

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° :



DOMAINE : SCIENCES DE LA
MATIERE

FILIERE : PHYSIQUE

OPTION : PHYSIQUE DES
PARTICULE A HAUTE ENERGIE

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par: BELHOUT Amina

Intitulé

**Thermodynamique de trou noir de
Schwarzschild placé dans une cavité**

Soutenu le 05 / 06 /2017 devant le jury composé de:

BOUFERACH. K	Université DE M'SILA	Président
SABRI.Y	Université DE M'SILA	Rapporteur
NEHAOUA .S	Université DE M'SILA	Examineur

Année universitaire : 2016/2017

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé, la patience jusqu'à l'achèvement de ce mémoire Je tiens, avant tout, à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur : Y. Sabri, mon promoteur. Je le remercie pour sa gentillesse et sa disponibilité, j'ai eu le grand plaisir de travailler sous sa direction. Mes remerciements à tous les membres de jury :madame S. Nehaoua et monsieur K.Bouferach, qui ont acceptés de juger ce travail et d'y apporter leurs cautions. Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail pour leurs conseils, leurs Encouragements et leurs soutiens.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à toutes les personnes qui m'ont aidé de le terminer : A ma chère mère ,a mon cher père et mes frères : Khalil ,Youcef .A mes sœurs :Khadra , Aicha A tous les familles : Belhout et a mes chers amis : Aouatif , Souhila , sara , Houda , Nadjoua , Ibtissam , Soumia A mes collègues de promotion 2017 .

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Introduction à la Relativité Générale	3
1.1 Les principes de la Relativité Générale :	3
1.1.1 Le Principe d'équivalence :	3
1.1.2 Le principe de covariance :	4
2 Solution de Schwarzschild	16
2.1 Métrique statique et isotrope la plus générale :	16
2.2 Solution des équations du champ dans le vide :	18
2.3 Singularité de Schwarzschild :	21
2.4 Horizon d'évènement :	22
2.5 Coordonnées Kruskal :	23
3 Thermodynamique des trous noirs	25
3.1 Principes de la thermodynamique des trou noirs	25
3.1.1 Principe Zéro :	27
3.1.2 Premier principe :	27

3.1.3	Deuxième principe :	28
3.1.4	Troisième principe :	29
3.2	Thermodynamique de trou noir de Schwarzschild :	30
3.2.1	Température de trou noir :	30
3.2.2	Entropie :	31
3.2.3	Évaporation de trou noir :	32
3.2.4	Temps de vie de trou noir	35
4	Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild dans une ca-	
	vité	37
4.1	Action euclidienne	37
4.1.1	Action GHY pour le trou noir de Schwarzschild dans une	
	cavité	38
4.2	Énergie interne	41
4.3	Entropie	42
4.4	Capacité de chaleur	43
4.5	Énergie libre de Gibbs et transition de phase de Hawking - page .	44
	Conclusion	46

Table des figures

3.1	Température de Hawking en fonction de masse de trou noir	31
3.2	Entropie vs Masse de trou noir	32
3.3	Taux d'évaporation vs Masse de trou noir.	35
4.1	Température locale vs la masse de trou noir pour $R=10$	40
4.2	Capacité de chaleur vs la masse de trou noir	44
4.3	Entropie et chaleur spécifique en fonction de la température locale pour $R=10$	45
4.4	Énergie libre on-shell vs Température locale pour $R=10$	46

Introduction Générale

Dans la démonstration d'origine, un trou noir de Schwarzschild de masse M a une température $T = (8\pi M)^{-1}$ mesurée à une grande distance du trou ($r \gg M$), Hawking a utilisé des techniques de théorie des champs quantiques sur un espace spatial d'origine classique donné. Par la suite, plusieurs études qui tentent de relier les propriétés thermiques des trous noirs à la gravité quantique sont apparues.

Le cas d'un trou en équilibre thermique avec son environnement est particulièrement important pour établir la connexion à la gravité quantique. Pour cela, il est utile Pour décrire le trou en termes de «section Euclidienne réelle» de sa géométrie, dans laquelle le temps tourne à une valeur purement imaginaire et se voit attribuer la période $\beta = T^{-1}$; C'est ce qu'on appelle "Hartle-Hawking" . La gravité quantique entre dans l'interprétation de la contribution de la géométrie euclidienne de Schwarzschild à la fonction de partition canonique pour la gravité à chaud, écrite comme une intégrale fonctionnelle euclidienne. Deux conclusions très différentes ont été atteintes en utilisant l'approche euclidienne. . Gibbons et Hawking , ont déduit les propriétés thermodynamiques des trous noirs qui avaient déjà été trouvés à partir de la formule de température et une réinterprétation des lois classiques du trou noir La mécanique d'une manière suggérée par le travail de Bekenstein ". En particulier, ils ont constaté que l'entropie des trous noirs $S = 4\pi M^2$, augmente de la contribution de l'action classique d'Einstein Euclidienne de premier ordre de la géométrie de Schwarzschild au canonique Fonction de partition. Cette conclusion était importante car, habituellement, la valeur de l'action classique n'est pas considérée comme significative sur le plan physique ; Il peut simplement être absorbé par la normalisation de l'intégrale fonctionnelle. Cependant, Hawking a soutenu forcément que l'action classique d'un trou noir contribue à l'entropie et ne doit donc pas être ignorée. Néanmoins, la

relation $T = (8\pi M)^{-1}$ implique une capacité calorifique négative pour un trou noir dans une grande cavité et, par conséquent, les fluctuations d'énergie de la racine et des carrés sont imaginaires. Par conséquent, dans cette approche, l'ensemble canonique semble ne pas être bien défini et un appel a été fait à une image microcanonique. Cependant, je ne suivrai pas ce chemin ici . D'autre part , Gross, Perry et Yaffe ont abouti à une conclusion différente. Ils ont démontré explicitement que l'action d'une géométrie Schwarzschild de masse M dans une grande cavité ($r \gg M$) correspond à un point de selle plutôt qu'à un minimum avec En ce qui concerne les petites perturbations de la géométrie de fond. Ils ont trouvé dans le spectre de perturbation de la géométrie de Schwarzschild un seul "mode négatif" qui diminue son action dans la deuxième variation .Le mode négatif passe d'un argument de théorie de champ à une énergie libre imaginaire pour le trou noir. Cela a été interprété comme indiquant une instabilité de «l'espace plat chaud», c'est-à-dire une instabilité des gravitons et d'autres champs sans masse sur fond plat L'idée est que l'activation de cette instabilité par les fluctuations thermiques (quantiques) pourrait exciter spontanément un espace plat chaud sur une barrière de potentiel efficace, ce qui entraînerait la nucléation d'un trou noir. Ce serait un phénomène purement quantique qui ne comportait pas de contrepartie classique.

Chapitre 1

Introduction à la Relativité Générale

1.1 Les principes de la Relativité Générale :

La relativité générale est bien plus qu'en théorie du champ gravitationnel. C'est une déconstruction profonde de notre manière de concevoir l'espace-temps et au de là ,la physique elle même.

La relativité générale est basée sur le principe d'équivalence, masse gravitationnel-masse inertielle qui permet de formuler toute les autres lois de la physique en présence d'un champ gravitationnel.[1]

1.1.1 Le Principe d'équivalence :

Le point de départ de la relativité générale est le principe d'équivalence qui postule l'égalité entre les masses gravitationnelle, qui entre dans la loi universelle de la gravitation de newton et inertielle, qui entre dans la relation fondamentale de la dynamique.

Le principe d'équivalence est basée sur l'observation que les corps en chute libre, avec les même conditions initiales ont le même mouvement indépendant de

leurs masses et leurs constitutions[2].

1.1.2 Le principe de covariance :

Il postule que les équations de la physique prennent une forme tensorielle.

On cherche les lois physiques qui demeurent valides sous l'action de transformations générales. Les équations entre les tenseurs conservent leur formes lors des transformations générales, cela conduit au principe de covariance généralisé postulé par Einstein[2].

1.2 Éléments de géométrie différentielle :

1.2.1 Variété :

La Géométrie Riemannienne dans l'espace-temps permet de définir la distance carrée infinitésimale entre deux points voisins, noté par ds^2 qui a la forme quadratique et se caractérise par un tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ [3]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

Cette grandeur est invariante au cas de changement de coordonnées.

