + \frac{1}{2} \mu |C_{0,l}|^2 \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \left(\frac{\bar{\theta}}{2m_0} T_1 - \Theta T_2 \right) \dots \dots \dots \text{(III.46)}$$

L'énergie totale dans l'espace-phase non commutatif pour l'état fondamentale si $j = l + s$.

$$E_{0nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = \left[-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{-2/3} \right] + \left[\mu |C_{0,l}|^2 p_+ \left(\frac{\bar{\theta}}{2m_0} T_1 - \Theta T_2 \right) \right] \dots \dots \dots \text{(III.47)}$$

L'énergie totale dans l'espace-phase non commutatif pour l'état fondamentale si $j = |l - s|$.

$$E_{0nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = \left[-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{-2/3} \right] + \left[\mu |C_{0,l}|^2 p_- \left(\frac{\bar{\theta}}{2m_0} T_1 - \Theta T_2 \right) \right] \dots \dots \dots \text{(III.48)}$$

III.5.2 Le spectre exacte de premier état excité produit par l'effet de spin-orbite pour le potentiel d'inverse - racine carrée en (NC : 3D-RSP) :

Dans ce partie on applique aussi le théorème de perturbation pour trouver les corrections d'énergie $E_{1nc-per}(\Theta, \bar{\theta})$ pour première état excité produit par l'effet de Spin-orbite pour le potentiel d'inverse - racine carrée, en utilisant la fonction d'onde présenté (II.57) et l'équation (III.29) :

$$E_{1nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \int_0^\infty R_{1,l}^*(r) \mu \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right] R_{1,l}(r) r^2 dr \dots \dots \dots \text{(III.49)}$$

Donc on remplaçant l'équation (II.57) dans (III.49) :

$$E_{1nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \mu |C_{1,l}|^2 \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \int_0^\infty \exp\left(-2kr + \frac{2\alpha}{k} \sqrt{r}\right) (2kr)^{\alpha^2/(4k^3)} \left(a_0 + \frac{a_1}{(2kr)}\right)^2 \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right] dr \dots \dots \dots \text{(III.50)}$$

Avec $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2} \lambda(\lambda^2 + 1)$ et $\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{2k^3}}$, ET $C_{n,l}$ constante de normalisation.

On peut simplifier (III.50) pour trouver :

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

$$E_{1nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \mu |C_{1,l}|^2 \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} (T^1 + T^2 + T^3) - \Theta (T^4 + T^5 + T^6) \right]$$

..... (III.51)

Autre écriture :

$$E_{1nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \mu |C_{1,l}|^2 \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} \sum_{i=1}^3 T^i - \Theta \sum_{i=4}^6 T^i \right] \dots \dots \dots (III.52)$$

Avec les 6- termes T^i ($i = \overline{1,6}$) :

$$T^1 = a_0^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}} \int_0^\infty \exp(-2kr + \frac{2\alpha}{k} \sqrt{r}) (r)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}} dr$$

$$T^2 = a_1^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-2} \int_0^\infty \exp(-2kr + \frac{2\alpha}{k} \sqrt{r}) (r)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-2} dr$$

..... (III.53)

ET

$$T^3 = 2a_0 a_1 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \int_0^\infty \exp(-2kr + \frac{2\alpha}{k} \sqrt{r}) (r)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} dr$$

$$T^4 = \frac{\alpha}{4} a_0^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}} \int_0^\infty \exp(-2kr + \frac{2\alpha}{k} \sqrt{r}) (r)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-\frac{3}{2}} dr$$

..... (III.54)

ET

$$T^5 = \frac{\alpha}{4} a_1^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-2} \int_0^\infty \exp(-2kr + \frac{2\alpha}{k} \sqrt{r}) (r)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-\frac{7}{2}} dr$$

$$T^6 = \frac{\alpha}{2} a_0 a_1 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \int_0^\infty \exp(-2kr + \frac{2\alpha}{k} \sqrt{r}) (r)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-\frac{5}{2}} dr$$

..... (III.55)

Pour résoudre cette intégration, nous utilisons le changement de variable suivant ($\rho = \sqrt{r}$).

