



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

On the Numerical solution of Volterra- Fredholm integral-
equations using Taylor polynomials

Présentée par:

GUERROUM Chaima

Soutenu publiquement le: 28/06/2022.

Devant le jury composé de:

Mostefa Nadir

DJAIDJA Noui

GAGUI Bachir

Prof,

M.C.B,

M.C.A,

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

Président

Encadreur

Examineur

Année universitaire 2021/2022

المخلص

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية من النوع الثاني و ذلك باستخدام كثير حدود تايلور بالإضافة إلى ذلك ، تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية

كثيرات حدود تايلور- المعادلات التكاملية- المعادلات التكاملية لفريدهولم- المعادلات التكاملية لفولتيرا- معادلات فولتيرا – فريدهولم التكاملية

Résumé

Le but de ce mémoire, est de trouver des solutions approchées de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm du second espèce, en employant le polynôme de Taylor De plus ,on a donné des exemples pour illustrer la précision ,l'efficacité de la méthode proposée

Mots clés :

Polynômes de Taylor- Equations intégrales-Equation intégrale de Fredholm- Equation intégrale de Volterra -Equation intégrale mixte de Volterra-Fredholm.

Abstract :

The goal of this memory, is to find approximate solutions of the Volterra-Fredholm integral equation of the second kind, by using Taylor polynomials .Also, we introduced many examples to illustrate the precision, the efficiency of the proposed method

Key words:

Taylor polynomials- integral equations- Fredholm integral equation -Volterra integral equation mixed Volterra –Fredholm integral equation.

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

*Je tiens à remercier sincèrement **Dr. Noui DJAIDJA**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.*

*Mes remerciements vont également à tous les membres de jury les professeurs **Mostefa NADIR** et **Bachir GAGUI** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.*

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes parents et tous mes frères et mes soeurs , mes collègues ,mes amis, pour leurs aides et leurs encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Merci

Dédicace

Je dédie mon travail à ma mère et mon père, que Dieu ait pitié de lui, pour leurs amour, leurs vigilance et leurs sacrifices pour le bien de mon éducation et m'avoir conduit au plus haut niveau .Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi .

A mes chères soeurs sihem, hakima, assia aicha et rania, et les poussins tasnim, djouri asil moutez et chamsou pour leurs encouragements moraux constants à mon égard merci beaucoup

Et à mes frères soufiane, makhlouf nidal mouhsen et taher pour tout ce que vous avez fait pour moi merci beaucoup .

A tous les membres de ma famille GUERROUM et BAUCHE pour leurs soutien et leurs prières pour un succès durable .

A tous ceux avec qui les jours nous ont réunis ,certains d'entre eux étaient en or ,et certains d'entre eux ont gardé l'alliance ,à mes amis et à tous ceux qui se tenaient avec moi

Merci

Table des matières

Introduction	1
Notation	3
1 Préliminaires	4
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	4
1.1.1 Espace vectoriel normé	4
1.1.2 Espace de Banach	5
1.1.3 Espace de Hilbert	5
1.2 Opérateurs	7
1.2.1 Opérateur linéaire	7
1.2.2 Opérateur borné	7
1.2.3 Opérateur compact	8
1.2.4 Opérateur intégraux	8
2 Les équations intégrales	10
2.1 Equations intégrales linéaires et leurs classifications	10
2.1.1 Equations intégrales linéaires de fredholm	10
2.1.2 Equations intégrales linéaires de volterra	11
2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm.	12
2.2 Existence et unicité de la solution de l'équations intégrale linéaire de volterra -Fredholm	13
2.2.1 Théorèmes d'existence et d'unicité	13

2.3	Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm	15
2.3.1	La méthode des solutions sous forme de série	15
2.3.2	La méthode de décomposition d'Adomian	18
3	Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm	21
3.1	Méthode de collocation de Taylor	21
3.1.1	La série de Taylor	21
3.2	Exemples Numériques	24
	Conclusion	31
	Bibliographie	32

Introduction

Les équations intégrales sont une des branches les plus importantes des mathématiques, parmi lesquelles les équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm.

Ces équations apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques comme : la biologie, la chimie quantique ou la physique.

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm du second espèce,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (0.0.1)$$

en utilisant les polynômes de Taylor pour approximer la solution exacte de cette équation.

Notre mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre est essentiellement un rappel sur quelques concepts et résultats qui nous permettons d'aborder notre travail ; par exemple les notions d'analyse fonctionnelle concernant les espaces classiques qui sont l'espace vectoriel normé, les espaces de Banach et de Hilbert, le concept des opérateurs linéaire borné , opérateurs compacts et opérateurs intégraux .

Dans **le deuxième chapitre**, on va a fixé l'attention sur l'étude de l'existence et l'unicité de l'équation (0.0.1) et nous présenterons quelque méthodes analytiques, pour résoudre ces équations intégrales(la méthode de solution sous forme de série,la méthode de décomposition d'Adomian)

Le troisième chapitre, est consacré à la résolution numérique de ces équations en utilisant les polynômes de Taylor avec des exemples numériques.

