

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE : TECHNOLOGIES

DEPARTEMENT : GENIE ÉLECTRIQUE

N° : .....



DOMAINE: Sciences et Technologie

FILIERE : Electrotechnique

OPTION : Electromécanique

*Mémoire présenté pour l'obtention*

*Du diplôme de Master Académique*

➤ **Par:** Bey KHAOULA et Ben Toumi AMINA

**Intitulé**

**Commande robuste par mode glissant des  
systèmes non linéaires sous-actionnés**

**Soutenu devant le jury composé de:**

<b><i>ROUABHI Riadh</i></b>	Université de M.B. M'sila	Président
<b><i>Abderrahmen Bouguerra</i></b>	Université de M.B. M'sila	Rapporteur
<b><i>Nidhal Cherrat</i></b>	Université de M.B. M'sila	Co-Rapporteur
<b><i>ZEMMIT Abderrahim</i></b>	Université de M.B. M'sila	Examineur

**Année universitaire : 2019 /2020**

# Remerciement

*Nous remercions Allah tout puissant qui nous a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de fin d'étude*

*Nous tenons à remercier vivement et très respectueusement nos promoteurs de mémoire, Mr. **Abderrahmen Bouguerra** et Mr. **Cherrat Nidhal**, pour le choix du sujet, d'avoir dirigés ce travail avec professionnalisme, pour tous ces conseils précieux et ses critiques constructives qui ont été très positifs.*

*Nous exprimons notre gratitude envers*

*Mrs les membres de jury de*

*Nous avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner*

*Notre travail.*

*Enfin nous ne pourrions terminer ces remerciement sans une pensée à l'ensemble des notre enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir et en particulier mes enseignants à l'université de M'sila.*

## ***Dédicaces***

*Je dédier ce modeste travail avant tout*

*A mon très cher père*

*A ma très chère mère*

*A mes frères et mes sœurs et A tout ma famille*

*A tout me amis et me collègues*

*A ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce modeste  
travail*

*B. Khaoula*

# *Dédicaces*

*Je dédier ce modeste travail :*

*A mon très cher père*

*A ma très chère mère*

*A mon très cher mari*

*A tout ma famille*

*À mes amis et mes collègues*

*A ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce modeste  
travail*

*B. Amina*

# Sommaire

<i>Introduction générale</i> : .....	11
--------------------------------------	----

## ***Chapitre 1 : Introduction aux systèmes mécaniques sous-actionné***

1.1. <i>Introduction</i> : .....	5
1.1. <i>Classes des systèmes non linéaires</i> .....	5
1.2. <i>Quelques exemples de systèmes mécaniques sous-actionnés</i> .....	8
1.2.1. <i>Le pendule (inversé) sur chariot</i> .....	8
1.2.2. <i>Le double pendule inversé</i> .....	9
1.2.2.1. <i>En cascade</i> .....	9
1.2.2.2. <i>En parallèle</i> .....	9
1.2.3. <i>Le pendule de Furuta</i> .....	10
1.2.4. <i>Le pendubot</i> .....	10
1.2.5. <i>L'acrobot</i> .....	11
1.3. <i>Modélisation mathématique des systèmes mécaniques</i> .....	11
1.4. <i>Systèmes mécaniques complètement actionnés</i> .....	13
1.5. <i>Systèmes mécaniques non holonomes</i> .....	13
1.6. <i>Intérêt de l'étude des systèmes sous-actionnés</i> .....	14
1.6.1. <i>En médecine</i> .....	14
1.6.2. <i>En robotique</i> .....	15
1.6.3. <i>Dans l'aérospatiale</i> .....	16
1.6.4. <i>Dans le domaine recherché</i> .....	16
1.7. <i>Conclusion</i> .....	16

# **Chapitre 2 :**

## ***Aspects théoriques de La commande par mode glissant***

2.1. Introduction .....	19
2.2. Système à structure variable.....	20
2.3. Types de commutation des systèmes à structure variable .....	20
2.3.1. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande .....	20
2.3.2. Structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état .....	21
2.3.3. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande .....	22
2.4. Principe de fonctionnement de la commande par mode glissant .....	22
2.5. Définition du régime glissant .....	23
2.5.1. Définition du régime glissant idéale .....	23
2.5.2. Définition du régime glissant réel.....	24
2.6. Conception de la commande par mode glissant .....	24
2.6.1. Choix de surface de glissement .....	25
2.6.2. Condition d'existence du mode de glissement : .....	25
2.6.3. Calcul de la loi de commande : .....	25
2.7. Broutement ( Chattering ) : .....	26
2.8. Réduction du phénomène de broutement (chattering).....	27
2.9. Application de la commande par mode de glissant .....	28
2.9.1. Position de problème .....	28
2.9.2. Résultats de simulation.....	30
2.10. Conclusion .....	31

# **Chapitre 3 :**

## **Commande par mode glissant des systèmes sous-actionnés**

3.1. Introduction : .....	34
3.2. Position du problème .....	34
3.3. Première approche de commande par mode glissant .....	36
3.4. Résultats de simulation .....	37
3.5. Deuxième loi de commande par mode glissant .....	40
3.6. Résultats de simulation .....	42
3.7. Conclusion .....	44
Conclusion Générale .....	47
Bibliographie .....	48

# *Liste des figures*

## *Chapitre 1 : Introduction aux systèmes mécaniques sous-actionné*

<i>Figure 1.1.</i> Représentation de système.....	5
<i>Figure 1.2.</i> Le système pendule inversé .....	8
<i>Figure 1.3.</i> Double pendule inversé en cascade. ....	9
<i>Figure 1.4</i> Le double pendule inversé parallèle. ....	9
<i>Figure 1.5.</i> Le pendule de Furuta en coordonnées généralisés. ....	10
<i>Figure 1.6.</i> Le pendubot en coordonnées généralisés. ....	10
<i>Figure 1.7</i> L'acrobot en coordonnées généralisés. ....	11
<i>Figure 1.8.</i> Le robot BIPED. ....	15
<i>Figure 1.9.</i> Le robot JOE.....	15

## *Chapitre 2 : Aspects théoriques de La commande par mode glissant*

<i>Figure 1.10.</i> Pendule gyroscopique inversé. ....	16
<i>Figure 2.1.</i> SCSV avec changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande.....	21
<i>Figure 2.2.</i> SCSV avec changement de structure par commutation d'une contre réaction d'état variable. ....	21
<i>Figure 2.3.</i> Structure de régulation par ajout de la commande équivalente.....	22
<i>Figure 2.4.</i> Convergence du système glissant. ....	23
<i>Figure 2.5.</i> Régime glissant idéal.....	23

<i>Figure 2.6.</i> Régime glissant réel.....	24
<i>Figure 2.7.</i> Fonction de saturation sat. ....	27
<i>Figure 2.8.</i> Fonction de saturation cont.....	28
<i>Figure 2.9.</i> Position angulaire $y = x_1$ , trajectoire désirée $y_d$ .....	30
<i>Figure 2.10.</i> Vitesse angulaire $y = x_2$ , dérivée de la trajectoire désirée $y_d$ .....	30
<i>Figure 2.11.</i> Evolusion du signale de commande $u$ .....	31
<i>Figure 2.12.</i> Trajectoire de la surface de glissement $S$ .....	31