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

$$T^1 = 2a_0^2 (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho) (\rho)^{\frac{\alpha^2}{2k^3}+1} d\rho \dots\dots\dots (III.56)$$

$$T^2 = 2a_1^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-2} \int_0^\infty \exp(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho) (\rho)^{\frac{\alpha^2}{2k^3}-3} d\rho$$

ET

$$T^3 = 4a_0a_1 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \int_0^\infty \exp\left(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho\right) (\rho)^{\frac{\alpha^2}{2k^3}-1} d\rho \dots\dots\dots (III.57)$$

$$T^4 = \frac{\alpha}{2} a_0^2 (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho) (\rho)^{\frac{\alpha^2}{2k^3}-2} d\rho$$

ET

$$T^5 = \frac{\alpha}{2} a_1^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-2} \int_0^\infty \exp(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho) (\rho)^{\frac{\alpha^2}{2k^3}-6} d\rho \dots\dots\dots (III.58)$$

$$T^6 = \alpha a_0a_1 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \int_0^\infty \exp\left(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho\right) (\rho)^{\frac{\alpha^2}{2k^3}-4} d\rho$$

On peut simplifier les équations (III.56) et (III.57), (III.58) pour trouver :

$$T^1 = 2a_0^2 (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho) (\rho)^{\tau-1} d\rho \dots\dots\dots (III.59)$$

$$T^2 = 2a_1^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-2} \int_0^\infty \exp(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho) (\rho)^{\delta-1} d\rho$$

ET

$$T^3 = 4a_0a_1 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \int_0^\infty \exp\left(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho\right) (\rho)^{\phi-1} d\rho \dots\dots\dots (III.60)$$

$$T^4 = \frac{\alpha}{2} a_0^2 (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \int_0^\infty \exp(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho) (\rho)^{\xi-1} d\rho$$

ET

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

$$\begin{aligned}
 T^5 &= \frac{\alpha}{2} a_1^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-2} \int_0^\infty \exp(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho) (\rho)^{\alpha-1} d\rho \\
 T^6 &= \alpha a_0 a_1 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \int_0^\infty \exp\left(-2k\rho^2 + \frac{2\alpha}{k}\rho\right) (\rho)^{\alpha-1} d\rho
 \end{aligned}
 \tag{III.61}$$

Pour obtenir les résultants d'intégrales (III.59), (III.60) et (III.61) ont appliqué l'intégrale spéciale dans l'équation (III.38), Donc on a les résultants d'intégrales suivants :

Pour T^1 :

$$\left(\begin{array}{l} \nu_1 = \tau = \frac{\alpha^2}{2k^3} + 2 \\ \beta = 2k \\ \gamma = -\frac{2\alpha}{k} \end{array} \right) \rightarrow T^1 = 2a_0^2 (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[(4k)^{-\frac{\tau}{2}} \Gamma(\tau) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\tau}\left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right]$$

..... (III.62)

Avec $T^1 = a_0^2 T_1$ et la valeur de T_1 dans les equations (III.42).

Pour T^2 :

$$\left(\begin{array}{l} \nu_3 = \delta = \frac{\alpha^2}{2k^3} - 2 \\ \beta = 2k \\ \gamma = -\frac{2\alpha}{k} \end{array} \right) \rightarrow T^2 = 2a_1^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-2} \left[(4k)^{-\frac{\delta}{2}} \Gamma(\delta) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\delta}\left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right]$$

..... (III.63)

Pour T^3 :

$$\left(\begin{array}{l} \nu_5 = \phi = \frac{\alpha^2}{2k^3} \\ \beta = 2k \\ \gamma = -\frac{2\alpha}{k} \end{array} \right) \rightarrow T^3 = 4a_0 a_1 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3}-1} \left[(4k)^{-\frac{\phi}{2}} \Gamma(\phi) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\phi}\left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right]$$

..... (III.64)

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

Pour T^4 :

$$\left(\begin{array}{l} \nu_2 = \xi = \frac{\alpha^2}{2k^3} - 1 \\ \beta = 2k \\ \gamma = -\frac{2\alpha}{k} \end{array} \right) \rightarrow T^4 = \frac{\alpha}{2} a_0^2 (2k)^{\alpha^2/(4k^3)} \left[(4k)^{-\frac{\xi}{2}} \Gamma(\xi) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\xi} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right]$$

..... (III.65)

Avec $T^4 = a_0^2 T_2$, et la valeur de T_2 dans les equations (III.42).

