Table des matières

Introduction

Les espaces de Morrey ont été introduits en 1938 par Charles Bradfield Morrey [21] par rapport à la régularité des problèmes de solutions aux équations aux dérivées partielles et ont aidé à obtenir de nombreux résultats intéressants. Les années 1960 peuvent être considérés comme le début d'un développement intense de la théorie générale nous mentionner ici les articles de John et Nirenberg [17], Meyers [20], Campanato [6], [7], Stampacchia [26].

On commence nos études de différents opérateurs dans les espaces de Morrey écart il y a plusieurs années , principalement dans le cas de les opérateurs maximales, singuliers et potentiels tel dans les espaces de Morrey avec des exposants variables et avec des exposants constants. On découvre qu'il existait une vaste bibliographie sur Beaucoup compter les centaines de publications soumises.

Le but de ce mémoire est de donner un aperçu sur les espaces de Morrey et d'étudier quelques résultats essentielles pour ces espaces.

Nous donnons au premier chapitre la définition de l'espace de Morrey classique $L^{p,\lambda}(\Omega)$ qiu est bien connu par exemple voir [18], [15] et quelques propriétés pour cet espace, puis on preuve la continuité de la fonction maximale de Hardy- Littlewood dans cet espace.

Dans le second chapitre on donne quelques rappelles sur les espaces de Lebesgue à exposants variables et quelques résultats qu'on utilisera par la suite.

Puis nous introduisons les espaces de Morrey à exposants variables $L^{p(.),\lambda(.)}(\Omega)$ sur un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on donne quelques lemmes et théorèmes techniques.

Au dernier chapitre, nous prouvons la continuité de l'opérateur maximal dans les espaces de Morrey à exposants variables dans le cadre du journal de condition sur $p(.)$ et $\lambda(.)$. Pour les opérateurs potentiels par D. R. Adams [2], sous le même $Log-conditions$ et les hypothèses

$$\inf_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0 \qquad , \qquad \sup_{x\in\Omega} [\lambda(x) + \alpha(x)\, p(x)] < n.$$

Nous démontrons aussi la continuité de l'opérateur maximal fractionnaire (F. Chiarenza et M. Frasca [8]), nous étudions la continuité dans le cas limite sous la condition

$$p(x) = \frac{n - \lambda(x)}{\alpha(x)}$$

, Ces résultats étant dû à A. Almeida , J. Hasanov et S. Samko [4] (2008).

Notations

- Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $B(x,r)$, la boule de centre x et de rayon r.
- v_n, le volume de la boule unité $B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$.
- d désigne le diamètre d'un domaine borné $\Omega \subset R^n$: $d = diam\Omega$
- $C(\Omega)$: est l'espace des fonctions continues sur un ensemble Ω à valeurs réelles.
- La fonction caractéristique d'un ensemble E et notée par

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

- Pour $A \subset \mathbb{R}^n$: $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A.
- Soit $0 < p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Lebesgue. C'est l'espace des fonctions f mesurables telles que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

si $0 < p < \infty$ et

$$\|f\|_\infty = supess_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

- $T : X \hookrightarrow Y$ signifie que T est un prolongement continu de X à Y.
- $X \hookrightarrow Y$ signifie que l'identité de X à Y est un prolongement continu.
- $f \lesssim g$ signifie que $f \leq cg$ pour c une constante, et $f \approx g$ signifie $f \lesssim g \lesssim f$.
- On note par f_A l'intégrale moyenne de f sur A: $f_A = \frac{1}{A} \int_A f dx$.

Chapitre 1

Continuité de la fonction maximale sur l'espace de Morrey. Le cas des exposants fixés

L'objet de ce chapitre est de prouver la continuité de la fonction maximale de Hardy-Littlewood sur l'espace de Morrey.

Nous choisissons quelques définitions et théorèmes pour savoir l'espace de Morrey classique. Puis on étudie la continuité de la fonction maximale dans cet espace. On termine ce chapitre en étudiant la continuité de l'opérateur potentiel.

1.1 L'espace de Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$

Définition 1.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et borné, $1 \leq p \leq +\infty$ et $\lambda \geq 0$. L'espace de Morrey est noté par $L^{p,\lambda}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\Omega)$ telle que:*

$$\|f\|_{p,\lambda} = \left(\sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r<d}} r^{-\lambda} \int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Remarque 1.1.1 *L'espace de Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$ est un espace normé.*

Théorème 1.1.1 *L'espace de Morrey est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^{p,\lambda}(\Omega)$, on pose $d = diam\Omega$ et nous choisissons $x \in \Omega$, alors $\sup_{y\in\Omega}\text{dis}(x,y) < d$. En effet, supposons que $\sup_{y\in\Omega}\text{dis}(x,y) = d$, comme Ω ouvert on peut trouver une boule $B(x,\delta) \subset \Omega$ avec $\delta > 0$ et $t \in B(x,\delta)$ tel que

$$\sup_{y\in\Omega}\text{dis}(t,y) > \sup_{y\in\Omega}\text{dis}(x,y) = d$$

C'est une contradiction, c'est à dire il existe $r^* < d$ tel que $\Omega \subset B(x,r^*)$ ce qui est donné la relation

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\left(\frac{d}{r^*}\right)^{\lambda} \int_{\Omega\cap B(x,r^*)} |u_n(y) - u_m(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq d^{\frac{\lambda}{p}} \|u_n - u_m\|_{p,\lambda}\,, \quad (1.1.1)$$

alors $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ qui est complet, de sort que il existe $u \in L^p(\Omega)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} = 0$. On montre que $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$. Par l'inégalité de Minkowski, pour tout $(x,r) \in \Omega \times]0,d[$

$$\begin{aligned}
& r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u(y) - u_n(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} + r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u_n(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & K
\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ et en prenant le supremum sur tout $(x,r) \in \Omega \times]0,d[$ on trouve

$$\sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r<d}} r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq K.$$

Reste à montrer que $\lim_{n\to+\infty} \|u-u_n\|_{p,\lambda} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
& r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u(y)-u_n(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq \;& r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u(y)-u_m(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} + r^{-\lambda/p} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u_n(y)-u_m(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq \;& r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u(y)-u_m(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} + \|u_n-u_m\|_{p,\lambda} .
\end{aligned}$$

On choisit n_0 ainsi que $n, m \geq n_0$, alors $\|u_n-u_m\|_{p,\lambda} < \varepsilon$. On prenant la limite quand $m \to +\infty$ alors

$$r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |u(y)-u_m(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Finalement en prenant le sup sur tout $(x,r) \in \Omega \times]0,d[$ on trouve: $\|u_n-u\|_{p,\lambda} < \varepsilon$. ■

Définition 1.1.2 *Une famille $\{E_r\}_{r>0}$ de sous-ensemble de borel de $\mathbb{R}^n$ est dit se rétricite bien à $x \in \mathbb{R}$ si:*

1. $E_r \subset B(r,x) \qquad \forall r > 0.$

2. Il existe $\alpha > 0$ indépendant de r, telle que $|E_r| > \alpha\,|B(r,x)| = \alpha v_n r^n$.

Remarque 1.1.2 *Soit Ω un ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$. On considère la famille des ensembles*

$$\{\Omega\cap B(x,r) : x\in\Omega, 0<r<d\} = \cup_{x\in\Omega}\{\Omega\cap B(x,r) : 0<r<d\}.$$

*Supposons que tout ensemble $\{\Omega\cap B(x,r) : 0<r<d\}$ rétricite bien, alors il existe des constantes strictement positives $\{\alpha_x\}_{x\in\Omega}$ telle que $|\Omega\cap B(x,r)| > \alpha_x\,|B(r,x)|$ pour tout $x\in\Omega, r\in]0,d[$. Si les α_x peut choisi de sort que $\alpha = \inf_{x\in\Omega}\alpha_x > 0$, alors nous dirons que l'ensemble Ω est **type-**α (c'est à dire il existe $\alpha>0$ tel que $|\Omega\cap B(x,r)| > \alpha v_n r^n$ pour tout $x\in\Omega, r\in]0,d[$).*

Définition 1.1.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et bornée, $1 \leq p \leq +\infty$ et $\lambda \geq 0$. Pour $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ on définit la norme suivante:*

$$\|f\|'_{p,\lambda} = \left(\sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r<d}} |\Omega \cap B(x,r)|^{-\frac{\lambda}{n}} \int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lemme 1.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et bornée, $1 \leq p \leq +\infty$ et $\lambda \geq 0$. La norme $\|f\|'_{p,\lambda}$est défini une norme sur l'espace de Morrey et si Ω de **type-**α alors les deux normes sont équivalentes.*