### ***Chapitre 3 : Commande par mode glissant des systèmes sous-actionnés***

<i>Figure 3.1.</i> Système de ponts roulant.....	38
<i>Figure 3.2.</i> Evolusion du signale de position $x$ .....	39
<i>Figure 3.3.</i> Evolusion du signale d'angle $\theta$ .....	39
<i>Figure 3.4.</i> Trajectoire de la surface de glissement $S_2$ .....	39
<i>Figure 3.5.</i> Trajectoire de la surface de glissement $S_2$ .....	40
<i>Figure 2.6.</i> Evolusion du signale de commande $u$ .....	40
<i>Figure 3.7.</i> Evolusion du signale de position $x$ .....	43
<i>Figure 3.8.</i> Evolusion du signale d'angle $\theta$ .....	43
<i>Figure 3.9.</i> Trajectoire de la surface de glissement $S_1$ .....	43
<i>Figure 3.10.</i> Trajectoire de la surface de glissement $S_2$ .....	44
<i>Figure 3.11.</i> Evolusion du signale de commande $u$ .....	44

# *INTRODUCTION GENERALE*

*« AVANT DONC QUE D'ECRIRE, APPRENEZ A PENSER ».*

*NICOLAS BOILEAU*

## ***Introduction générale :***

Le développement technologique a conduit à la réalisation des systèmes de plus en plus complexes et hautement non linéaires. Pendant les dernières décennies, l'analyse et la commande des systèmes mécaniques non linéaires ont attiré beaucoup d'attention, spécialement dans les domaines de robotique, d'automatisation et de la commande. Les systèmes mécaniques sont des systèmes qui font partie de l'univers physique et qui sont construits par l'être humain, ces derniers servent à réaliser des tâches sous l'ordre d'un système de commande approprié et sous l'influence de l'environnement.

Le but de répondre aux besoins de l'être humain et la recherche de les satisfaire, afin d'avoir une qualité de vie meilleur, ont poussé les chercheurs de faire des études approfondies et de développer différentes théories de commande applicables sur les systèmes mécaniques. Puisque les systèmes mécaniques sont de nature non linéaire, les scientifiques ont pensé d'abord à approcher leur comportement par des modèles linéaires. L'automatique moderne dispose d'un ensemble d'outils bien maîtrisés pour l'analyse et la commande de ces systèmes, cependant cette approximation linéaire n'est valable que dans un domaine de fonctionnement limité, à grand échelle des systèmes mécaniques (en robotique par exemple), cette approximation perd toute sa signification, ce qui exige de trouver d'autres solutions tout en gardant la nature non linéaire du système. L'analyse et la commande de ces systèmes ne sont pas des tâches faciles, la plupart des travaux dans la littérature proposent des méthodes limitées à des formes bien particulières, c'est-à-dire que ces techniques ne sont pas généralisées. En effet, afin de faciliter l'étude de tels systèmes, de nombreuses hypothèses sur la structure, la commandabilité et l'observabilité du système sont utilisées [1].

Principalement, les applications en robotique, en automobile et en automatique, sont des sources essentielles qui motivent l'analyse et la commande d'une catégorie des systèmes mécaniques non linéaires importants, connus sous le nom « systèmes mécaniques sous actionnés » (SMSA).

Les SMSA, sont des systèmes mécaniques non linéaires avec un nombre d'actionneurs indépendants moins que le nombre de degrés de liberté à contrôler. Dans les dernières années, il y a eu un intérêt majeur dans le développement des stratégies de commande stabilisantes pour ces systèmes, et des algorithmes sous actionnés, pour des

## *Introduction générale*

systèmes mécaniques qui peuvent être sous actionnés par conception, ou par un échec de l'un de ces actionneurs.

La commande des SMSA est en constante évolution depuis plusieurs années, mais la complexité de ces derniers (non linéarité et sous actionnement) rend la tâche de l'élaboration et le développement d'une commande pour l'ensemble de ces systèmes un peu difficile, et s'effectue plus lentement, en plus les résultats qui sont établis pour les systèmes non linéaires ne sont pas directement applicables au cas des SMSA.

Certains chercheurs sont arrivés à classifier les SMSA selon des propriétés structurelles et dynamiques, ce travail difficile non seulement a mené à créer un nombre important de classes, mais certaines classes comportent un seul SMSA, ce qui exige à les étudier cas par cas.

Les SMSA destinés aux applications dans les laboratoires (benchmarks), font l'objet d'études approfondies et une source de connaissance qui permet de développer de plus en plus de nouvelles techniques de commande, pour cette raison cette catégorie de SMSA est de grande importance, et l'étude de l'ensemble de tous les SMSA repose sur cette dernière. La difficulté et l'intérêt de la commande des SMSA ont permis d'avoir des études exploitables, riches et fructueuses en théorie et en pratique, mais ça reste encore une porte ouverte à des nouvelles recherches.

La recherche dans le domaine des SMSA est beaucoup plus concentrée sur l'obtention des stratégies de commande et de nouvelles algorithmes plus développés et applicables sur tout l'ensemble de ce type de systèmes. Cette recherche a connu une évolution depuis l'apparition de la notion du Lagrangien, jusqu'à nos jours, car l'intérêt de simplifier et d'unifier la structure sur laquelle l'application d'une commande appropriée pourra atteindre l'objectif, reste encore une tâche difficile à accomplir.

Plusieurs méthodes de contrôle ont été appliquées aux SMSA, parmi les travaux les plus essentiels on trouve ceux basés sur l'énergie, où ces méthodes de commande sont appliquées sur le pendule inversé sur chariot [2], le pendubot [3], l'acrobot [4], Le pendule de Furuta [5], cette technique de commande standard, repose sur le balancement du système d'une position initiale arbitraire, pour l'amener aux voisinages de domaine de linéarité, et afin d'atteindre une configuration d'équilibre, une commande linéaire telles que le régulateur LQR et placement de pôle sont appliquées. Ces derniers exemples sont

## *Introduction générale*

inspirés principalement de la structure d'un être humain, dont l'objectif est d'étendre l'ensemble des théories développées à une structure plus complexe. En utilisant ces méthodes l'objectif de commande est achevé pour plusieurs exemples, mais malheureusement, il n'y pas une analyse de stabilité qui généralise et garantie cet objectif.

Le besoin de créer des algorithmes sous actionnés, s'est posé dans plusieurs situations pratiques, notamment la stabilisation et la poursuite des trajectoires pour les navires et les véhicules sous-marins, où ces systèmes peuvent être sous actionnés en raison de l'échec d'actionneurs. La méthode du backstepping a été considérée comme étant un outil efficace pour la stabilisation globale des véhicules sous-marins avec un nombre de degrés de liberté minimal. Récemment cette technique a été largement appliquée pour commander des bateaux, plusieurs travaux ont entamé le problème de stabilisation et de poursuite. Les commandes par mode glissant ont été aussi exploitées, en raison de leur robustesse [1].

Dans les travaux où la méthode de backstepping a été exploitée , les auteurs ont mentionnés que cette procédure donne des expressions de commande très compliquées, pour autant d'autres chercheurs préféraient d'utiliser la commande par mode glissant (CMG) qui est une commande facile et robuste par rapport aux incertitudes paramétriques et aux perturbations [1].

Les objectifs de la Mémoire s'articulent autour des points suivants :

- Présenter des systèmes mécaniques de classes non linéaire et sous-actionnés.
- Application d'une loi de commande mode glissant pour des systèmes non linéaire complètement actionnés.
- Développement d'une loi de commande de type mode de glissant pour le stabiliser des systèmes sous actionnés.