La métrique crée également le produit de deux vecteurs U et V

$$U.V = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu$$

Nous prenons la dérivée d'un vecteur $\partial_\nu V_\mu$ et la transformation en coordonnées différentes

la présence du deuxième terme indique que $\partial_\nu V^\mu$ ne se transforme pas comme un tenseur. pour éviter ce problème, nous introduisons la notion de la dérivée covariante :

$$D_\nu V^\rho = \partial_\nu V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\mu \quad (1.2)$$

ou $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$: les symboles de Christoffel

1.2.2 L'équation géodésique

La géodésique est la distance minimale entre deux points dans un espace courbé, en générale ainsi qu'on peut définir une courbe comme étant géodésique si le vecteur vitesse est transporté parallèlement le long de cette dernière.[3]

La trajectoire d'une particule se déplaçant dans le champs de la gravitation est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (1.3)$$

1.2.3 Tenseur de courbure

Comme la dérivée covariante est tout simplement la dérivée partielle pour un scalaire et comme la connexion affine est symétrique vis à vis de ses deux indices du bas, alors[4, 5]

$$D_\sigma D_\rho \Phi = D_\rho D_\sigma \Phi. \quad (1.4)$$

Cette propriété n'est pas valable pour un vecteur ou plus généralement pour un tenseur, dans le cas général. Pour le voir considérons un vecteur de composantes

V_μ et calculons le commutateur

$$[D_\sigma, D_\rho]V_\mu := D_\sigma D_\rho V_\mu - D_\rho D_\sigma V_\mu. \quad (1.5)$$

Partons de la définition de la dérivée covariante d'un vecteur covariant V_μ

$$D_\rho V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^\nu V_\nu$$

$$= \partial_\rho V_\mu - \Gamma_{\rho\mu}^\nu V_\nu,$$

où on a posé $\partial_\rho := \partial/\partial x_\rho$. Une seconde dérivation covariante nous donne

$$\begin{aligned} D_\sigma D_\rho V_\mu &= \partial(D_\rho V_\mu) - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha D_\rho V_\alpha - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha D_\alpha V_\mu \\ &= \partial_\sigma(\partial_\rho V_\mu - \Gamma_{\rho\mu}^\nu V_\nu) - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha (\partial_\rho V_\alpha - \Gamma_{\alpha\rho}^\beta V_\beta) - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha (\partial_\alpha V_\mu - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta V_\beta) \\ &= \partial_\sigma \partial_\rho V_\mu - (\partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\nu) V_\nu - \Gamma_{\rho\mu}^\nu \partial_\sigma V_\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha (\partial_\alpha V_\nu) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta V_\beta \\ &\quad - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha (\partial_\alpha V_\mu) + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta V_\beta. \end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice suivant $\sigma \leftrightarrow \rho$ dans la relation précédente, on aura l'expression de $D_\rho D_\sigma V_\mu$. En tenant compte de la symétrie des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ par rapport aux indices inférieurs on obtient

$$D_\sigma D_\rho V_\mu - D_\rho D_\sigma V_\mu = -(\partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\nu) V_\nu + (\partial_\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\nu) V_\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta V_\beta - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta V_\beta \quad (1.6)$$

$$= -[\partial_\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\nu - \partial_\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\nu] V_\nu \quad (1.7)$$

$$= -R_{\mu\rho\sigma}^{\nu}V_{\nu}, \quad (1.8)$$

où

$$R_{\mu\rho\sigma}^{\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\nu} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}^{\nu}. \quad (1.9)$$

$R_{\mu\rho\sigma}^{\nu}$: est appelé tenseur de courbure de Riemann-Christoffel.

1.2.3.1 Propriétés du tenseur de courbure :

Le tenseur de courbure possède un certain nombre de symétries et vérifie certaines identités que nous allons discuter dans cette section [4, 5]. De l'expression du tenseur de courbure $R_{\mu\rho\sigma}^{\nu}$ donnée ci-dessus, on peut montrer que ce dernier est antisymétrique dans le changement d'indice $\rho \leftrightarrow \sigma$. En effet, on a

$$\begin{aligned} R_{\mu\sigma\rho}^{\nu} &= \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}^{\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu} \\ &= -R_{\mu\rho\sigma}^{\nu}. \end{aligned}$$

On peut montrer également que le tenseur de courbure vérifie l'identité suivante

$$R_{\mu\sigma\rho}^{\nu} + R_{\rho\mu\sigma}^{\nu} + R_{\sigma\rho\mu}^{\nu} = 0. \quad (1.10)$$

En effet, nous avons

$$R_{\mu\sigma\rho}^{\nu} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}^{\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu},$$

$$R_{\rho\mu\sigma}^{\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\rho\mu}^{\nu} - \partial_{\mu}\Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu},$$

$$R_{\sigma\rho\mu}^{\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma\rho} - \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma\mu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}^{\nu}.$$

En ajoutant membre à membre les trois relations précédentes et tenant compte de la symétrie des symboles de Christoffel vis à vis des deux indices du bas, nous obtenons bien l'identité (1.10). En plus de la forme du tenseur de Riemann utilisé jusque là, il existe une forme covariante souvent utilisée pour illustrer les symétries du tenseur de courbure, forme que nous pouvons obtenir en abaissant l'indice contravariant du tenseur $R_{\nu\rho\sigma}^{\alpha}$ grâce au tenseur métrique

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = g^{\alpha\mu} R_{\nu\rho\sigma}^{\alpha}.$$

En substituant à $R_{\nu\rho\sigma}^{\alpha}$ son expression (1.9) et en tenant des expressions des symboles de Christoffel en termes du tenseur métrique inverse et des dérivées premières du tenseur métrique, on obtient la relation

$$R_{\rho\sigma\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\rho}} - \frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\rho}} + \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\mu}} \right) + g_{\lambda\eta} [\Gamma_{\sigma\mu}^{\eta} \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\eta} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}] \quad (1.11)$$

A partir de cette dernière forme, on peut facilement établir les propriétés de symétrie et d'antisymétrie suivantes :

$$R_{\rho\sigma\nu}^{\mu} = -R_{\mu\sigma\nu}^{\rho},$$

$$R_{\rho\sigma\nu}^{\mu} = -R_{\rho\nu\sigma}^{\mu},$$

$$R_{\rho\sigma\nu}^{\mu} = R_{\nu\mu\rho}^{\sigma}.$$

l'expression du tenseur de Ricci

$$R_{\rho\nu} = g^{\mu\sigma} R_{\rho\sigma\nu}^{\mu}.$$

$$R_{\rho\nu} = \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}, \quad (1.12)$$

La connexion affine $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ est définie en termes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ par

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (1.13)$$

1.3 Équation d'Einstein :

méthode : Généralisation de l'équation de Poisson cette méthode (la plus simple) repose sur l'approche originale d'Einstein, plus intuitive que formelle [6]

Einstein cherchait à généraliser l'équation de Poisson valable en mécanique Newtonienne, rappelée ci dessous

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (1.14)$$

Où $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ est le Laplacien (espace) et ρ est la densité de masse. En mécanique newtonienne :

$$\Phi = -GM/r$$

Dans le terme de gauche de (1.14) nous avons un opérateur différentiel au deuxième ordre du potentiel gravitationnel et le terme de droite décrit la réparti-

tion de masse. La généralisation Relativiste doit s'exprimer en termes de relations entre tenseurs.

Nous savons que la généralisation tensorielle d'une densité de masse est le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$, alors que le potentiel gravitationnel doit être remplacé par un tenseur dépendant de la métrique.

Il est alors naturel de poser $T_{\mu\nu}$ proportionnel à un tenseur contenant des dérivées d'ordre deux de la métrique.

Dans la limite newtonienne avec $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ et $T_{00} = \rho$, les composantes spatiales sont négligeables par rapport à la composante temporelle, (facteur c), l'équation se réduit à :

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G T_{00} \quad (1.15)$$

Mais bien sûr, cette équation doit être tensorielle.

Le membre de gauche de (1.15) ne se généralise pas de façon évidente à un tenseur.

Une première tentative consiste à appliquer le d'Alembertien $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$ sur la métrique $g_{\mu\nu}$, mais cela donne identiquement zéro, par principe, compte tenu de la nature du tenseur métrique.

mais cela donne identiquement zéro, par principe, compte tenu de la nature du tenseur métrique. Par chance, nous connaissons le tenseur de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ construit à partir des dérivées premières et secondes de la Métrique et qui, lui, n'est pas identiquement nul. Il n'a pas le bon nombre d'indices mais on peut le contracter pour former le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ qui convient et est de plus symétrique.

A ce point on peut raisonnablement penser que les équations du champ sont :

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

Avec une constante dimensionnelle d'ajustement κ .