Preuve. On peut démontrer facilement que $\|f\|'_{p,\lambda}$ est une norme. Il suffit de montrer que $\|f\|_{p,\lambda}$ et $\|f\|'_{p,\lambda}$ sont équivalentes. On a

$$\begin{aligned} r^{-\lambda} &= r^{-\lambda} \left(\frac{v_n^{\frac{\lambda}{n}}}{v_n^{\frac{\lambda}{n}}} \right) = \frac{v_n^{\frac{\lambda}{n}}}{(v_n r^n)^{\frac{\lambda}{n}}} \\ &= \frac{v_n^{\frac{\lambda}{n}}}{|B(x;r)|^{\frac{\lambda}{n}}} \leq \frac{v_n^{\frac{\lambda}{n}}}{|\Omega \cap B(x,r)|^{\frac{\lambda}{n}}}. \end{aligned}$$

cAlors: $\|f\|_{p,\lambda} \leq v_n^{\frac{\lambda}{n}} \|f\|'_{p,\lambda}$. D'autre part, si Ω est de **type-**α alors il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $(x,r) \in \Omega \times]0,d[$ on a:

$$\alpha v_n r^n \leq |\Omega \cap B(x,r)| \Leftrightarrow \alpha v_n |\Omega \cap B(x,r)|^{-1} \leq r^{-n} \Leftrightarrow (\alpha v_n)^{\frac{\lambda}{n}} |\Omega \cap B(x,r)|^{-\frac{\lambda}{n}} \leq r^{-\lambda},$$

donc $\|f\|'_{p,\lambda} \leq (\alpha v_n)^{\frac{\lambda}{n}} \|f\|_{p,\lambda}$. ■

Théorème 1.1.2 *(la différentiation de Lebesgue) Pour toute fonction intégrable au sens de Lebesgue $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x;r)|} \int\limits_{B(x;r)} |f(t) - f(x)| \, dt = 0.$$

Pour la preuve voir [19]

Corollaire 1.1.1 *Supposons que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|E_r|} \int\limits_{E_r} |f(t) - f(x)| \, dt = 0$$

pour toute famille $\{E_r\}_r$ rétrésite bien à $x \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. Comme la famille $\{E_r\}_r$ rétrésite bien à $x \in \mathbb{R}^n$alors $E_r \subset B(r,x)$,$\forall r > 0$ et il existe $\alpha > 0$ indépendant de r, telle que $|E_r| > \alpha\, |B(r,x)|$

$$\frac{1}{|E_r|}\int\limits_{E_r} |f(t) - f(x)|\, d\lambda(t) \leq \frac{1}{\alpha\, |B(x;r)|}\int\limits_{B(x;r)} |f(t) - f(x)|\, dt$$

et donc, en passant à la limite et on utilise le théorème de 1.1.2, on trouve le résultat. ∎

Théorème 1.1.3

1. *Pour* $1 \leq p < +\infty$*, on a*

$$L^{p,0}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

2. *Pour* $1 \leq p < +\infty$*, on a l'inclusion*

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{p,n}(\Omega)$$

et

$$L^{p,n}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

si Ω *est de* ***type-***α*.*

3. *Pour* $1 \leq p < +\infty$*,* $\lambda > n$*, on a*

$$L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}.$$

4. *Pour* $1 \leq p < q$ *et* $\lambda,\ \mu \geq 0$ *on a*

$$L^{q,\mu}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(\Omega)$$

telle que: $\frac{(\lambda-n)}{p} \leq \frac{(\mu-n)}{q}$.

Preuve. On démontre la première propriété. Par la définition de la norme de $L^{p,\lambda}(\Omega)$ on a

$$\|f\|_{p,0} = \|f\|_p$$

On démontre la deuxième propriété. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$ alors pour tout $x \in \Omega, r \in \,]0,d[$ on a

$$\frac{1}{r^n}\int_{\Omega\cap B(x,r)} |f|^p \leq \frac{|\Omega \cap B(x,r)|}{r^n}\, \|f\|_\infty^p \leq \frac{|B(x,r)|}{r^n}\, \|f\|_\infty^p = v_n\, \|f\|_\infty^p\,,$$

alors on conclure que:

$$\|f\|_{p,n} \leq v_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\infty}.$$

D'autre part, supposons qu'il existe $f \in L^{p,n}(\Omega)\backslash L^{\infty}(\Omega)$ et Ω est de **type-**α, alors $f \in L^p(\Omega)$ en particulier $|f|^p \in L^1(\Omega)$ et par la corollaire 1.1.1

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|\Omega \cap B(x,r)|} \int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |f(t)|^p \, dt = |f(x)|^p \qquad \text{p.p sur } \Omega. \tag{1.1.2}$$

Comme aussi $\|f\|_{\infty} = \infty$, donc on prend $c > 0$ arbitrairement grand, on a l'ensemble $\{x \in \Omega\colon |f(x)| > c^{1/p}\}$ a mesure strictement positive et par (1.1.2) on peut trouver $x \in \Omega$, $r \in]0, d[$ telle que:

$$\frac{1}{|\Omega \cap B(x,r)|} \int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} |f(t)|^p \, dt > c$$

en concluons $\|f\|'_{p,n} = +\infty$, et comme Ω est de **type-**α alors $\|f\|_{p,n} = +\infty$ c'est une contradiction. Donc pour tout $f \in L^{p,n}(\Omega)$, $f \in L^{\infty}(\Omega)$.

On démontre la troisième propriété. Soit $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ avec $\lambda > n$. Pour $\lambda > n$ c'est à dire il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda = n + \varepsilon$. On sait que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(t)|^p \, dt &\leq \int_{\Omega\cap B(x,r)} \left||f(t)|^p - |f(x)|^p\right| dt + \int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(x)|^p \, dt \\
&\leq \int_{B(x,r)} \left||f(t)|^p - |f(x)|^p\right| dt + r^n v_n |f(x)|^p .
\end{aligned}$$

Par le théorème de Lebesgue

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(t)|^p \, dt \leq v_n |f(x)|^p \qquad \text{p.p.sur } \Omega$$

Pour cela on a $|f(x)| = 0$ p.p. sur Ω, si non on trouve que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^{n+\varepsilon}} \int_{\Omega\cap B(x,r)} |f|^p = +\infty.$$

C'est une contradiction car $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$.

On démontre la quatrième propriété. Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cap B(x,r)} |f|^p &\leq \left(\int_{\Omega\cap B(x,r)} 1\right)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{\Omega\cap B(x,r)} |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= (v_n r^n)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{\Omega\cap B(x,r)} |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= v_n^{1-\frac{p}{q}} r^{n(1-\frac{p}{q})+\mu\frac{p}{q}} \left(r^{-\mu} \int_{\Omega\cap B(x,r)} |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} .
\end{aligned}$$

Comme $\frac{(\lambda-n)}{p} \leq \frac{(\mu-n)}{q}$, alors $\lambda \leq n(1-\frac{p}{q})+\mu\frac{p}{q}$ et $(r/d)^{n(1-\frac{p}{q})+\mu\frac{p}{q}} \leq (r/d)^{\lambda}$. Ce qui implique

$$r^{n(1-\frac{p}{q})+\mu\frac{p}{q}} \leq r^{\lambda}d^{n(1-\frac{p}{q})+\mu\frac{p}{q}-\lambda}.$$

Donc

$$\left(r^{-\lambda}\int_{\Omega\cap B(x,r)}|f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(r^{-\mu}\int_{\Omega\cap B(x,r)}|f|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

d'où

$$\|f\|_{p,\lambda} \leq C\,\|f\|_{q,\mu}.$$

■

1.2 La fonction maximale dans l'espace de Morrey

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction maximale de Hardy-littlewood $\mathcal{M}f(x)$ de f est définie par:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|\,dy.$$

Soit p une constante dans $]1,+\infty[$ et soient g,h deux fonctions positives. Alors il existe une constante C telle que on a l'inégalité de *Feffermane-stein* suivant

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{M}g(y)^p h(y)dy \leq C\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^p\,\mathcal{M}h(y)dy \tag{1.2.1}$$

Pour la preuve de ce résultat voir [13].

Théorème 1.2.1 *Soit $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, et $0<\lambda<n$. Alors*

$$\|\mathcal{M}f\|_{p,\lambda} \leq c\,\|f\|_{p,\lambda}$$

où c est indépendant de f. Si $p=1$ on a

$$t\,|\{\mathcal{M}f>t\}\cap B(x,r)| \leq cr^{\lambda}\,\|f\|_{1,\lambda} \tag{1.2.2}$$

où c est indépendant de t,x,r et f

Preuve. Soit $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ et χ_{B_r} la fonction caractéristique de la boule $B_r = B(x_0, r)$. On pose $f = f_1 + f_2$ telle que $f_1(y) = f(y)\chi_{B_{2r}}$ et $f_2(y) = f(y)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}}$. En utilisant 1.2.1 on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r} (\mathcal{M}f(x))^p dx \\
\leq\ & c\left\{\int_{B_{2r}} |f(x)|^p \mathcal{M}\chi_{B_r}(x)\, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_{2^{k+1}r} \setminus B_{2^k r}} |f(x)|^p \mathcal{M}\chi_{B_r}(x)\, dx\right\} \\
\leq\ & c\left\{\int_{B_{2r}} |f(x)|^p \sup_{t>0} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)\cap B_r} dz dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_{2^{k+1}r} \setminus B_{2^k r}} |f(x)|^p \mathcal{M}\chi_{B_r} dx\right\} \\
\leq\ & c\left\{\int_{B_{2r}} |f(x)|^p \sup_{t>0} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} dz dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_{2^{k+1}r} \setminus B_{2^k r}} |f(x)|^p \mathcal{M}\chi_{B_r} dx\right\} \\
=\ & c\left\{\int_{B_{2r}} |f(x)|^p dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_{2^{k+1}r} \setminus B_{2^k r}} |f(x)|^p \mathcal{M}\chi_{B_r} dx\right\}.
\end{aligned}$$

Maintenant on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$

$$\mathcal{M}\chi_{B(x,r)}(y) \leq \frac{3^n\ r^n}{(|x-y|+r)^n}. \tag{1.2.3}$$

Pour démonter cette propriété on distingué deux cas.