La mémoire est organisée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, au début, on rassemble les différentes formes de modèles d'état des différentes classes des systèmes non linéaires les plus pertinents dans la littérature. Puis, on fait un résumé sur les systèmes mécaniques sous-actionnés (quelques exemples et concepts de modulation de cette classe de systèmes). Enfin, nous citons les intérêts de l'étude de ces systèmes.

Le deuxième chapitre est consacré à la commande mode de glissant d'une classe des systèmes non linéaires. Dans la première partie, quelques notions fondamentales La commande par mode glissant sont présentées tel que les systèmes de réglage à structure variable, les différents types de commutation, la méthode de conceptions de la commande par mode glissement et ...), Dans la deuxième partie, nous proposons d'appliquer la commande par mode glissant pour traiter le problème de suivi d'une trajectoire pour un pendule inversé.

Dans le troisième chapitre, un problème de stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires sous-actionnés seconde ordre est considéré. Dans ce schéma, une loi de commande de type mode glissant est développée pour le cas où le système présente d'une dynamique non-linéaire et non actionné.

*CHAPITRE 1 :*  
*INTRODUCTION AUX*  
*SYSTEMES MECANIQUES*  
*SOUS-ACTIONNE*

*« ET L'ESPOIR, MALGRE MOI, S'EST GLISSE DANS MON CŒUR ».*

*JEAN RACINE*

### 1.1. Introduction :

Les systèmes sous-actionnés sont des systèmes caractérisés par un nombre d'entrées de commande inférieur au nombre de degrés de liberté. Cette caractéristique est soit imposée par la nature de la structure du système ou soit introduite volontairement par le concepteur pour minimiser le nombre d'actionneurs utilisés, et par conséquent réduire le poids, le volume et le coût. Plusieurs systèmes industriels font partie de cette classe de systèmes, tels que les hélicoptères, les avions, les satellites, les robots sous-marins, ...etc [6].

Le problème de commande des systèmes sous-actionnés est plus complexe que celle des systèmes complètement actionnés. Cela est due au couplage qui existe entre les sorties et les entrées.

Dans ce premier chapitre, nous passons en revue quelques généralités sur les systèmes mécaniques sous-actionnés, nous commençons par la présentation de quelques systèmes de cette catégorie, puis nous appelons les concepts permettant de concevoir les modèles décrivant leurs dynamiques. Enfin, nous citons les intérêts de l'étude de tels systèmes.

#### 1.1. Classes des systèmes non linéaires

Un système est un ensemble de composants qui interagissent mutuellement pour atteindre un but déterminé. On caractérise un système par ses entrées  $u$  et ses sorties  $y$ , comme le montre la Figure 1.1 [7,8]. Ces interactions peuvent être représentées par un modèle mathématique décrivant la dynamique du système, c'est-à-dire, l'évolution des sorties et/ou les états en fonction des entrées (la commande). Le modèle d'un système est obtenu par l'application des lois de la physique et/ou par les méthodes d'identification.

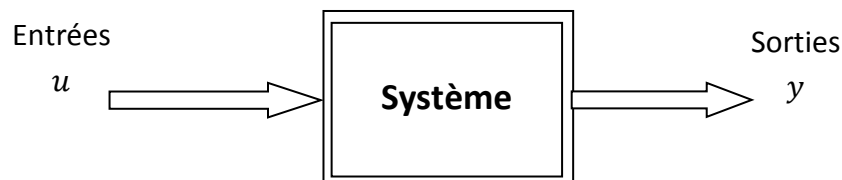


Figure 1.1. Représentation de système.

L'objectif de la commande en boucle fermée d'un système est la correction de son comportement vis-à-vis un critère de performance. Le problème de commande consiste à choisir l'entrée de la commande  $u$  afin d'assurer les performances recherchées. La complexité de cette tâche est intrinsèque à la complexité du système et la précision de son modèle mathématique.

Avant d'aborder le problème de la commande d'un système, il est essentiel de collecter toutes les informations possibles sur ce système afin de lui formuler un modèle mathématique qui sera d'une grande importance dans la conception des lois de commande. Selon l'architecture du système ainsi que la quantité d'information disponibles, les modèles des systèmes sont divisés en différentes classes ; les systèmes monovariabiles, les systèmes multivariables, systèmes invariants et les systèmes variants, les systèmes sous actionnés et les systèmes sur actionnés, les systèmes affine et nonaffine en la commande ...etc [7,8,9].

La modélisation des systèmes se fait généralement sous certaines hypothèses simplificatrices; des dynamiques négligées, paramètres constants, milieu sans perturbations...etc. En revanche, si ces imperfections dans le modèle ne sont pas prises en compte dans la conception de la commande, ils vont causer la dégradation des performances voir l'instabilité du système en boucle fermée. En général, il existe trois sources d'incertitudes ; les perturbations externes, les bruits de mesure et les incertitudes internes.

Bien qu'il existe de nombreuses méthodes géométriques différentielles et/ou algébriques pour représenter la dynamique des systèmes non linéaires, la présentation d'état par un ensemble d'équations différentielles non linéaires est la plus universelle dont la forme générale est la suivante [7,8]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t) \\ y(t) = H(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où :

$t$  : est la variable de temps,

$x(t) \in \mathcal{R}^n$  : est le vecteur d'état global avec  $n$  l'ordre du système,

$u(t) \in \mathcal{R}^m$  : est le vecteur d'entrée de commande et  $m$  le nombre d'entrées,

$y(t) \in \mathcal{R}^p$  : est le vecteur de sortie du système et  $p$  le nombre de sorties,

$F$  et  $H$ : sont des vecteurs composés de fonctions non linéaires.

A partir de cette forme générale, il découle des formes spéciales pour les différentes classes des systèmes non linéaires, par exemple :

Si la fonction  $F$  ne dépende pas explicitement de  $t$  le système (1.1) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \\ y = H(x(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

le système est dit autonome.

Si le signal de commande apparaît linéairement dans le modèle, le système (1.2) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), t) + G(x(t))u(t) \\ y(t) = H(x(t), t) \end{cases} \quad (1.3)$$

avec  $F(x(t))$   $G(x(t))$  sont des fonctions non linéaires.

le système est dit affine en la commande.

Dans le cas de la présence des incertitudes dynamique affectant le système, le système (1.3) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_0(x(t), t) + \Delta F(x(t)) + G_0(x(t), t)u(t) + \Delta G(x(t))u(t) \\ y(t) = H(x(t), t) \end{cases} \quad (1.4)$$

avec  $F_0(x(t))$  et  $G_0(x(t))$  sont des fonctions nominales connues, et  $\Delta F(x(t))$  et  $\Delta G(x(t))$  sont leurs incertitudes respectivement.

Dans le cas de la présence des incertitudes due à des perturbations externes, le système (1.3) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), t) + G(x(t), t)u(t) + d(t, x(t)) \\ y(t) = H(x(t), t) \end{cases} \quad (1.5)$$

avec  $d(t, x(t))$  est une perturbation externe.

Notons que ces représentations d'état présentés ci-dessus si on considère que les deux fonctions  $F$  et  $G$  sont inconnues, alors toutes ces systèmes sont considérés incertains.

L'incertitude des modèles des systèmes non linéaires se rajoute à la complexité inhérente à la leur nature pour rendre la tâche de commande plus ardue. De ce fait, les techniques classiques de commande échouent ici et le recours à des techniques avancées est nécessaire.

## 1.2. Quelques exemples de systèmes mécaniques sous-actionnés

Dans cette section nous proposons, pour pouvoir évoquer la diversité des systèmes mécaniques sous-actionnés, de présenter quelques-uns.

