



N° d'ordre : .....

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et**  
**de la Recherche Scientifique**

**Université de M'sila**  
**Faculté des Sciences**  
**Département de Physique**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

**MASTER**

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

**CHIKOUCHE HAMINA SOUHEYLA**

**THEME**

---

**Etude quantique pour un potentiel non central**  
**dépendant du temps**

---

Soutenue le : 04/06/2016

**Devant le jury composé de :**

|                    |                             |                   |
|--------------------|-----------------------------|-------------------|
| <b>S. MEDJBER</b>  | <b>MAA Univ. de M'sila</b>  | <b>Président</b>  |
| <b>S. MENOVAR</b>  | <b>MCA Univ. de Sétif 1</b> | <b>Rapporteur</b> |
| <b>A. GHOUMAID</b> | <b>MAA Univ. de M'sila</b>  | <b>Examineur</b>  |

Promotion Juin 2016

## Remerciements

*Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé, la patience jusqu'à l'achèvement de ce mémoire.*

*Je tiens, avant tout, à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur: Menouar Salah, mon promoteur.*

*Je le remercie pour sa gentillesse et sa disponibilité, j'ai eu le grand plaisir de travailler sous sa direction.*

*Je remercie Monsieur le professeur: Medjber Salim pour l'aide et la patience faite par moi.*

*Mes remerciements à tous les membres de jury qui ont acceptés de juger ce travail et d'y apporter leurs cautions.*

*Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail pour leurs conseils, leurs encouragements et leurs soutiens.*

*Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion Physique Master (2) de l'année 2016/2017.*

## Dédicace

*Je remercie le Bon-Dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin In Chaa Allah.*

*À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père. À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore. Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes frères et sœurs: Lyamin, Hanane, Samira, Ibtissam, Aya et mon neveu Mohamed.*

*Je dédie ce travail à mes très proche amies: Asma, Abba, Iman, Mona et surtout Seifeddine.À pour leur encouragement, leur aide et soutien.*

*À toute ma grande Famille Chikouche Hamina.*

*À tous ceux et celles qui m'ont aidé et encouragé de près comme de loin.*

*À tous les enseignants de département de Physique a l'université de M'sila.*

# Table des matières

|                                                                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction générale .....                                                                                    | 03        |
| <b><u>Chapitre I</u> : Equation de Schrödinger en coordonnées sphériques et le<br/>potentiel non central :</b> | <b>05</b> |
| 1.1 Introduction.....                                                                                          | 06        |
| 1.2 La résolution de l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques.....                                  | 07        |
| 1.3 Le moment cinétique .....                                                                                  | 08        |
| 1.4 La méthode de séparation des variables et l'équation de Schrödinger en coordonnées<br>Sphériques .....     | 10        |
| 1.5 Exemples pour des potentiels non centraux.....                                                             | 12        |
| <b><u>Chapitre II</u> : Equation de Schrödinger et la théorie des invariants :</b>                             | <b>14</b> |
| 2.1 Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante de temps.....                               | 15        |
| 2.1.1 Méthodes Approximatives.....                                                                             | 15        |
| 2.1.2 Méthodes exactes .....                                                                                   | 15        |
| 2.2 La théorie des invariants .....                                                                            | 16        |
| 2.2.1 Introduction .....                                                                                       | 16        |
| 2.2.2 Les systèmes dépendants du temps et la théorie des invariants .....                                      | 16        |
| 2.2.3 Théorie des invariants .....                                                                             | 17        |
| 2.2.4 Propriétés de l'invariant .....                                                                          | 17        |
| 2.2.4.1 Valeurs propres de l'invariant $I$ .....                                                               | 17        |
| 2.2.4.2 Les vecteurs propres de $I$ .....                                                                      | 19        |
| 2.5 Solution générale .....                                                                                    | 20        |

|                                                                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b><u>Chapitre III</u> : Solution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel<br/>non central dépendant du temps :</b> | <b>21</b> |
| 3.1 Introduction .....                                                                                                    | 22        |
| 3.2 Operateur Hamiltonien et construction de l'invariant .....                                                            | 23        |
| 3.3 Solution de la partie radiale de l'équation de Schrödinger.....                                                       | 26        |
| 3.4 Solution de la partie angulaire de l'équation de Schrödinger.....                                                     | 28        |
| 3.4.1 Les concepts de base de la méthode d'itération asymptotique .....                                                   | 31        |
| 3.5 La phase totale et la solution de l'équation de Schrödinger ... ..                                                    | 35        |
| <b>Conclusion :</b> .....                                                                                                 | <b>37</b> |
| <b>Annexe :</b> .....                                                                                                     | <b>38</b> |
| <b>Bibliographie :</b> .....                                                                                              | <b>40</b> |

### *Introduction générale*

L'étude des caractéristiques quantiques exactes des systèmes atomiques et moléculaires avec un potentiel non central est un problème très intéressant à la fois en physique théorique et en chimie quantique. Dans la manipulation traditionnelle de la mécanique quantique, les valeurs propres et les fonctions propres d'un hamiltonien sont évaluées par la méthode de séparation des variables. Cependant, si l'on veut obtenir des résultats de haute précision dans les recherches scientifiques, une grande partie des descriptions mécaniques des systèmes moléculaires réels doivent être remplies en termes d'un hamiltonien dépendant du temps qui exige des formulations mathématiques plus élaborées au-delà de ces méthodes traditionnelles.

L'étude des systèmes hamiltoniens dépendant du temps a tout d'abord commencé à partir d'un système oscillatoire simple avec une fréquence et une masse dépendantes du temps [1-3]. Ensuite, le sujet de ces recherches progressivement étendu aux cas des systèmes mécaniques plus complexes. Les propriétés quantiques des systèmes d'écrits par des potentiels singuliers dépendant du temps ont été étudiées [4-8].

Un calcul mathématique de fond est nécessaire pour l'élaboration des solutions analytiques quantiques dans l'espace de configuration de l'équation de Schrödinger dépendante du temps qui appartient généralement aux équations différentielles du deuxième ordre représentées avec des fonctions dépendantes du temps. Puisqu'il est difficile de calculer les états propres d'un système hamiltonien dépendant du temps en se fondant uniquement sur la séparation conventionnelle de la méthode de séparation des variables, nous allons également utiliser d'autres méthodes telles que la méthode de l'opérateur invariant et la méthode de la transformation unitaire ainsi que la méthode Nikiforov-Uvarov (NU) pour la résolution quantique de ces problèmes.

La méthode de l'opérateur invariant est très utile dans la résolution de l'équation de Schrödinger pour des systèmes hamiltoniens dépendants du temps. Une transformation unitaire est également un outil pratique pour le traitement d'un certain système hamiltonien compliqué. Bien que l'hamiltonien d'origine et l'opérateur invariant aient quelque peu de formes compliquées, les représentations entre eux dans un système convenablement transformé peuvent être relativement simples.

La recherche d'un tel invariant pour les systèmes quantiques plus complexes s'avère toujours un problème délicat qui continue à constituer l'un des domaines de recherches actifs en physique théorique. Parfois, l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant devenue une tâche difficile à résoudre pour un hamiltonien dépendant du temps, pour cette raison, nous allons utiliser la transformation unitaire pour simplifier le problème. Ceci nous permet d'obtenir des solutions quantiques dans le système transformé par l'utilisation d'une technique mathématique telle que la méthode Nikiforov-Uvarov (NU). Les solutions quantiques dans le système transformé seront inversement transformées au système d'origine. Ensuite, il est possible d'identifier les solutions quantiques dans le système d'origine. Ceci est la principale stratégie qui sera appliquée dans notre étude des caractéristiques quantiques du potentiel non central.

Ce mémoire est organisé comme suit:

Dans le premier chapitre, on donne une introduction sur la solution de l'équation de Schrödinger stationnaire en coordonnées sphériques en présence d'un potentiel non central.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie des invariants dans son contexte historique et original de Lewis et Riesenfeld [1].

Le troisième chapitre représente l'essentiel de notre travail concernant la solution exacte de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un potentiel non central dépendant du temps en utilisant la théorie des invariants, la transformation unitaire, la méthode de Nikoforov-Uvarov et la méthode d'itération asymptotique). Une Annexe sur la méthode de Nikoforov-Uvarov termine ce travail.

---

## Chapitre I

---

# *Equation de Schrödinger en coordonnées Sphériques et le potentiel non central*

## 1.1 Introduction :

Le grand moment historique de la naissance de la description quantique de la matière s'est produit lorsque Schrödinger a écrit pour la première fois son équation. Pendant de longues années, la structure atomique interne de la matière était restée un grand mystère. Dans le cadre de la mécanique classique, l'état d'un système physique est bien défini par la connaissance des variables dynamiques du système, solutions des équations de Newton ou celles de Hamilton et Lagrange, qui sont des quantités continues d'où la continuité des grandeurs qui déterminent l'état du système tel que l'énergie [9]. Alors pour ce faire, il fallait d'abord trouver l'analogie des équations de la mécanique classique, une telle équation, qui ne peut pas être directement déduite d'une manière rigoureuse des anciens principes, mais intuitivement devinée sera l'un des postulats de la théorie, cette équation c'est celle qu'on appelle aujourd'hui l'équation de Schrödinger.

La découverte par Schrödinger des équations propres du mouvement des électrons à l'échelle atomique a fourni une théorie à partir de laquelle on peut calculer des phénomènes atomiques de façon quantitative, précise et détaillée. En principe, l'équation de Schrödinger permet d'expliquer tous les phénomènes atomiques sauf ceux qui font intervenir le magnétisme et la relativité.

L'équation de Schrödinger est une équation fondamentale de la mécanique quantique. Elle s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde d'un système physique. Elle prend la forme suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (\text{I-1})$$

L'équation de Schrödinger, dans sa forme générale, est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire. Lorsque l'opérateur  $H$  du système physique ne dépend pas explicitement du temps, on est ramené par séparation des variables spatiales et temporelles à une équation aux valeurs propres, appelée équation de Schrödinger stationnaire [9].

L'énergie totale  $E$  est conservée, donc l'équation de Schrödinger admet des solutions particulières sous forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \psi(\vec{r}) \quad (\text{I-2})$$

Où  $\psi(\vec{r})$  est la fonction d'onde qui satisfait l'équation de Schrödinger stationnaire.

Avec :

$$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (\text{I-3})$$

Tel que  $\vec{\nabla}$  représente l'opérateur de dérivées partielles (nabla). En coordonnées cartésiennes il est défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{I-4})$$

On note que la grandeur  $E$  est une valeur propre de l'hamiltonien  $H$  : qui vérifie l'équation :

$$H \psi = E \psi \quad (\text{I-5})$$

Avec:

$$\psi = \psi(\vec{r}) \quad (\text{I-6})$$

Donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de trouver des états stationnaires parmi tous les états possibles du système qui est en effet un cas particulier d'une équation générale dépendante du temps qui donne l'évolution de la fonction quel que soit l'état du système.

## ***1.2 La résolution de l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques :***

Dans le cas où la particule se déplace dans un potentiel non central, c'est mieux d'utiliser le système de coordonnées sphériques (trois dimensions) pour résoudre l'équation de Schrödinger.