En fait Einstein proposa cette équation. Un problème de taille pourtant concernant la conservation de l'énergie. Conformément au principe d'équivalence la conservation de l'énergie Impulsion dans un espace courbe s'écrit

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (1.17)$$

Ce qui implique :

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.18)$$

Ce qui n'est certainement pas vrai dans une géométrie arbitraire. Rappelons que l'identité de Bianchi implique

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R. \quad (1.19)$$

Si (1.18) est exact alors (1.19) implique

$$\nabla_\nu R = 0 \quad (1.20)$$

Comme l'équation (1.16) que nous proposons implique (en la multipliant par $g^{\mu\nu}$) que :

$$R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa T$$

en prenant aussi en compte les contraintes (1.18) et (1.20), nous avons :

$$\nabla_{\mu} T = 0 \tag{1.21}$$

La dérivée covariante d'un scalaire est égale à sa dérivée partielle, donc (1.21) nous dit que T est constant dans l'espace temps, ce qui est hautement non plausible car $T = 0$ dans le vide et $T > 0$ en présence de matière. Il faut trouver autre chose.

En fait , on triche un peu en prenant l'équation $\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$, à la lettre. Si, comme on l'a dit , le principe d'équivalence n'est vrai qu'en première approximation, on peut imaginer qu'il y a des termes non nuls dans le membre de droite concernant le tenseur de courbure.

Nous préciserons ce point ultérieurement pour montrer qu'ils doivent être strictement nuls.

En fait la solution saute aux yeux puisqu'on connaît un tenseur $(0, 2)$ symétrique construit à partir du tenseur de Ricci qui est conservé par construction : le tenseur d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \tag{1.22}$$

Qui satisfait toujours $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$. Nous sommes conduit à proposer :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{1.23}$$

comme équation du champ pour la métrique.

Cette équation remplit toutes les conditions requises : Le terme de droite est l'expression covariante de la densité d'énergie impulsion sous forme d'un tenseur $(0, 2)$ symétrique et satisfaisant au principe de conservation, tandis que le membre de gauche est aussi un tenseur $(0,2)$ symétrique et satisfaisant au même principe de conservation construit sur les dérivées premières et secondes de la métrique.

Regardons comment cela rend compte de la gravitation telle que nous la connaissons. Pour ce faire contractons les deux membres, (1.23) donne (en quatre dimensions) :

$$R = \kappa T \tag{1.24}$$

Utilisons ce résultat et reportons dans (1.23) alors :

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \tag{1.25}$$

La limite Newtonienne

On aimerait vérifier que cela prédit bien la loi de la gravitation de Newton dans les hypothèses idoines.

Dans ces conditions l'énergie de la matière au repos $\rho = T_{00}$ est très supérieure aux autres termes de $T_{\mu\nu}$ on va se focaliser sur le composant $\mu = 0, \nu = 0$ de (1.25). Dans la limite du champ faible on écrit

$$g_{00} = -1 + h_{00} \tag{1.26}$$

$$g^{00} = -1 - h_{00}$$

La trace du tenseur énergie impulsion au premier ordre est :

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00} \quad (1.27)$$

Reportons la dans (1.25),on obtient :

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa T_{00} \quad (1.28)$$

Cette équation relie les dérivées de la métrique à la densité d'énergie. Pour trouver l'expression explicite en termes de métrique nous devons évaluer $R_{00} = R_{0\lambda 0}^\lambda$. En fait nous n'avons besoin que de R^i_{0i0} , car $R^0_{000} = 0$. Ceci donne :

$$R^i_{0j0} = \partial_j \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{j0} + \Gamma^i_{j\lambda} \Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^i_{0\lambda} \Gamma^\lambda_{j0} \quad (1.29)$$

Le second terme est une dérivée par rapport au temps qui est nulle pour le champ statique. Le troisième et quatrième sont d'ordre supérieur et peuvent être négligés. Il nous reste $R^i_{0i0} = \partial_j \Gamma^i_{00}$. De ceci on tire :

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^i_{0i0} \\ &= \partial_i \left(\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \end{aligned} \quad (1.30)$$

En comparant à (1.28), on voit que la composante 00 de (1.23) en limite Newtonienne prédit

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa T_{00}. \quad (1.31)$$

Et c'est exactement (1.15), si on pose $\kappa = 8\pi G$.

Avec cette normalisation liée aux conditions aux limites Newtoniennes, nous avons maintenant complètement déterminé l'équation d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.32)$$

dans le vide où le tenseur énergie impulsion est nul, l'équation correspondante tirée de (1.25)

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.33)$$

Chapitre 2

Solution de Schwarzschild

2.1 Métrique statique et isotrope la plus générale :

Un espace-temps est dit statique si l'on peut définir une coordonnée x^0 qui possède les propriétés suivantes :

1. Toutes les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique sont indépendantes de x^0 .
2. L'élément de longueur ds^2 est invariant sous la transformation $x^0 \rightarrow -x^0$.

Un espace-temps qui vérifie (1) mais pas (2) est dit stationnaire[2].

Partant de l'expression la plus générale de l'élément de longueur

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

En notant t la coordonnée du genre du temps x^0 , on trouve ainsi que la forme la plus générale d'une métrique spatialement isotrope est :

$$ds^2 = A(t, r) dt^2 - B(t, r) dt \vec{x} \cdot d\vec{x} - C(t, r) (\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - D(t, r) d\vec{x}^2 \quad (2.2)$$

Où A,B,C et D sont des fonctions arbitraires des coordonnées t et r .

En passant aux coordonnées sphérique (t, r, θ, Φ) , définies par $x^1 = r \sin \theta \cos \Phi$, $x^2 = r \sin \theta \sin \Phi$, $x^3 = r \cos \theta$, on obtient la métrique

$$ds^2 = A(t, r) dt^2 - B(t, r) dt dr - C(r, t) dr^2 - D(r, t) (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\Phi^2)$$

En factorisant, puis en redéfinissant les fonction A,B,C et D afin de faire disparaître les facteurs r , cette métrique peut s'écrire :

$$ds^2 = A(t, r) dt^2 - B(t, r) dt dr - C(r, t) dr^2 - D(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) .$$

Si l'on introduit ensuite une nouvelle coordonnée radiale $\bar{r}^2 = D(r, t)$ et si l'on rassemble les termes dans de nouvelles fonctions indéterminées des coordonnées t et \bar{r} , ce qui revient à redéfinir une fois encore A,B et C, on peut écrire la métrique sous forme

$$ds^2 = A(t, \bar{r}) dt^2 - B(t, \bar{r}) dt d\bar{r} - C(r, t) d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) \quad (2.3)$$

Définissons alors une nouvelle coordonnée temporelle \bar{t} par la relation

$$d\bar{t} = \Phi(t, \bar{r}) \left[A(t, \bar{r}) dt - \frac{1}{2} B(t, \bar{r}) d\bar{r} \right],$$

où $\Phi(t, r)$ est un facteur intégrant qui fait du membre de droite une différentielle exacte. En prenant le carré de cette expression on obtient

$$d\bar{t}^2 = \Phi^2 \left[A^2 dt^2 + \frac{1}{4} B^2 d\bar{r}^2 - AB dt d\bar{r} \right],$$

qui nous mène à

$$A dt^2 - B dt d\bar{r} = \frac{1}{A\Phi^2} d\bar{t}^2 - \frac{B^2}{4A} d\bar{r}^2.$$

En introduisant les fonctions $\bar{A} = 1/(A\Phi^2)$ et $\bar{B} = C + B^2/(4A)$, la métrique(2.5) devient diagonale et prend la forme

$$ds^2 = \bar{A}(\bar{t}, \bar{r}) dt^2 - \bar{B}(\bar{t}, \bar{r}) d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2).$$

Afin d'alléger l'écriture, on peut supprimer les barres sur les variables, de manière à écrire la métrique comme

$$ds^2 = A(t, r) dt^2 - B(t, r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2). \quad (2.4)$$

La forme de la métrique la plus générale qui soit stationnaire et isotrope, il suffit en effet d'imposer que les fonctions métrique $g_{\mu\nu}$ soient indépendantes de la coordonnée du genre temps, ce qui signifie juste que A et B ne dépendent que de r.

On a donc

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2). \quad (2.5)$$

2.2 Solution des équations du champ dans le vide :

La première solution des équations d'Einstein est la solution de Karl Schwarzschild, obtenue en 1916, quelques semaines après l'invention de la relativité générale par Albert Einstein en novembre 1915. La solution de Schwarzschild est la métrique qui correspond au champ de gravitation créé par une distribution de matière statique et à symétrie sphérique. Cette solution est d'une grande importance

en cosmologie[1].