### 1.2.1. Le pendule (inversé) sur chariot

Le système pendule inversé est un système instable en boucle ouvert non linéaire avec des constantes de temps très rapides. Ce système est reconnu pour être une plateforme difficilement stabilisable et il est largement appliqué dans le domaine de la technologie de commande des robots [10,11].

Ce système est composé, comme indique la figure 1.1, d'un chariot mobile en translation sur un axe horizontale et d'un pendule libre et fixé verticalement sur le chariot. Initialement le pendule est en position basse, le but étant de le redresser en position et surtout le maintenir dans cette position. Donc en exerçant une force horizontale  $u(t)$  sur le chariot, il résulte une translation de  $x$  mètres de celui-ci ainsi qu'une rotation de  $\theta$  radians du pendule : quand le pendule penche vers la coté droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite. Et inversement.

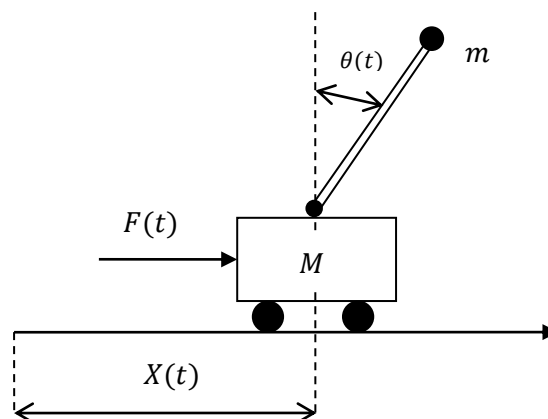


Figure 1.2. Le système pendule inversé

### 1.2.2. Le double pendule inversé

Dans ce type de système, il existe généralement deux architectures différentes : l'architecture en cascade et l'architecture En cascade Dans la suite ces deux types seront présentés.

#### 1.2.2.1. En cascade

Le double pendule inversé en cascade a le même principe que le précédent, la seule différence réside dans le fait qu'il dispose de deux tiges en rotation libre. L'une tournant autour de l'articulation à la base d'un angle  $\theta_1(t)$ , et l'autre avec l'angle  $\theta_2(t)$  autour de la deuxième articulation entre les deux tiges comme illustré par la figure 1.2.

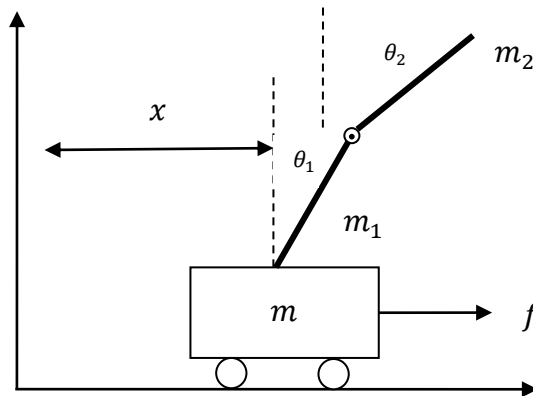


Figure 1.3. Double pendule inversé en cascade.

Le objective de la commande pour ce système est de stabiliser les deux tiges autour de la verticale et les maintenir autour de ce point d'équilibre instable [12].

#### 1.2.2.2. En parallèle

Cette architecture présente deux tiges indépendantes en rotation libre sur le chariot au lieu d'une seule tige (Figure 1.3) [13].

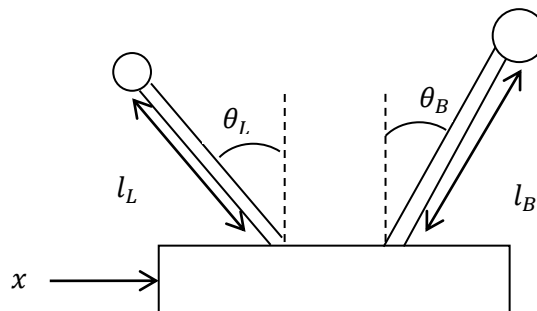


Figure 1.4 Le double pendule inversé parallèle.

L'objectif de la commande consiste à stabiliser les deux tiges autour de la verticale position au point d'équilibre instable et les maintenir dans cette position même en présence de perturbations externes.

### 1.2.3. Le pendule de Furuta

Cette architecture a été conçue par *k.Furuta* [14], Il est composé d'un bras actionné en rotation libre dans le plan horizontal qui facilite le développement de la commande (voir figure 1.4), à son extrémité vient s'ajouter un pendule inversé monté en équilibre instable.

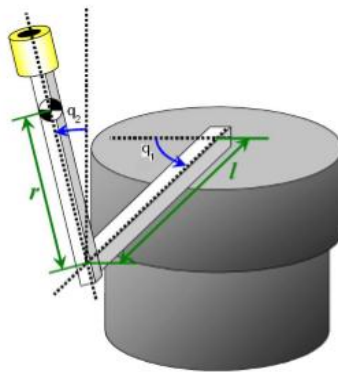


Figure 1.5. Le pendule de Furuta en coordonnées généralisés.

### 1.2.4. Le pendubot

Le pendubot, représenté dans la figure 1.5, est constitué de deux tiges qui peuvent tourner autour de leurs axes respectifs. La tige 1, de masse  $m_1$  et de longueur  $l_1$  est actionnée par un couple de commande  $r$  tandis que la tige 2, de masse  $m_2$  et de longueur  $l_2$ , est en rotation libre autour de la tige 1 [3,15].

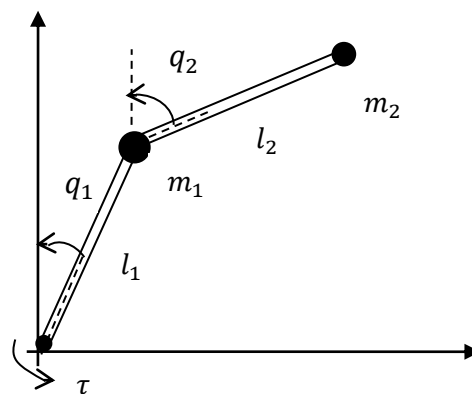


Figure 1.6. Le pendubot en coordonnées généralisés.

À vitesse nulle, le pendubot admet une infinité de points d'équilibre instables donnés par  $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_2 = 0, q_1 = \text{cet}$  correspondant à la position haute de la tige 2 pour toute position de la première tige, et une infinité de points d'équilibre stables donnés par  $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0, q_2 = \pi$ , correspondant à la position basse de la tige 2 [3,15] .

### 1.2.5. L'acrobot

L'acrobot est à la même structure que le pendubot. La seule différence est que, dans L'acrobot, l'articulation joignant les 2 tiges est actionnée par un certain couple come illustre dans la figure 1.2.

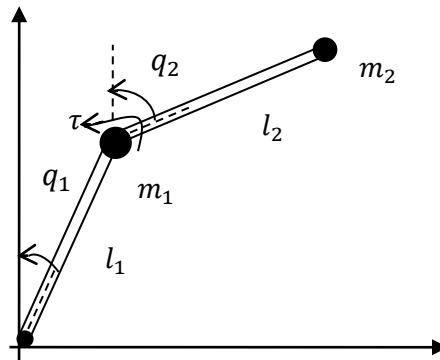


Figure 1.7 L'acrobot en coordonnées généralisés.

Ce système aussi admet une infinité de points d'équilibre stables et instables. L'ensemble des points d'équilibre correspond aux positions où la verticale passant par le centre de gravité (ce dernier étant dans le demi-plan supérieur) du système global passe aussi par l'axe de rotation de la tige 1. Les positions d'équilibres stables sont identiques aux points instables, la seule différence étant que le centre de gravité est dans le demi-plan inférieur [16].