Notation

- E : désigne un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: le produit scalaire sur E .
- $\|\cdot\|$: est une application dans $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui applée une norme.
- $L^2([a, b])$: l'espace des fonctions caréé.
- $\mathcal{L}(E, F)$: Espace des opérateurs linéaires borné de E dans F .
- \sup : est la notation utilisé pour désigner la borne supérieure.
- \max : est la notation utilisé pour désigner la borne maximum.
- \perp : l'orthogonalité.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace vectoriel normé

E désigne un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

Définition 1.1.1 (*norme*)

Une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée une norme si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

Séparation : Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ équivaut $x = 0$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Inégalité triangulaire : Pour tout $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.1.2 (*Espace vectoriel normé*). Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Exemple 1.1.1 Pour tout ensemble non vide X et tout espace vectoriel normé E , l'espace $\beta(X, E)$ des applications bornées de X dans E , muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est un espace vectoriel normé.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.3 (*Suite de Cauchy*). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite (x_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.4 (*Espace complet*). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que E est un espace complet si toute suite de Cauchy de E converge.

Définition 1.1.5 (*Espace de Banach*). On dit qu'un espace vectoriel normé est un espace de Banach s'il est complet.

Exemple 1.1.2 Tout espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) muni de n'importe quelle norme, par exemple une norme euclidienne est un espace de Banach.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.1.6 (*Produit scalaire*). Un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

symétrique : Pour tout $x, y \in E$: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

bilinéaire : Pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

définie positive : Pour tout $x \in E$: $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Définition 1.1.7 (*Espace Euclidien*) Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien.

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E définie par :

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Définition 1.1.8 (*Orthogonalité*). Si $g, h \in E$, on dit que g et h sont orthogonaux, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h \rangle = 0$.

Si M une partie de E , l'orthogonal de M est défini par

$$M^\perp = \{h \in E \text{ tq. } \forall g \in M, h \perp g\}.$$

Définition 1.1.9 (*Espace de Hilbert*). Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et qui est complet pour la norme $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1.1.3 l'espace $L^2([a, b])$ des fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

muni d'un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

et par une norme

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert

1.2 Opérateurs

1.2.1 Opérateur linéaire

Définition 1.2.1 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire de E dans F est une application A définie sur E , à valeurs dans F et vérifiant,

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \text{et} \quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

Exemple 1.2.1 Les opérateurs différentiels et intégraux, sont des opérateurs linéaires.

1.2.2 Opérateur borné

Définition 1.2.2 Une application linéaire A entre les espaces vectoriels normés E et F est appelée opérateur borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur A , il est facile de voir que A est borné si et seulement si

$$\|A\| = \sup_{x \leq 1} \|A(x)\| < \infty$$

$\|A\|$ est appelé la norme de A .

Exemple 1.2.2 Une application linéaire entre deux espaces normés de dimension finie est un opérateur borné.

1.2.3 Opérateur compact

Définition 1.2.3 Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est dit compact si l'image de la boule unité B_E est relativement compact i.e : si l'ensemble

$$A(B_E) = \{A(x), \|x\| \leq 1\}$$

est compact, ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on peut extraire de $A(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans F .

Exemple 1.2.3 Les opérateurs bornés de rang fini sont compacts car dans un espace de dimension finie, tout fermé borné est compact

1.2.4 Opérateur intégraux

Soit $k : C([a, b] \times [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur $A : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ défini par :

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

est appelé opérateur intégrale linéaire, la fonction k s'appelle noyau de l'opérateur intégral A .

Si k est une fonction continue de $[a, b] \times [a, b]$ l'opérateur A est appelé opérateur intégrale à noyau continue k .

Exemple 1.2.4 Soit l'espace $C[0, 1]$ munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Considérons l'opérateur intégral $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ défini par :

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s)ds$$

avec un noyau $k \in C([0, 1] \times [0, 1])$, est un opérateur intégral.

Chapitre 2

Les équations intégrales

2.1 Equations intégrales linéaires et leurs classifications

2.1.1 Equations intégrales linéaires de Fredholm

Définition 2.1.1 *On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme :*

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.1)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes.

Définition 2.1.2 *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :*

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues.

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.1.1) est dite équation intégrale non homogène

Si $f(x) = 0$, l'équation (2.1.1) est dite équation intégrale homogène

Exemple 2.1.1 Des exemples des deux types sont donnés par :

$$\int_0^1 \sin(xt)\varphi(t)dt = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$$

et

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x-t)\varphi(t)dt = x$$

respectivement.

2.1.2 Equations intégrales linéaires de volterra

Les équations de volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm, il suffit de prendre : $k(x, t) = 0$ pour $x < t$.