1. $y \in B(x, 2r)$. Dons ce cas

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\chi_{B(x,r)}(y) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(x,r)\cap B(y,t)} dz \\
&= \frac{1}{(|x-y|+r)^n} \sup_{t>0} \frac{(|x-y|+r)^n}{|B(y,t)|} \int_{B(x,r)\cap B(y,t)} dz \\
&\leq \frac{1}{(|x-y|+r)^n} \sup_{t>0} \frac{(|x-y|+r)^n}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)} dz \\
&\leq \frac{1}{(|x-y|+r)^n} \sup_{t>0} \frac{(3r)^n}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)} dz. \\
&\leq \frac{3^n\ r^n}{(|x-y|+r)^n}.
\end{aligned}$$

2. $y \notin B(x, 2r)$. Dans ce cas

$$|x-y| \leq |x-z| + |y-z| \leq r + t, \quad z \in B(y,t) \cap B(x,r).$$

Ce qui implique $t \geq r$ et $|x-y| \leq 2t$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\chi_{B(x,r)}(y) &= \frac{1}{(|x-y|+r)^n} \sup_{t>0} \frac{(|x-y|+r)^n}{|B(y,t)|} \int\limits_{B(x,r)\cap B(y,t)} dz \\
&\leq \frac{1}{(|x-y|+r)^n} \sup_{t>0} \frac{(2t+r)^n}{|B(y,t)|} \int\limits_{B(x,r)} dz \\
&\leq \frac{1}{(|x-y|+r)^n} \sup_{t>0} \frac{(3t)^n |B(x,r)|}{|B(y,t)|} \\
&= \frac{3^n\ r^n}{(|x-y|+r)^n}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{B_r} (\mathcal{M}f)^p dx \leq c \left\{ \int_{B_{2r}} |f|^p \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_{2^{k+1}r} \setminus B_{2^k r}} |f(x)|^p \frac{3^n r^n}{(|x-x_0|+r)^n} dx \right\}$$

On sait que $|x-x_0|+r \geq r(2^k+1)$, si $x \notin B_{2^k r}$ et $k \geq 1$. Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} (\mathcal{M}f(x))^p dx &\leq c \left\{ \int_{B_{2r}} |f|^p \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{(2^k+1)r} \right)^n \int_{B_{2^{k+1}r}} |f(x)|^p \, dx \right\} \\
&\leq c \, \|f\|_{p,\lambda}^p \left\{ (2r)^\lambda + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nk}} \ (2^{k+1}r)^\lambda \right\} \\
&\leq c \, \|f\|_{p,\lambda}^p \left\{ (2r)^\lambda + (2r)^\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{(\lambda-n)k} \right\} \\
&\leq c r^\lambda \, \|f\|_{p,\lambda}^p ,
\end{aligned}$$

où on utilise le fait que $\lambda < n$.

Pour $p=1$ on utilise l'estimation faible (voir [14] p 151)

$$\int_{\{\mathcal{M}f>t\}} \Phi(x) \, dx \leq \frac{c}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \mathcal{M}\Phi(x) \, dx$$

On obtient

$$\begin{aligned}
t \, |\{\mathcal{M}f > t\} \cap B(x,r)| &= t \int_{\{\mathcal{M}f>t\}} \chi_{B_r}(y) \, dy \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, \mathcal{M}\chi_{B_r}(y) \, dy \\
&\leq c \int_{B_r} |f(y)| \, dy \\
&\leq c r^\lambda \, \|f\|_{1,\lambda} .
\end{aligned}$$

■

1.3 Application

Le but de cette partie est de étudier la continuité du potentiel de Riesz sur l'espace de Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.3.1 *Soit $0 < \alpha < n$ et f une fonction de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Le potentiel de Riesz de f est défini par*

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Théorème 1.3.1 *Soit $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$, alors*

$$\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \leq c \|f\|_{p,\lambda} \tag{1.3.1}$$

où

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$$

Pour $p = 1$ on a

$$t^q |\{I_\alpha f > t\} \cap B(x,r)| \leq c r^\lambda \|f\|^q_{1,\lambda} \tag{1.3.2}$$

Dans (1.3.1) et (1.3.2) la constante c est dépend seulement par n, p, λ, α.

Preuve. Soit $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$. On a

$$\begin{aligned} I_\alpha(f)(x) &= \int_{|x-y|\leq\varepsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= \qquad I_1 \qquad\qquad + \qquad\qquad I_2 \end{aligned}$$

Pour l'estimation I_1, en pris

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_{|x-y|\leq\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \qquad (1.3.3)\\
&\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{2^{-j-1}\varepsilon<|x-y|\leq 2^{-j}\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy\\
&\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{-j-1}\varepsilon)^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\leq 2^{-j}\varepsilon} |f(y)|\, dy\\
&= 2^{n-\alpha}\varepsilon^{\alpha} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^{-j\alpha}}{(2^{-j}\varepsilon)^{n}} \int_{|x-y|\leq 2^{-j}\varepsilon} |f(y)|\, dy\\
&= 2^{n-\alpha}\varepsilon^{\alpha} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^{-j\alpha}}{(2^{-j}\varepsilon)^{n}} \int_{B(x,2^{-j}\varepsilon)} |f(y)|\, dy\\
&\leq 2^{n-\alpha}\varepsilon^{\alpha} \mathcal{M}f(x) \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j\alpha}\\
&= c'\varepsilon^{\alpha}\mathcal{M}f(x).
\end{aligned}$$

Pour I_2, on pose $\sigma = \frac{n-\alpha p+\lambda}{2}$, et par l'inégalité de Hölder où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\sigma/p}}\ |x-y|^{\sigma/p+\alpha-n}\, dy\\
&\leq \left(\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{\sigma}} dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|x-y|>\varepsilon} |x-y|^{(\sigma/p+\alpha-n)p'}\, dy\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= I_3 I_4
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
I_3 &= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \int_{2^{j}\varepsilon<|x-y|\leq 2^{j+1}\varepsilon} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{\sigma}} dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{j}\varepsilon)^{\sigma}} \int_{|x-y|\leq 2^{j+1}\varepsilon} |f(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^{\sigma}}{(2^{j+1}\varepsilon)^{\sigma-\lambda}} \int_{|x-y|\leq 2^{j+1}\varepsilon} |f(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq c_1\varepsilon^{(\lambda-\sigma)/P} \|f\|_{p,\lambda},
\end{aligned}$$

où $c_1 = 2^{\lambda/p}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(\lambda-\sigma)}\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ car $0<\lambda<n-\alpha p$.

En calculant I_4, on obtient

$$\begin{aligned}
I_4 &= \left(\int_{|x-y|>\varepsilon} |x-y|^{\left(\frac{\sigma}{p}+\alpha-n\right)p'}\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} |z|^{\left(\frac{\sigma}{p}+\alpha-n\right)\grave{p}}\,dz\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= c_n\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} r^{\left(\frac{\sigma}{p}+\alpha-n\right)\grave{p}} r^{n-1} dr\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= c_n\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} r^{\left(\frac{\sigma}{p}+\alpha-n+\frac{n}{\grave{p}}\right)\grave{p}-1} dr\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= c_n\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} r^{\left(\frac{\sigma}{p}+\alpha-\frac{n}{p}\right)\grave{p}-1} dr\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= c_2\varepsilon^{\frac{(\sigma-n)}{p}+\alpha},
\end{aligned}$$

où on utilise le fait que $0<\lambda<n-\alpha p$ et $1<p<\frac{n}{\alpha}$. Alors

$$|I_2| \leq c''\varepsilon^{\frac{\lambda-n}{p+\alpha}} \|f\|_{p,\lambda}\,.$$

D'où

$$|I_\alpha(f)| \leq c'\varepsilon^{\alpha}\mathcal{M}f(x) + c''\varepsilon^{\frac{\lambda-n}{p+\alpha}} \|f\|_{p,\lambda}\,.$$

On pose $\varepsilon = \left(\frac{\mathcal{M}f}{\|f\|_{p,\lambda}}\right)^{\frac{p}{\lambda-n}}$, alors

$$|I_\alpha(f)| \leq c\,|\mathcal{M}f|^{\frac{n-\lambda-\alpha p}{n-\lambda}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{n-\lambda}}\,. \tag{1.3.4}$$

Ce qui donne

$$\left(r^{-\lambda}\int\limits_{B'(x,r)} |I_\alpha f(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(r^{-\lambda}\int\limits_{B'(x,r)} |\mathcal{M}f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{n-\lambda}}\,.$$