### 1.3. Modélisation mathématique des systèmes mécaniques

L'étape de modalisation du comportement d'un système est une étape importants dans la concevoir d'une loi de commande appropriée. Afin de pouvoir modéliser un système mécanique en utilisant des équations mathématiques, on commence par choisir un ensemble de coordonnées permettant de le décrire. Ces coordonnées sont généralement nommées coordonnées généralisées. Cette dénomination provient de l'époque où l'utilisation des coordonnées cartésiennes était la plus naturelle [15].

L'intérêt du choix des coordonnées généralisées réside dans la simplification de la démarche de la modélisation puis de l'analyse de ces systèmes. Une fois les coordonnées généralisées choisies, on peut procéder de deux manières :

- Soit on fait une étude des forces agissant sur le système, et on applique la seconde loi de la dynamique de Newton, disant que la Somme de forces appliquées est égale à la masse multipliée par l'accélération.
- Soit on étudie les différentes énergies échangées par le système. Puis on exprime le Lagrangien avant d'appliquer la formule d'Euler-Lagrange. Cette deuxième méthode, en général plus simple à mettre en œuvre, est décrite dans ce qui suit.

Pour illustrer l'idée générale de l'utilisation de ces deux méthodes, on propose dans la suite l'exemple suivant.

On considère un système mécanique composé de corps solides non déformables. Le lagrangien qui présente l'énergie mécanique globale est définie par la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle (au signe près). Plus concrètement, si on considère que  $q$  est le vecteur des coordonnées de dimension  $n$ ,  $E_e$  est l'énergie cinétique et  $E_p$  est l'énergie potentielle, le lagrangien s'écrit sous la forme :

$$I(q, \dot{q}) = E_e - E_p = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - E_p(q) \quad (1.1)$$

Où :  $M(q)$  est la matrice d'inertie qui définie positive.

L'application de l'équation d'Euler-Lagrange qui donnée par la relation suivante permet de définir les équations différentielles qui décrivent la dynamique d'un système mécanique:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial I}{\partial q} = F(q)u \quad (1.2)$$

Où :  $u \in \mathbb{R}^*$  représente le vecteur des forces externes et  $F(q) = (f_1(q), \dots, f_m(q))$  représente la matrice correspondante, qui répartit les forces sur le système.

À partir de l'équation (1.2) on trouve les équations du mouvement de ce système comme suit :

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(q) = e_k^T F(q)u. \quad k = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

Où  $e_k$  est la base standard de  $\mathbb{R}^n$ ,  $g_k(q) = \partial_{q_k} E_p(q)$ .  $m_{kj}$  sont les éléments de matrice d'inertie et  $\Gamma_{ij}^k(q)$  sont les symboles de Christoffel définis par :

$$\Gamma_{ij}^k(q) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial m_u(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_u(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_u(q)}{\partial q_k} \right] \quad (1.4)$$

L'écriture de la formule précédente sous une forme vectorielle donne :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u \quad (1.5)$$

Où  $M(q)$  est la matrice d'inertie et  $C(q, \dot{q})$  est une matrice composée des éléments :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n T_{kj}^i(q) \dot{q}_k \quad (1.6)$$

Avec :

$C(q, \dot{q})\dot{q}$  contient deux types d'éléments. Ceux qui font intervenir les produits  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  pour  $i = j$  sont appelés forces centrifuges. Ceux qui correspondent aux indices  $i \neq j$  sont les forces de Coriolis. Le vecteur  $G(q)$  représente les forces de gravité [15,17].

#### 1.4. Systèmes mécaniques complètement actionnés

Les systèmes mécanique complètement actionné sont des systèmes caractérisé par un nombre d'entrées de commande égal au nombre de degrés de liberté. Dans le cas du système mécanique (1.5). Il est dit complètement actionné si la matrice  $B(q)$  est une matrice carrée inversible. Par conséquent, la commande par linéarisation exacte (connue aussi sous le nom de "Feedback linearization") au sens entrée-état ou bien au sens entrée-sortie est applicable. Cette commande est définit comme suit :

$$u = B(q)^{-1}(M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) \quad (1.7)$$

On obtient un double intégrateur  $\ddot{q} = v$  et on peut appliquer les concepts de l'automatique linéaire classique. Ceci signifie que le contrôle des systèmes mécaniques complètement actionnés et sans présence des perturbations ne pose pas de défis en termes de contrôle.

#### 1.5. Systèmes mécaniques non holonomes

Contrairement dans les systèmes mécaniques complètement actionnés, dans les systèmes mécaniques sous-actionnés la linéarisation par bouclage statique n'est plus possible pour toute son dynamique.

La forme générale d'une classe des systèmes sous-actionnés non linéaires incertains à deux degrés de liberté est donnée par les équations suivant [1, 18] :

$$M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) = 0 \quad (1.8)$$

$$M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) = \bar{B}(q)u \quad (1.9)$$

Avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, G(q) = \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{bmatrix}, B(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}(q) \end{bmatrix} \text{ et} \\ = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Les auteurs dans [9] ont montré que la partie actionnée du système (de dimension m) peut être linéarisée par un bouclage statique. Cette procédure de linéarisation partielle facilite la manipulation des équations et la synthèse des lois de commande. Dans ce cas, En appliquant la loi de commande suivante:

$$u = \bar{B}^{-1}(q) \left( \left( M_{22} \frac{M_{12}M_{21}}{M_{11}(q)} \right) U - \frac{M_{21}(q)}{M_{11}(q)} C_1(q, \dot{q}) - \frac{M_{21}(q)}{M_{11}(q)} G_1(q) + G_2(q, \dot{q}) + G_2(q) \right) \quad (1.10)$$

à l'équation de système (1.9), on obtient:

$$M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{q}_2 = v \quad (1.11)$$

## 1.6. Intérêt de l'étude des systèmes sous-actionnés

L'étude des systèmes sous-actionnés n'est pas faite par plaisir. Dans cette section nous proposons de présenter quelques exemples d'application pour bien illustrée son importance.

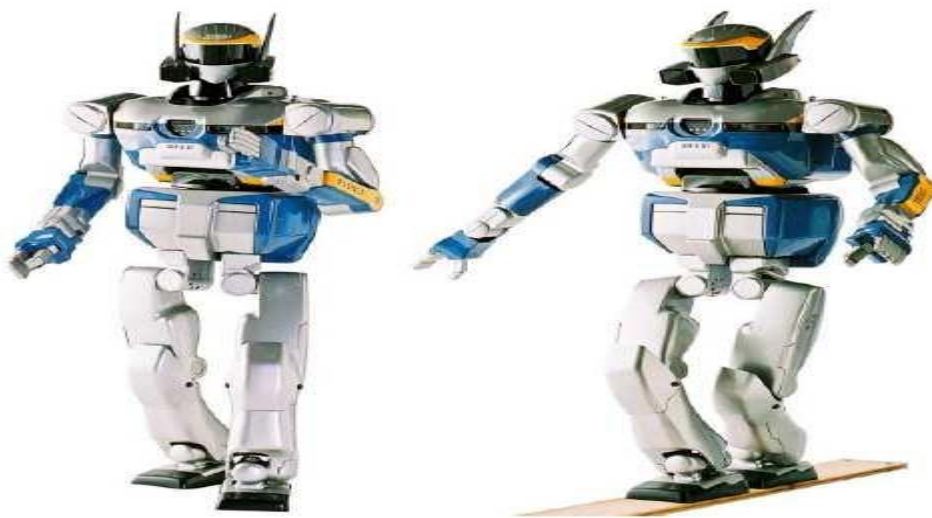
### 1.6.1. En médecine

L'homme est vu comme un double inverse en série, dont les deux axes de rotations principales sont les chevilles et hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses (remplacement chirurgical d'un organe; la pièce ou l'appareil de remplacement prothèse dentaire) pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle de double pendule inventé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse [19].