Définition 2.1.3 On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation d'inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.1.2}$$

Définition 2.1.4 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation d'inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

Exemple 2.1.2 Des exemples des équations intégrales de Volterra de première espèce sont

$$\int_0^x e^{t-x} \varphi(t) dt = xe^{-x}$$

et

$$\int_0^x (5 + 3x - 3t) \varphi(t) dt = 5x^2 + x^3$$

Cependant, des exemples des équations intégrales de Volterra du second espèce sont

$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(t) dt = 1$$

et

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt = x$$

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.1.2) est dite équation intégrale non homogène

Si $f(x) = 0$, l'équation (2.1.2) est dite équation intégrale homogène

2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm.

Définition 2.1.5 On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t) \varphi(t) dt, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (2.1.3)$$

où les fonctions k_1, k_2 et f sont des fonctions connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.1.3

$$\varphi(x) = \exp(x) + 1 + x + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + \int_0^1 \exp(x-t) \varphi(t) dt$$

Définition 2.1.6 On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t)\varphi(t)dt ds$$

2.2 Existence et unicité de la solution de l'équations intégrale linéaire de volterra -Fredholm

Définition 2.2.1 Soit X un espace normé, un opérateur $T : X \rightarrow X$ est dit de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique telque

$$T(\varphi_0) = 0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi) = (\varphi_0), \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

Théorème 2.2.1 (principe de contraction). Soit X un espace normé. Si $T : X \rightarrow X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ_0 alors T est un opérateur de Picard et

de plus

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2.2.1 Théorèmes d'existence et d'unicité

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt, x \in [a, b] \quad (2.2.1)$$

où

1.

$f \in C[a, b]$, $k_1 \in C(D_1)$, $k_2 \in C(D_2)$, tels que $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b\}$ et $D_2 = [a, b] \times [a, b]$

2.

$$M_1 = \max_{(x,t) \in D_1} |k_1(x, t)| \text{ et } M_2 = \max_{(x,t) \in D_2} |k_2(x, t)|$$

Théorème 2.2.2 Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telque

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b - a))] < 1$$

Alors l'équation (2.2.1) admet une solution unique $\varphi \in C[a, b]$, qui peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C[a, b]$

Preuve. Soit l'opérateur integral $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt, x \in [a, b]$$

on a :

$$|T\varphi(x) - T\psi(x)| = \left| \int_a^x k_1(x, t)(\varphi(t) - \psi(t))dt + \int_a^b k_2(x, t)(\varphi(t) - \psi(t))dt \right|$$

$$\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt$$

$$\leq M_1 \int_a^x \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(b - a)) \exp(c(b - a)) dt + \\ M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(b - a)) \exp(c(b - a)) dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[\frac{M_1}{C} \exp(c(x-a)) - 1 + \frac{M_2}{C} \exp(c(b-a)) - 1 \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{C} (M_1 + M_2 \exp(c(b-x))) \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{C} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|T\varphi(x) - T\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|, \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

Alors

$$|T\varphi - T\psi| \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur T est Lipschitzien de constante $k_1 = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a)))$, La condition supposée garantit que T est une contraction. Alors on applique principe de contraction ■

2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

2.3.1 La méthode des solutions sous forme de série

Définition 2.3.1 Une fonction $\varphi(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tous les ordres telles que la série de Taylor en $x = 0$ peut être écrite comme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.1)$$

Dans cette section ,nous appliquerons la méthode des solutions en série, qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques .

Pour résoudre les équations intégrales de Volterra -Fredholm, nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.3.2)$$

est analytique ,et possède donc une série de Taylor de la forme donné en (2.3.1) ,où les coefficients an sera déterminé de manière récurrente .Dans cette méthode ,nous substituons généralement la série de Taylor (2.3.1) dans les deux côtés de (2.3.2) pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt + \int_a^b k_2(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (2.3.3)$$

où $T(f(x))$ est le développement de Taylor de la fonction f .

Pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt + \int_0^x k_1(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \quad (2.3.4)$$

Exemple 2.3.1 Utilisez la méthode de résolution en série pour résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = 2 - x - x^2 - 6x^3 + x^5 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 (x+t)\varphi(t)dt \quad (2.3.5)$$

2.3. Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

En substituant $\varphi(x)$ par la série (2.3.1) dans les deux côtés de l'équation. (2.3.5) on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2 - x - x^2 - 6x^3 + x^5 + \int_0^x \left(t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt + \int_{-1}^1 \left((x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (2.3.6)$$

En évaluant les intégrales du côté droit, en utilisant quelques termes des deux côtés et en collectant les coefficients de puissances similaires de x , nous trouvons