Soit une symétrie sphérique d'un champ gravitationnel, nous devons résoudre l'équation d'Einstein dans le vide, ce qui revient simplement requérir l'annulation du tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.6)$$

Nous devons calculer les coefficients de la connexion $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ associé à notre métrique statique et isotrope directement à partir de la métrique $g_{\mu\nu}$ à l'aide de l'équation (1.15). On remplace les coefficients de la métrique dans l'équation (1.14), on trouve que seuls 9 des 40 coefficients indépendants de la connexion ne sont pas nuls .

$$\Gamma_{01}^0 = A'/(2A), \Gamma_{00}^1 = A'/(2B), \Gamma_{11}^1 = B'/(2B),$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r/B, \Gamma_{33}^1 = -(r \sin^2 \theta) / B, \Gamma_{12}^2 = 1/r,$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{13}^3 = 1/3, \Gamma_{23}^3 = \cot \theta,$$

Afin d'aboutir aux composantes $R_{\mu\nu}$ du tenseur de Ricci, nous devons ensuite substituer les coefficients de la connexion dans l'expression (1.13). On découvre alors avec soulagement que les composantes non diagonales de $R_{\mu\nu}$, celle pour $\mu \neq \nu$ donc, sont identiquement nulles. Ne nous restent donc que les composantes diagonales ,

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB'} \quad (2.7)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB'} \quad (2.8)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right), \quad (2.9)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.10)$$

En ajoutant B/A fois l'équation (1.17) à l'équation (1.18), on aboutit à

$$A'B + AB' = 0,$$

ce qui implique que le produit AB est égal à une constante que nommerons α . En réinjectant $B = \alpha/A$ dans l'équation (1.19), on arrive à $A + rA' = \alpha$, ce qui peut également s'écrire

$$\frac{d(rA)}{dr} = \alpha.$$

En intégrant cette équation on aboutit à

$$A(r) = \alpha \left(1 + \frac{K}{r} \right)$$

$$B(r) = \left(1 + \frac{K}{r} \right)^{-1}$$

Bien qu'au cours du calcul de A et B nous n'ayons utilisé que la somme des équation (1.17) et (1.18), et non chacune d'entre elle séparément, on vérifiera facilement que les expressions précédemment de A et B satisfont toutes les équation

(1.17 – 1.20).

En ce qui concerne la constante d'intégration K , il est aisé de voir qu'elle est reliée à la masse de l'objet source du champ gravitationnel. En effet, on peut identifier les constantes K et α en considérant la limite des champs faibles, dans laquelle nous devons imposer

$$\frac{A(r)}{c^2} \longrightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2},$$

où Φ est le potentiel gravitationnel newtonien. Par ailleurs, dans cette limite, il est tout à fait raisonnable d'assimiler la coordonnée r avec distance radiale. Pour une répartition sphérique de masse M , on a donc $\phi = -GM/r$, d'où l'on conclut que $K = -2GM/c^2$ et $\alpha = c^2$. La métrique de Schwarzschild qui décrit l'espace-temps à l'extérieur d'un corps sphérique de masse M est ainsi

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.11)$$

2.3 Singularité de Schwarzschild :

La métrique de Schwarzschild est valable à l'extérieur de la masse qui crée les champs de gravitation. On voit que cette métrique présente une singularité pour $r = 0$, le coefficient g_{00} de dt^2 devenant alors infini. Une seconde singularité est celle pour laquelle la coordonnée est telle que :

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.12)$$

cette quantité r_0 est appelé le rayon gravitationnelle. dans ce cas g_{00} s'annule et g_{11} devient infini .On peut alors définir une région singulier pour :

$$0 < r < \frac{2GM}{C^2} \quad (2.13)$$

sur cette singularité on voit la divergence de mesure temporelle.

2.4 Horizon d'évènement :

La surface $r = 2GM$ tout en étant régulier se comporte comme un point et de non-retour pour une particule qui passe par ce point et ne reviendra jamais. Pour cela $r = 2GM$ (défini le rayon de Schwarzschild approximativement) est appelé "l'horizon d'évènement " qu'est une frontière de l'espace-temps dont la quel la vitesse de libération atteindrait la vitesse de lumière, cet horizon partage les évènements en deux catégories : l'extérieur de l'horizon et l'univers $r > 2GM$. Il est possible de communiquer par des rayons lumineux a des distance grandes à l'intérieur de l'horizon $r > 2GM$. les rayons lumineux sont focalisés vers la singularité, aucun évènement à $r < 2GM$, ne peut influencer un autre évènement à $r > 2GM$, au moment de franchissement de l'horizon $r = 2GM$, on peut dire qu'il y a une permutation de l'espace et du temps, ce qui signifié que tout objet se dirige irrémédiablement vers la singularité. La matière et le rayonnement peuvent passer du domaine extérieur au domaine intérieur, mais pas inversement, d'où vient le terme "trou noir" puisque la lumière ne peut sortir de l'espace-temps à l'horizon des évènement .

2.5 Coordonnées Kruskal :

Le comportement singulier de la métrique en $r = 2GM$ est resté une longue période sans être expliqué de façon satisfaisante, jusqu'à en 1960 où Kruskal a résolu le problème. Il a défini de nouvelles coordonnées u et v par [7] :

pour $r \geq 2GM$

$$u = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{4GM} \right) \cosh \left(\frac{t}{4GM} \right) \quad (2.14)$$

$$v = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{4GM} \right) \sinh \left(\frac{t}{4GM} \right) \quad (2.15)$$

$$u = \left(1 - \frac{r}{2GM} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{4GM} \right) \sinh \left(\frac{t}{4GM} \right) \quad (2.16)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{2GM} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{4GM} \right) \cosh \left(\frac{t}{4GM} \right) \quad (2.17)$$

donc la métrique de Schwarzschild devient alors :

$$ds^2 = -\frac{32G^3M^3}{r} \exp \left(\frac{-r}{2GM} \right) [dv^2 - du^2] + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) \quad (2.18)$$

où r est considéré comme une fonction de u et v définie par :

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) \exp \left(\frac{r}{2GM} \right) \quad (2.19)$$

et les coordonnées θ et Φ sont inchangées.

La métrique (2.18) présente une seule singularité en $r = 0$ ne peut plus en ressortir, et ne peut que se diriger vers la singularité $r = 0$ où le champ est infini.

Chapitre 3

Thermodynamique des trous noirs

3.1 Principes de la thermodynamique des trou noirs

L'étude des trou noirs indique que ces objets sont décrits seulement par trois paramètres : la masse M , la charge électrique Q et le moment J . Le paramètre pertinent décrivant la structure d'un trou noir, n'est pas son rayon, mais la surface de l'horizon des évènements. Il existe donc une relation liant l aire d'un trou noire A aux trois paramètres mentionnés. Au début des années 1970, Bekenstein[8] , trouve cette relation qui exprime la variation de l aire A d'un trou noire auquel on injecte une petite quantité non nulle soit de matière δM , soit de moment angulaire δJ ou de charge électrique δQ :

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega_h \delta J + \Phi_h \delta Q \quad (3.1)$$

où , h , Ω_h et Φ_h s'identifient respectivement à sa gravité de surface qui mesure à quelle vitesse, le champ gravitationnel du trou noire devient infini en son voisinage , à sa vitesse angulaire de rotation et au potentiel électrique au voisinage du trou

noir. Peu de temps après, Smarr[9] trouva la formule suivante :

$$M = \frac{\kappa}{8\pi G}A + 2\Omega_h J + \Phi_h Q \quad (3.2)$$

Bekenstein fut donc le premier à suggérer que les trous noirs puissent avoir une entropie bien définie. La justification employée était intrigante mais manquait de rigueur, jusqu'à ce que Stephen Hawking découvre le rayonnement qui porte son nom l'année suivante. Ces travaux permirent de jeter ceux de Bekenstein sur une base rigoureuse. Bekenstein put ensuite formuler le second principe de la thermodynamique appliqué aux trous noirs. Le théorème que Hawking démontra en 1971, stipule que l'aire d'un trou noir ne diminue jamais.

$$\delta A \geq 0 \quad (3.3)$$

Ce théorème présente une grande ressemblance avec le deuxième principe de la thermodynamique en comparant la surface avec l'entropie. De plus, lorsque deux trous noirs fusionnent et qu'un nouveau trou noir s'engendre, l'aire du trou noir final ne peut être inférieure à la somme des aires initiales. Viennent ensuite Bardeen, Carter et Hawking[10] qui généralisent les résultats de Bekenstein et Smarr pour n'importe quel trou noir asymptotiquement plat et font l'analogie avec la thermodynamique en formulant les quatre lois de la thermodynamique des trous noirs.