### 1.6.2. En robotique

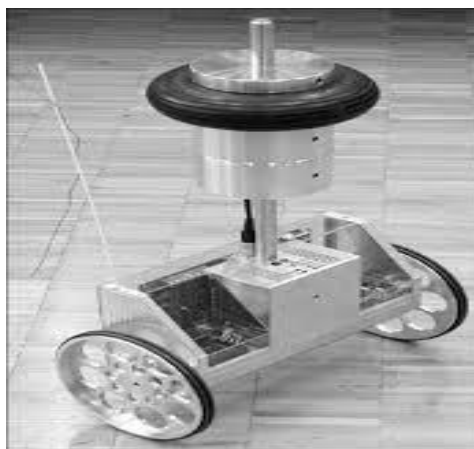
Dans le même ordre d'idée, un robot est vu comme un pendule inverse. Pour maintenir le robot en équilibre il suffit de stabiliser le pendule inverse correspondant à sa position verticale au cours de son déplacement et en présence d'autres perturbations [20]. A l'occasion nous citons quelques exemples des robots qui sont déjà étudiés et conçus à base de ce principe:

- **Le robot BIPED:** peut se présenter par deux doubles pendules inverses en série, dont les pendules sont couplés par une tige avec deux articulations.



*Figure 1.8.* Le robot BIPED.

- **Le robot JOE:** Il est vu comme un pendule inverse simple (une seule tige) se déplaçant à l'aide de deux roues

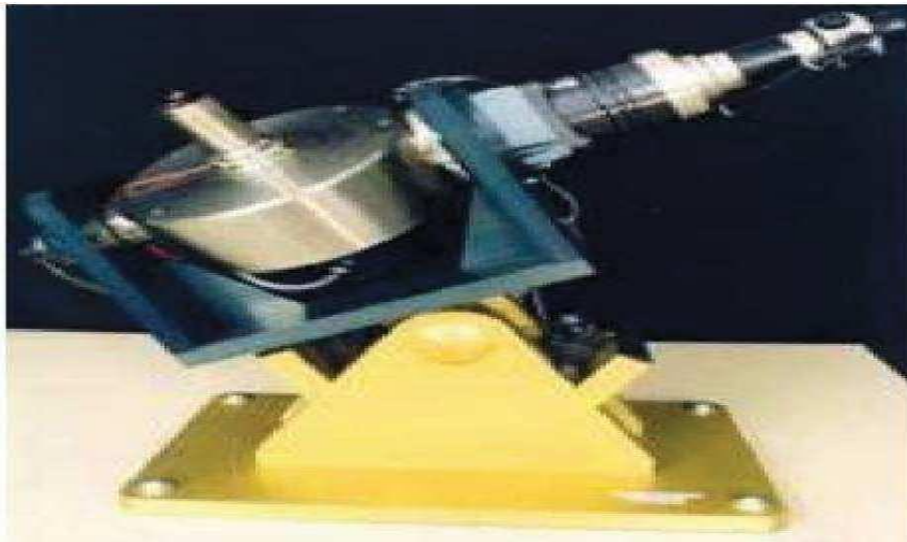


*Figure 1.9.* Le robot JOE.

### 1.6.3. Dans l'aérospatiale

Dans ce domaine aussi, l'étude des systèmes sous-actionnés a une grande importance, par exemple pour commander et stabiliser l'attitude du satellite, le lancement des fuses... etc.

Pour stabiliser l'attitude d'un satellite par les actionneurs gyroscopiques, les actionneurs gyroscopiques également appelés girdynrs (CMG: Control Moment Gyro) constituent un nouveau système d'actionneurs qui permettent de générer des couples dynamiques de commande de bsculement d'attitude d'un satellite l'expérience consiste à le rappeler vers la position d'équilibre (instable). Donc il est vu comme un pendule inverse [21].



*Figure 1.10.* Pendule gyroscopique inversé.

Lors du lancement d'une fuse, elle est vue comme un pendule inverse simple. Donc il faut maintenir sa position verticale par rapport à la terre, et pour cela, de moteurs à propulsion sont installés dans les deux cotés de la fusée (gauche et droite).

### 1.6.4. Dans le domaine recherché

Vu leur complexité, les systèmes sous-actionnés sont très utilisés pour tester des lois de command modems.

### 1.7. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à quelques généralités sur les systèmes mécaniques sous-

## *Chapitre 1- Introduction aux systèmes mécaniques sous-actionnés*

actionnés. Nous avons commence par citer quelques exemples des systèmes mécaniques sous-actionnés. Puis nous avons donné l'approche générale de leur modélisation mathématique. Enfin, nous abordé l'intérêt de l'étude de cette classe de systèmes. Dans la suit de cette mémoire nous proposons d'utilise le pendule inversé pour simuler et teste une loi de commande de type mode de glissant.

*CHAPITRE 2 :*  
*LA COMMANDE PAR MODE*  
*GLISSANT*

## **2.1. Introduction**

Les lois de commande classiques du type PID sont très efficaces dans le cas des systèmes linéaires à paramètres constants. Pour des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres non constants, ces lois de commande peuvent être insuffisantes car elles ne sont pas robustes surtout lorsque les exigences sur la précision et autres caractéristiques dynamiques du système sont strictes. On doit faire appel à des lois de commande insensibles aux variations des paramètres, aux perturbations et aux non linéarités. Les lois de commande dite à structure variable constituent une solution à ces problèmes.

La commande à structure variable (CSV) est, par sa nature, une commande non linéaire, elle est basée sur la commutation de fonctions des variables d'état, utilisées pour créer une variété ou hypersurface de glissement, dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de l'hypersurface. Quand l'état est maintenu sur cette hypersurface, le système se trouve en régime glissant. Sa dynamique est alors insensible aux perturbations extérieures et paramétriques tant que les conditions du régime glissant sont assurées [22].

Dans la pratique, l'utilisation de cette technique de commande a été longtemps limitée par les oscillations liées aux commutations de la commande et qui peuvent se manifester sur les grandeurs asservies. Depuis, de nombreuses solutions ont été proposées permettant de réduire ces oscillations : augmentation de la fréquence de commutation, commande continue dans une bande autour de la variété de glissement ou décomposition de la commande en une composante continue de basse fréquence et une commande discontinue de haute fréquence et la méthode de la couche limite où la composante discontinue de la commande est remplacée au voisinage de l'hypersurface de glissement par une fonction continue.

Malheureusement, cette technique de commande conçu ne peut pas appliquer directement sur les systèmes sous-actionnés, cela est due au couplage qui existe entre les sorties et les entrées, et une modification au niveau de la surface de glissement ou la loi de commande (combinaison des lois de commande) est nécessaire.

Dans ce chapitre nous allons donner quelques notions fondamentales de La commande par mode glissant. On commence par la représentation des systèmes de réglage

à structure variable et les types de commutation des systèmes à structure variable. Puis nous allons présenter des conceptions de la commande par mode glissement, ensuite, le problème générale de cette commande (phénomène de Chattering) et des quelque solutions existent. A la fin du chapitre, nous allons appliquer cette type commande sur un système complètement actionnée.