Une question pertinente a été posée d'une façon naturelle : Qu'est-ce qu'un potentiel non central ? Pour répondre à cette question il faut définir le potentiel central. En bref, le potentiel central  $V(r)$  est un potentiel qui ne dépend que de la distance  $r$  à l'origine des coordonnées. Par conséquent cette définition nous permet de dire que le potentiel non central est une fonction qui dépend du rayon  $r$ , de l'angle polaire  $\theta$ , et de l'angle azimutal  $\varphi$ . La dépendance du potentiel non central  $V(r, \theta, \varphi)$  en trois variables nous a conduit d'étudier l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques pour donner au lecteur au moins une idée sur ce qui viendra dans la suite de ce chapitre introductif.

Dans ce système nous avons établi la forme générale de l'hamiltonien pour une particule de masse  $m$  et impulsion  $p$  en mouvement dans un potentiel non central  $V(r, \theta, \varphi)$  qui dépend de la distance  $r$  et des angles  $\theta, \varphi$ . Le potentiel  $V(r, \theta, \varphi)$  de type non central, est indépendant du temps, donc l'Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-7})$$

L'opérateur du moment conjugué dans les coordonnées sphériques est écrit sous la forme:

$$P^2 = P_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \quad (\text{I-8})$$

et l'opérateur de dérivés partielles (nabla) en coordonnées sphériques est défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \vec{u}_\varphi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \varphi} \quad (\text{I-9})$$

Avec:

$$P_r^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \right) \quad (\text{I-10})$$

$L$  est le moment cinétique.

## 1.2 Le moment cinétique :

Le moment cinétique joue déjà un rôle important soit en mécanique classique ou en mécanique quantique. La grandeur qui se conserve lors d'une rotation pour un système d'une seule particule. Pour une particule de mass  $m$  et d'impulsion  $p$  située à une distance  $r$  de l'origine  $O$  d'un référentiel  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le moment cinétique  $L$  est défini comme le produit vectoriel :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = -i\hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla} \quad (\text{I-12})$$

Tel que:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{vmatrix} \quad (\text{I-13})$$

Les composantes  $L_x, L_y$  et  $L_z$  de  $\vec{L}$  s'obtiennent en associant les variables de positions  $x, y$  et  $z$  aux variables d'impulsion  $p_x, p_y$  et  $p_z$ . Il est alors intéressant de calculer le moment cinétique, d'abord en coordonnées cartésiennes, puis le convertir en coordonnées sphériques. Avec l'aide de formule (I-4), Les trois composantes de moment cinétique s'écrivent alors :

$$L_x = \frac{\hbar}{i} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{I-14})$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i} \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{I-15})$$

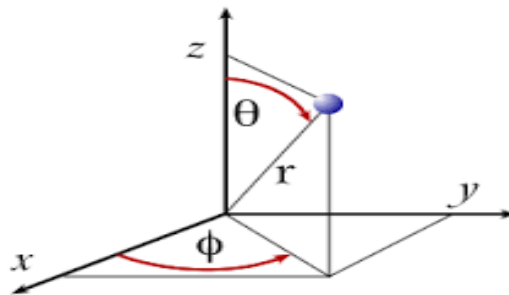
$$L_z = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (\text{I-16})$$

Au lieu de caractériser le vecteur  $\vec{r}$  par ses composantes cartésiennes  $x, y, z$ , nous repérons le point M correspondant de l'espace ( $\overline{OM} = \vec{r}$ ) par ses coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$  (Figure.1).

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{I-17})$$

Avec:

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{I-18})$$



**Figure.1 : définition des coordonnées sphérique  $r, \theta, \varphi$  d'un point quelconque dans l'espace.**

L'élément de volume  $d^3r = dx dy dz$  s'écrit en coordonnées sphériques :

$$d^3r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (\text{I-19})$$

$$= r^2 dr d\Omega \quad (\text{I-20})$$

Où:  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{I-21})$

$d\Omega$  : représente l'élément d'angle solide autour de la direction des angles  $\theta$  et  $\varphi$ .

En appliquant la technique classique du changement de variables, on obtient à partir des formules (I-14)-(I-17) les expressions suivantes :

$$L_x = \frac{\hbar}{i} \left( -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{I-22})$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i} \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{I-23})$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{I-24})$$

Qui forment l'opérateur  $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , lequel on peut considérer comme étant l'observable correspondant au carré  $L^2$  du vecteur moment cinétique :

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (\text{I-25})$$

Notons que les opérateurs  $H$ ,  $L^2$  et  $L_z$  commutent entre eux et ils ont formé un ensemble commun de fonctions propres  $\psi(r, \theta, \varphi)$ , mais les trois composantes du moment cinétique ( $L_x, L_y, L_z$ ) ne commutent pas entre eux [9] :

$$[H, L^2] = 0 \quad [H, L_z] = 0 \quad (\text{I-26})$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (\text{I-27})$$

D'où l'on tire le carré du moment cinétique :

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right] = -\hbar^2 \mathcal{L}^2 \quad (\text{I-28})$$

Par identification, on remarque alors que le carré du moment angulaire  $\mathcal{L}^2$  est écrit comme suivant :

$$\mathcal{L}^2 = \left[ \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right] \quad (\text{I-29})$$

## ***1.4 La méthode de séparation des variables et l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques:***

Pour une particule qui se déplace dans un potentiel non central on choisit le système de coordonnées sphériques pour résoudre l'équation de Schrödinger, pour cette raison on écrit la fonction d'onde en fonction du rayon  $r$  et les angles directeurs  $\theta$  et  $\varphi$ .

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-30})$$

Dans ce système l'équation de Schrödinger stationnaire devient :

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \right) - \hbar^2 \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} \right] + V \right\} \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-31})$$

D'où on est donc ramené à résoudre l'équation suivante :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) + (V - E) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (\text{I-32})$$

Généralement on peut écrire les solutions sous la forme d'un produit d'une fonction radiale  $R(r)$  et d'une fonction angulaire  $f(\theta, \varphi)$  :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) f(\theta, \varphi) \quad (\text{I-33})$$

Nous pouvons toujours supposer que les fonctions  $R(r)$  et  $f(\theta, \varphi)$  sont normalisées séparément :

$$\int_0^\infty |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\infty r^2 |R(r)|^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta |f(\theta, \varphi)|^2 d\theta = 1 \quad (\text{I-34})$$

Multipliant l'équation. (I-32) par  $\frac{r^2}{Rf}$  on obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{r^2}{R} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \right) R - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{f} \mathcal{L}^2 f + (V - E)r^2 = 0 . \quad (\text{I-35})$$

Cette équation n'est pas toujours séparable, puisque elle dépend de la forme du potentiel, donc, on ne peut pas appliquer la méthode de séparation de variables pour n'importe quel potentiel, mais elle est séparable pour les potentiels de la forme suivante :

$$V(r, \theta, \varphi) = U(r) + \frac{V_1(\theta)}{r^2} + \frac{V_2(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{I-36})$$

Dans ce cas on peut écrire la fonction d'onde  $\psi(r, \theta, \varphi)$  comme le produit de trois fonctions séparables:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)g(\theta)h(\varphi), \quad (\text{I-37})$$

Lesquelles nous supposons normalisées séparément :

$$\int_0^\infty r^2 |R(r)|^2 dr = \int_0^\pi \sin \theta |g(\theta)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |h(\varphi)|^2 d\varphi = 1 \quad (\text{I-38})$$

La substitution (I-36) et (I-37) dans l'équation (I-35) nous donne les trois équations différentielles suivantes :

❖ Equation de Schrödinger radiale :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}\right) R(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - U(r) - \frac{\hbar^2 c}{r^2}\right) R(r) = 0 \quad (\text{I-39})$$

❖ Equation de Schrödinger polaire :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) + ctg\theta \frac{dg(\theta)}{d\theta} + \left(C - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} - \frac{V_1(\theta)}{\hbar^2}\right) g(\theta) = 0 \quad (\text{I-40})$$

❖ Equation de Schrödinger azimutale :

$$\frac{d^2 h(\varphi)}{d\varphi^2} + \left(\mu^2 - \frac{V_2(\varphi)}{\hbar^2}\right) h(\varphi) = 0 \quad (\text{I-41})$$

Les fonctions  $R(r)$ ,  $g(\theta)$  et  $h(\varphi)$  dépendent de la seule variable  $r, \theta$  et  $\varphi$  respectivement.

$C, \mu$  : deux constants de séparation.

avec :  $C = l(l+1)$  ,  $\mu = m$  (I-42)

$l$  et  $m$  sont des entiers.

$(l = 0, 1, 2, \dots)$  , et  $(m = -l, \dots, +l)$  (I-43)

### 1.3 Exemples pour des potentiels non centraux :

Il existe différentes types des potentiels non centraux (déformés) dans la littérature qu'ils ont été étudiés en utilisant la méthode de séparation de variables. Parmi lesquels on peut citer quelques potentiels :

❖ **Le potentiel Makarov [10] :**

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} , V_1(\theta) = \frac{\beta}{\sin^2\theta} + \frac{\gamma \cos\theta}{\sin^2\theta} , V_2(\varphi) = 0 \quad (\text{I-44})$$

❖ **Le potentiel de Kratzer modifiée plus le potentiel la forme d'anneau [11,12] :**

$$U(r) = D \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 , V_1(\theta) = \frac{\beta}{\sin^2\theta} + \frac{\gamma \cos\theta}{\sin^2\theta} , V_2(\varphi) = 0 \quad (\text{I-45})$$

❖ **Le potentiel de Makarov plus le potentiel de poschl\_teller [13] :**

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} , V_1(\theta) = \frac{\beta}{\sin^2\theta} + \frac{\gamma \cos\theta}{\sin^2\theta} , V_2(\varphi) = \frac{\alpha}{\cos^2\nu\varphi} + \frac{\beta}{\sin^2\nu\varphi} \quad (\text{I-46})$$

$\nu$  : est une constante réelle.

❖ **Le potentiel de poschl\_teller plus le potentiel de la forme double d'anneau [14] :**

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, V_1(\theta) = \frac{b}{\sin^2\theta} + \frac{c}{\sin^2\theta}, V_2(\varphi) = \frac{e}{\cos^2\varphi} + \frac{f}{\sin^2\varphi} \quad (\text{I-47})$$

---

## Chapitre II :

---

# *Equation de Schrödinger et la Théorie des invariants*

## ***2.1 Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps :***

Différentes méthodes existent pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Le choix d'une méthode particulière repose généralement sur la forme du potentiel et sur celle de la fonction d'onde recherchée. En pratique, il existe plusieurs techniques de résolutions, pour cela on peut citer quelques méthodes intéressantes qui ont une relation directe avec ce qui va suivre de notre travail

### ***2.1.1 Méthodes approximatives:***

Toutes les méthodes exactes proposées pour la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps se ressemblent dans le fait qu'elles sont soit formelles soit elles ne sont applicables que pour des cas limités. Pour cette raison, on fait appel à des méthodes d'approximation. Bien qu'elles ne donnent pas des solutions analytiques, ces dernières sont généralement très puissantes et applicables à de nombreux systèmes physiques, selon la méthode, où elles offrent des résultats à un ordre de précision élevé. Ces méthodes sont surtout utilisées dans les domaines de la physique appliquée ; tels que la physique du solide, physique des plasmas, l'information quantique etc. Entre autres, on cite [15] :

- La théorie des perturbations dépendant du temps.
- Méthode variationnelle.
- L'approximation soudaine.
- L'approximation adiabatique.