3.1.1 Principe Zéro :

La gravité de surface κ est constante sur l'horizon pour un trou noir stationnaire. La relation entre κ la gravité de surface et T_h la température d'un trou noir est :

$$T_h = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.4)$$

3.1.2 Premier principe :

Lorsqu' un système contenant un trou noir passe d'un état stationnaire à un autre, sa masse change comme suit :

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G}dA + \Omega_h dJ + dQ \quad (3.5)$$

En comparant avec le premier principe de la thermodynamique :

$$dE = TdS + \text{travail fourni} \quad (3.6)$$

Les termes $\Omega_h dJ$ et $\Phi_h dQ$ sont les variation d'énergie cinétique de rotation et d'énergie potentielle électrique qui sont le travail des forces extérieures au système.

Ainsi , dans la formule bien connue de la thermodynamique

$$dE = \delta Q + \delta W, \quad (3.7)$$

Le terme dE ressemble fort au terme $c^2 \delta M$, on a pris ($c^2 = 1$), de l'équation du trou noir, et le terme δW correspond à $\Omega_h dJ + \Phi_h dQ$. Pour que l'analogie entre

la thermodynamique des trous noirs et la thermodynamique habituelle présente un sens physique, il faut donc supposer que terme $\frac{\kappa}{8\pi G}\delta A$ puisse s'identifier au terme de la quantité de chaleur fournie au système $\delta Q = T\delta S$ ce qui nous pousse à identifier l'aire du trou noir à son entropie et la température de rayonnement du trou noir .

Mais en relativité générale classique, les trous noirs absorbent mais s'émettent jamais et leur température est nulle. Mais Hawking à montré qu'en incluant les effets quantique (au voisinage de l'horizon, il y a création de paires particules _ antiparticules tel que les premières partent à l'infini et que les secondes tombent dans le trou noir), les trous noirs rayonnent et se comportent comme un corps noir. Ce phénomène est connu sous le nom de "Rayonnement de Hawking" et l'entropie du trou noir est donc représentée par un quart de la superficie de l'horizon, c'est-à-dire :

$$S = \frac{A}{4} \tag{3.8}$$

3.1.3 Deuxième principe :

Pour tout processus physique , l'aire de trou noir et par conséquent son entropie ne diminue pas :

$$\delta A \geq 0 \tag{3.9}$$

Où bien

$$\delta S \geq 0 \tag{3.10}$$

On constate, d'après le rayonnement de Hawking, que le trou noir rayonne jusqu'à évaporation totale et que donc son aire tend vers zéro ; ce qui viole le deuxième principe. Pour remédier à cela on introduit une deuxième loi généralisée[12]

$$\delta S_T \geq 0 \quad (3.11)$$

pour tout processus physique

où S_T est la somme de l'entropie du trou noir S_{tn} et de l'entropie S_{ext} de tout ce qui se trouve à l'extérieur du trou noir , l'entropie générale de l'univers est :

$$S' = S_{hB} + S_m \quad (3.12)$$

avec :

S' : est l'entropie généralisée

S_{hB} : est l'entropie Hawking -Bekenstein de trou noir

S_m : l'entropie de la matière qui est entre à la surface de trou noir .

3.1.4 Troisième principe :

la troisième loi stipule qu'il n'existe aucun processus classique qui peut réduire la surface de la gravité à zéro. En effet, le taux d'absorption d'une petite quantité de masse, de moment angulaire ou de charge électrique, diminue exponentiellement quand la surface de la gravité diminue, donc il faudrait un temps infini à pour que ce processus se termine.

3.2 Thermodynamique de trou noir de Schwarzschild :

Dans ce chapitre , on s'intéresse à l'étude thermodynamiques de trou noir de Schwarzschild de masse M défini par la métrique .On considéré que $\hbar = c = \kappa = 1$

3.2.1 Température de trou noir :

La température d'un trou noir est définie en fonction de la surface de la gravité par la relation ($k = \frac{1}{2}\partial r g_{00} |_{r=r_h}$)

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} |_{r=r_h}$$

On utilisant la métrique(2.11) on obtient

$$T = \frac{2M}{4\pi r^2} |_{r=r_h}$$

$$T = \frac{1}{8\pi M} \tag{3.13}$$

On remarque que la température de Hawking est inversement proportionnelle à la masse du trou noir.

pour étudier le comportement de la température, on a trace la courbe dans la figure(3.1). On remarque que la température diverge quand la masse tend vers zéro et tends vers zéro pour les grands trous noirs.

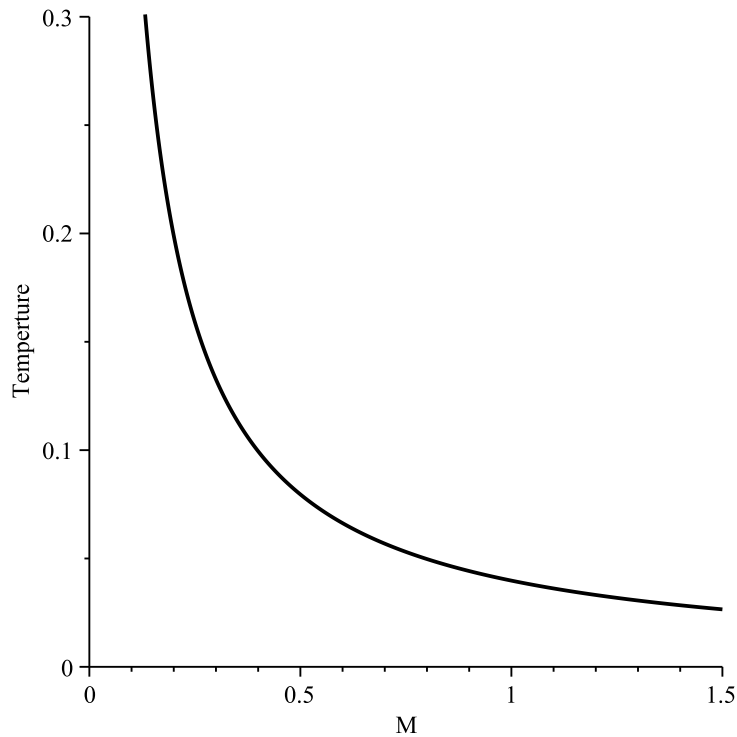


FIGURE 3.1: Température de Hawking en fonction de masse de trou noir

3.2.2 Entropie :

L'entropie des trous noirs est une notion issue de l'étude des trous noirs dans le cadre de la relativité générale et de la théorie quantique des champs, en relation avec la thermodynamique. Depuis les années 1970, il a été montré par les physiciens Stephen Hawking et Jacob Bekenstein que les trous noirs possédaient, tout comme les objets ordinaires une entropie, c'est-à-dire une mesure de la quantité d'information qu'ils renferment.

L'entropie de trou noir s'obtient en utilisant la première loi de la thermodynamique des trous noirs :

$$S = \int T^{-1} dM$$

en utilisant 3.13), on obtient

$$S = 8\pi \int M dM$$

en intégrant par rapport a la masse, on obtient

$$S = 4\pi M^2 \tag{3.14}$$

On remarque que l'entropie s'annule pour les petites masses et devient infinie pour les grandes trous noirs.