Finallement en prenant la supremum sur tout $(x,r)\in\Omega\times\,]0,d[$. D'après la théorème 1.2.1 on trouve que

$$\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \leq c\,\|\mathcal{M}f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{\alpha p}{n-\lambda}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{n-\lambda}} \leq c\,\|f\|_{p,\lambda}$$

Pour $p=1$ on a d'après 1.3.4

$$|I_\alpha(f)| \leq c\,|\mathcal{M}f|^{1-\frac{\alpha}{n-\lambda}} \|f\|_{1,\lambda}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\{\{I_\alpha f > t\} \cap B(x,r)\} &\subset \left\{\left\{c\,|\mathcal{M}f|^{1-\frac{\alpha}{n-\lambda}}\,\|f\|_{1,\lambda}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}} > t\right\} \cap B(x,r)\right\} \\
&= \left\{\left\{\mathcal{M}f > \left(\frac{t}{\|f\|_{1,\lambda}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}}\right)^{\frac{n-\lambda}{n-\lambda-\alpha}}\right\} \cap B(x,r)\right\}
\end{aligned}$$

On pose $\lambda = \left(\frac{t}{\|f\|_{1,\lambda}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}}\right)^{\frac{n-\lambda}{n-\lambda-\alpha}}$. Donc

$$|\{\{I_\alpha f > t\} \cap B(x,r)\}| \leq |\{\{\mathcal{M}f > \lambda\} \cap B(x,r)\}|$$

D'après 1.2.2

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\lambda} c r^\lambda \|f\|_{1,\lambda} \\
&= c r^\lambda t^{-\frac{n-\lambda}{n-\lambda-\alpha}} \|f\|_{1,\lambda}^{\frac{\alpha}{n-\lambda-\alpha}} \|f\|_{1,\lambda} \\
&= c r^\lambda \|f\|_{1,\lambda}^q
\end{aligned}$$

D'où

$$t^q\,|\{I_\alpha f > t\} \cap B(x,r)| \leq c r^\lambda \|f\|_{1,\lambda}^q$$

■

Chapitre 2

Espaces de Morrey à exposant variable

Dans ce chapitre nous allons donner quelques rappels sur les espaces de Lebesgue et l'espace de Morrey à exposant variable et quelques résultats qu'on utilisera par la suite, pour prouver la continuité de la fonction maximal de Hardy Littlwood dans l'espace de Morrey à exposant variable sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sous contraintes sur $p(x)$ et $\lambda(x)$.

2.1 Préliminaires

Définition 2.1.1 *Soit $p(x)$ une fonction mesurable sur Ω, sa valeurs dans $[1, +\infty[$ on suppose que*

$$1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < +\infty \tag{2.1.1}$$

où nous avons:

$$p_- := \inf_{y \in \Omega} \operatorname{ess} p(y) \qquad \textit{et} \qquad p^+ := \sup_{y \in \Omega} ess p(y)$$

On note par $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables f telle que

$$I_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} \, dx < +\infty$$

Minus de la norme

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \eta > 0 : I_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\eta} \right) \leq 1 \right\}$$

qui est un espace quasi Banach

Remarque 2.1.1 *Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ alors*

$$I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq 1 \tag{2.1.2}$$

Preuve. Pour $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ en effet pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon \in \left\{\eta > 0 : I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \leq 1\right\}$ telle que

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \eta_\varepsilon < \|f\|_{p(.)} + \varepsilon$$

Donc

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)} + \varepsilon}\right)^{p(x)} dx < \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\eta_\varepsilon}\right)^{p(x)} dx = I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta_\varepsilon}\right) \leq 1$$

Alors

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)} + \varepsilon}\right)^{p(x)} dx \leq 1$$

■

Proposition 2.1.1 *Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ alors*

$$I_{p(\cdot)}(f) = 1 \Leftrightarrow \|f\|_{p(\cdot)} = 1 \tag{2.1.3}$$

Preuve. $\Rightarrow$)Si $I_{p(.)}(f) = 1$, alors par la définition de la norme

$$1 = I_{p(\cdot)}(f) = I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{1}\right) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$$

D'autre part supposons que $\|f\|_{p(\cdot)} < 1$ alors par la convexité de $I_{p(\cdot)}(\cdot)$ et (2.1.2)

$$\begin{aligned} I_{p(\cdot)}(f) &= I_{p(\cdot)}\left(\|f\|_{p(\cdot)} \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} + \left(1 - \|f\|_{p(\cdot)}\right) 0\right) \\ &\leq \|f\|_{p(\cdot)} I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

C'est une contradiction.

$\Leftarrow$)Si $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$ on peut écrire

$$I_{p(\cdot)}(f) = I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(.)}}\right) \leq 1$$

On suppose que $I_{p(\cdot)}(f) < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ telle que

$$I_{p(\cdot)}(f) + \varepsilon \leq 1 \tag{2.1.4}$$

Comme $I_{p(\cdot)}(\cdot)$ convexe sur un ouvert Ω, il est donc continue, donc $\lim_{\lambda \to 1^+} I_{p(\cdot)}(\lambda f) = I_{p(\cdot)}(f)$, par conséquent0

$$\exists \delta > 0; \forall \lambda : |\lambda - 1| < \delta \Rightarrow \left| I_{p(.)}(\lambda f) - I_{p(.)}(f) \right| < \varepsilon$$

En concluant pour $1 < \lambda < 1 + \delta$, et d'après 2.1.4

$$I_{p(\cdot)}(\lambda f) < I_{p(\cdot)}(f) + \varepsilon \leq 1$$

Puisque $I_{p(\cdot)}(\lambda f) \leq 1$ alors $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \frac{1}{\lambda} c1$ c'est une contradiction. ■

Remarque 2.1.2 *Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, les inégalités suivantes sont satisfaites:*

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{P+} \leq I_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{P-} \qquad si \ \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1 \tag{2.1.5}$$

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{P-} \leq I_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{P+} \qquad si \, \|f\|_{p(\cdot)} \geq 1 \tag{2.1.6}$$

d'où on trouve

$$c_1 \leq \|f\|_{p(.)} \leq c_2 \quad \Rightarrow \quad c_3 \leq I_{p(.)}(f) \leq c_4$$

$$c_1' \leq I_{p(.)}(f) \leq c_2' \quad \Rightarrow \quad c_3' \leq \|f\|_{p(.)} \leq c_4'$$

Théorème 2.1.1 *(Inégalité de Hölder) Soient $p(\cdot), p'(\cdot)$ deux fonctions mesurables sur un ensemble Ω, ses valeurs dans $[1, +\infty[$ supposons que $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1$, alors*

$$\int_\Omega |f(x)| \, |g(x)| \, dx \leq \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-} \right) \|f\|_{p(\cdot)} \, \|g\|_{p'(\cdot)} \tag{2.1.7}$$

Preuve. Supposons que $\|f\|_{p(\cdot)} \neq 0, \|g\|_{p'(\cdot)} \neq 0$ et on pose $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}}, p = p(\cdot)$ et $p' = p'(\cdot)$ puis en utilisant l'inégalité suivante

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

On intègre sur Ω et on utilise la relation dans (2.1.3) on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\|f\|_p\,\|g\|_{\grave{p}}}dx &\leq \int_\Omega \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p dx + \int_\Omega \frac{1}{p'}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}}\right)^{p'} dx \\ &\leq \frac{1}{p_-}I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_p}\right) + \frac{1}{p'_-}I_{p'(\cdot)}\left(\frac{g}{\|g\|_{\grave{p}}}\right) \\ &= \frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-}\end{aligned}$$

Donc

$$\int_\Omega |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-}\right)\|f\|_{p(\cdot)}\,\|g\|_{p'(\cdot)}$$

■

Théorème 2.1.2 *Soient $p(\cdot), q(\cdot)$ deux fonctions mesurables sur un ensemble Ω bornée, supposons que $p(x) \leq q(x)$ $\forall x \in \Omega$, alors*

$$L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega) \tag{2.1.8}$$

Définition 2.1.2 *Soit $p \in C(\mathbb{R}^n)$, on dit que p est Log$-$ Höldérienne continue noté $p \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$, s'il existe $c_{\log} > 0$ telle que*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_{\log}}{-\log(|x-y|)} \tag{2.1.9}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, tel que . $|x-y| \leq \frac{1}{2}$

On dit que p est globalement Log$-$ Höldérienne continue notée $p \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$, si elle est Log$-$ Höldérienne continue et il existe $p_\infty \in \mathbb{R}$, tel que

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_{\log}}{\log(e+|x|)} \tag{2.1.10}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.1.3 *Soit Ω un ensemble et soit $p(\cdot)$ satisfait les conditions* (2.1.1), (2.1.9) *et $\beta(\cdot)$ satisfait*

$$\sup_{x\in\Omega} \beta(x) < +\infty \qquad \inf_{x\in\Omega} \beta(x)p(x) > n$$

Alors il existe $c > 0$ dépend par $\sup_{x\in\Omega}\beta(x)$, $\inf_{x\in\Omega}[\beta(x)p(x) - n]$ et ne dépend pas en x et r telle que

$$\left\|\frac{\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,r)}(\cdot)}{|x-\cdot|^{\beta(x)}}\right\|_{p(.)} \leq c r^{\frac{n}{p(x)}-\beta(x)}$$