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots &= 2 + \frac{2}{3} a_1 + \frac{2}{5} a_3 + \left(-1 + 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{2}{5} a_4 \right) x + \left(-1 + \frac{1}{2} a_0 \right) x^2 + \\ &\quad \left(-6 + \frac{1}{3} a_1 \right) x^3 + \frac{1}{4} a_2 x^4 + \left(1 + \frac{1}{5} a_3 \right) x^5 \dots \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de même puissances de x des deux côtés de (2.3.6), et en résolvant le système d'équations résultant, nous obtenons

$$a_0 = 2, a_1 = 3, \quad (2.3.7)$$

$$a_2 = 0, a_3 = -5$$

$$a_4 = a_5 = \dots = 0.$$

La solution exacte est donc donnée par

$$\varphi(x) = 2 + 3x - 5x^3. \quad (2.3.8)$$

Exemple 2.3.2 Résoudre l'équation intégrale de Volterra -Fredholm en utilisant la méthode des solutions en série

$$\varphi(x) = -5 - x + 12x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 (x+t)\varphi(t)dt \quad (2.3.9)$$

en remplaçant $\varphi(x)$ (2.3.9) par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.10)$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -5 - x + 12x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x \left((x-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt + \int_0^1 \left((x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots &= -5 + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{6}a_4 + \left(-1 + a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{5}a_4 \right) x \\ &\quad + \left(-1 + \frac{1}{6}a_1 \right) x^2 + \left(-1 + \frac{1}{12}a_2 \right) x^3 + \dots \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de puissances similaires de x des deux côtés de (2.3.11) et en résolvant le système d'équations résultant, nous obtenons

$$a_0 = 0, a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$$

La solution exacte est donc donnée par

$$\varphi(x) = 6x + 12x^2$$

2.3.2 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian consiste à décomposer la fonction inconnue $\varphi(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composants définis par la série suivante

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.3.12)$$

où les composantes $\varphi_n(x), n \geq 0$ sont à déterminer de manière récursive. Pour établir la relation de récurrence, nous substituons la série de décomposition dans l'équation intégrale de Volterra -Fredholm (2.3.2) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \right) dt + \int_a^b k_2(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \right) dt \quad (2.3.13)$$

La composante $\varphi_0(x)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe d'intégral. Par conséquent, nous définissons la relation de récurrence

$$\varphi_0(x) = f(x) \text{ et } \varphi_{n+1}(x) = \int_0^x k_1(x, t) \varphi_n(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (2.3.14)$$

Après avoir déterminé les composants $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$, la solution sous forme de série est facilement obtenue en utilisant (2.3.12), qui converge vers la solution exacte si une

telle solution existe, nous signalons ici que le phénomène de bruit résonnant et la méthode de décomposition modifiée sera utilisé dans cette section. cela sera illustré en utilisant les

exemples suivants

Exemple 2.3.3 Utilisez la méthode de décomposition adomian modifiée pour résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

2.3. Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2 - x^3 - x^4 - 2 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 t\varphi(t)dt.$$

L'utilisation de la méthode de décomposition modifiée donne la relation de récurrence

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 3x + 4x^2 - x^3 \\ \varphi_1(x) &= -x^4 - 2 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 t\varphi(t)dt \\ &= -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x^5 + x^3\end{aligned}$$

L'annulation du terme de bruit $-x^3$ de $\varphi_0(x)$ donne la solution exacte

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2$$

Exemple 2.3.4 Utiliser la méthode de décomposition adomian modifiée pour résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = \cos x - \sin x - 2 + \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^\pi (x-t)\varphi(t)dt.$$

L'utilisation de la méthode de décomposition modifiée donne la relation de récurrence

$$\varphi_0(x) = \cos x, \text{ et } \varphi_1(x) = -\sin x - 2 + \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^\pi (x-t)\varphi(t)dt = 0$$

Par conséquent, la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \cos x$$

Pour plus de détaille voir [3]

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

Dans ce chapitre, on cherche de trouver la solution approchée de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm, en basant sur la méthode de collocation, en utilisant la série de Taylor, la solution approximative est donnée sous forme de polynôme. En estimant les erreurs pour cette méthode avec comparaison de la solutions approchée avec la solution exacte.

3.1 Méthode de collocation de Taylor

3.1.1 La série de Taylor

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm du second espèce :

$$\varphi(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (3.1.1)$$

Dans cette section, nous utilisons le polynôme de Taylor pour approximer la solution de l'équation intégrale de Volterra – Fredholm (3.1.1), cette opération nous conduit à un système d'équations linéaires par rapport à la fonction inconnue $\varphi(x)$ et ses dérivées $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$.

Proposition 3.1.1 *Soit $\varphi(x)$ une fonction à dérivées de tous ordres dans un intervalle $[a, b]$ qui contient un point intérieur t . La série de Taylor de $\varphi(x)$ générée en $x = t$ est*

$$\varphi(t) \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(x) (t-x)^{(k)} \quad (1.3.2)$$

$\varphi(t)$ peut être exprimé en termes de Taylor d'ordre n série en un point arbitraire $x \in [a, b]$ comme

$$\varphi(t) = \varphi(x) + \varphi'(t)(t-x) + \dots + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(t)(t-x)^{(n)} + E_n(t, x) \quad (1.3.3)$$

où $E_k(x, t)$ l'erreur de Lagrange

$$E_n(t, x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (t-x)^{(n+1)} \quad (1.3.4)$$

où le point ξ est entre x et t

Si la solution de (3.1.1) $\varphi(x) \in C^{m+1}([a, b])$. Alors cette solution s'écrit sous la forme de la série de Taylor d'ordre n en un point arbitraire $x = c$, $a \leq x, c \leq b$

$$\varphi(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(c) (x-c)^{(k)} \quad (3.1.2)$$

où $\varphi^{(k)}(c)$ sont les coefficients de Taylor à déterminer.