### ***2.1.2 Méthodes exactes :***

On cite par exemple :

- Transformations unitaires.
- La théorie des invariants.
- L'opérateur d'évolution.
- Changement de représentation.

## ***2.2 La théorie des invariants :***

### ***2.2.1 Introduction :***

La théorie des invariants (ou de Lewis et Riesenfeld ) [1,2] constitue une méthode puissante pour l'étude des phases géométriques ainsi que la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Elle représente une extension de la phase géométrique de Berry pour les cas non adiabatique. Elle est parmi les méthodes les plus puissantes et qui donnent de solutions exactes de l'équation de Schrödinger dépendante de temps. A cause de son importance dans ce travail, nous allons l'étudier avec plus de détails dans ce chapitre.

### ***2.2.2 Les systèmes dépendants du temps et la théorie des invariants :***

L'étude des systèmes dépendant du temps a fait un sujet d'un grand intérêt dans la littérature, que ce soit en mécanique classique ou quantique. Le retentissement d'intérêt sur ce sujet est dû au fait que les systèmes dépendant du temps peuvent être traités comme un modèle exactement soluble et peuvent être utilisés dans plusieurs applications en physique tel que l'optique, la mécanique quantique, ...

La théorie des invariants pour des Hamiltonien Hermitiens a été introduite par Lewis et Riesenfeld (1969) [2], où ils ont dérivé une simple relation entre les vecteurs propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger.

La théorie des invariants représente l'un des piliers fondamentaux dans l'étude des systèmes dépendants du temps. Cette importance de la théorie des invariants relie au langage mathématique puissant qui l'a caractérisé, et sur sa souplesse dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Dans cette partie de notre travail, on donne quelques notions essentielles concernant la théorie des invariants. À travers ces notions on peut approcher aux lecteurs au moins une idée sur le rôle de la théorie des invariants dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. On considère la théorie des invariants pour un système quantique général dont l'opérateur Hamiltonien  $H$  est explicitement dépendant du temps, [16].

### 2.2.3 Théorie des Invariants :

On considère l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \quad (\text{II-1})$$

Où  $H$  est l'hamiltonien du système, c'est un opérateur dépendant explicitement du temps, et nous supposons l'existence d'un autre opérateur Hermitien  $I$ .

$I(t)$  est dit un invariant s'il satisfait les deux conditions suivantes :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0 \quad (\text{II-2})$$

$$I(t) = I^+(t) \quad (\text{II-3})$$

En appliquant l'équation (II-2) sur  $|\psi(t)\rangle$  et en utilisant l'équation (II-1), nous obtenons la relation :

$$i\hbar \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\psi(t)\rangle + I(t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle - H(t) I(t) |\psi(t)\rangle = 0 \quad (\text{II-4})$$

D'où

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I(t)|\psi(t)\rangle) = H(t)(I(t)|\psi(t)\rangle) \quad (\text{II-5})$$

Cela veut dire que l'opérateur  $I(t)|\psi(t)\rangle$  représente une solution de l'équation de Schrödinger. Ce résultat est valable pour tout invariant.

### 2.2.4 Propriétés de l'invariant :

#### 2.2.4.1 Valeurs propres de l'invariant $I$ :

Comme tout opérateur en mécanique quantique,  $I$  ayant des valeurs propres et des vecteurs propres.

On suppose que l'invariant  $I(t)$  a un ensemble complet de fonctions propres. Soit  $\lambda$  la valeur propre de  $I(t)$  et  $|\varphi_{\lambda k}(t)\rangle$  ses fonctions propres, où  $k$  représente tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier les états propres. L'équation aux valeurs propres s'écrit comme suit :

$$I(t)|\varphi_{\lambda k}(t)\rangle = \lambda|\varphi_{\lambda k}(t)\rangle \quad (\text{II-6})$$

Les valeurs propres  $\lambda$  sont réelles et indépendantes du temps.

Avec le produit hermitien sur l'espace des états :

$$\langle \varphi_{\lambda k}(t) | \varphi_{\lambda' k'}(t) \rangle = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{kk'} \quad (\text{II-7})$$

Cet invariant, a un spectre constant au cour du temps, c'est à dire que les valeurs propres de cet opérateur, sont indépendantes du temps.

En dérivant l'équation (II-6) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle + I(t) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle \quad (\text{II-8})$$

On applique l'équation (II-2) sur l'états propres  $|\varphi_{\lambda, k}(t)\rangle$  :

$$i\hbar \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{\lambda, k}(t)\rangle + I(t) H(t) |\varphi_{\lambda, k}(t)\rangle - \lambda H(t) |\varphi_{\lambda, k}(t)\rangle = 0 \quad (\text{II-9})$$

Le produit scalaire de l'équation (II-9) par  $|\varphi_{\lambda' k'}(t)\rangle$  donne :

$$i\hbar \left\langle \varphi_{\lambda' k'}(t) \left| \frac{\partial I(t)}{\partial t} \right| \varphi_{\lambda k}(t) \right\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \varphi_{\lambda' k'}(t) | H(t) | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle = 0 \quad (\text{II-10})$$

Pour  $\lambda' = \lambda$  :

$$\left\langle \varphi_{\lambda k'}(t) \left| \frac{\partial I(t)}{\partial t} \right| \varphi_{\lambda k}(t) \right\rangle = 0 \quad (\text{II-11})$$

En prenant maintenant le produit scalaire de l'équation (II-5) avec  $\langle \varphi_{\lambda k}(t) |$ , on obtient :

$$\left\langle \varphi_{\lambda k}(t) \left| \frac{\partial I(t)}{\partial t} \right| \varphi_{\lambda k}(t) \right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \langle \varphi_{\lambda k}(t) | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle \quad (\text{II-12})$$

On a aussi :  $\langle \varphi_{\lambda k}(t) | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle = \delta_{\lambda \lambda} \delta_{kk} = 1$  (II-13)

Alors :  $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left\langle \varphi_{\lambda k}(t) \left| \frac{\partial I(t)}{\partial t} \right| \varphi_{\lambda k}(t) \right\rangle$  (II-14)

Ce qui implique :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \varphi_{\lambda k}(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle = 0 \quad (\text{II-15})$$

### 2.2.4.2 Les vecteurs propres de $I$ :

Pour trouver la relation entre les vecteurs propres et les solutions de l'équation du Schrödinger, on écrit d'abord l'équation du mouvement de  $|\varphi_{\lambda k}(t)\rangle$ .

En commençant par l'équation (II-5) et en utilisant l'équation (II-15), on obtient :

$$(\lambda - I(t)) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle = \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle \quad (\text{II-16})$$

Le produit scalaire de cette dernière équation avec le vecteur propre  $\langle\varphi_{\lambda' k'}(t)|$  :

$$(\lambda - \lambda') \langle\varphi_{\lambda' k'}(t)| \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle = \langle\varphi_{\lambda' k'}(t)| \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle \quad (\text{II-17})$$

On déduit que :

$$i\hbar \langle\varphi_{\lambda' k'}(t)| \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle + (\lambda - \lambda') \langle\varphi_{\lambda' k'}(t)| H(t) |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle = 0 \quad (\text{II-18})$$

Donc :

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle\varphi_{\lambda' k'}(t)| \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle = (\lambda' - \lambda) \langle\varphi_{\lambda' k'}(t)| H(t) |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle \quad (\text{II-19})$$

Pour  $\lambda \neq \lambda'$ , on trouve :

$$i\hbar \langle\varphi_{\lambda' k'}(t)| \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle = \langle\varphi_{\lambda' k'}(t)| H(t) |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle \quad (\text{II-20})$$

Si l'équation (II-20) est valable pour  $\lambda = \lambda'$  aussi bien que pour  $\lambda \neq \lambda'$ , alors on déduit immédiatement que  $|\varphi_{\lambda k}\rangle$  satisfait l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire  $|\varphi_{\lambda k}\rangle$  est une solution particulière de l'équation de Schrödinger. Lorsque les phases des états stationnaires ne sont pas fixées, on choisit un autre ensemble de vecteurs propres de  $I$  multiplié par un facteur de phase dépendant du temps.

Alors :

$$|\varphi_{\lambda k}(t)\rangle_{\alpha} = \exp[i\alpha_{\lambda,k}(t)] |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle, \quad (\text{II-21})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle_{\alpha} = H(t) |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle_{\alpha}, \quad (\text{II-22})$$

Où  $\alpha(t)_{\lambda k}$  est une fonction dépendante du temps et les vecteurs  $|\varphi_{\lambda k}\rangle_{\alpha}$  sont des états propres orthonormés de  $I(t)$  associés à  $\lambda$ . Bien que ces états propres de l'invariant vérifient l'équation de Schrödinger, dans ce cas on peut écrire :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\alpha(t)\lambda k} | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle) = H(t) e^{i\alpha(t)\lambda k} | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle , \quad (\text{II-23})$$

D'où

$$-\hbar \frac{\partial \alpha(t)\lambda k}{\partial t} | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle = H(t) | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle . \quad (\text{II-24})$$

Le produit scalaire par le vecteur d'état  $\langle \varphi_{\lambda'k'}(t) |$  conduit à :

$$\hbar \frac{\partial \alpha(t)\lambda k}{\partial t} = \langle \varphi_{\lambda'k'}(t) | \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right] | \varphi_{\lambda k}(t) \rangle . \quad (\text{II-25})$$

Mise à part ces changements de phase, on peut introduire la deuxième propriété importante de cet invariant : tous les états propres de ces invariants sont aussi les solutions particulières de l'équation du Schrödinger.

### 2.2.5 Solution générale :

Du fait que chacun de ces nouveaux états propres satisfait l'équation de Schrödinger, la solution générale est donnée par :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda,k} C_{\lambda,k} e^{i\alpha_{\lambda k}(t)} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle \quad (\text{II-26})$$

Où  $C_{\lambda,k}$  sont des coefficients indépendants du temps correspondant à  $|\psi(t)\rangle$  :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda,k} C_{\lambda,k} e^{i\alpha_{\lambda k}(t)} |\varphi_{\lambda k}(t)\rangle \quad (\text{II-27})$$

Le vecteur d'état  $|\psi(t)\rangle$  représente la solution générale de l'équation de Schrödinger et les vecteurs d'état  $|\varphi_{\lambda k}(t)\rangle$  sont les états propres de l'invariant.

---

## Chapitre III

---

# *Solution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel non central dépendant du temps*

### 3.1 Introduction :

La dynamique quantique d'un système physique régi par un potentiel non-central est un sujet intéressant à la fois en physique théorique et en chimie quantique. En particulier, nous pouvons trouver de nombreuses techniques pour dériver les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire d'un tel système décrit par ce genre de potentiel [17-30]. Plusieurs recherches théoriques en physique ont été réalisées dans ce domaine. Certaines d'entre eux sont des recherches reliées aux états liés d'un électron dans un potentiel de Coulomb en présence du champ d'Aharonov-Bohm [31,32], la quantification des potentiels moléculaires en forme d'anneau en chimie quantique [33], et l'interaction entre les noyau déformées [34,35]. L'étude des systèmes caractérisés par des potentiels non centraux moléculaires est nécessaire pour obtenir des meilleurs résultats dans l'analyse classique et quantique des structures et des interactions moléculaires entre les molécules.