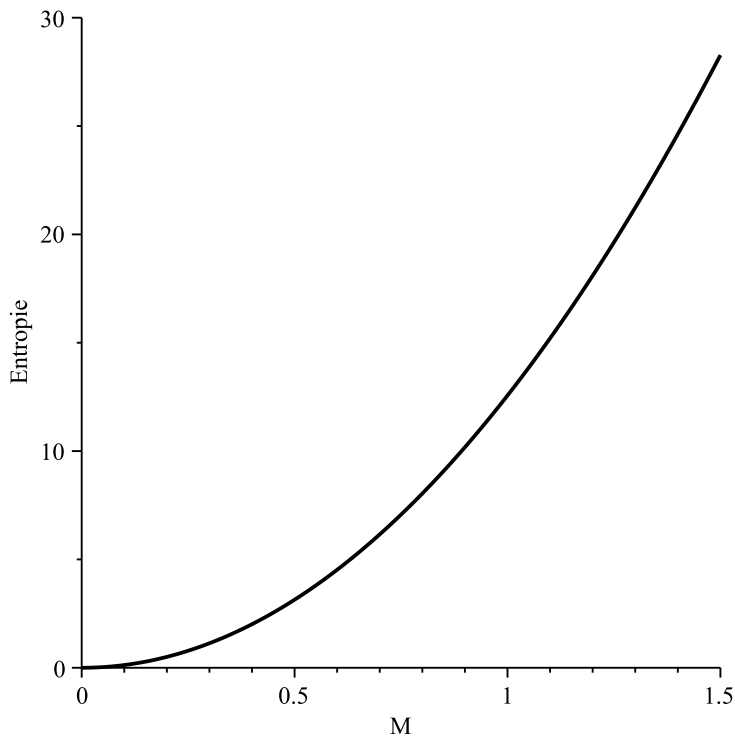


FIGURE 3.2: Entropie vs Masse de trou noir

3.2.3 Évaporation de trou noir :

La densité d'énergie d'un trou noir au température T est définie par :

$$\varepsilon = 2 \int d^3p \frac{p}{e^{\frac{p}{T}} - 1}. \quad (3.15)$$

En introduisant le changement de variable $y = \beta_h p$ ou $\beta_h = \frac{1}{T}$, on obtient

$$\varepsilon = 8\pi T^4 \int \frac{y^3}{e^y - 1} dy \quad (3.16)$$

en utilisant l'intégrale de Bose :

$$\int \frac{y^n}{e^y - 1} dy = \Gamma(n + 1) \zeta(n + 1)$$

on obtient

$$\int \frac{y^3}{e^y - 1} dy = \frac{\pi^4}{15}$$

d'où la densité d'énergie d'un trou noir devient

$$\varepsilon = \frac{8\pi^5}{15} T^4 \quad (3.17)$$

cette expression s'appelle la loi de Boltzmann.

Pour discuter le processus d'évaporation de trou noir, on a trace sa courbe en fonction de la masse de trou noire dans la figure (3.3). On remarque

Maintenant nous sommes prêts pour étudier le processus d'évaporation de Hawking. L'intensité émise par un trou noir de masse M est définie par

$$I = A\varepsilon \quad (3.18)$$

tel que

$$A = 4\pi r_h^2 \quad (3.19)$$

où A est la surface de l'horizon de trou noir. Invoquant la loi de la conservation de l'énergie, le taux de l'évaporation du trou noir est

$$\frac{dM}{dt} = -A\varepsilon \quad (3.20)$$

En remplaçant l'expression de la surface de l'horizon (3.19) et (3.17) dans (3.18) on obtient

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{128}{15}\pi^6 M^2 T^4$$

En utilisant l'expression (3.13), on obtient

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\pi^2}{480M^2}$$

Pour discuter le processus d'évaporation de trou noir, on a trace sa courbe en fonction de la masse de trou noire dans la figure (3.3). On remarque qu'elle diverge quand la masse tends vers zéro. c-a-d que le processus d'évaporation ne cesse pas et le trou noir continue a évaporer jusque ou il devient un espace plat chaud.

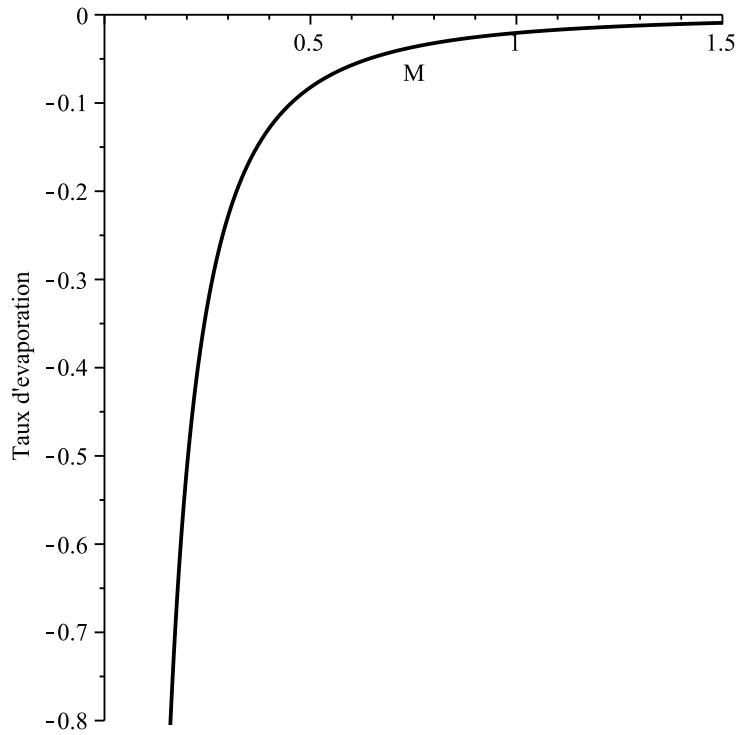


FIGURE 3.3: Taux d'évaporation vs Masse de trou noir.

Pour connaître la nature de trou noir, on calcule la la capacité de chaleur la capacité de chaleur définie par

$$C = \frac{dM}{dT}.$$

En utilisant l'expression de la température (3.13) , on obtient

$$C = -8\pi M^2$$

On remarque que $C (M =0) = 0$. Cela montre le caractère inerte de l'espace plat chaud

3.2.4 Temps de vie de trou noir

Considérons un trou noir qui commence à évaporer avec une masse M . L'expression

$$t = -\frac{480}{\pi^2} \int M^2 dM$$

en intégrant par rapport a la masse, on obtient

$$t = \frac{240}{\pi^2} M^3.$$

Chapitre 4

Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild dans une cavité

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le formalisme de l'action euclidienne pour calculer les quantités thermodynamiques d'un trou noir confiné dans une cavité isotherme dans le cas de l'ensemble grand canonique[17]

4.1 Action euclidienne

D'après [14, 15, 16], l'action euclidienne pour un variété M de dimensions $(n + 1)$ avec une hypersurface ∂M de dimension n est donnée par la somme des contributions suivantes[18] :

$$I_E = I_{EH} + I_{GHY} - I_s \quad (4.1)$$

où I_{EH} et I_{GHY} sont respectivement l'action euclidienne d'Einstein et celui de Gibbons-Hawking-York avec

$$I_{EH} = -\frac{1}{16\pi} \int d^{n+1}x \sqrt{g} R \quad (4.2)$$

$$I_{GHY} = \frac{1}{8\pi} \int d^n x \sqrt{h} K. \quad (4.3)$$

ou $g_{\mu\nu}$ est la métrique de la variété M , $h_{\mu\nu}$ la métrique induite sur l'hypersurface ∂M et K la trace du tenseur de courbure extrinsèque $k_{\mu\nu}$. L'action euclidienne soustraite I_s , qui est un contre terme de régularisation, est évaluée sur la même région compacte donnée par M et l'hypersurface ∂M . Cette dernière est nécessaire pour détecter les transitions de phases possibles au cours du développement du trou noir.

4.1.1 Action GHY pour le trou noir de Schwarzschild dans une cavité

Dans ce qui suit, nous considérons le cas du trou noir de Schwarzschild confiné dans une cavité de frontière $\partial M \equiv S^1 \times S^2$ localisée en $r = R = \text{const}$. En utilisant le temps euclidien t dans (2.11), l'élément de longueur du trou noir de Schwarzschild devient[19] :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.4)$$

La longueur propre de S^1 à la frontière de la cavité est :

$$\beta = T^{-1} = \int^{\beta_h} d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}} = \beta_h \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \quad (4.5)$$

où $\beta_h = T_h^{-1}$ est la période du temps euclidien. En remplaçant (3.13) dans (4.5), on obtient la formule de la température locale de Tolman en fonction de la masse de trou noir

$$T = \frac{1}{2\pi M \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \quad (4.6)$$

Sur l'hypersurface, la racine de la trace de la métrique induite est donnée par :

$$\sqrt{h} = \sqrt{g_{00}g_{22}g_{33}} = R^2 \sin\theta \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \quad (4.7)$$

et la trace du tenseur de courbure par :

$$K = \frac{1}{r^2 \sqrt{g_{00}g_{11}}} \frac{d}{dr} (r^2 \sqrt{g_{00}}) = -\frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{M}{R^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \quad (4.8)$$