En substituant $\varphi(x)$ par la série (3.1.2), dans l'Eq. (3.1.1) on obtient

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(c)(x-c)^{(k)} - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t) \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(c)(x-c)^{(k)} \right] dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t) \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(c)(x-c)^{(k)} \right] dt \quad (3.1.3)$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[(x-c)^{(k)} - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)(x-c)^{(k)} dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)(x-c)^{(k)} dt \right] \varphi^{(k)}(c) = f(x) \quad (3.1.4)$$

Pour $k = 0$: $\left(1 - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t) dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t) dt \right) \varphi(c).$

Pour $k = 1$: $\left((x-c) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)(x-c) dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)(x-c) dt \right) \varphi'(c).$

Pour $k = 2$: $\frac{1}{2!} \left((x-c)^2 - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)(x-c)^2 dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)(x-c) dt \right) \varphi''(c).$

.....

Pour $k = n$: $\frac{1}{n!} \left((x-c)^n - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)(x-c)^n dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)(x-c) dt \right) \varphi^n(c).$

Nous divisons l'intervalle $[a, b]$ en $(n + 1)$ point $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, au point x_i l'éq (3.1.4) s'écrit

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[(x_i - c)^{(k)} - \lambda_1 \int_a^{x_i} k_1(x_i, t)(x_i - c)^{(k)} dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x_i, t)(x_i - c)^{(k)} dt \right] \varphi^{(k)}(c) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n \quad (3.1.5)$$

Si on prend $i, k = 0, \dots, n$, l'éq (3.1.5) peut être écrite sous forme matricielle

$$A\psi = F \quad (3.1.6)$$

où

$$A = (a_{ik})_{n+1, n+1}$$

avec

$$a_{ik} = \frac{1}{k!} \left[(x_i - c)^{(k)} - \lambda_1 \int_a^{x_i} k_1(x_i, t)(x_i - c)^{(k)} dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x_i, t)(x_i - c)^{(k)} dt \right]$$

$$\psi = [\varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c), \dots, \varphi^{(n)}(c)]^t.$$

$$F = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

Dans la suite, La solution approximative de l'équation (3.1.1) est obtenue en résolvant le système d'équations linéaires donné ci-dessus telle que

De [12], il s'ensuit que les coefficients $\varphi^{(k)}(c)$, $k = 0, 1, \dots, n$, sont uniquement déterminés par(??). Par conséquent, l'équation (3.1.1)

n'a qu'une solution unique. Cette solution est donnée par le polynôme de Taylor

$$\varphi(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(c)(x - c)^{(k)}$$

3.2 Exemples Numériques

Dans cette section, quelques exemples sont donnés pour illustrer l'application de la méthode de Taylor..

Exemple 1. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

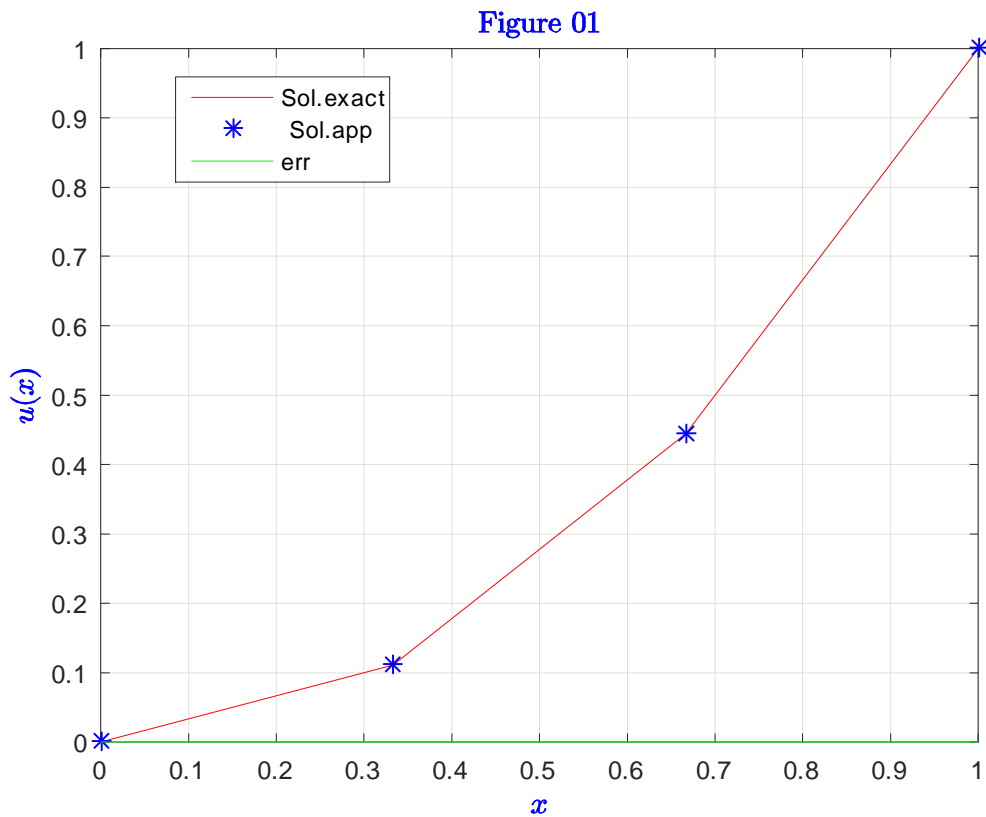
$$\varphi(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - \sin(x)[x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2\sin(x) - \sin(1) + 2\cos(1)]) + \frac{1}{3} \int_0^x \sin(x) \cos(t) \varphi(t) dt + \frac{1}{3} \int_0^1 \sin(x) \cos(t) \varphi(t) dt,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = x^2.$$