Pour T^5 :

$$\left(\begin{array}{l} \nu_4 = \chi = \frac{\alpha^2}{2k^3} - 5 \\ \beta = 2k \\ \gamma = -\frac{2\alpha}{k} \end{array} \right) \rightarrow T^5 = \frac{\alpha}{2} a_1^2 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3} - 2} \left[(4k)^{-\frac{\chi}{2}} \Gamma(\chi) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\chi} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right]$$

..... (III.66)

Pour T^6 :

$$\left(\begin{array}{l} \nu_6 = \omega = \frac{\alpha^2}{2k^3} - 3 \\ \beta = 2k \\ \gamma = -\frac{2\alpha}{k} \end{array} \right) \rightarrow T^6 = \alpha a_0 a_1 (2k)^{\frac{\alpha^2}{4k^3} - 1} \left[(4k)^{-\frac{\omega}{2}} \Gamma(\omega) \exp\left(\frac{4\alpha^2}{16k^3}\right) D_{-\omega} \left(-\frac{2\alpha}{k\sqrt{4k}}\right) \right]$$

..... (III.67)

Ce qui permet d'obtenir les corrections $E_{inc-per}(\Theta, \bar{\theta})$ on fonctions des paramètres $(\Theta, \bar{\theta})$ et les paramétrées de potentiel (α) . À partir les équations (III.51) et (III.17) on trouve :

$$E_{inc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \mu |C_{1,l}|^2 \begin{cases} p_+ \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} (T^1 + T^2 + T^3) - \Theta (T^4 + T^5 + T^6) \right] Si \quad j = |l + s| \\ p_- \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} (T^1 + T^2 + T^3) - \Theta (T^4 + T^5 + T^6) \right] Si \quad j = |l - s| \end{cases} \dots\dots\dots (III.68)$$

Chapitre III : L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel inverse - racine carrée dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

Avec les valeurs des 6- termes T^i ($i = \overline{1,6}$) représentés dans les équations (III.62) vers (III.67).

L'énergie totale dans l'espace-phase non commutatif pour premier états excité $E_{1nc-isr}$ est la somme de l'énergie de l'état fondamentale $E_{1,l}$ présenté par l'équation (II.63) et les corrections $E_{1nc-per}(\Theta, \bar{\theta})$ déterminée par (III.51) donc :

$$E_{1nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = E_{1,l} + E_{1nc-per} \dots \dots \dots \textbf{(III.69)}$$

Donc

$$E_{1nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = \left[-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \right)^{-2/3} \right] + \left\{ \frac{1}{2} \mu |C_{1,l}|^2 \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} (T^1 + T^2 + T^3) - \Theta (T^4 + T^5 + T^6) \right] \right\} \dots \dots \dots \textbf{(III.70)}$$

L'énergie totale dans l'espace-phase non commutatif pour l'état excité si $j = l + s$.

$$E_{1nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = \left[-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \right)^{-2/3} \right] + \left\{ \mu |C_{1,l}|^2 p_+ \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} (T^1 + T^2 + T^3) - \Theta (T^4 + T^5 + T^6) \right] \right\} \dots \dots \dots \textbf{(III.71)}$$

L'énergie totale dans l'espace-phase non commutatif pour l'état excité si $j = |l - s|$.

$$E_{1nc-isr}(\Theta, \bar{\theta}) = \left[-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \right)^{-2/3} \right] + \left\{ \mu |C_{1,l}|^2 p_- \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} (T^1 + T^2 + T^3) - \Theta (T^4 + T^5 + T^6) \right] \right\} \dots \dots \dots \textbf{(III.72)}$$