2.2 Définition et propriétés

Définition 2.2.1 *Soient $\lambda(\cdot)$, $p(\cdot)$ deux fonctions mesurables sur un ensemble Ω, ses valeurs dans $[0,n]$, l'espace de Morrey $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ est l'ensemble de toues les fonctions f sur Ω telle que*

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) = \sup_{x\in\Omega, r>0} r^{-\lambda(x)} \int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(y)|^{p(y)}\, dy < +\infty.$$

Minus de la norme

$$\|f\|_1 = \inf\left\{\eta > 0 : I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \leq 1\right\}$$

et

$$\|f\|_2 = \sup_{x\in\Omega, r>0} \left\| r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} f\chi_{\Omega\cap B(x,r)} \right\|_{p(.)}$$

Lemme 2.2.1 *Soit $f \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$, les inégalités suivantes sont satisfaites*

$$\|f\|_i^{P+} \leq I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) \leq \|f\|_i^{P-} \qquad si \quad \|f\|_i \leq 1 \tag{2.2.1}$$

$$\|f\|_i^{P-} \leq I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) \leq \|f\|_i^{P+} \qquad si \quad \|f\|_i \geq 1 \tag{2.2.2}$$

Preuve. On pose

$$F(x,r;\eta) = \frac{1}{r^{\lambda(.)}} \int_{\Omega\cap B(x,r)} \left|\frac{f(y)}{\eta}\right|^{p(y)} dy \tag{2.2.3}$$

Alors pour touts $(x,r) \in \Omega \cup [0,d[$ la fonction $F(x,r;\eta)$ est décroissante par rapport à η, on a

$$\sup_{x\in\Omega, r>0} F(x,r;\eta) = I_{p(.),\lambda(.)}(f)$$

Et on a par la proposition 2.1.3

$$\sup_{x\in\Omega, r>0} F(x,r;\|\cdot\|_1) = 1 \tag{2.2.4}$$

Comme $p_- \leq p(x) \leq p_+$ et $\|f\|_1 \leq 1$ ($\|f\|_1 \geq 1$) alors

$$F(x,r;1) = \frac{1}{r^{\lambda(\cdot)}} \int_{\Omega\cap B(x,r)} \|f\|_1^{p(y)} \left|\frac{f(y)}{\|f\|_1}\right|^{p(y)} dy \leq \|f\|_1^{p-} F(x,r;\|\cdot\|_1) \;\; (\|f\|_1^{p+} F(x,r;\|\cdot\|_1))$$

et

$$F(x,r;1) = \frac{1}{r^{\lambda(\cdot)}} \int_{\Omega\cap B(x,r)} \|f\|_1^{p(y)} \left|\frac{f(y)}{\|f\|_1}\right|^{p(y)} dy \geq \|f\|_1^{p+} F(x,r;\|\cdot\|_1) \;\; (\|f\|_1^{p-} F(x,r;\|\cdot\|_1))$$

En prenant le supremum sur $(x,r) \in \Omega \cup [0,d[$ on obtient $(2.2.1)$, $(2.2.2)$.

Pour $i=2$ le cas de la norme

$$\|f\|_2 = \sup_{x\in\Omega, r>0} \|g_{x,r}\|_{p(\cdot)},$$

où $g_{x,r} = r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} f\chi_{\Omega\cap B(x,r)}(\cdot)$, on utilise les inégalités $(2.1.5)$, $(2.1.6)$ de la norme $L^{p(\cdot)}$ on trouve

$$\|g_{x,r}\|_{p(\cdot)}^{P+} \leq I_{p(.)}(g_{x,r}) \leq \|g_{x,r}\|_{p(\cdot)}^{P-} \qquad \text{si } \|g_{x,r}\|_{p(\cdot)} \leq 1$$

$$\|g_{x,r}\|_{p(\cdot)}^{P-} \leq I_{p(.)}(g_{x,r}) \leq \|g_{x,r}\|_{p(\cdot)}^{P+} \qquad \text{si } \|g_{x,r}\|_{p(\cdot)} \geq 1$$

En prenant le supremum sur $(x,r) \in \Omega \cup [0,d[$ on obtient $(2.2.1)$, $(2.2.2)$. ■

Lemme 2.2.2 *Soit f une fonction dans $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ alors*

$$\|f\|_1 = \|f\|_2 \tag{2.2.5}$$

Preuve. On pose

$$\|f\|_2 = \sup_{x\in\Omega, r>0} \left\{\mu_{x,r} > 0 : F(x,r;\mu_{x,r}) = 1\right\}$$

où $F(x,r;\eta)$ est la fonction dans (2.2.3), on a comme $F(x,r;\|f\|_1) \leq 1$ de (2.2.4) et par la monotonicité de $F(x,r;\cdot)$

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_1 \tag{2.2.6}$$

De $(2.1.5)$, $(2.2.2)$ on a

$$\|f\|_1 \leq \begin{cases} \|f\|_2^{\frac{p_-}{p_+}} & \|f\|_i \leq 1 \ i=1,2 \\ \|f\|_2 & \|f\|_1 \geq 1, \|f\|_2 \leq 1 \\ \|f\|_2^{\frac{p_+}{p_-}} & \|f\|_i \geq 1 \ i=1,2 \end{cases}$$

Et comme $\left\|\frac{f}{\|f\|_2}\right\|_2 = 1 \leq 1$ et $\left\|\frac{f}{\|f\|_2}\right\|_1 = \frac{\|f\|_1}{\|f\|_2} \geq 1$(d'après (2.2.6)), alors $\left\|\frac{f}{\|f\|_2}\right\|_1 \leq \left\|\frac{f}{\|f\|_2}\right\|_2 = 1$, d'où

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \tag{2.2.7}$$

De $(2.2.6)$ et $(2.2.7)$ on obtient $(2.2.5)$. ■

Lemme 2.2.3 *Soit Ω un ensemble ouvert et $\lambda(.)$ satisfait la condition logarithmique suivant*

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq \frac{A_\lambda}{-\log(|x-y|)}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, tel que . $|x-y| \leq \frac{1}{2}$, alors

$$\frac{1}{c} r^{-\lambda(y)} \leq r^{-\lambda(x)} \leq c r^{-\lambda(y)} \tag{2.2.8}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, tel que . $|x-y| \leq r$, avec la constant $c = e^{A_\lambda}$ ne dépend pas par x, y et r.

Preuve. Il est facile de voir que (2.2.8) est équivalente à

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \ln \frac{1}{r} \leq c_1 = \ln c = A_\lambda$$

En effet, de (2.2.8) on a

$$\frac{1}{c} \lambda(y) \ln \frac{1}{r} \leq \lambda(x) \ln \frac{1}{r} \leq c \lambda(y) \ln \frac{1}{r},$$

alors

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda(x) \ln \frac{1}{r} \leq \ln c + \lambda(y) \ln \frac{1}{r} \\ \text{et} \\ \lambda(x) \ln \frac{1}{r} \geq \ln \frac{1}{c} + \lambda(y) \ln \frac{1}{r} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (\lambda(x) - \lambda(y)) \leq \frac{\ln c}{\ln \frac{1}{r}} \\ \text{et} \\ (\lambda(x) - \lambda(y)) \geq -\frac{\ln c}{\ln \frac{1}{r}} \end{array}\right.$$

Et comme $|x-y| \leq r$ alors $\ln \frac{1}{r} \leq \ln \frac{1}{|x-y|}$ ce qui implique $|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq \frac{c_1}{\ln \frac{1}{|x-y|}} \leq \frac{c_1}{\ln \frac{1}{r}}$. ■

Lemme 2.2.4 *Si Ω borné et $\lambda(.) \in C^{\log}(\Omega)$, alors la norme suivante est une norme équivalente dans $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$*

$$\|f\|_3 = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \left\| r^{-\frac{\lambda(.)}{p(\cdot)}} f \chi_{\Omega \cap B(x,r)} \right\|_{p(\cdot)} \tag{2.2.9}$$

Preuve. On a $\|f\|_2 = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \left\| r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} f \chi_{\Omega \cap B(x,r)} \right\|_{p(\cdot)}$ est une norme dans $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$, et d'aprés (2.2.8)

$$\frac{1}{c} r^{-\frac{\lambda(y)}{p(y)}} \leq r^{-\frac{\lambda(x)}{p(y)}} \leq c r^{-\frac{\lambda(y)}{p(y)}} \tag{2.2.10}$$

d'où

$$\frac{1}{c} \|f\|_3 \leq \|f\|_2 \leq c \|f\|_3$$

■

Lemme 2.2.5 *Soit Ω un ensemble ouvert borné dans un espace métrique mesuré (X, d, μ) où la mesure satisfait la condition de* ahlford *infèrieur $\mu(B(x,r)) \geq Cr^{\delta}, \delta > 0$, et soit $p(.) \in C^{\log}(\Omega)$, alors*

$$\left\|\chi_{\Omega\cap B(x,r)}\right\|_{p(.)} \leq c\,|B(x,r)|^{\frac{1}{p(.)}} \tag{2.2.11}$$