Table 1. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 3$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Erreur
0	0	0	0
3.3e-01	1.1111e-01	1.1111e-01	2.6367e-16
6.6e-01	4.4444e-01	4.4444e-01	4.9960e-16
1.0e+00	1.0000e+00	9.9999e-01	7.7715e-16



$$u_{ex} = x^2$$

Example 2. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) = x \exp(x-1) - (\exp(x) - 1)x^2 + 1 + \int_0^x (x^2 - t)\varphi(t)dt + \int_0^1 x(t+1)\varphi(t)dt,$$

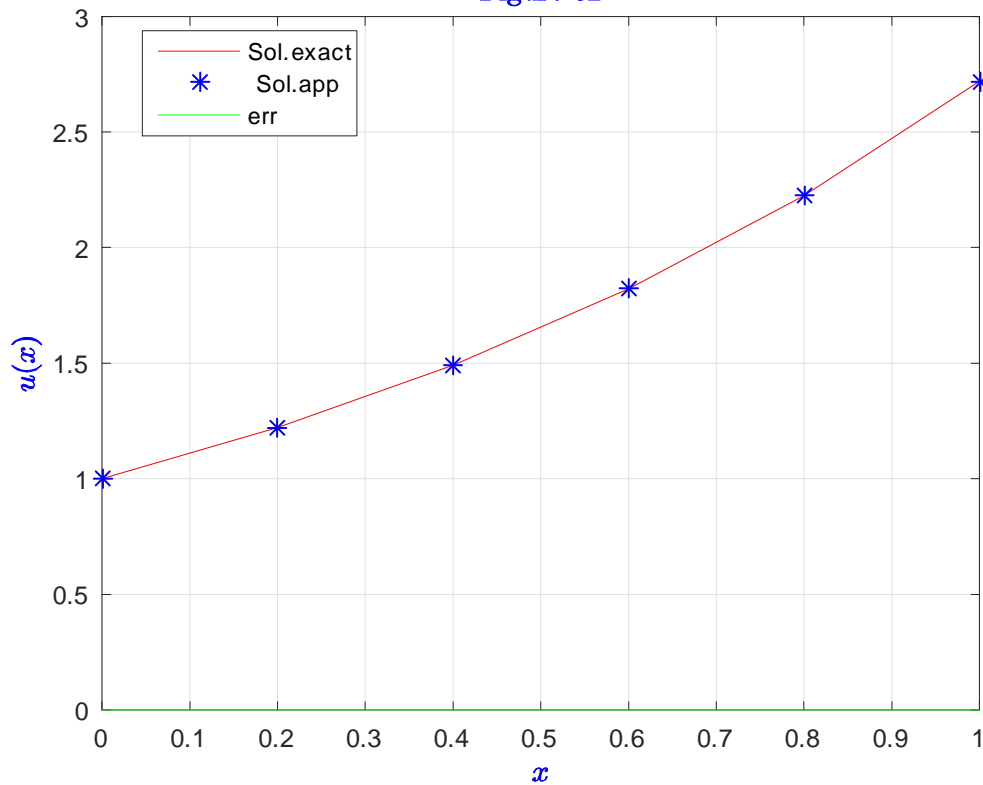
où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \exp(x).$$

Table2. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de Taylor, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 5$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Erreur
0	1.0000e+00	1.0000e+00	0
2.0000e-01	1.2214e+00	1.2214e+00	1.2632e-06
4.0000e-01	1.4918e+00	1.4918e+00	2.5545e-06
6.0000e-01	1.8221e+00	1.8221e+00	3.8786e-06
8.0000e-01	2.2255e+00	2.2255e+00	5.5058e-06
1.0000e+00	2.7182e+00	2.7182e+00	7.7510e-06