Comme nous savons, le scalaire de Ricci de la métrique (4.4) est nulle ($R = 0$) d'où l'action d'Einstein-Hilbert devient :

$$I_{EH} = 0 \quad (4.9)$$

En remplaçant (4.7,4.8,4.9) dans (4.3), on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{\beta_h} d\tau \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta (3M - R) - I_s \\ &= \beta_h \left(\frac{3}{2}M - R \right) - I_s. \end{aligned} \quad (4.10)$$

pour que l'expression de la température locale (4.6) reste tout le temps bien définie, il faut imposer la condition

$$1 - \frac{2M}{R} \succ 0 \iff \frac{R}{2} \succ M. \quad (4.11)$$

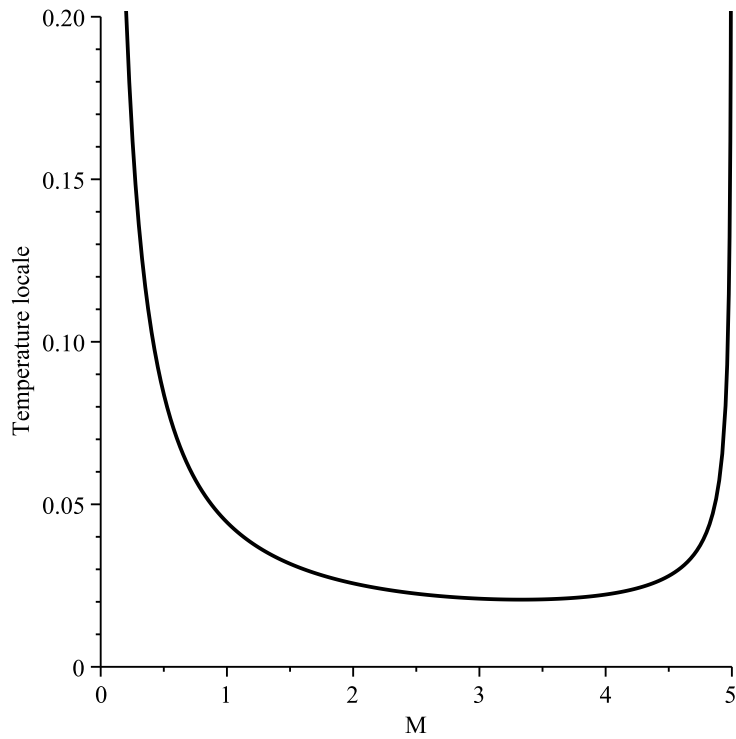


FIGURE 4.1: Température locale vs la masse de trou noir pour $R=10$

Pour discuter les solutions possibles, nous traçons la courbe de la température locale en fonction de la masse (4.1). On remarque sur cette figure l'existence de deux branches de solutions possibles :

1. $T_c < T$: Nous avons un petit trou noir et un trou noir intermédiaire.
2. $T_c > T$: Pas de trous noirs.

Avec T_c est la température critique pour laquelle on a

$$\frac{\partial T}{\partial M} = 0 \iff M_c = \frac{R}{3}$$

Maintenant nous sommes prêts pour analyser les paramètres thermodynamiques pour du trou noir de Schwarzschild dans une cavité isotherme.

4.2 Énergie interne

L'énergie interne totale dans une région de rayon R est définie par :

$$E = \frac{\partial I_E}{\partial \beta} \Big|_A. \quad (4.12)$$

où $A = 4\pi R^2$. En remplaçant (4.5) dans (4.10)

$$I_E = \beta \frac{\frac{3}{2}M - R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} - I_s \quad (4.13)$$

Dans le cas standard, l'action euclidienne soustraite est introduite pour normaliser l'énergie interne de l'espace plat chaud vide (géométrie de Schwarzschild avec $M = 0$), d où

$$I_E = \beta N = \beta \left(\frac{\frac{3}{2}M - R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} + R \right) \quad (4.14)$$

En remplaçant (4.14) dans (4.12), on obtient :

$$E = N + \beta \frac{\partial N}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial N} \Big|_A \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\frac{3}{2}M - R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} + R \right) \\ &= \frac{1 - \frac{3M}{R}}{2 \left(1 - \frac{2M}{R}\right)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left(8\pi M \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \right) \\ &= \beta R \left(1 - \frac{M}{R - 2M} \right)\end{aligned}\quad (4.17)$$

En remplaçant dans (4.15), on obtient l'expression de l'énergie interne donnée par :

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \left(\frac{3M}{2} - R \right) + R \quad (4.18)$$

La solution de cette équation pour M en fonction de E est

$$M = E - \frac{E^2}{2R}$$

Cette relation montre que la masse ADM (Arnomitt-Deser-Misner) est la somme de l'énergie thermique et l'énergie gravitationnelle due a la cavité. Par conséquent nous devons utiliser la forme de la première loi de la thermodynamique donnée par $dE = TdS$ au lieu de $dM = TdS$, ou S est l'entropie de trou noir.

4.3 Entropie

Maintenant, on va calculer l'entropie du trou noir en utilisant la formule :

$$S = \beta \left(\frac{\partial I_E}{\partial \beta} \right)_A - I_E \quad (4.19)$$

en utilisant (4.14), on obtient :

$$S = \beta \left(N + \beta \frac{\partial N}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \beta} \Big|_A \right) - I_E$$

$$= \beta^2 \frac{\partial N}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \beta} \Big|_A \quad (4.20)$$

en remplaçant (4.16) et (4.17) dans (4.20) on obtient :

$$S = 4\pi M^2 \quad (4.21)$$

On remarque l'entropie est proportionnelle au carré de la masse de trou noir quelque soit la température du trou noir et la taille de la cavité. Cela montre l'idée que l'entropie est une propriété de l'horizon.

4.4 Capacité de chaleur

Pour étudier la stabilité thermodynamique de trou noir, on va calculer la chaleur spécifique en tenant compte que la surface des évènement est constante. En effet :

$$C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_A = -\beta \left(\frac{\partial S}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \beta} \right)_A \quad (4.22)$$

En utilisant (4.5), (4.21), on obtient :

$$C = -8\pi M^2 \frac{(R - 2M)}{(R - 3M)} \quad (4.23)$$

On remarque sur la figure [capacité de chaleur] que pour

1. $M < M_c : C < 0$ Le trou noir intermédiaire est localement instable.
2. $M > M_c : C > 0$ Le grand trou noir est localement stable.

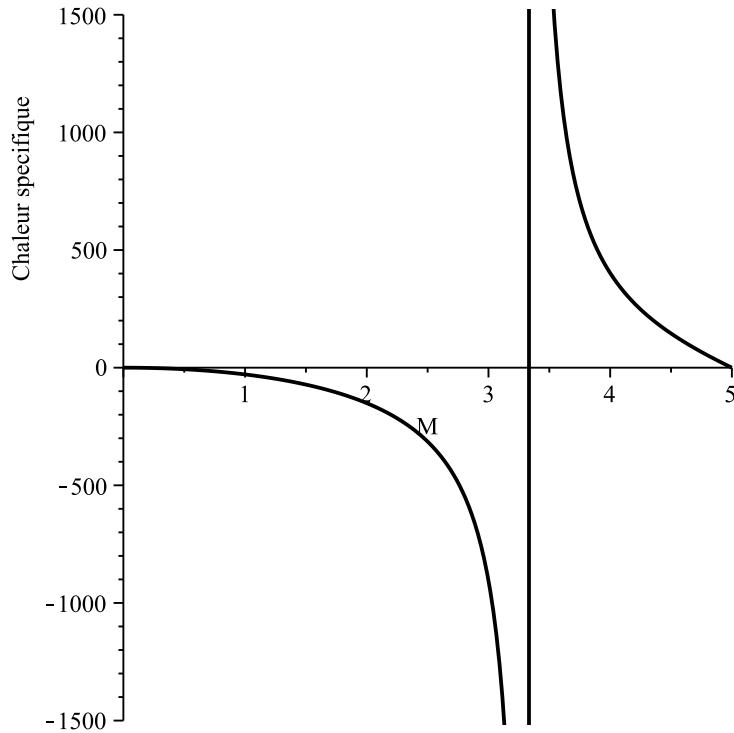


FIGURE 4.2: Capacité de chaleur vs la masse de trou noir

4.5 Énergie libre de Gibbs et transition de phase de Hawking - page

L'énergie libre on-shell est définie par $F = \frac{I_E}{\beta}$. En utilisant (4.14) on obtient :

$$F = \frac{\frac{3M}{R} - R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} + R \quad (4.24)$$

Pour étudier la structure des trous noirs, nous allons étudier la variation des paramètres thermodynamiques en fonction de la température locale. Sur la figure [4.3], on montre les courbes de l'entropie et celle de la chaleur spécifique en fonction de la température locale. On remarque l'entropie est continue à la température critique T_c par contre la chaleur spécifique est discontinu. Cela veut