Le contenu de ce chapitre est concentré sur les solutions quantiques d'un système de potentiel non central dépendant du temps, où le potentiel non central est composé de potentiel de Coulomb avec un potentiel quadratique inverse. Puisque le potentiel que nous allons traiter ici est très compliqué, le traitement habituelle classique basé sur la méthode de séparation des variables devient un outil insuffisant pour résoudre ce problème. Pour cette raison il faut utiliser d'autres méthodes possibles pour trouver les solutions quantiques du système étudié. À cet effet, nous allons utiliser la méthode de l'opérateur invariant, la méthode de transformation unitaire, et la méthode de Nikiforov-Uvarov [36] pour résoudre ce problème.

Les solutions de l'équation de Schrödinger pour ce système physique sont représentées en termes des états propres d'un opérateur invariant. Parfois, l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant devenue une tâche difficile à résoudre pour un hamiltonien dépendant du temps, pour cette raison, nous allons utiliser la transformation unitaire pour simplifier le problème. Et par conséquent, nous pouvons facilement résoudre l'équation aux valeurs propres dans le système transformé en appliquant des techniques mathématiques spéciales telles que la méthode de Nikiforov-Uvarov et la méthode d'itération asymptotique. Les états propres du système transformé peuvent être obtenus à partir de la solution complète de l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant. A travers la transformation unitaire inverse, nous obtenons les états propres dans le système hamiltonien original.

### 3.2 Opérateur Hamiltonien et construction de l'invariant:

Il est important de souligner que le problème d'une particule qui se meut dans un potentiel non central est décrit par un Hamiltonien dépendant du temps sous la forme [37- 43] :

$$H(t) = \frac{1}{2\mu(t)} \left( p^2 + \frac{g(\theta, \varphi)}{r^2} \right) - \frac{Z(t)}{r}, \quad r \geq 0 \quad (\text{III.1})$$

où  $\mu(t)$  et  $Z(t)$  sont des coefficients dépendants du temps avec  $Z(t) > 0$ , et  $g(\theta, \varphi)$  est une fonction dépendante de  $\theta$  et  $\varphi$ . L'opérateur du moment conjuguais dans les coordonnées sphériques est  $p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2}$  avec  $p_r = i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$  et le moment angulaire total  $L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]$ .

L'équation de Schrödinger pour ce système hamiltonien est écrite comme suit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(t) = H\psi_n(t) \quad (\text{III.2})$$

En général, les propriétés quantiques d'un système Hamiltonien dépendant du temps sont étudiées en introduisant un opérateur invariant associé au système. Un invariant  $I(t)$  est construit à partir de l'équation de Liouville -Van Neumann.

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0 \quad (\text{III.3})$$

Il est intéressant de noter que la construction d'un invariant s'avère toujours une tâche difficile, pour cette raison nous choisissons l'invariant  $I(t)$  de tel sorte qu'il vérifie l'équation (III.3). Donc on cherche l'invariant sous la forme :

$$I(t) = A(t) \left( p^2 + \frac{g(\theta, \varphi)}{r^2} \right) + B(t)(rp_r + p_r r) + C(t)r^2 - D(t)\frac{1}{r} \quad (\text{III.4})$$

tel que  $C(t)$ ,  $B(t)$ ,  $A(t)$ , et  $D(t)$  sont des coefficients dépendants du temps qui seront définis par la suite. En substituant les deux équations (III.1) et (III.4) dans l'équation de Liouville-Von Neumann (III.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= -2B(t)/\mu(t), & \dot{B}(t) &= -C(t)/\mu(t), & \dot{C}(t) &= 0 \\ \dot{D}(t) &= -2B(t)Z(t), & A(t)Z(t) &= D(t)/[2\mu(t)] \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

D'après la troisième révélation de l'équation ci-dessus, nous pouvons mettre

$$C(t) = C_0 . \quad (\text{III.6})$$

Les autres coefficients sont déterminés par sa forme intégrable

$$A(t) = \left[ A_0 - 2B \int_0^t \frac{1}{\mu(t')} dt' + 2C_0 \int_0^t \left( \frac{1}{\mu(t')} \int_0^{t'} \frac{1}{\mu(t'')} dt'' \right) dt' \right] \quad (\text{III.7})$$

$$B(t) = B_0 - C_0 \int_0^t \frac{1}{\mu(t')} dt' , \quad (\text{III.8})$$

$$D(t) = \frac{D_0}{A_0^{\frac{1}{2}}} \left[ A_0 - 2B \int_0^t \frac{1}{\mu(t')} dt' + 2C_0 \int_0^t \left[ \frac{1}{\mu(t')} \int_0^{t'} \frac{1}{\mu(t'')} dt'' \right] dt' \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.9})$$

Où  $B_0 = B(0)$ ,  $C_0 = C(0)$ , et  $D_0 = D(0)$ . On insère les équations (III.6)-(III.9) dans l'équation (III.4), on obtient l'expression de l'opérateur invariant :

$$\begin{aligned} I(t) = & \left[ A_0 - 2B \int_0^t \frac{1}{\mu(t')} dt' + 2C_0 \int_0^t \left( \frac{1}{\mu(t')} \int_0^{t'} \frac{1}{\mu(t'')} dt'' \right) dt' \right] \left( p^2 + \frac{g(\theta, \varphi)}{r^2} \right) \\ & + \left( B_0 - C_0 \int_0^t \frac{1}{\mu(t')} dt' \right) (rp_r + p_r r) + C_0 r^2 \\ & - \frac{D_0}{A_0^{1/2}} \left[ A_0 - 2B \int_0^t \frac{1}{\mu(t')} dt' + 2C_0 \int_0^t \left( \frac{1}{\mu(t')} \int_0^{t'} \frac{1}{\mu(t'')} dt'' \right) dt' \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Avec  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ , et  $D_0$  sont des constantes réelles et la fonction  $Z(t)$  est écrite sous la forme:

$$Z(t) = \frac{D_0}{2\mu(t) A_0^{\frac{1}{2}}} \left( A_0 - 2B \int_0^t \frac{1}{\mu(t')} dt' + 2C_0 \int_0^t \left[ \frac{1}{\mu(t')} \int_0^{t'} \frac{1}{\mu(t'')} dt'' \right] dt' \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{III.11})$$

Il reste à obtenir les états et les valeurs propres de l'invariant  $I(t)$  c'est-à-dire la solution de l'équation :

$$I\phi_n(\vec{r}, t) = E_n\phi_n(\vec{r}, t) \quad (\text{III.12})$$

Pour trouver la solution de cette dernière équation, il faut effectuer la transformation unitaire dépendante du temps suivante :

$$\phi_n(\vec{r}) = U(t)\phi_n(\vec{r}, t) \quad (\text{III.13})$$

L'opérateur unitaire dépendant du temps  $U(t)$  est donné par l'expression :

$$U(t) = \exp\left(\frac{iB(t)}{2\hbar A_0} r^2\right) \times \exp\left(\frac{-i}{2\hbar} \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}} (rp_r + p_r r)\right) \quad (\text{III.14})$$

L'application de cette transformation unitaire nous permettra de ramener l'opérateur invariant dépendant du temps  $I(t)$  à un autre invariant indépendant du temps  $I_0$ .

$$I_0 = A_0 \left[ p^2 + \frac{g(\theta, \varphi)}{r^2} \right] + (C_0 A_0 - B_0^2) r^2 - \frac{D_0}{r} \quad (\text{III.15})$$

Avec :

$$UIU^{-1} \phi'_n(\vec{r}) = I_0 \phi'_n(\vec{r}) = E \phi'_n(\vec{r}) \quad (\text{III.16})$$

Ainsi, l'équation aux valeurs propres de l'invariant transformé est :

$$\left( A_0 \left[ p^2 + \frac{g(\theta, \varphi)}{r^2} \right] + (C_0 A_0 - B_0^2) r^2 - \frac{D_0}{r} \right) \phi'_n(r, \theta, \varphi) = E \phi'_n(r, \theta, \varphi) \quad (\text{III.17})$$

Notons que cette équation est indépendante du temps et elle est plus simple que l'équation originale (III.12). Si on pose  $w_0 = (C_0 A_0 - B_0^2)$ . Les solutions de cette équation varient en fonction de la valeur de  $w_0$  (Voir la Réf : [5]). Pour trouver les solutions exactes de l'équation de Schrödinger (III.17), on se concentre sur le cas résoluble  $w_0 = 0$ . Dans ce cas, l'équation aux valeurs propres dans le système transformé est réécrite sous la forme :

$$-\hbar^2 A_0 \left[ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \phi'_{nml}(r, \theta, \varphi) + \left( \frac{A_0 g(\theta, \varphi)}{r^2} - \frac{D_0}{r} \right) \phi'_{nml}(r, \theta, \varphi) = E_{nlm} \phi'_{nml}(r, \theta, \varphi) \quad (\text{III.18})$$

Où  $\phi'_{nml}(r, \theta, \varphi)$  étant les fonctions d'ondes totales, mais sans facteurs de phase. Si l'on considère que cette équation ne dépend pas du temps, la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation est applicable. Par conséquent, on pose :

$$\phi'_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{nlm}(\theta, \varphi) \quad (\text{III.19})$$

Substitutions l'équation (III.19) dans l'équation (III.18), nous obtenons deux équations différentielles séparées, l'une représente l'équation radiale pour un électron dans le champ de Coulomb :

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{E_n}{\hbar^2 A_0} - \frac{c}{r^2} - \frac{D_0}{\hbar^2 A_0 r} \right) R_{nl}(r) = 0 \quad (\text{III.20})$$

Et l'autre représente la partie angulaire des harmoniques sphériques :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c - \frac{g(\theta, \varphi)}{\hbar^2} \right) Y_{nlm}(\theta, \varphi) = 0 \quad (\text{III.21})$$

Avec  $c$  est une constante de séparation.

### 3.3 Solution de la partie radiale de l'équation de Schrödinger:

Compte tenu de la notation de l'Annexe, on fait la transformation  $s = r$  qui nous a conduit à l'équation différentielle suivante :

$$R''(s) + \frac{2}{s} R'(s) + \frac{1}{s^2} [-k_n^2 s^2 - \varepsilon^2 s - l(l+1)] R(s) = 0 \quad (\text{III.22})$$

Dans laquelle :

$$\frac{E_{nl}}{\hbar^2 A_0} = -k_n^2, \quad \frac{D_0}{\hbar^2 A_0} = \varepsilon^2, \quad c = l(l+1) \quad (\text{III.23})$$

Avec la condition  $E_{nl} < 0$ .