## ***2.2. Système à structure variable***

La commande à structure variable par régime glissant, apparue depuis le début des années 60, grâce aux résultats théoriques du mathématicien A.F. Philipov, est une commande non linéaire basée sur l'utilisation d'un terme discontinu. Après les travaux développés par l'équipe du professeur Emelyanov en union Soviétique et à cause des problèmes de broutements et de réalisation, la commande à structure variable a attendu la fin des années soixante dix pour connaître sa réapparition et son épopée avec l'avancée de l'électronique et l'informatique. En effet, cette commande est basée sur une commutation à haute fréquence pour un meilleur régime glissant [23].

## ***2.3. Types de commutation des systèmes à structure variable***

Dans les systèmes à structure variable utilisant la commande par mode glissant, on peut trouver trois configurations de base pour la synthèse des différentes lois de commandes. La première correspond à la structure la plus simple, appelée structure par commutation au niveau de l'organe de commande. La deuxième structure fait intervenir la commutation au niveau d'une contre-réaction d'état. Et enfin, la dernière structure est une structure par commutation au niveau de l'organe de commande avec ajout de la "commande équivalente".

### ***2.3.1. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande***

Cette structure de commande est la plus classique et la plus utilisée, où il est basé à la commutation au niveau de l'organe de commande comme montré par la figure 2.1 et par la loi de commutation  $S(x_s)$  suivante [24]:

$$u(t) = \begin{cases} U_{max} & \text{pour } s(x_s) > 0 \\ U_{min} & \text{pour } s(x_s) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Notons que cette structure permet de prépositionner l'état futur du système grâce à la commande équivalente qui n'est rien d'autre que la valeur désirée du système en régime

permanent.

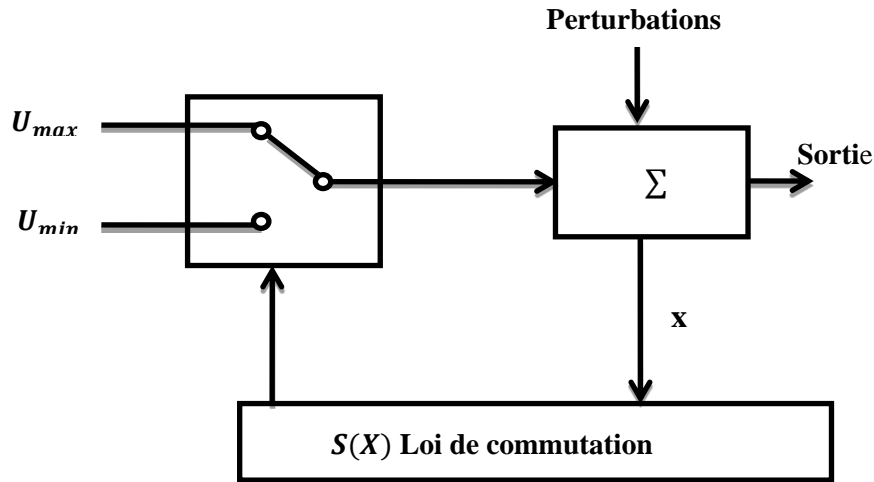


Figure 2.11. SCSV avec changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande.

### 2.3.2. Structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état

Cette structure est basée sur le choix du retour d'état par «  $-K_1^T$  » ou «  $-K_2^T$  » qui se fait à l'aide de la condition suivante

$$U_{cm}(t) = \begin{cases} U_{cm1}(t) = -K_1^T X_s, & \text{pour } S(X_s) > 0 \\ U_{cm2}(t) = -K_2^T X_s, & \text{pour } S(X_s) < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Le schéma de cette configuration est représenté par la figure 2.2 [24]

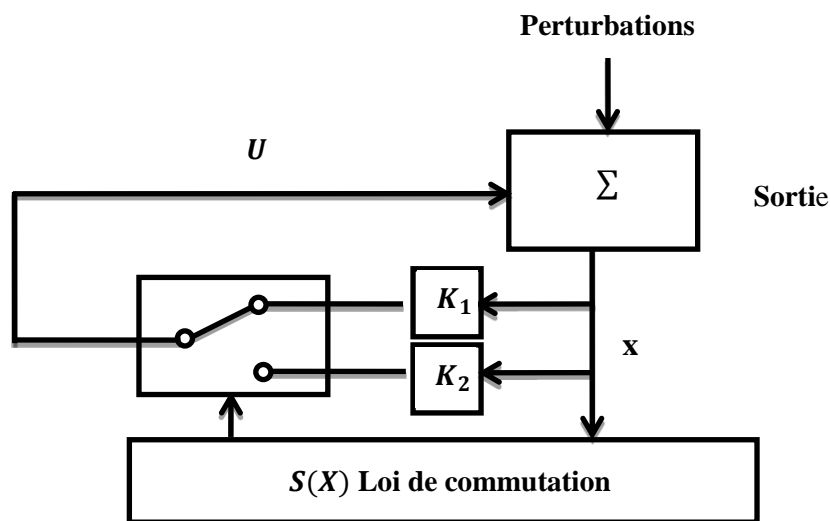


Figure 2.12. SCSV avec changement de structure par commutation d'une contre réaction d'état variable.

### 2.3.3. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande

Une telle structure, dont le principe est montré sur la figure 2.3, présente un avantage réel. Elle permet de pré-positionner l'état futur du système grâce à la commande équivalente qui n'est rien d'autre que la valeur désirée du système en régime permanent. L'organe de commande est beaucoup moins sollicité, mais on est plus dépendant des variations paramétriques du fait de l'expression de cette commande équivalente [24].

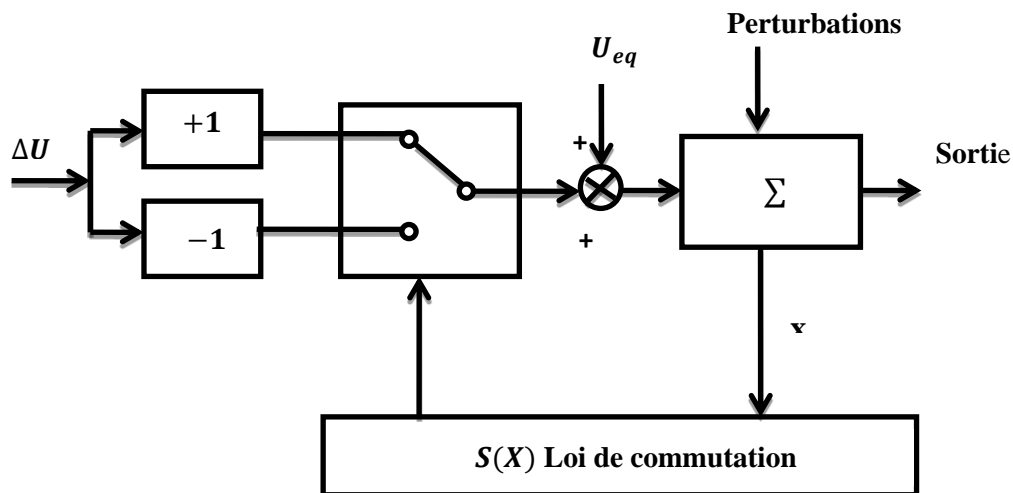


Figure 2.13. Structure de régulation par ajout de la commande équivalente.