Conclusions et interprétations

Physique

Conclusions et interprétations Physique

Dans notre travail sur la résolution de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel d'inverse-racine carrée modifiée $V(\hat{r})$ dans l'espace-phase noncommutatif à trois dimensions (NC-3D-RSP), cette étude utilisait la méthode de Boopp's shift, au lieu de Compte directement. D'après les résultants représenté par les équations **(III.46)** et **(III.70)**, les énergies correspondant à l'état fondamental ($E_{0nc-isr}$) et le premier état excité ($E_{1nc-isr}$) respectivement, chaque niveaux d'énergie se transforme en deux nouveaux états : $E_{nc,u}(\Theta, \bar{\theta})$ et $E_{nc,d}(\Theta, \bar{\theta})$ correspondant une particule fermionique avec deux polarisations up et down, sont produits par le nouveau Hamiltonien H_{pert} ce qui est exprimé par l'équation **(III.10)** :

$$H_{pert-isr} \left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right) \equiv H_{pert-isr}(r, \Theta, \bar{\theta}) = \mu \left[\frac{\bar{\theta}}{2m_0} - \frac{\alpha}{4} \frac{\Theta}{r^{3/2}} \right] \vec{L}\vec{S}$$

Nous notons dans ce nouveau Hamiltonien $H_{nc-isr}(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j)$ qui a résulté de l'étude dans le nouvel espace (l'espace-phase non commutatif), qui se compose de deux parties :

Le premier terme est L'Hamiltonien $H_{isr}(\hat{x}_i = x_i, \hat{p}_j = p_j)$ dans l'espace ordinaire commutatif, où il représente l'interaction entre une particule avec spin (1/2) en potentiel d'inverse –racine carrée dans l'espace ordinaire commutatif.

Le deuxième terme est L'Hamiltonien noté par :

$H_{pert-isr}(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j)$, est représenté dans l'espace-phase non commutatif qui doit faire avec la dégénérescence de l'énergie des deux équations **(III.46)** et **(III.70)** à 2 niveau d'énergie. La modification des niveaux d'énergie est également établie, les anciens états changent radicalement et remplaçant par de nouveaux états dégénérés, le terme $\vec{L}\vec{S}$ dans l'équation de $H_{pert-isr}$ responsable de cette dégénérescence, physiquement, ce terme connu par couplage spin-orbite.

L'interaction spin-orbite, qu'elle a été vue dans le potentiel déformé se produit automatiquement, cet effet des propriétés de la non commutativité de l'espace -phase, donc la symétrie de l'espace- ordinaire est prolongée d'inclure une nouvelle symétrie qui égale l'ancienne symétrie est le couplage spin-orbite. La limite $(\theta, \bar{\theta}) \rightarrow (0,0)$ permet d'obtenir tous les résultants de l'espace ordinaire à trois dimensions pour le potentiel étudiés.

Références

Bibliographies

Références Bibliographiques

- [1] The principales of quantum Mechanic, Oxford university press, (1958).
- [2] Justin Gabriel, Diverses Approches de la Mécanique Quantique sur Espace Non-Commutatif, Master Science de la matière, (2014).
- [3] Mémoire de master préparé par : Khodja MERIEM et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergies atomiques produites par le potentiel inverse-carré dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions, promotion : 2016- département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [4] Mémoire de master préparé par : Djenaoui Imane et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergie atomique produit par le potentiel de Cornell au Quarkouniom dans l'espace-phase Non commutatif à trois dimensions, promotion : 2016- département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [5] Nouredine Zettili, Quantum Mechanic Concepts and Applications, Second Edition. Jacksonville State University, Jacksonville, USA. A John Wiley and Sons, Ltd., Publication.
- [6] v.Devanathan, Angular momentum techniques in quantum Mechanic. Department of Nuclear physics, university of Madras and Crystal growth centre Anna university chennai india Kluwer Academic publishers New York /Boston /Dordrecht /London/Moscou.
- [7] Yoav peleg, ph.D.Reuven pnini, ph.D.Elyahu Zaarur, M, sc...Schaum's outline of theory And problems of quantum Mechanic .New York, London, Madrid, Tokyo.
- [8] R.H Dicke –j.p-Wittke .Introduction to quantum Machanic .Addison Wesley publishing company.
- [9] Médial D'or (2004) du CNRS Alain Conne –mathématicien la géométrie Noncommutative.
- [10] J.Madore, An introduction to non commutative différentiel geometry and physical application, Cambridge universty press. (2000).
- [11] Anaïs smailagic and Eurospallucci « Isotropic representation of the non commutative 2D harmonic oscillator »phy.Rev.D65(2002),hep.th/0108216.
- [12] Luca Mezincescu, star operation in quantum Mechanic (2000).
- [13] M.chaichian, M.MSheikh .Jabbari and Tureanu « Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in non commutative QED.phys,Rev Lett,86,(2001)hepth/0010175.
- [14] Alain Connes.Noncommutative Geometry, Alain Connes-30 June 1994 Paris.
- [15] J, Mador .S.schranl.p.schupp and J.Wess, « Gouge theory on, non commutative space » EUR, phys. J.C.16.161. (2000)[hep-th/0001203].
- [16] B.Jurco.s.schranl .p.schupp and J.Wess « Enveloping algabra valued gauge transformations For non-Abélien gouge groupe on non commutative space».Eur.phy.Jc17.521. (2000) hep.th