A ce stade, on utilise la méthode de Nikiforov-Uvarov [36], on compare l'équation (III.22) avec l'équation (A.1) de l'Annexe, on obtient les relations suivantes :

$$\tilde{\tau}(s) = 0, \quad \sigma(s) = s, \quad \tilde{\sigma}(s) = -k_n^2 s^2 - \varepsilon^2 s - l(l+1) \quad (\text{III.24})$$

Selon le contenu de la méthode de Nikiforov-Uvarov, on doit également chercher la forme de la fonction  $\pi(z)$  (**Voir l'équation (A.4) dans l'Annexe**). Les valeurs possibles de  $\pi(z)$  sont définies par [30-36] :

$$\pi(s) = \begin{cases} k_n s + l, & \text{pour } k_1 = -\varepsilon^2 + 2k_n(l + 1/2) \\ -(k_n s + l + 1), & \text{pour } k_1 = -\varepsilon^2 + 2k_n(l + 1/2) \\ (k_n s - l - 1), & \text{pour } k_2 = -\varepsilon^2 - 2k_n(l + 1/2) \\ -k_n s + l, & \text{pour } k_2 = -\varepsilon^2 - 2k_n(l + 1/2) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

En ce qui concerne le polynôme,  $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s)$ , la valeur acceptée  $\pi(s)$  pour notre solution est :

$$k_2 = -\varepsilon^2 - 2k_n(l + 1/2) \quad \text{et} \quad \pi(s) = -k_n s + l \quad (\text{III.26})$$

Suivant l'équation (A.9) de l'annexe, on peut écrire

$$\lambda = -\varepsilon^2 - 2k_n(l+1) \quad (\text{III.27})$$

Une solution particulière de l'équation (III.22) est construite quand

$$\lambda_n = 2nk_n \quad (\text{III.28})$$

L'égalité entre les deux équations (III.27) et (III.28) nous permet d'évaluer les valeurs propres de  $I$  par l'expression :

$$E_n = -\frac{D_0^2}{4A_0\hbar^2(n+l+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.31})$$

Notons que cette relation représente le spectre des énergies (**les états liés**).

En faisant intervenir l'expression explicite de la fonction du poids figurant à l'Annexe, on établit la relation

$$\rho(r) = r^{2l+1} e^{-2k_n r}, \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (\text{III.31})$$

Les fonctions  $y_n(r)$  et  $\phi_n(r)$  s'écrivent donc respectivement sous les formes suivantes :

$$y_n(r) = L_n^{2l+1}(2k_n r) \quad (\text{III.32})$$

$$\phi_n(r) = C_n r^l e^{-k_n r} \quad (\text{III.33})$$

où  $C_n$  sont des constantes de normalisation et  $L_n^{2l+1}(r)$  sont les polynômes de Laguerre associés [44]. Et par conséquent, les états propres liés de l'opérateur invariant transformé  $I(0)$  sont obtenus sous la forme :

$$R_{nl}(r) = N_n r^l e^{-k_n r} L_n^{2l+1}(2k_n r), \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (\text{III.34})$$

avec  $N_n$  est une constante de normalisation déterminée par :  $\int_0^\infty R_{nl}(r)^* R_{nl}(r) dr = 1$ .

Finalement, l'expression explicite des états propres liés à l'invariant  $I(0)$  sont obtenus sous la forme :

$$\begin{aligned} R_{nl}(r) = & \left( \frac{\Gamma(n+1)}{2(n+l+1)\Gamma(n+2l+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{D_0}{A_0\hbar^2(n+l+1)} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{D_0 r}{A_0\hbar^2(n+l+1)} \right)^l \\ & \times \exp\left(-\frac{D_0 r}{2A_0\hbar^2(n+l+1)}\right) L_n^{2l+1}\left(\frac{A_0 r}{A_0\hbar^2(n+l+1)}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Cette équation représente une solution de l'équation de Schrödinger radiale avec un potentiel de Coulomb.

### ***3.4 Solution de la partie angulaire de l'équation de Schrödinger :***

Dans cette section, nous considérons le potentiel non central donné par les deux références [45,46] :

$$g(\theta, \varphi) = \frac{a}{\sin^2 \theta} + \frac{b \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{V(\varphi)}{\sin^2 \theta},$$

$$V(\varphi) = d \csc^2 \nu \varphi + e \sec^2 \nu \varphi, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (\text{III.36})$$

Où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives réelles,  $d$  et  $e$  sont des paramètres réelles.

Nous décomposons la fonction  $Y_{nlm}(\theta, \varphi)$  sous la forme:

$$Y_{nlm}(\theta, \varphi) = \Theta_{nlm}(\theta) \Phi_{nlm}(\varphi), \quad (\text{III.37})$$

et nous substituons l'équation (III.37) dans l'équation (III.21), nous obtenons deux équations différentielles séparées :

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + \left( c - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{a}{\hbar^2 \sin^2 \theta} - b \frac{\cos \theta}{\hbar^2 \sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0 \quad (\text{III.38})$$

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \left( m^2 - \frac{V(\varphi)}{\hbar^2} \right) \Phi(\varphi) = 0 \quad (\text{III.39})$$

Lune représente l'équation de la partie angulaire qui varie en fonction du paramètre  $\theta$  et l'autre varie en fonction de  $\varphi$ .

En introduisant un nouveau changement de variable  $\cos \theta = z$ , on peut maintenant réécrire l'équation (III.38) sous la forme :

$$\frac{d^2 \Theta(z)}{dz^2} - \frac{2z}{1-z^2} \frac{d\Theta(z)}{dz} + \frac{1}{(1-z^2)^2} \left( -cz^2 - \frac{b}{\hbar^2} z + c - m^2 - \frac{a}{\hbar^2} \right) \Theta(z) = 0 \quad (\text{III.40})$$

Pour évaluer les solutions de cette équation différentielle, on utilise la méthode NU [36-43]. En comparant l'équation (A.1) de l'Annexe avec cette équation, on en déduit les polynômes associés suivants :

$$\tilde{\tau}(z) = -2z, \quad \sigma(z) = 1 - z^2, \quad \tilde{\sigma}(s) = -cz^2 - \frac{b}{\hbar^2}z + c - m^2 - \frac{a}{\hbar^2} \quad (\text{III.39})$$

où  $\tilde{\tau}(z)$ ,  $\sigma(z)$ , et  $\tilde{\sigma}(z)$  sont des fonctions d'une variable  $z$ .

Compte tenu de la Réf [34]), la fonction  $\pi$  figurée dans l'Annexe s'écrit sous la forme :

$$\pi(z) = \pm \left[ (c - k)z^2 + \frac{b}{\hbar^2}z - \left( c + m^2 - \frac{b}{\hbar^2} - k \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.40})$$

Selon la méthode NU, nous pouvons écrire  $\pi$  comme

$$\pi(z) = \pm \begin{cases} \left( \frac{m^2 + (a/\hbar^2)^2 + \mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}} z + \left( \frac{m^2 + (a/\hbar^2)^2 - \mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, & k = \frac{2c - m^2 - (a/\hbar^2) - \mu}{2} \\ \left( \frac{m^2 + (a/\hbar^2)^2 - \mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}} z + \left( \frac{m^2 + (a/\hbar^2)^2 + \mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, & k = \frac{2c - m^2 - (a/\hbar^2) + \mu}{2} \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

Avec  $\mu = \left[ (m^2 + a/\hbar^2)^2 - (b/\hbar^2)^2 \right]^{1/2}$ . Pour le polynôme  $\tau = \tilde{\tau} + 2\pi$ , ou son dérivé est négative, on a :

$$\tau(z) = -2z \left[ 1 + \left( \frac{m^2 + (a/\hbar^2) + u}{2} \right)^{1/2} \right] - 2 \left( \frac{m^2 + (a/\hbar^2) - u}{2} \right)^{1/2}. \quad (\text{III.45})$$

Puis, nous obtenons  $\lambda$  et  $\lambda_{n'}$ ,

$$\lambda = \frac{2c - (m^2 + a/\hbar^2)}{2} - \frac{\mu}{2} - \left( \frac{m^2 + a/\hbar^2 + \mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.46})$$

$$\lambda_{n'} = 2n' \left[ 1 + \left( \frac{m^2 + a/\hbar^2 + \mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + n'(n' - 1) \quad (\text{III.47})$$

En assimilant l'équation (III.46) avec l'équation (III.47), on a :

$$(2n' + 1) \left( \frac{m^2 + a/\hbar^2 + \mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + n'(n' + 1) + \frac{\mu - (m^2 + a/\hbar^2)}{2} = c - (m^2 + a/\hbar^2) \quad (\text{III.48})$$

En utilisant la définition de  $c = l(l + 1)$  on obtient la valeur de  $l$  sous la forme :

$$l = n' + \left( \frac{m^2 + b/\hbar^2 + (m^2 + b/\hbar^2 - (b/\hbar^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.49})$$

En insérant le résultat de l'équation (III.49) dans l'expression des valeurs propres de la partie radiale (III.31). Nous obtenons les valeurs propres de l'opérateur invariant  $I_0$  pour un électron lié dans un potentiel de Coulomb avec une combinaison des potentiels non centraux [31] de l'équation (III.38) :

$$E_{n n' m} = -\frac{D_0^2}{4\hbar^2 A_0} \frac{1}{\left[ n+n'+\left( \frac{m^2+a/\hbar^2+(m^2+b/\hbar^2-(b/\hbar^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} +1 \right]^2} \quad (\text{III.50})$$

On peut également obtenir la fonction d'onde de la partie angulaire de l'équation de Schrödinger (III.21), en utilisant  $\sigma(z)$  et  $\pi(z)$  sur la base de la méthode (N-U). Pour cela, les fonctions nécessaires au développement de la théorie (N-U) correspondant sont :

$$W(z) = (1-z)^{(m_1+m_2)/2} (1+z)^{(m_1-m_2)/2} \quad (\text{III.51})$$

$$\rho(z) = (1+z^2)^{m_1} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{-m_2} \quad (\text{III.52})$$

$$y_{n'}(z) = y_{0,n'}(1-z)^{-(m_1+m_2)}(1+z)^{-(m_1-m_2)} \times \frac{d^{n'}}{dz^{n'}} [(1-z)^{n'+(m_1+m_2)}(1+z)^{n'+(m_1-m_2)}] \quad (\text{III.53})$$

Où  $m_1 = [(m^2 + a/\hbar^2 + \mu)/2]^{\frac{1}{2}}$ ,  $m_2 = [(m^2 + a/\hbar^2 - \mu)/2]^{\frac{1}{2}}$ . La solution  $y_{n'}(z)$  est exprimée en termes de polynômes de Jacobi  $P_n^{(m_1+m_2, m_1-m_2)}(z)$ . En substituant les équations (III.51), (III.52) et (III.53) dans l'équation (A.2) de l'Annexe, les fonctions d'onde correspondantes sont :

$$\Theta_{n'}(\theta) = \Theta_{0,n'}(1-\cos\theta)^{\frac{(m_1+m_2)}{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{(m_1-m_2)}{2}}P_{n'}^{(m_1+m_2, m_1-m_2)}(\cos\theta) \quad (\text{III.54})$$

tel que  $\Theta_{0,n'}$  est la constante de normalisation déterminé par :  $\int_{-1}^1 \Theta_{n'}(z)^* \Theta_{n'}(z) dz = 1$ . En utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de Jacobi, la constante de normalisation devient :

$$\Theta_{0,n'} = \left( \frac{(2n'+2m_1+1)\Gamma(n'+1)\Gamma(n'+2m_1+1)}{2^{2m_1+1}\Gamma(n'+m_1+m_2+1)\Gamma(n'+m_1-m_2+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.54})$$

Pour compléter la solution de la partie angulaire de l'équation de Schrödinger, nous résolvons l'équation (III.39) qui varie en fonction de  $\varphi$ .