Preuve. Soit $x \in \Omega$ et $0 < r < d$, comme $p(.) \in C^{\log}(\Omega)$, et μ satisfaite la condition de *ahlford* infèrieur, on trouve:

$$\frac{1}{c}\,|B(x,r)| \leq |B(x,r)|^{\frac{p(y)}{p(x)}} \leq c\,|B(x,r)|$$

Pour tout $y \in \Omega \cap B(x,r)$ où $c \geq 1$ qui ne dépend pas par x, y et r, par conséquent pour $c_1 = c^{\frac{1}{p_-}}$ on a

$$\int_{\Omega\cap B(x,r)} \frac{d(y)}{c_1^{p(y)}\,|B(x,r)|^{\frac{p(y)}{p(x)}}} \leq \int_{\Omega\cap B(x,r)} \frac{d(y)}{|B(x,r)|} \leq \int_{B(x,r)} \frac{d(y)}{|B(x,r)|} = 1$$

Alors

$$\left\|\chi_{\Omega\cap B(x,r)}\right\|_{p(.)} = \inf\left\{\eta > 0 : \int_{\Omega\cap B(x,r)} \frac{d(y)}{\eta^{p(y)}} \leq 1\right\} \leq c_1\,|B(x,r)|^{\frac{1}{p(x)}}$$

■

2.3 Inclusions

Lemme 2.3.1 *Soit Ω un ensemble borné, soient $\lambda(\cdot), p(\cdot)$ deux fonctions mesurables telle que $0 \leq \lambda(x) \leq n$ et $0 \leq \mu(x) \leq n$, si $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ sont $Log-H\ddot{o}lderinne$ continue $p(x) \leq q(x)$ et*

$$\frac{n-\lambda(x)}{p(x)} \leq \frac{n-\mu(x)}{q(x)}$$

alors

$$L^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$$

Preuve. Supposons que $\|f\|_{q(\cdot),\mu(\cdot)} \leq 1$, ceci est équivalente à $I_{q(\cdot),\mu(\cdot)}(f) \leq 1$ comme dans (2.2.1), nous devons montrer que $I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) \leq c$ pour $c > 0$ pas de fonction de f

Soit $x \in \Omega$ et $r \in (0, d)$, on applique l'inégalité de Hölder avec $p_1(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ on obtient

$$\begin{aligned} r^{-\lambda(x)} \int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(y)|^{p(y)}\,dy &= r^{-\lambda(x)} \int_{\Omega} |f(y)|^{p(y)}\,\chi_{\Omega\cap B(x,r)} dy \\ &\leq r^{-\lambda(x)} \left(\frac{1}{p_1^-} + \frac{1}{p_1'^-}\right) \left\|f^{p(\cdot)}\chi_{\Omega\cap B(x,r)}\right\|_{p_1(\cdot)} \left\|\chi_{\Omega\cap B(x,r)}\right\|_{p_1'(\cdot)} \end{aligned}$$

$$\leq 2r^{-\lambda(x)} \left\| f^{p(\cdot)} \chi_{\Omega\cap B(x,r)} \right\|_{p_1(\cdot)} \left\| \chi_{\Omega\cap B(x,r)} \right\|_{p_1'(\cdot)} \tag{2.3.1}$$

Par (2.2.11) on a

$$\left\| \chi_{\Omega\cap B(x,r)} \right\|_{p_1'(\cdot)} \leq c r^{n\left(1-\frac{p(x)}{q(x)}\right)} \tag{2.3.2}$$

D'autre parte on a

$$\left\| f^{p(\cdot)} \chi_{\Omega\cap B(x,r)} \right\|_{p_1(\cdot)} = \inf \left\{ \eta > 0 : \int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(y)|^{q(y)} \eta^{-\frac{q(y)}{p(y)}} d(y) \leq 1 \right\} \leq A^{p_+} r^{\mu(x)\frac{p(x)}{q(x)}} \tag{2.3.3}$$

où A est la constante de l'inégalité

$$\frac{1}{A} r^{\frac{\mu(x)}{q(y)}} \leq r^{\frac{\mu(x)}{q(x)}\frac{p(x)}{p(y)}} \leq A r^{\frac{\mu(x)}{q(y)}} \qquad \frac{p(\cdot)}{q(\cdot)} \in C^{\log}(\Omega) \tag{2.3.4}$$

telle que $A \geq 1$ ne dépend pas de x, y et r. En effet

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega\cap B(x,r)} \left(|f(y)| \left[A^{P_+} r^{\mu(x)\frac{p(x)}{q(x)}} \right]^{-\frac{1}{p(y)}} \right)^{q(y)} dy \\ & \leq \int_{\Omega\cap B(x,r)} \left(A^{-1} |f(y)| \, r^{-\frac{\mu(x)}{q(x)}\frac{p(x)}{p(y)}} \right)^{q(y)} dy \qquad -\frac{p_+}{p(y)} \leq -1 \\ & \leq r^{-\mu(x)} \int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(y)|^{q(y)} dy \leq 1 \end{aligned}$$

Ce qui prouve (2.3.3), on utilise (2.3.2) et (2.3.3) dans (2.3.1) on obtient

$$\int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(y)|^{p(y)} dy \leq c r^{n\left(1-\frac{p(x)}{q(x)}\right)+\mu(x)\frac{p(x)}{q(x)}} \leq c r^{\lambda(x)} \tag{2.3.5}$$

En effet, comme $\frac{n-\lambda(x)}{p(x)} \leq \frac{n-\mu(x)}{q(x)}$, alors

$$\lambda(x) \leq n\left(1 - \frac{p(x)}{q(x)}\right) + \mu(x)\frac{p(x)}{q(x)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{d}\right)^{n\left(1-\frac{p(x)}{q(x)}\right)+\mu(x)\frac{p(x)}{q(x)}} \leq \left(\frac{r}{d}\right)^{\lambda(x)}$$

$$\Rightarrow r^{n\left(1-\frac{p(x)}{q(x)}\right)+\mu(x)\frac{p(x)}{q(x)}} \leq r^{\lambda(x)} d^{n\left(1-\frac{p(x)}{q(x)}\right)+\mu(x)\frac{p(x)}{q(x)}} \leq c r^{\lambda(x)} w$$

Donc $I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) \leq c$ par conséquent $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq c$. ■

Chapitre 3

La fonction maximale et le potentiel de Riesz sur l'espace de Morrey à exposant variable

Nous réprouvons la continuité mentionné ci-dessus de l'opérateur maximal dans un ouvert Ω bornée dans $\mathbb{R}^n$ afin d'introduire dans un cadre simple des techniques qui sont ensuite appliquées dans les espaces de Morrey à exposants variables.

L'idée est simplement d'utiliser quelques théorèmes et lemmes qui ont été introduits dans le chapitre précédent.

3.1 Continuité de la fonction maximale sur l'espace de Morrey à exposant variable

Pour démontrer la continuité de la fonction maximale on utilise le lemme suivant.

Lemme 3.1.1 *Soit Ω un ensemble borné et supposons que $p(\cdot)$ satisfait les conditions* (2.1.1) *et* (2.1.9), *alors il existe $c > 0$ telle que, pour touts $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

$$[\mathcal{M}f(x)]^{\frac{p(x)}{p_-}} \leq c\left[\mathcal{M}\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(.)}{p_-}}\right)(x)+1\right] \tag{3.1.1}$$

pour touts $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, où $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$.

Preuve. On pose $q(x)=\frac{p(x)}{p_-}$, alors pour tout $x\in\Omega$, $q(x)\leq p(x)$ et $q_-\leq p(x)$, Comme $\|f\|_{p(\cdot)}\leq 1$.alors d'après (2.1.5) $I_{p(\cdot)}(f)\leq 1$, ainsi

$$\int_{B(x,r)}|f(y)|^{p(y)}\,dy\leq\int_{\Omega}|f(y)|^{p(y)}\,dy\leq 1$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_-}\,dy &\leq \int_{B(x,r)\cap\{|f|\geq 1\}}|f(y)|^{q_-}\,dy+\int_{B(x,r)\cap\{|f|<1\}}|f(y)|^{q_-}\,dy\\ &\leq \int_{B(x,r)}|f(y)|^{q(y)}\,dy+|B(x,r)|\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy\right)^{q(x)}\\ \leq&\left(|B(x,r)|^{-\frac{1}{q_-}}\left(\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_-}\,dy\right)^{\frac{1}{q_-}}\right)^{q(x)}\\ =&\ |B(x,r)|^{-\frac{q(x)}{q_-}}\left(\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_-}\,dy\right)^{\frac{q(x)}{q_-}}\end{aligned}$$

Comme $\|f\|_{p(\cdot)}\leq 1$ et $q_-\leq p(.)$ alors d'après (2.1.8) $L^{p(\cdot)}(\Omega)\hookrightarrow L^{q_-}(\Omega)$ ce qui donne $\|f\|_{q_-}\leq 1$

$$\begin{aligned}&|B(x,r)|^{-\frac{q(x)}{q_-}}\left(\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_-}\,dy\right)^{\frac{q(x)}{q_-}}\\ \leq&\ |B(x,r)|^{-\frac{q(x)}{q_-}}\left(\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_-}\,dy\right)^{\frac{q_-}{q_-}}\\ =&\ |B(x,r)|^{-\frac{q(x)}{q_-}}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_-}\,dy\\ \leq&\ |B(x,r)|^{\frac{q_--q(x)}{q_-}}\left[\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q(y)}\,dy+1\right]\\ \leq&\ c\left[\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q(y)}\,dy+1\right]\\ \leq&\ c\left[\mathcal{M}\left(|f(\cdot)|^{q(\cdot)}\right)(x)+1\right]\end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.1 *Soit Ω un ensemble ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$, soient $p(\cdot), \lambda(\cdot)$ deux fonction mesurable telle que $p(\cdot)$ satisfait les conditions* (2.1.1) *et* (2.1.9),

$$0 \leq \lambda(x) \leq \lambda_+ < n \qquad (x \in \Omega,\ \lambda_+ = \sup_{x\in\Omega} ess\ \lambda(x))$$

Alors l'opérateur maximal $\mathcal{M}$ est borné dans l'espace $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$.