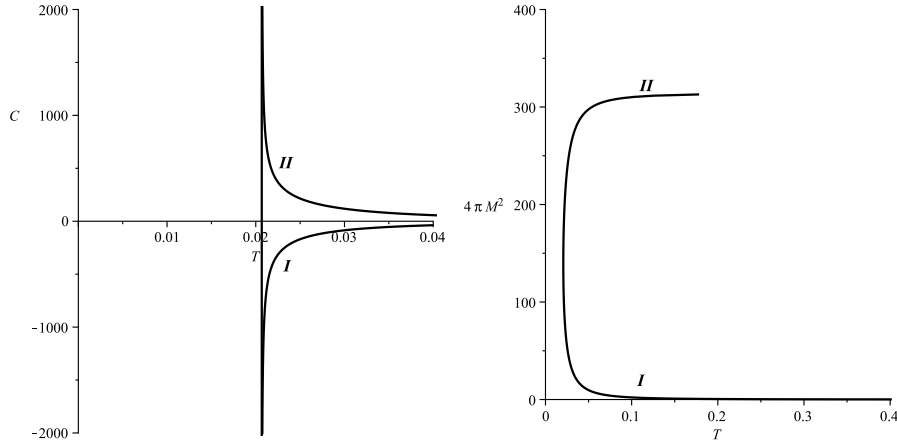


FIGURE 4.3: Entropie et chaleur spécifique en fonction de la température locale pour $R=10$

dire qu'on a une transition de phase de deuxième ordre à la température critique T_c . Quand la température augmente au delà de T_c , on remarque l'apparition de deux branches. La branche I ($T > T_c$), correspond au grand trou noir stable avec $C > 0$, et la branche II ($T_c < T$) correspond à un trou noir intermédiaire instable $C < 0$. La variation de l'énergie libre en fonction de la température locale est représentée dans la figure (4.4) où nous voyons que l'énergie libre présente un coude et est positif à la température critique T_c . Lorsque la température augmente au-delà de T_c , deux branches apparaissent. La branche I décroît rapidement et devient négative à la température de transition T_{tr} ou $F(T_{tr}) = 0$. D'autre part, la branche II reste positif et tend vers zéro quand T tend vers zéro. En résumé, on a une transition de phase entre un espace plat chaud et un grand trou noir à travers un trou noir intermédiaire instable.

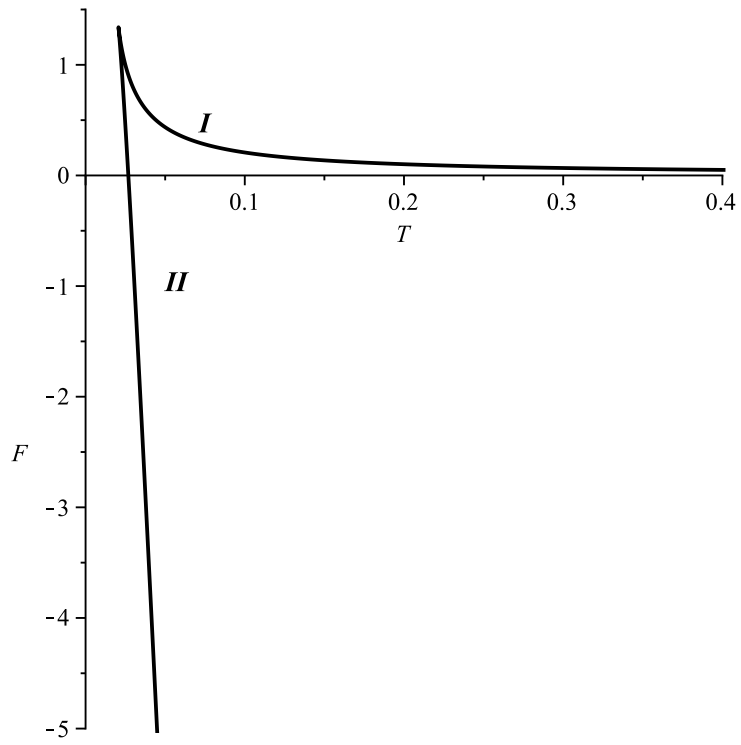


FIGURE 4.4: Énergie libre on-shell vs Température locale pour $R=10$

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la thermodynamique du trou noir de Schwarzschild placé dans une cavité.

nous avons étudié la thermodynamique de trou noir de Schwarzschild. On a calculé la température, l'entropie et la chaleur spécifique. et on trouvé que la température est proportionnelle à l'inverse de la masse de trou noir et l'entropie proportionnelle à la surface de la gravité. Aussi on a étudié le processus d'évaporation ou on trouvé que le trou noir de Schwarzschild s'évapore complètement et devient un espace plat chaud.

on a étudié la thermodynamique de trou noir de Schwarzschild confiné dans une cavité. On a trouvé que la masse ADM (Arnomitt-Deser-Misner) est la somme de l'énergie thermique et l'énergie gravitationnelle due a la cavité. Par conséquent nous devons utiliser la forme de la première loi de la thermodynamique donnée par $dE = TdS$ au lieu de $dM = TdS$, ou S est l'entropie de trou noir. D'autre part nous avons trouvé une transition de phase de l'espace plat chaud à un grand trou noir à travers un trou noir intermédiaire instable.

Bibliographie

- [1] Hobson/Efstathio/lasenby.Relativité Générale,traduit de l'édition américaine por loic villain,Révision scientifique de Richard Taillet
- [2] Théorie de la relativité Nathalie deruelle/Jean- philipe Uzan
- [3] Relativité générale cors et exercice corrigés/Aurélien Barrau /Julien Grain
- [4] Jean haldik ;introduction à la relativité ,De boek ,2010 ;isbn,nikola vittorio ;gravitation
- [5] Mirjana Dalarson and Nils Dalarson ;Tensors ,Relativity ,and cosmology ;Elsevier ,2005
- [6] Sean.M.Carroll,institute for Theoretical physics,University of california Santa Barbara,CA9 »106,December1997
- [7] M.D.Kruskal , phys.Rev.119,(1960)1734.
- [8] J.Bekenstein ,Phus. Rev .D7 (1973)2333 .
- [9] L .Smarr , Phys . Rev . Lett . 30 (1973) 71 .
- [10] J.M. Bardeen , B . Carter et S.W.Hawking , Commun .Math . Phys .31 (1973) 161 .
- [11] S .W.Hawking .Black holes and thermodynamics . Physical Review D . 1976 .

- [12] J.Bekenstein ,phys.Rev .D9(1973) 3292.
- [13] Christiane Schomblond , Elément de la théorie classique des trous noirs, université Libre de Bruxelles ,Février -Mars 2003 .
- [14] J. W. York, Phys. Rev. Lett. 28, 1082 (1972).
- [15] G. W. Hawking and S. W. Gibbons, Phys. Rev. D 15, 2752 (1977).
- [16] S.W. Hawking andW. Israel, General Relativity, Cambridge University Press, Cambridge (1979).
- [17] S.W.Hawking , Commun .Math . Phys.4 »,199 (1975) .
- [18] W.Gibbons and S.W.Hawking , Phys . Rev .D 15 , 2752(1977) .
- [19] S.W.Hawking and D.N .Page Commun . Math . Phyus .87 , 577 (1983)

ملخص

يتناول هذا العمل تذكير حول مبادئ و اساسيات نظرية النسبية العامة كما درسنا انحناء الزمكان بالاضافة الى معادلة اينشتاين كما قمنا بدراسة حركة الثقب الاسود لي شوارزشيلد معزول داخل خلية و درسنا خصائصه , كل من الحرارة و درجة التعادل الحراري و الطاقة الداخلية حيث ينتهي الى فضاء مستوي .

كلمات مفتاحية :

النسبية العامة , معادلة انشتاين , ثقب شوارزشيلد , فضاء منحنى , الحرارة .

Résumé

Ce travail représente une introduction à la relativité générale ou nous avons rappelé les principes fondamentaux de la théorie, un rappel mathématique sur l'espace-temps courbé puis nous avons obtenu les équations d'Einstein et la solution de Schwarzschild, et nous avons terminé le chapitre par l'étude de la thermodynamique de trou noir de Schwarzschild dans une cavité , qui évaporé à la fin a un espace plat .

Mots clés :

Trou noir de Schwarzschild, Relativity générale équation d'Einstein, température , entropie ,

Abstract

This work is concerned with a reminder of general relativity and resolution of Einstein equation then we study the thermodynamics of Black hole of Schwarzschild

Keywords:

Black hole of shwarzschild , General Relativity , Einstein equation , temprature