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \left( m^2 - \frac{dcsc^2\nu\varphi + ecec^2\nu\varphi}{\hbar^2} \right) \Phi(\varphi) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (\text{III.55})$$

La définition d'une nouvelle variable  $z = \cos(\nu\varphi)$ , nous permet d'écrire l'équation différentielle (III.55) sous la forme :

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} + \frac{z}{1-z^2} \frac{d\Phi(z)}{dz} + \left( \frac{-E^2 z^4 + \Omega z^2 - \Lambda}{(z(1-z^2))^2} \right) \Phi(z) = 0 \quad (\text{III.56})$$

Tel que :

$$E^2 = \frac{m^2}{\nu^2}, \quad \Omega = \frac{m^2}{\nu^2} - \frac{d}{\hbar^2 \nu^2} + \frac{e}{\hbar^2 \nu^2}, \quad \Lambda = \frac{e}{\hbar^2 \nu^2} \quad (\text{III.57})$$

Il existe de nombreuses techniques disponibles dans la littérature qui peuvent être utilisées pour résoudre cette équation différentielle avec des conditions aux limites. Dans notre cas, nous introduisons une nouvelle technique qui s'appelle la méthode d'itération asymptotique (AIM) [47,48]. L'avantage de cette méthode réside dans sa capacité à améliorer la précision du calcul numérique des observables physiques, en particulier le spectre d'énergie.

### ***3.4.1 Les concepts de base de la méthode d'itération asymptotique :***

Dans cette section, nous présentons des notions de base sur la méthode d'itération asymptotique (AIM). Cette méthode a été proposée pour résoudre l'équation différentielle linéaire et homogène de second ordre suivante:

$$\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} = \lambda_0(x) \frac{dy_n(x)}{dx} + S_0(x) y_n(x), \quad \lambda_0(x) \neq 0 \quad (\text{III.58})$$

Essentiellement, les fonctions  $S_0(x)$  et  $\lambda_0(x)$  sont suffisamment différentiables. L'équation (III.58) peut être itérée jusqu'à  $(k+1)$  ème et le  $(k+2)$  ème dérivés,  $k = 1, 2, 3, \dots$  Par conséquent, nous avons

$$\frac{d^{k+1} y_n(x)}{dx^{k+1}} = \lambda_{k-1}(x) \frac{dy_n(x)}{dx} + S_{k-1}(x) y_n(x) \quad (\text{III.59})$$

$$\frac{d^{k+2} y_n(x)}{dx^{k+2}} = \lambda_k(x) \frac{dy_n(x)}{dx} + S_k(x) y_n(x) \quad (\text{III.60})$$

Où  $\lambda_k(x)$  et  $S_k(x)$  sont exprimées par les relations de récurrence suivantes :

$$\lambda_k(x) = \frac{dy_{k-1}(x)}{dx} + S_{k-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{k-1}(x), \quad (\text{III.61})$$

$$S_k(x) = \frac{dS_{k-1}(x)}{dx} + S_0(x)\lambda_{k-1}(x) \quad (\text{III.62})$$

À partir du rapport de la  $(k + 2)$  ème et  $(k + 1)$  ème dérivés, nous avons

$$\frac{d}{dx} \ln \left[ \frac{d^{k+2}y_n(x)}{dx^{k+2}} \right] = \frac{\frac{d^{k+2}y_n(x)}{dx^{k+2}}}{\frac{d^{k+1}y_n(x)}{dx^{k+1}}} = \frac{\lambda_k(x) \left[ \frac{dy_n(x)}{dx} + \frac{S_k(x)}{\lambda_k(x)} y_n(x) \right]}{\lambda_{k-1}(x) \left[ \frac{dy_n(x)}{dx} + \frac{S_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} y_n(x) \right]} \quad (\text{III.63})$$

Maintenant, nous introduisons l'aspect asymptotique de la méthode. Si nous avons, pour  $k$  grand  $k > 0$ , on obtient  $\varpi(x)$  sous forme

$$\frac{S_k(x)}{\lambda_k(x)} = \frac{S_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} = \varpi(x) \quad (\text{III.64})$$

Avec la condition :

$$\Delta_k(x) = \begin{bmatrix} \lambda_k(x) & S_k(x) \\ \lambda_{k-1}(x) & S_{k-1}(x) \end{bmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.65})$$

Ensuite, la solution de l'équation (III.1) peut être écrite comme :

$$y_n(x) = \exp\left(-\int^x \varpi(z) dz\right) [h_1 + h_2 \int^x \exp(\int^z [\lambda_0(t) + 2\varpi(t)]) dt] dz \quad (\text{III.66})$$

Où  $h_1$  et  $h_2$  sont deux constantes.

Pour un potentiel donné, la procédure consiste d'abord de convertir l'équation de Schrödinger dans la forme de l'équation (III.58). Ensuite, les fonctions  $S_0(x)$  et  $\lambda_0(x)$  sont déterminées, tandis que  $S_n(x)$  et  $\lambda_n(x)$  sont calculées par les relations de récurrence (III.61) et (III.62).

Si le problème est exactement résoluble, les valeurs propres de l'énergie sont obtenues en imposant la condition représentée par l'équation (III.65). Dans le cas contraire, pour un nombre quantique principal spécifique  $n$ , nous choisissons un point  $x_0$  approprié, généralement déterminé comme la valeur maximale de la fonction d'onde asymptotique ou bien la valeur minimale du potentiel et par conséquent les valeurs propres de l'énergie approximatives sont déterminées à partir des racines de la condition (III.65).

La solution générale de l'équation (III.58) est donnée par l'équation (III.66). La première partie de l'équation (III.66) donne les solutions polynomiales qui sont convergentes et physiques, tandis que la seconde partie de l'équation (III.66) donne des solutions divergentes.

Bien que l'équation (III.66) soit la solution générale de l'équation (III.58), nous prenons le coefficient de la seconde partie  $h_2 = 0$ , afin de trouver les solutions intégrables. Par conséquent, les fonctions propres correspondantes peuvent être obtenues à partir du générateur de la fonction d'onde suivante pour les potentiels exactement résolubles:

$$y_n(x) = h_1 \exp\left(-\int^x \frac{S_k(t)}{\lambda_k(t)} dt\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.67})$$

Où  $n$  représente le nombre quantique principal.

On choisit :

$$\Phi(z) = z^\zeta (1 - z^2)^\delta \chi(z) \quad (\text{III.68})$$

Avec :

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + 4 \frac{e}{\hbar^2 v^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.69})$$

$$\zeta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(1 + 4 \frac{d}{\hbar^2 v^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.70})$$

Lorsque l'on insère l'équation. (III.68) dans l'équation (III.56), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \chi(z)}{dz^2} = \lambda_0(z) \frac{d\chi(z)}{dz} + S_0(z) \chi(z) \quad (\text{III.71})$$

Avec :

$$\lambda_0(z) = \frac{(2\zeta + 4\delta + 1)z^2 - 2\zeta}{z(1 - z^2)}, \quad S_0(z) = \frac{(2\delta + \zeta)^2 - E^2}{(1 - z^2)} \quad (\text{III.72})$$

Maintenant, nous calculons,  $\Delta_1(z), \Delta_2(z), \Delta_3(z), \dots, \Delta_n(z)$ , la condition de quantification donne :  $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ . En utilisant le même mode opératoire que dans le cas précédent et après quelques itérations, nous obtenons :

$$\frac{S_0(z)}{\lambda_0(z)} = \frac{S_1(z)}{\lambda_1(z)} \Rightarrow \Delta_1(z) = \lambda_1(z)S_0(z) - S_1(z)\lambda_0(z) = 0 \Rightarrow E_0 = \pm (2\delta + \zeta) \quad (\text{III.73})$$

$$\frac{S_1(z)}{\lambda_1(z)} = \frac{S_2(z)}{\lambda_2(z)} \Rightarrow \Delta_2(z) = \lambda_2(z)S_1(z) - S_2(z)\lambda_1(z) = 0 \Rightarrow E_1 = \pm (2\delta + \zeta + 2) \quad (\text{III.74})$$

$$\frac{S_2(z)}{\lambda_2(z)} = \frac{S_3(z)}{\lambda_3(z)} \Rightarrow \Delta_3(z) = \lambda_3(z)S_2(z) - S_3(z)\lambda_2(z) = 0 \Rightarrow E_2 = \pm (2\delta + \zeta + 4) \quad (\text{III.75})$$

Selon les formes des énergies  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$ , nous pouvons écrire les valeurs propres sous la forme générale :

$$E_{n''} = \pm (2\delta + \zeta + 2n''), \quad n'' = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.76})$$

En utilisant le premier terme de l'équation (III.57), nous obtenons la relation :

$$m^2 = v^2 E_{n''}^2 = v^2 (2\delta + \zeta + 2n'')^2 \quad (\text{III.77})$$

Cette dernière équation nous permet de remplacer la constante de séparation  $m^2$  dans l'équation (III.50), de sorte que les valeurs propres de l'opérateur  $I_0$  pour la deuxième partie angulaire de l'équation de Schrödinger est s'écrit sous la forme :

$$E_{n'n''} = -\frac{D_0^2}{4\hbar^2 A_0} \frac{1}{\left[ n+n' + \left( \frac{v^2(2\delta+\zeta+2n'')^2 + \frac{a}{\hbar^2} \left[ \left( v^2(2\delta+\zeta+2n'')^2 + \frac{a}{\hbar^2} \right) - \left( \frac{b}{\hbar^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2} \quad (\text{III.78})$$

Si l'on pose  $x = z^2$ , l'équation différentielle (III.71) se transforme à une équation différentielle hypergéométrique (**Voir la référence [49]**). Et sa solution est donnée par

$$\chi(z) = {}_2F_1 \left( -n'', 2\delta + \zeta + 2n''; \zeta + \frac{1}{2}; z^2 \right) \quad (\text{III.79})$$

${}_2F_1$  : Fonction hypergéométrique.