Références Bibliographiques

(0006246).

[17] Aspect Mathématique et physique de la Géométrie non commutative .by KHELILI-FARID
Adisertation submitted to the Faculty of the GRADUATE.

[18] Abdelmadjid Maireche, Atomic Spectrum for Schrödinger Equation with Rational Spherical Type Potential in Non-commutative Space and Phase, The African Review of Physics, Vol. 10 :0046, 373-381(2015).

[19] Abdelmadjid Maireche, New exact bound states solutions for (C.F.P.S.) potential in the case of Non-commutative three dimensional non relativistic quantum mechanics, Med. J. Model. Simul. 04 (2015) 060-072.

[20] Abdelmadjid. Maireche, New Exact Solution of the Bound States for the Potential Family $V(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} + crk$ in both Noncommutative Three Dimensional Spaces and Phases : Non Relativistic Quantum Mechanics, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 58, pp. 164-176, Sep. 2015.

[21] Abdelmadjid Maireche, New Quantum atomic spectrum of Schrödinger equation with pseudoharmonic potential in both noncommutative three dimensional spaces and phases, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol.09, March, Year 2015, 1301-1--1301-8.

[22] Abdelmadjid Maireche, A New Approach to the Non Relativistic Schrödinger equation for an Energy-Depended $V(r) = V_0(1 + \eta E_{n,l})r^2$ Potential in Both Noncommutative three Dimensional spaces and phases, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 60, pp. 11-19, Sep. 2015.

[23] Mémoire de master préparé par : Nouibat ZAHIA et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, les niveaux d'énergies atomiques produites par le potentiel inverse-carré dans l'espace-phase non Commutatif à deux dimensions, promotion : 2016- département de physique, université de M'sila, Algérie.

[24] Abdelmadjid Maireche, Spectrum of Schrödinger Equation with H.L.C. Potential in Noncommutative Two-dimensional Real Space, The African Rev. Phys. 9: 0060, 479-483 (2014).

[25] Abdelmadjid Maireche, Deformed Quantum Energy Spectra with Mixed Harmonic Potential for Nonrelativistic Schrödinger equation, J. Nano- Electron. Phys. 7 No 2, (2015) 02003.

[26] Abdelmadjid Maireche, A Study of Schrödinger Equation with Inverse Sextic Potential en 2-dimensional Non-commutative Space, The African Rev. Phys. 9 :0025, (2014) 185-193.