Figure 02



Example 3. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

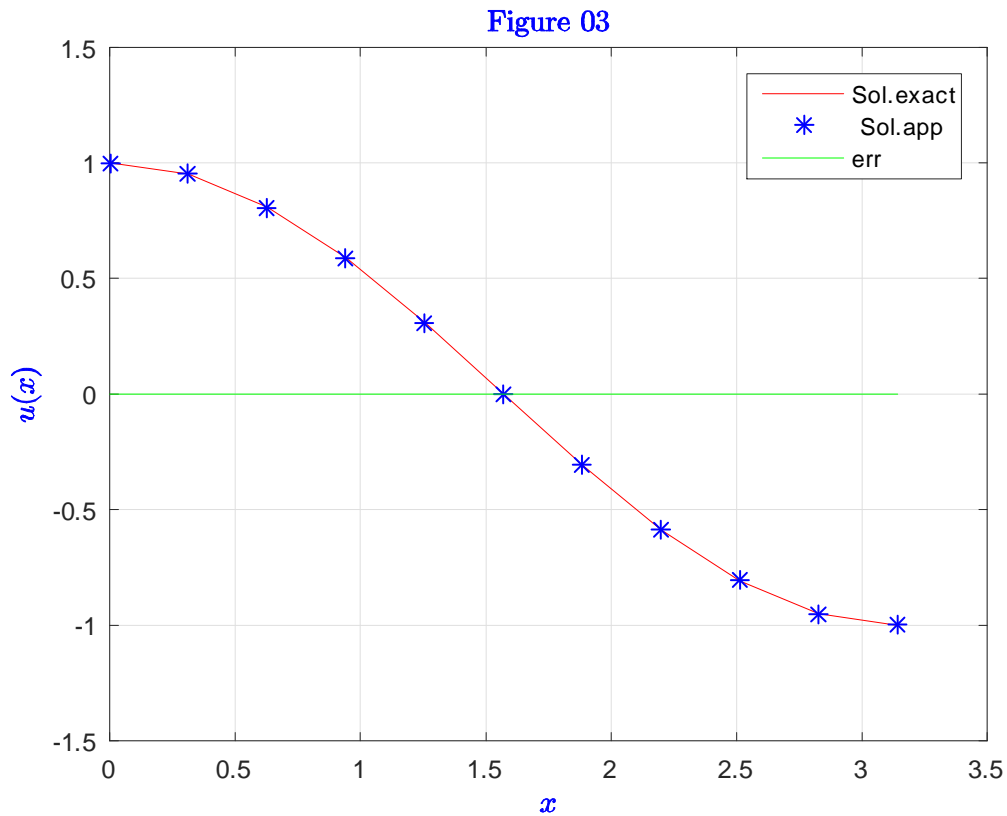
$$\varphi(x) = \cos(x) - \sin(x) - 2 + \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^\pi (x-t)\varphi(t)dt,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \cos(x).$$

Table3. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de Taylor, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 10$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Erreur
0	1.0000e+00	1.0000e+00	8.8739e-09
3.1e-01	9.5105e-01	9.5105e-01	3.1413e-09
6.2e-01	8.0901e-01	8.0901e-01	3.4533e-09
9.4e-01	5.8778e-01	5.8778e-01	2.5986e-09
1.2e+00	3.0901e-01	3.0901e-01	1.8488e-09
1.5e+00	6.1232e-17	6.5480e-10	6.5480e-10
1.8e+00	-3.0901e-01	-3.0901e-01	7.3957e-10
2.1e+00	-5.8778e-01	-5.8778e-01	2.7042e-09
2.5e+00	-8.0901e-01	-8.0901e-01	4.8183e-09
2.8e+00	-9.5105e-01	-9.5105e-01	8.4035e-09
3.1e+00	-1.0000e+00	-1.0000e+00	6.7688e-09



Example 4. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^4 + \int_0^x xt\varphi(t)dt + \int_0^1 xt\varphi(t)dt,$$