Donc, on obtient la solution de l'équation (III.55) sous la forme :

$$\Phi(\varphi) = N_{n''} (\cos(v\varphi))^\zeta (\sin(v\varphi))^{2\delta} {}_2F_1 \left( -n'', 2\delta + \zeta + n''; \zeta + \frac{1}{2}; \cos(v\varphi)^2 \right) \quad (\text{III.80})$$

où  $N_{n''}$  est la constante de normalisation de la fonction d'onde angulaire  $\Phi(\varphi)$ . Cette constante est calculée à partir de la condition de normalisation :

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2 d\varphi = 1 \quad (\text{III.81})$$

En utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de Jacobi [49,50] suivante:

$$\int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{s-\gamma} [{}_2F_1(-n, n+s; \gamma; z)]^2 dz = \frac{n!}{(s+2n)} \frac{\Gamma(\gamma)^2 \Gamma(n+s-\gamma+1)}{\Gamma(n+s) \Gamma(s+\gamma)} \quad (\text{III.82})$$

La constante de normalisation devient :

$$N_{n''} = \left( \frac{(2\delta + \zeta + 2n'')\Gamma(2\delta + \zeta + n'')\Gamma(\delta + n'' + \frac{1}{2})}{2n''! \Gamma(\zeta + \frac{1}{2})^2 \Gamma(2\delta + n'' + \frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.83})$$

Par conséquent, les états propres de l'invariante  $I_0$  sont représentés sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi'_{n n' n''}(r, \theta, \varphi) &= \left( \frac{(2n' + 2m_1 + 1)\Gamma(n' + 1)\Gamma(n' + 2m_1 + 1)}{2^{2m_1 + 1}\Gamma(n' + m_1 + m_2 + 1)\Gamma(n' + m_1 - m_2 + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{(2\delta + \zeta + 2n'')\Gamma(2\delta + \zeta + n'')\Gamma(\delta + n'' + \frac{1}{2})}{2n''! \Gamma(\zeta + \frac{1}{2})^2 \Gamma(2\delta + n'' + \frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \frac{\Gamma(n + 1)}{2(n + l + 1)\Gamma(n + 2l + 2)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{D_0}{A_0 \hbar^2 (n + l + 1)} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{D_0 r}{A_0 \hbar^2 (n + l + 1)} \right)^l \\ &\times \exp\left(-\frac{D_0 r}{2A_0 \hbar^2 (n + l + 1)}\right) L_n^{2l+1}\left(\frac{D_0 r}{A_0 \hbar^2 (n + l + 1)}\right) \quad (\text{III.84}) \\ &\times (1 - \cos \theta)^{(m_1 + m_2)/2} (1 + \cos \theta)^{(m_1 - m_2)/2} P_{n'}^{(m_1 + m_2, m_1 - m_2)} \\ &\times (\cos \theta)(\cos \nu \varphi)^\zeta (\sin \nu \varphi)^{2\delta} {}_2F_1\left(-n'', 2\delta + \zeta + n''; \zeta + \frac{1}{2}; \cos^2 \nu \varphi\right) \end{aligned}$$

Les états propres normalisés complètes pour  $I(t)$  sont donc évalués comme suit :

$$\Phi_{n n' n''}(r, \theta, \varphi) = U^{-1} \Phi'_{n n' n''}(r, \theta, \varphi) \quad (\text{III.85})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n n' n''}(r, \theta, \varphi) &= \left( \frac{(2n' + 2m_1 + 1)\Gamma(n' + 1)\Gamma(n' + 2m_1 + 1)}{2^{2m_1 + 1}\Gamma(n' + m_1 + m_2 + 1)\Gamma(n' + m_1 - m_2 + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{(2\delta + \zeta + 2n'')\Gamma(2\delta + \zeta + n'')\Gamma(\delta + n'' + \frac{1}{2})}{2n''! \Gamma(\zeta + \frac{1}{2})^2 \Gamma(2\delta + n'' + \frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \frac{\Gamma(n + 1)}{2(n + l + 1)\Gamma(n + 2l + 2)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{D_0}{D_0 \hbar^2 (n + l + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{D(t)}{A(t) \hbar^2 (n + l + 1)} \right)^{l+1} \\ &\times r^l \exp\left(\frac{-i\beta(t)}{2\hbar A(t)} r^2\right) \exp\left(\frac{-D(t)r}{2A(t)\hbar^2 (n + l + 1)}\right) L_n^{2l+1}\left(\frac{\eta(t)r}{A(t)\hbar^2 (n + l + 1)}\right) \\ &\times (1 - \cos \theta)^{\frac{(m_1 + m_2)}{2}} (1 + \cos \theta)^{\frac{(m_1 - m_2)}{2}} P_{n'}^{(m_1 + m_2, m_1 - m_2)} (\cos \theta)(\cos \nu \varphi)^\zeta \\ &\times (\sin \nu \varphi)^{2\delta} {}_2F_1\left(-n'', 2\delta + \zeta + n''; \zeta + \frac{1}{2}; \cos^2 \nu \varphi\right) \quad (\text{III.86}) \end{aligned}$$

### 3.5 La phase totale et la solution de l'équation de Schrödinger :

Il reste encore le problème de trouver la phase  $\xi_{n n' n''}(t)$  qui satisfait la relation suivante :

$$\hbar \frac{d}{dt} \xi_{n n' n''}(t) = \langle \phi_{n n' n''}(t) | \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \phi_{n n' n''}(t) \rangle \quad (\text{III.87})$$

En effectuant la transformation unitaire au moyen de  $U(t)$ , cette équation devient :

$$\hbar \frac{d}{dt} \xi_{n n' n''}(t) = \langle \phi'_{n n' n''}(t) | -\frac{I_0}{2\mu(t)A(t)} | \phi'_{n n' n''}(t) \rangle \quad (\text{III.88})$$

Puis, à l'aide de l'équation (III.50), cette équation est évaluée et finalement, on obtient la phase sous la forme :

$$\begin{aligned} \xi_{n n' n''}(t) = & \frac{-D_0^2}{4\hbar^3 A_0} \left\{ n + n' + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ v^2 (2\delta + \zeta + n'')^2 + \frac{a}{\hbar^2} + \left( v^2 (2\delta + \zeta + n'')^2 + \frac{a}{\hbar^2} + \frac{b^2}{\hbar^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-2} \\ & \times \int_0^t \frac{1}{2\mu A(t')} dt' \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

Par conséquent, en substituant les équations (III.85) et (III.89) dans la fonction  $\psi_{n n' n''}(r, \theta, \varphi, t) = e^{i\xi_{n n' n''}(t)} \phi_{n n' n''}(r, \theta, \varphi, t)$ , les solutions exactes d'ordre  $n$  de l'équation de Schrödinger originale (III.2) associé à l'hamiltonien  $H(t)$  sont évaluées par:

$$\begin{aligned} \psi_{n n' n''}(r, \theta, \varphi, t) = & \left( \frac{(2n'+2m_1+1)\Gamma(n'+1)\Gamma(n'+2m_1+1)}{2^{2m_1+1}\Gamma(n'+m_1+m_2+1)\Gamma(n'+m_1-m_2+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma(2\delta+\zeta+n'')\Gamma(\delta+n''+\frac{1}{2})}{2n''! \Gamma(\zeta+\frac{1}{2})^2 \Gamma(2\delta+n''+\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left( \frac{\Gamma(n+1)}{2(n+l+1)\Gamma(n+2l+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{D_0}{D_0\hbar^2(n+l+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{D(t)}{A(t)\hbar^2(n+l+1)} \right)^{l+1} \\ & \times r^l \exp\left(\frac{-i\beta(t)}{2\hbar A(t)} r^2\right) \exp\left(\frac{-D(t)r}{2A(t)\hbar^2(n+l+1)}\right) L_n^{2l+1}\left(\frac{\eta(t)r}{A(t)\hbar^2(n+l+1)}\right) \\ & \times (1 - \cos \theta)^{\frac{(m_1+m_2)}{2}} (1 + \cos \theta)^{\frac{(m_1-m_2)}{2}} P_{n'}^{(m_1+m_2, m_1-m_2)}(\cos \theta) (\cos v\varphi)^\zeta \\ & \times (\sin v\varphi)^{2\delta} {}_2F_1\left(-n'', 2\delta + \zeta + n''; \zeta + \frac{1}{2}; \cos^2 v\varphi\right) e^{i\xi_{n n' n''}(t)} \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

Ce sont les résultats fondamentaux de notre recherche, qui sont les fonctions d'onde du système qui satisfont l'équation de Schrödinger. Bien que la solution est compliquée, celle-ci nous permet d'étudier les diverses caractéristiques quantiques du système, tels que l'évolution temporelle des variables canoniques et autres observables, le spectre des états propres de l'énergie, les relations d'incertitude, la densité de probabilité, etc...



## Conclusion

L'étude quantique d'un système décrit par un potentiel non central dépendant du temps a été réalisée. En utilisant la théorie de Lewis et Riesenfeld, nous avons obtenu un invariant exact de l'équation du Schrödinger dépendant de temps avec des potentiels non centraux décrits par l'Hamiltonien :

$$H(t) = \frac{1}{2\mu(t)} \left( p^2 + \frac{g(\theta, \varphi)}{r^2} \right) - \frac{Z(t)}{r}$$

L'opérateur invariant est transformé en une forme simple par une transformation unitaire. Les solutions de l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant dans le système transformé sont facilement obtenues par les méthodes de Nikiforov-Uvarov et l'itération asymptotiques. Le potentiel de forme double anneau généralisée, plus un potentiel non central  $V(\varphi)$  dépendant de temps est considéré comme un cas particulier.

A travers la transformation unitaire inverse, les solutions quantiques complètes dans le système d'origine sont identifiées. Les fonctions d'ondes complètes représentées dans l'équation (III.90), nous permettent de connaître les informations utiles concernant les caractéristiques du système, telles que l'évolution temporelle des variables canoniques et autres observables, le spectre d'énergie, la relation d'incertitude, la densité de probabilité, etc... Cependant, le problème quantique décrit par le potentiel non central avec des paramètres dépendants du temps n'a pas encore étudié autant que nous le savons. Peut-être, cela est dû à la complexité des calculs mathématiques reliés au système dans le domaine des systèmes dépendants du temps. Selon les différents choix des paramètres dépendant du temps  $\mu(t)$  et  $Z(t)$ , ainsi que les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $d$  et  $e$ , on peut appliquer ce modèle à une large gamme de cas particuliers.

Les propriétés quantiques du système dans les états cohérents, l'étude du propagateur, la phase géométrique et l'entropie du système seront de bons sujets qui peuvent être accomplies sur la base de la fonction d'onde dérivée dans ce travail.

## Annexe 1: Méthode de Nikoforov-Uvarov

Plusieurs problèmes importants de la physique théorique et mathématique ont été caractérisés par l'équation différentielle:

$$\varphi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \varphi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \varphi(s) = 0, \quad (\text{A.1})$$

ans laquelle  $\sigma(s)$  et  $\tilde{\sigma}(s)$  sont des polynômes de degré non supérieur à 2 et  $\tilde{\tau}(s)$  un polynôme de degré non supérieur à 1. En vue de rendre l'équation (A.1) plus simple, nous représentons  $\varphi_n(s)$  en termes des fonctions appropriées  $W_n(s)$  qui sont choisis compte tenu du type de l'équation (A.1) sous la forme:

$$\varphi_n(s) = W_n(s) y_n(s), \quad (\text{A.2})$$

L'équation (A.1) s'écrira donc [29]

$$\sigma(s) y_n'' + \tau(s) y_n' + \lambda y_n = 0, \quad (\text{A.3})$$

Nous dirons que l'équation (A.3) est une équation du type hypergéométrique, et ses solutions, des fonctions du type hypergéométrique, où  $\tau(s)$  et  $\lambda$  sont exprimés par les deux expressions

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \quad (\text{A.4})$$

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma'', \quad (\text{A.5})$$

$\lambda$  étant une constante. Prenons le cas où la dérivée de  $\tau(s)$  est négative. Nous pouvons identifier  $\lambda_n$  à partir d'une solution particulière qui est donnée par  $y(s) = y_n(s)$ . Ici,  $y_n(s)$  est une fonction hypergéométrique connue selon la formule de Rodrigues [36]:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)], \quad (\text{A.6})$$

Où  $B_n$  sont des facteurs de normalisation et  $\rho(s)$  est une fonction de pondération qui donne

$$[\sigma(s)\rho(s)]' = \tau(s)\rho(s). \quad (\text{A.7})$$

Afin d'obtenir la forme exacte de  $\rho(s)$ , nous prenons un polynôme  $\pi(s)$  de la forme :

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)}. \quad (\text{A.8})$$

Dans le cas où le discriminant de la formule donnée dans la racine carrée de l'équation (A.8) est égal à zéro, cette formule est représentée comme un carré d'un polynôme. Ensuite, nous pouvons obtenir une formule simple pour  $k$ , et il est possible d'exprimer  $k$  en tant que

$$k = \lambda - \pi'(s). \quad (\text{A.9})$$

Finalement, la formule de  $W_n(s)$  est obtenue à partir de la relation [29]

$$W'(s)/W(s) = \pi(s)/\sigma(s). \quad (\text{A.10})$$

Pour une description plus détaillée de la méthode NU et son application, on peut se référer au Réf. [36,37].