Références Bibliographiques

- [27] Abdelmadjid Maireche Deformed Bound States for Central Fraction Power Potential : Non Relativistic Schrödinger Equation, The African Rev. Phys. 10 :0014, (2015) 97-103.
- [28] Abdelmadjid Maireche, The Nonrelativistic Ground State Energy Spectra of Potential Counting Coulomb and Quadratic Terms in Non-commutative Two Dimensional Real Spaces and Phases, J. Nano- Electron. Phys. 8 No 1, (2016) 01021.
- [29] Claude Cohen-Tannoudji-Bernard Diu-Franck, Laloé. Mécanique quantique 2 (1973) Hermann Éditeurs des sciences et des arts 293 rue Lecourbe 75015 paris.
- [30] Claude Cohen-Tannoudji-Bernard Diu-Franck, Laloé. Mécanique quantique 1 (1973) Hermann Éditeurs des sciences et des arts 293 rue Lecourbe 75015 paris.
- [31] J.-L. Vuilleumier, PHYSIQUE MODERNE MÉCANIQUE QUANTIQUE, Notes de cours, Université de Neuchâtel, 2001.
- [32] Abdelmadjid Maireche, An exact solution of the three-dimensional spherical Symmetry inverse-square-root potential $V(r) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}}$, including scattering and bound-state Solutions, is presented © 2016 Elsevier Inc. All rights reserved. À Department of Physics, Tianjin University, Tianjin 300072, PR China.
- [33] T. Liu, W.-D. Li, W.-S. Dai, J. High Energy Phys. 2014 (6) (2014) 1–12.
- [34] A. Ronveaux, F.M. Arscott, Heun's Differential Equations, Oxford University Press, 1995.
- [35] L.E. Ballentine, Quantum Mechanics : A Modern Development, World Scientific, 1998.
- [36] S. Slavyanov, W. Lay, Special Functions : A Unified Theory Based on Singularities, Oxford University Press, 2000.
- [37] Artur Ishkhanyan, Exact solution of the Schrödinger equation for the inverse square root Potential $V(x) = \frac{V_0}{\sqrt{x}}$, National Academy of Sciences of Armenia, July 2015.
- [38] Abdelmadjid Maireche, A Recent Study of Quantum Atomic Spectrum of the Lowest Excitations for Schrödinger Equation with Typical Rational Spherical Potential at Planck's and Nanoscales, J. Nano- Electron. Phys. 7 No 3, (2015) 02003.
- [39] Abdelmadjid Maireche, New Relativistic Atomic Mass Spectra of Quark (u, d and s) for Extended Modified Cornell Potential in Nano and Planck's Scales, J. Nano- Electron. Phys. 8 No 1, (2016) 01020.
- [40] J. L. Basidevant, Mécanique Quantique, ellipses, ISBN 2-7298-8614-1 (1986), Paris, France.
- [41] E. Elbaz, Quantum, The quantum theory of particles, Fields, and Cosmology, Springer, ISBN 3-540-62093-1 (1995), New York, USA.

Références Bibliographiques

[42] Abdelmadjid Maireche, Deformed Bound States for Central Fraction Power Potential : Non Relativistic Schrödinger Equation, The African Review of Physics (2015) **10** :0014.

Abstract

In this work, of master memory, in theoretical physics, (2016/2017), we have studied the Schrödinger equation for inverse –square root potential in noncommutative three dimensional spaces and phases by applying the Bopp's shift method to first order in the noncommutative parameters $(\Theta, \bar{\theta})$, instead of using the star product method. We apply Bopp's shift method to obtaining modified inverse –square root potential; and by applying standard perturbation theory we obtain the modification energy levels of atoms with one electron, it has been observed that the obtained energy spectra was changed radically, and replaced by degenerate new states, depending on the discrete quantum atomic numbers: j, l and the spin of electron, these results produced from spin-orbital interactions.

Keywords: Star product, noncommutative space and phase, inverse –square potential.

Paces number(s): 11.10.Nx, 32.30-r, 03.65-w.

المخلص

في هذا العمل الخاص بمذكرة الماستر في الفيزياء النظرية (2017/2016). درسنا معادلة شرودينغر تحت تأثير كمون يسمى inverse –square root potential في الفضاء اللاتبادلي ثلاثي البعد-ثلاثي الطور بتطبيق مبدأ Boopp بدلا من الحل المباشر الناتج عن الجداء النجمي. اعتمدنا النتائج الموافقة للحد $(\Theta, \bar{\theta})$. وجدنا الكمون الناتج عن خواص الفضاء يحتوي على حد جديد متناهي في الصغر بالمقارنة مع الحد الرئيسي وهذا يسمح بتطبيق نظرية الاضطرابات المستقرة. قمنا بحساب الطاقات الجديدة. حيث أن النتائج المحصل عليها تختلف جذريا عن النتائج الأصلية و أصبحت متوالدة و متعلقة بأعداد كمية جيدة هي j, l : و السبين الخاص بالإلكترون. هذا التوالد في مستويات الطاقة يمكن تفسيره فيزيائيا نتيجة لتأثير التفاعل سبين-مدار.

الكلمات المفتاحية: الجداء النجمي. الفضاء اللاتبادلي البعدي والطوروي والكمون المركزي inverse –square root potential