Preuve. On montre que $I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathcal{M}f) \leq C$ pour tout $f \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ $\left(\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq c\right)$ où $C = C(c)$ ne dépend pas de f, on a

$$\int_{\Omega\cap B(x,r)} \mathcal{M}f(y)^{p(y)}dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M}f(y)^{\frac{p(y)}{p_-}}\right)^{p_-} \chi_{\Omega\cap B(x,r)}(y)dy$$

Comme Ω borné, alors d'aprés (1.1.1) on a$\|f\|_{p,\lambda} \geq c\,\|f\|_p$ avec c dépend par d et λ_+, alors l'estimation (3.1.1) est applicable, Ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap B(x,r)} \mathcal{M}f(y)^{p(y)}dy &\leq c\int_{\Omega} \left(\mathcal{M}\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{p_-}}\right)(y)+1\right)^{p_-} \chi_{\Omega\cap B(x,r)}(y)dy \\ &\leq c\left(\int_{\Omega} \mathcal{M}\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{p_-}}\right)^{p_-}(y)\,\chi_{\Omega\cap B(x,r)}(y)dy + \int_{\Omega}\chi_{\Omega\cap B(x,r)}(y)dy\right)\end{aligned}$$

D'après l'inégalité dans (1.2.1) on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}f(y)|^{p(y)}\,dy \leq c\left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p(y)}\,\mathcal{M}\chi_{\Omega\cap B(x,r)}(y)dy + r^n\right),$$

en utilise l'estimation (1.2.3) on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\cap B(x,r)} (\mathcal{M}f)(y)^{p(y)}dy \\ \leq\ & c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p(y)}\,\mathcal{M}\chi_{\Omega\cap B(x,r)}(y)dy + r^n\right) \\ \leq\ & c\left\{\int_{\Omega\cap B(x,2r)} |f(y)|^{p(y)}\,dy + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)\setminus\Omega\cap B(x,2^k r)} |f(y)|^{p(y)}\,\mathcal{M}\chi_{\Omega\cap B(x,r)}(y)dy + r^n\right\} \\ \leq\ & c\left\{\int_{\Omega\cap B(x,2r)} |f\,(y)|^{p}\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)\setminus\Omega\cap B(x,2^k r)} |f(y)|^{p(y)}\,\frac{3^n r^n}{(|x-y|+r)^n}dx + r^n\right\} \\ \leq\ & c\,\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left\{(2r)^{\lambda(x)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2^{k+1}r)^{\lambda(x)}3^n r^n}{(2^k r+r)^n} + r^n\right\} \\ \leq\ & c\,\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left\{(2r)^{\lambda(x)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2^{k+1}r)^{\lambda(x)}}{(2^k+1)^n} + r^n\right\} \\ \leq\ & c\left\{r^{\lambda(x)} + r^n\right\}.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\Omega\cap B(x,r)} (\mathcal{M}f)(y)^{p(y)}dy \leq cr^{\lambda(x)}, \tag{3.1.2}$$

Ce qui preuve l'estimation $I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathcal{M}f) \leq c$. ■

3.2 Continuité du potentiel de Riesz sur l'espace de Morrey à exposant variable

Définition 3.2.1 *Soit* $0 < \alpha(\cdot) < n$ *et une fonction* $f \in L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$, *l'opérateur potentiel de riesz de* f *est défini par*

$$I^{\alpha(\cdot)}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}dy.$$

Théorème 3.2.1 *Soit* Ω *un ensemble bornée, supposons que* $p(\cdot)$ *satisfait les conditions* $(2.1.1)$, $(2.1.9)$ *et* $\alpha(\cdot)$ *aussi satisfait la condition logarithmique* $(2.1.9)$, *avec*

$$\inf_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0 \qquad , \qquad \sup_{x\in\Omega} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n. \tag{3.2.1}$$

L'opérateur $I^{\alpha(\cdot)}$ *est borné de* $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ *à* $L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$, *où*

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n-\lambda(x)}.$$

Preuve. Supposons que $\|f\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \leq c$, toujours on a

$$I^{\alpha(\cdot)}f(x) = \left(\int_{B(x,r)} + \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(x,r)}\right) f(y)\,|x-y|^{\alpha(x)-n}\,dy = F(x,r) + G(x,r).$$

On a l'estimation dans (1.3.3) dans le cas α constant est aussi valable pour α un variable, sous la condition $\inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$

$$|F(x,r)| \leq cr^{\alpha(x)}\mathcal{M}f(x). \tag{3.2.2}$$

D'autre part, on a

$$|G(x,r)| \leq c\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)\backslash\Omega\cap B(x,2^k r)} |f(y)|\left(2^k r\right)^{-\frac{\lambda(x)}{p(y)}}|x-y|^{\alpha(x)-n+\frac{\lambda(x)}{p(y)}}\,dy.$$

Comme Ω bornée et $p(\cdot)$ satisfait la condition logarithmique et de (2.2.8)

$$|G(x,r)| \leq c\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)\backslash\Omega\cap B(x,2^k r)}|f(y)|\left(2^k r\right)^{-\frac{\lambda(x)}{p(y)}}|x-y|^{\alpha(x)-n+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}dy,$$

on applique l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|G(x,r)| \leq c\sum_{k=1}^{+\infty}\left\||x-\cdot|^{\alpha(x)-n+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}\right\|_{p'(\cdot),\mathbb{R}^n\backslash\Omega\cap B(x,2^k r)}\left\|\left(2^k r\right)^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}}f\right\|_{p(\cdot),\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)}.$$

Le facteur $\left\|\left(2^k r\right)^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}}f\right\|_{p(\cdot),\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)}$ est borné, en effet d'aprés la définition de la norme $L^{p(\cdot)}$

$$\begin{aligned}
I_{p(\cdot)}\left(\left(2^k r\right)^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}}f\chi_{\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)}\right) &= \int_\Omega\left(2^k r\right)^{-\lambda(x)}|f(y)|^{p(y)}\chi_{\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)}dy\\
&\leq 2^{\lambda(x)}\left(2^{k+1}r\right)^{-\lambda(x)}\int_{\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)}|f(y)|^{p(y)}dy\\
&\leq 2^{\lambda_+}I_{p(\cdot)}(f)\leq c,
\end{aligned}$$

donc d'après le remarque (2.1.2)

$$\left\|\left(2^k r\right)^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}}f\right\|_{p(\cdot),\Omega\cap B(x,2^{k+1}r)}\leq C.$$

Et par le théorème (2.1.3) telle que $\beta(x)=n-\alpha(x)-\frac{\lambda(x)}{p(x)}$ on a

$$\begin{aligned}
\left\||x-\cdot|^{\alpha(x)-n+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}\right\|_{p'(\cdot),\mathbb{R}^n\backslash\Omega\cap B(x,2^k r)} &= \left\|\frac{\chi_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega\cap B(x,2^k r)}}{|x-\cdot|^{\alpha(x)-n+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}}\right\|_{p'(\cdot)}\\
&\leq c\left(2^k r\right)^{\frac{n}{\bar{p}(\cdot)}-n+\alpha(x)+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}=c\left(2^k r\right)^{\alpha(x)-\frac{n-\lambda(x)}{p(x)}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$|G(x,r)|\leq c_1 r^{\alpha(x)-\frac{n-\lambda(x)}{p(x)}}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(2^k\right)^{\alpha(x)-\frac{n-\lambda(x)}{p(x)}}\leq c_2 r^{\alpha(x)-\frac{n-\lambda(x)}{p(x)}}, \tag{3.2.3}$$

où la série est définir par $c_2=c_1\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-ak}$, $a=\frac{1}{p_+}\inf\left[n-\lambda(x)-\alpha(x)p(x)\right]$ est convergent, ainsi de (3.2.2), (3.2.3) on a

$$\left|I^{\alpha(\cdot)}f(x)\right|\leq cr^{\alpha(x)}\mathcal{M}f(x)+c_2 r^{\alpha(x)-\frac{n-\lambda(x)}{p(x)}}.$$

On pose $r = (\mathcal{M}f(x))^{-\frac{p(x)}{n-\lambda(x)}}$, on obtient

$$|I^{\alpha(\cdot)} f(x)| \leq (c + c_2)\, r^{\frac{-\alpha(x)p(\cdot)}{n-\lambda(x)}+1} \leq c\mathcal{M}f(x)^{\frac{p(x)}{q(x)}}.$$

Par conséquente, de (3.1.2) on a

$$\int_{\Omega\cap B(x,r)} \left|I^{\alpha(\cdot)} f(y)\right|^{q(y)} dy \leq c\int_{\Omega\cap B(x,r)} \mathcal{M}f(y)^{p(y)}dy \leq cr^{\lambda(x)}.$$

■

Corollaire 3.2.1 *Avec même condition de la théorème 3.2.1, l'opérateur maximale fractionnel*

$$\mathcal{M}^{\alpha(\cdot)}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha(x)}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

est borné de $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ *à* $L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$.