## Annexe 2: Relations de commutation :

Les relations de commutation utiles pour les calculs des invariants

$$[x, p] = i\hbar \quad (\text{A-1})$$

$$[x^2, p^2] = 2i\hbar(xp + px) \quad (\text{A-2})$$

$$[xp + px, x^2] = -4i\hbar x^2 \quad (\text{A-3})$$

$$[xp + px, p^2] = 4i\hbar p^2 \quad (\text{A-4})$$

$$[xp + px, p] = 2i\hbar p \quad (\text{A-5})$$

$$[xp + px, x] = -2i\hbar x \quad (\text{A-6})$$

$$\left[p^2, \frac{1}{x}\right] = 2i\hbar \frac{p}{x^2} \quad (\text{A-7})$$

$$\left[p^2, \frac{1}{x^2}\right] = 4i\hbar \frac{p}{x^3} \quad (\text{A-8})$$

$$[x, p^2] = 2i\hbar p \quad (\text{A-9})$$

$$[p, x^2] = -2i\hbar x \quad (\text{A-10})$$

$$\left[p^2, \frac{1}{x}p + p\frac{1}{x}\right] = 4i\hbar \frac{p^2}{x^3} \quad (\text{A-11})$$

$$\left[x, \frac{1}{x}p + p\frac{1}{x}\right] = 2i\hbar \frac{1}{x} \quad (\text{A-12})$$

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

- [1] H. R. Lewis, Jr., Phys. Rev. Lett. **18**, 510 (1967).
- [2] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [3] V. P. Ermakov, Univ. Isz. Kiev Series III 9, 1-25 (1880) (translation by A.O. Harin).  
See: Appl. Anal. Discrete Math. **2**, 123 (2008).
- [4] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, and L. Rosa, Phys. Rev. A **57**, 2851 (1998).
- [5] S. Menouar, M. Maamache, Y. Saadi, and J. R. Choi, J. Phys. A: Math. Theor. **41**,  
215303(2008).
- [6] S. Menouar, M. Maamache, J. R. Choi, and R. Sever, J. Phys.Soc. Jpn.**81**, 064003 (2012).
- [7] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Manko, Physica **72**, 597 (1974).
- [8] J. R. Choi and B. H. Gweon, Int. J. Mod. Phys. B **16**, 4733 (2002).
- [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Mécanique quantique, Vol 1,2 Hermann, Paris,  
(1973).
- [10] A.A. Makarov , et al, Nuovo Cimento A **52**, 1061(1967).
- [11] A. Kratzer, Z. Phys., **3**, 289 (1920).
- [12] J.Pliva , J. Mol. Spectrosc, **193**, 7, (1999).
- [13] Ö .Yeşiltaş, M. Şimşek , R.Sever and C. Tezcan , Physica Scripta, **67**, 472(2003).
- [14] M. Kibler and P.Winternitz , J. Phys. A **20**, 4097 (1987).
- [15] Y. Saâdi, Généralisation du théorème adiabatique pour le spectre continu, mémoire de  
Magister, Université Ferhat Abbas – Sétif1, Algérie (2007).
- [16] L. Krache, Etude des propriétés d'une particule dans un potentiel linéaire dépendant du  
temps,Thèse de Doctorat, Université Ferhat Abbas – Sétif1, Algérie(2010).
- [17] H. Hartman and D. Schuch, Int. J. quantum Chem. **18**, 125 (1980).

- [18] C. Quesne, J. Phys. A: Math. Gen. **21**, 3093 (1988).
- [19] H. S. Dong, H.G. Sun and M. Lozada-Gassou, Phys. Lett. A **328**, 299 (2004).
- [20] AX. Zhang, K. Chen K and ZL Duan, Chin. Phys. **14**, 42 (2005).
- [21] BH.Filho and A.Vaidya , Phys. Lett. A **145**, 69 (1990).
- [22] Lu FL, Chen CY and Sun DS Chin. Phys.**14**, 463 (2005).
- [23] MC.Zhang, Huang-Fu GQ and An B, Phys. Scr. **80**, 065018 (2009).
- [24] MC. Zhang , Sun GH and Dong SH , Phys. Lett. A **374**, 704 (2010).
- [25] M. Aktas, Int. J. Theor. Phys. **48**, 2154 (2009).
- [26] S.M.Ikhdair and R.Sever, Int. J. Theor. Phys. **46**, 2384 (2007).
- [27] A D.Alhaidari, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 3409 (2005).
- [28] F. Yasuk , C.Berkdemir and A. Berkdemir , J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 6579 (2005).
- [29] L. Chetouani, L.Guechi and TF.Hammann , J. Math. Phys. **33**, 3410- (1992).
- [30] N. Barnea, W. Leidemann and G. Orlandini, Nuc. Phys. A **693**, 565 (2001).
- [31] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485(1959).
- [32] B. Gönül and I. Zorba, Phys. Lett. A **269**, 83(2000).
- [33] S. Flügge, Practical Quantum Mechanics I (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1971).
- [34] H.X. Quan, L. Guang, W.Z. Min, N.L. Bin, M. Yan, Commun. Theor. Phys.**53**, 242(2010).
- [35] Z.M. Cang, W.Z. Bang, Chem. Phys. **16**, 1863(2007).
- [36] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, Special Functions of Mathematical Physics (Birkhäuser Verlag Basel, Germany, (1988).

- [37] C. Berkdemir, Application of the Nikiforov-Uvarov method in quantum mechanics, Theoretical Concepts of Quantum Mechanics (InTech, Rijeka), M. R. Pahlavani (Ed.) ISBN 978-953-51-0088-1(2012).
- [38] F. Yasuk, C. Berkdemir, and A. Berkdemir, J. Phys. A : Math. Gen.**38**, 6579 (2005).
- [39] H. E. Camblong, L. N. Epele, H. Fanchiotti, and C. A. Garcia Canal, Phys. Rev. Lett. **87**, 220402(2001).
- [40] A. A. Babaei-Brojeny and M. Mokari, Phys. Scr. **84**, 045003 (2011).
- [41] J. Denschlag, G. Umshaus, and J. Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett. **81**, 737 (1998).
- [42] S. M. Ikhdair and Ramazan Sever, C. Eu. J. Phys. **6**, 697 (2008).
- [43] S. M. Ikhdair and R. Sever, Int. J. Theo. Phys. **46**, 1643(2007).
- [44] S.Flügge, Practical Quantum Mechanics Vol 1, 2<sup>nd</sup> ed ( Berling, Springer) p.166 (1994).
- [45] N.Ferkous, A .Bounemes and M .Maamache, Phys .Scr .**88**, 035001 (2013).
- [46] A. khare and Rajat k .bhaduri, Am. J. Phys **62**, 1008 (1994).
- [47] H. Ciftci, R. I.Halland N. Saad, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 11807 (2003).
- [48] H. Ciftci, R. L. Hall and N. Saad, Phys. Lett. A **340**, 388 (2005).
- [49] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, NIST handbook of mathematical functions (Cambridge University Press, New York, 2010).
- [50] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryznik, Tables of Integrals, Series and Products, 6<sup>th</sup> ed. Adademic Press, New York, (2000).

## Résumé :

Dans ce travail, Les caractéristiques quantiques d'un système décrit par un potentiel non central dépendant du temps qui se compose d'un potentiel quadratique inverse et le potentiel de Coulomb sont étudiés. Pour obtenir les solutions de l'équation de Schrödinger (fonctions d'ondes) du système, nous avons utilisé la méthode des invariants. L'opérateur invariant qui nous permet d'étudier le temps système Hamiltonien dépendant est introduit. L'opérateur invariant transformé en une forme simple par une transformation unitaire. Les Solutions quantiques dans le système transformé sont obtenues facilement parce que l'opérateur invariant dans le système transformé est simple indépendante du temps. Les méthodes d'itération asymptotiques et le Nikiforov-Uvarov sont utilisées pour résoudre l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant dans le système transformé. Le potentiel en forme de double anneau généralisée  $V(\varphi)$  dépendant du temps est considéré comme un cas particulier. Par la transformation unitaire inverse des solutions quantiques obtenues dans le système transformé, les solutions complètes quantiques dans le système d'origine sont identifiés.

**Mots clés:** Systèmes dépendants de temps, potentiel non central, Transformation unitaire, Théorie des invariants.

## Abstract:

In this work, the quantum time characteristics not dependent on central potential system which consists of an inverse quadratic potential and the Coulomb potential are studied. To obtain system wave functions, an invariant operator which allows us to study the time dependent Hamiltonian system is introduced. The invariant operator is transformed to a simple form by unitary transformation. Quantum solutions in the transformed system are easily obtained because the invariant operator in the transformed system is a time independent simple one. The Nikiforov-Uvarov and the asymptotic iteration methods are used for solving eigenvalue equation of the invariant operator in the transformed system. The double ring-shaped generalized plus a  $V(\varphi)$  non central time-dependent potential is considered as a particular case. From inverse transformation of quantum solutions obtained in the transformed system, the complete quantum solutions in the original system are identified.

**Key words:** Time-dependent systems, Non central potential, Unitary transformation, Invariant theory.

## ملخص :

في هذا العمل قمنا بدراسة الخصائص الكمية لجملة فيزيائية موصوفة بكمون لا مركزي متعلق بالزمن مكون من كمون رباعي و كمون كولومب، من أجل حل معادلة شرودينغر (دالة الموجة) للجملة، استعملنا طريقة اللامتغيرات. قمنا بتحويل مؤثر اللامتغير المتعلق بالزمن إلى لا متغير غير متعلق بالزمن وذلك باستعمال التحويل الوحدوي الذي سمح لنا بإيجاد الحلول الكوانتية في الجملة المحولة غير المتعلقة بالزمن بطريقة بسيطة. و لحل معادلة القيم الذاتية للامتغير المحول قمنا باستعمال طريقة التكرار المقارب و نيكيفوروف إفاروف بأخذ حالة خاصة من الكمون اللامركزي ثنائي الحلقة  $V(\varphi)$  تمكنا من إيجاد الحل النهائي للجملة الأصلية.

**كلمات مفتاحية :** الجملة المتعلقة بالزمن، الكمون اللامركزي، التحويل الوحدوي، نظرية اللامتغيرات.