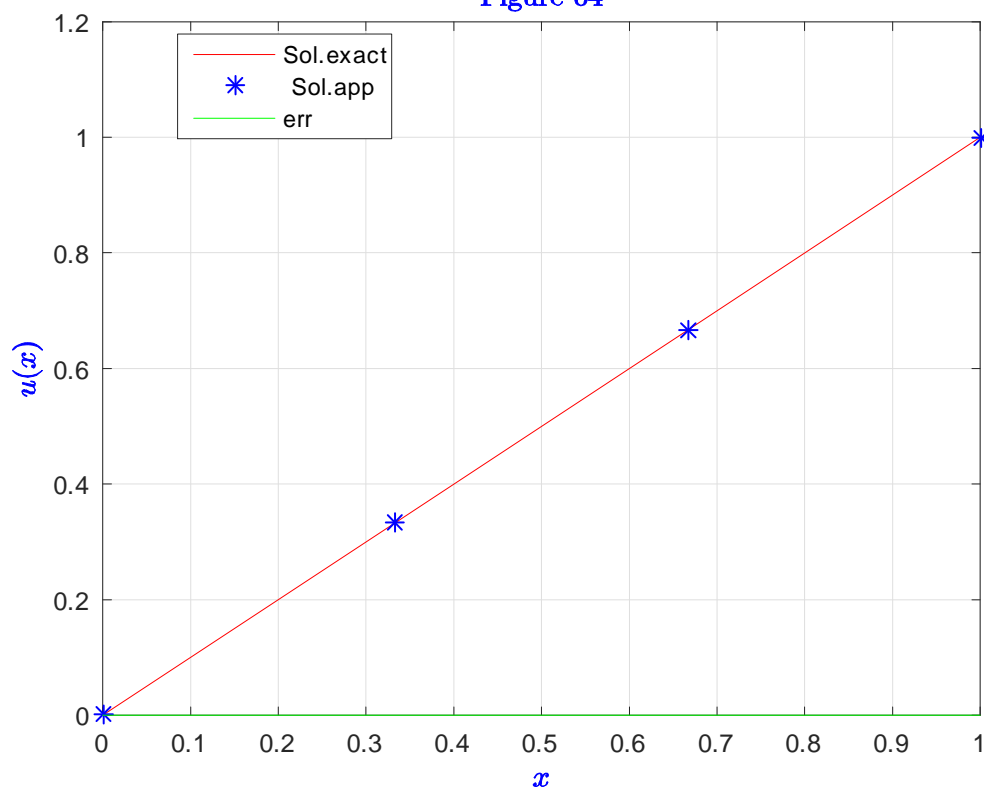
où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = x.$$

Table4. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de Taylor, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 3$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Erreur
0	0	0	0
3.3e-01	3.3333e-01	3.3333e-01	1.1102e-16
6.6e-01	6.6666e-01	6.6666e-01	3.3306e-16
1.0e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	6.6613e-16

Figure 04



Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques méthodes analytiques de résolution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm de seconde espèce comme la méthode des solutions sous forme de série et la méthode de décomposition d'Adomian. Numériquement en basant sur la méthode de collocation, en utilisant la série de Taylor, la solution approximative est donnée sous forme de polynôme. En estimant les erreurs pour cette méthode avec comparaison de la solutions approchée avec la solution exacte., on a choisit les nœuds de Taylor pour réduire l'équation intégrale de Volterra – Fredholm considérée à un système d'équations linéaires, nous donnons aussi quelques exemples pour montrer l'applicabilité de cette méthode.

Les résultats numériques obtenus à partir de ces exemples, démontrent l'efficacité et la bonne précision de cette méthode, lorsque n (le nombre de nœuds) augmente, le terme d'erreur diminue. ce qui montre que la méthode proposée peut traiter avec succès un problème de Volterra– Fredholm.

Il convient de mentionner que la méthode présentée peut être développée et appliquée à des équations de Volterra– Fredholm non linéaires.

Bibliographie

- [1] M. NADIR : Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004.
- [2] NOUI DJAIDJA : Etude des équations intégrales de volterra de première espèce en utilisant les techniques des splines,Thèse de doctorat,Université de M'sila.
- [3] K. E. ATKINSON, “The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,” Cambridge University Press, 2010.
- [4] A.M.WAZWAZ : Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA
- [5] S. ANDRÉAS :weakly singular Volterra and Fredholm-Volterra integral equation, Studia Univ . “Babes,–Bolyar, Mathematica , Volume XLVIII, Number 3, September 2003
- [6] MOHSEN DIDGAR,ALIREZA VAHIDI :Approximate Solution of Linear Volterra-Fredholm Integral Equations and Systems of Volterra-Fredholm Integral Equations using Taylor Expansion Method,Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics,Vol. 15, No. 1 (2020), pp 31-50.
- [7] WANG, K. ; WANG, Q. : Taylor collocation method and convergence analysis for the Volterra–Fredholm integral equations. J. Comput. Appl. Math. 260, 294–300 (2014)
- [8] AMINA HAIMED, On the Numerical solution of mixed volterra Fredholm intégral equations, Mémoire Master, Université de M'sila. 2021

- [9] P. KUMAR AND G. C. DUBEY, “ An application of Volterra integral equation by expansion of Taylor’s series in the problem of heat transfer and electrostatics,” IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), vol.11, no. 5, pp. 59-62, 2015.
- [10] KEYAN WANG, QISHENG WANG Taylor collocation method and convergence analysis for theVolterra–Fredholm integral equations Journal of Computational and Applied Mathematics(2013)
- [11] A. KARAMETE, M. SEZER, A Taylor collocation method for the solution of linear integro-differential equations, International Journal of Computer Mathematics 79 (2002) 987–1000.
- [12] F.CALIO ,E. MARCHETTI ,V.MUREŞAN ,on some volterra -Fredholm integral Equations .International Journal of Pure and Applied Mathematics ,volume 31 No.2 2006,174-184