Preuve. Le résultat suivant du théorème 3.2.1 en vue de l'estimation

$$\mathcal{M}^{\alpha(\cdot)}f(x) \leq cI^{\alpha(\cdot)}(|f|)(x) \qquad ,0 < \alpha(x) < n$$

où $c > 0$ ne dépend pas de f et x, $c = \sup_{x\in\Omega}\left(\frac{1}{v_n}\right)^{1-\frac{\alpha(x)}{n}} < +\infty$ En effet, nous observons que

$$I^{\alpha(\cdot)}(|f|)(x) \geq \int_{\Omega\cap B(x,r)} \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}dy,$$

pour tout $x \in \Omega$ et $r > 0$

Puisque $|B(x,r)| = v_n r^n$, $|x-y| \leq r$ et $0 < \alpha(\cdot) < n$ alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha(x)}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy &\leq \left(\frac{1}{v_n}\right)^{1-\frac{\alpha(x)}{n}} \int_{B(x,r)} \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}dy \\ &\leq c\int_{B(x,r)} \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}dy.\end{aligned}$$

■

3.2.1 Le cas limite

Dans cette section, nous étudions le cas limitatif dans (3.2.1), par considère l'exposant critique

$$p(x) = \frac{n-\lambda(x)}{\alpha(x)} \tag{3.2.4}$$

Théorème 3.2.2 *Soit Ω un ensemble bornée, supposons que les conditions (2.1.1), (2.1.9) et* $\inf_{x\in\Omega}\alpha(x)>0$ *dans le cas de l'exposant* (3.2.4) , *l'opérateur* $\mathcal{M}^{\alpha(\cdot)}$ *est borné de* $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ *à* $L^{\infty}(\Omega)$

$$\left\|\mathcal{M}^{\alpha(\cdot)}f\right\|_{\infty}\leq c\left\|f\right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}$$

Preuve. Soit $x\in\Omega$ et $r>0$ par la condition logarithmique, propriété (2.2.10), l'inégalité de Hölder et l'estimation (2.2.11), on obtient

$$\begin{aligned}
|B(x,r)|^{\frac{\alpha(x)}{n}-1}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy &= |B(x,r)|^{\frac{\alpha(x)}{n}-1}\int_{\Omega\cap B(x,r)}r^{\frac{\lambda(x)}{p(y)}}r^{-\frac{\lambda(x)}{p(y)}}|f(y)|\,dy\\
&\leq c\,|B(x,r)|^{\frac{\alpha(x)}{n}-1}r^{\frac{\lambda(x)}{p(x)}}\int_{\Omega\cap B(x,r)}r^{-\frac{\lambda(x)}{p(y)}}|f(y)|\,dy\\
&\leq cr^{\alpha(x)-n+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}\left\|r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}}f\chi_{\Omega\cap B(x,r)}\right\|_{p(\cdot)}\left\|\chi_{\Omega\cap B(x,r)}\right\|_{\grave{p}(\cdot)}\\
&\leq cr^{\alpha(x)-n+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}\sup_{x\in\Omega,r>0}\left\|r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}}f\chi_{\Omega\cap B(x,r)}\right\|_{p(\cdot)}\left\|\chi_{\Omega\cap B(x,r)}\right\|_{\grave{p}(\cdot)}\\
&= cr^{\alpha(x)-n+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}\left\|f\right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}|B(x,r)|^{\frac{1}{\grave{p}(\cdot)}}\leq c\left\|f\right\|_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.3 *Soit Ω un ensemble bornée, et $p(\cdot)$ satisfait la condition* (2.1.1), *supposons que $p(\cdot)$ $\alpha(\cdot)$ et $\lambda(\cdot)$ dans $C^{\log}(\Omega)$,avec*

$$\inf\nolimits_{x\in\Omega}\alpha(x)>0\qquad,\qquad\sup\nolimits_{x\in\Omega}\left[\lambda(x)+\alpha(x)p(x)\right]<n.$$

L'opérateur $I^{\alpha(\cdot)}$ est borné de $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ à $L^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega)$, où $q(\cdot)$ satisfait la condition (2.1.1),

$$1\leq q(x)\leq\frac{p(x)\left[n-\lambda(x)\right]}{n-\left[\lambda(x)+\alpha(x)p(x)\right]},$$

et $\mu(x)$ est défini par la condition

$$\frac{n-\mu(x)}{q(x)}=\frac{n-\lambda(x)}{p(x)}-\alpha(x).$$

Corollaire 3.2.2 *Avec même condition du théorème 3.2.3, l'opérateur maximale fractionnel $\mathcal{M}^{\alpha(\cdot)}f$ est borné de $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ à $L^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega)$.*

Conclusion

Nous avons présenté les espaces de Morrey à exposants constantes et à exposants variables, nous avons rappelé les espaces de Lebesgue à exposants variables et les notions essentielles dans ces espaces qui sont utilisé pour étudier la continuité de la fonction maximale qui est très important dans l'analyse harmonique. Dans le cas variable sous certaines conditions.

On termine ce mémoire par de donner quelques exemples intéressants. Ces résultats impliquent sur les espaces de Morrey à exposants variables voir A. Almeida , J. Hasanov et S. Samko [4].

Bibliographie

[1] D. R. Adams, J. Xiao, Morrey spaces in Harmonic Analysis, Ark. Mat., 50 (2012), 201 - 230

[2] D. R. Adams, A note on Riesz potentials. Duke Math. J. 42 (1975), 765-778.

[3] D.R. Adams , J. Xiao, Nonlinear potential analysis on Morrey spaces and their capacities. Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), No. 6, 1629-1663.

[4] A. Almeida, J. Hasanov and S. Samko, Maximale and Potential operateur in variable exposent Morrey spaces. Georgian Mathematical Journal. 15 (2008).

[5] V. I. Burenkov and H. V. Guliyev, Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces. Studia Math. 163(2004), No. 2, 157-176.

[6] S. Campanato, Proprietà di inclusione per spazi di Morrey, Ricerche Mat. 12 (1963), 67–86.

[7] S. Campanato, Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1963), 175–188.4, 71 - 87 (1969)

[8] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function. Rend. Mat. Appl. (7) 7(1987), No. 3-4, 273–279 (1988).

[9] L. Diening, Maximal functions on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$. Math. Inequal. Appl. 7 (2004), No. 2, 245-253.

[10] L. Diening, P. Hästö and A. Nekvinda: Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, FSDONA04 Proceedings (P. Drabek and J. Rakosnk (eds.); Milovy, Czech Republic, 2004), 38-58.

[11] L. Diening, P. Hästö and S. Roudenko: Spaces with variable smoothness and integrability, , J. Funct. Anal. 256 (6) (2009), 1731-1768.

[12] L. Diening and S. Samko: Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces, Fract. Calc. Appl. Anal. 10 (2007), no. 1, 1-18.

[13] C. Feffermann and E. Stein, Some maximal inequalities. Amer. J. Math. 93 (1971),107-115.

[14] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia. Weighted norm inequalities and related-topics, volume 116 of North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[15] M. Giaquinta, Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Annals of Mathematics Studies, 105. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.

[16] P. A. Hästö, Local-to-global results in variable exposant spaces. Math. Res. Letters 16 (2009), no. 2, 263-278.

[17] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415–426.

[18] A. Kufner, O. John and S. Fu c k, Function Spaces. Monographs and Tex tbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis. Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977.

[19] H. Lebesgue, Leçons sur la théorie de l'intégration et la recherche de fonctions primitives, 2ème édition, Paris, Gauthier-Villars, 1928 (ISBN 2-87647-059-4).

[20] N. G. Meyers, Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 717–721.

[21] C.B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations.Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), no. 1, 126–166.

[22] A. Nekvinda: Equivalence of ‘fpng norms and shift operators, Math. Inequal. Appl. 5 (2002), no. 4, 711-723.

[23] A. Nekvinda: Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(R^n)$, Math. Inequal. Appl. 7 (2004), no. 2, 255-265.

[24] A. Nekvinda: Maximal operator on variable Lebesgue spaces for almost monotone radial expo- nent, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), no. 2, 1345-1365.

[25] M. Rupflin, What is a, Morrey Space?, What is a . . . Campanato Space?, (2008).

[26] G. Stampacchia, The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $\mathcal{N}^{(p,\lambda)}$ and interpolation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 19 (1965), 443-462.