### 2.4. Principe de fonctionnement de la commande par mode glissant

L'idée principale de la commande par mode glissant consiste premièrement d'attirer les états du système dans une région convenablement sélectionnée, puis de concevoir une loi de commande qui maintiendra toujours le système dans cette région. En résumé, une commande par régime glissant est divisée en deux parties (voir Figure 2.4) [24,25]:

- la première partie est basée sur la détermination d'une région d'espace d'état telle qu'une fois que le système se trouve dans cette région, il ait le comportement désiré.
- La deuxième partie est basée sur la définition d'une loi de commande qui conduise le système jusqu'à cette région d'espace d'état.

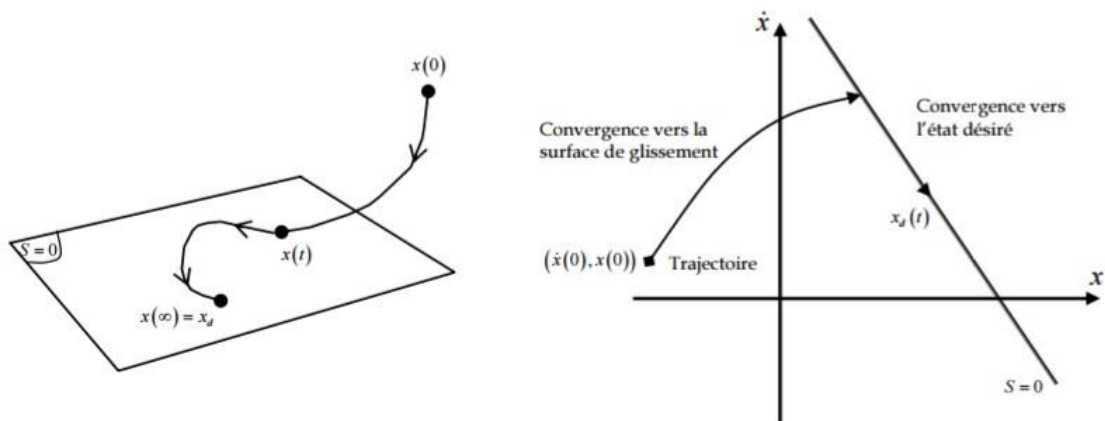


Figure 2.14. Convergence du système glissant.

## 2.5. Définition du régime glissant

La technologie des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement.

### 2.5.1. Définition du régime glissant idéal

Le régime glissant idéal correspond à oscillation de fréquence infinie ( $\infty$ ) et d'amplitude nulle (0) [26,27]

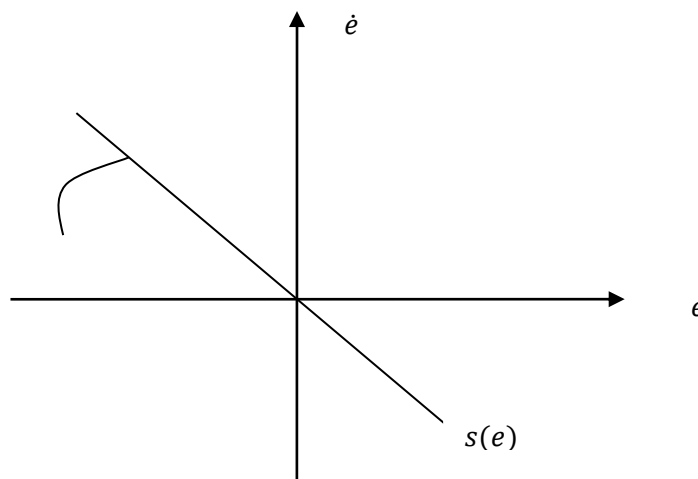


Figure 2.15. Régime glissant idéal.

### 2.5.2. Définition du régime glissant réel

En pratique l'organe de commutation est réaliser à partir des relais qui présente des imperfections comme le retard de commutation, alors la trajectoire de régime de glissant ne peut pas osciller idéalement à une fréquence infinie. Glissement réel fréquence de commutation finie, amplitude oscillatoire [26,27]

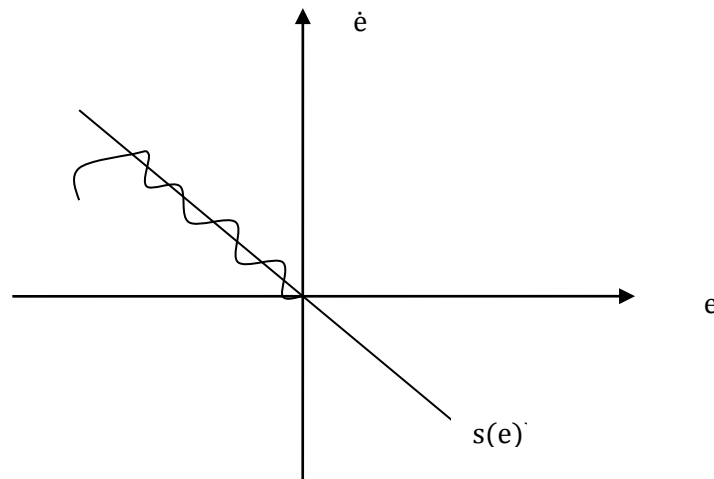


Figure 2.16. Régime glissant réel.

### 2.6. Conception de la commande par mode glissant

Dans le développement d'un régulateur mode de glissement le problème de la stabilité et le problème des performances désirées est pris en charge systématiquement. La mise en œuvre de cette commande nécessite les étapes suivantes :

- Le choix des surfaces de glissement.
- L'établissement des conditions d'existence et de convergence.
- La détermination de la loi de commande.

Dans cette partie nous considérons une classe des systèmes non linéaires donnée par son modèle d'état suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \quad (2.3)$$

où :

$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  est le vecteur d'état du système,  $y$  est la sortie du système,  $u$  est l'entrée de commande, et  $f(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions continues non linéaires.

### 2.6.1. Choix de surface de glissement

La forme générale de la surface de glissement, qui permet généralement de garantir la convergence d'une variable de sortie  $x$  vers sa valeur désirée, est celle proposée par « J.J.Slotin » et qui donnée par suit [7].

$$S(x) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_x \right)^{r-1} .e(x) \quad (2.4)$$

Avec :

$e(x)$  : est l'écart de la variable à réguler.

$\lambda_x$  : est une constante positive choisie.

$r$  : est le degré relatif.

### 2.6.2. Condition d'existence du mode de glissement :

Le choix de la fonction de glissement étant fait, la deuxième étape consiste à concevoir une loi de commande qui puisse amener le vecteur d'état à converger vers la surface et y demeurer ( $S = 0$ ). Pour cela, il faut que la loi de commande soit conçue de telle manière à ce que la surface  $S$  soit attractive.

Pour déterminer la condition d'attractivité, considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} s(x)^2 \quad (2.5)$$

Une condition nécessaire et suffisante, appelée condition d'attractivité, pour qu'une variable de glissement  $s(x, t)$  tende vers 0 est que la dérivée temporelle de soit définie négative :

$$\dot{S}(x).S(x) < 0 \quad (2.6)$$

Si la condition (2.4) est vérifiée, alors la variable de glissement et sa dérivée sont de signe contraire quel que soit le temps et que 0 est un centre attracteur pour  $S$ . [28] Le temps de convergence, ou le temps d'atteinte « reaching time » dépend directement du choix de  $S$ .

### 2.6.3. Calcul de la loi de commande :

La commande par mode glissant est composée de deux parties, la première appelée commande équivalente est continue  $u_{eq}$ . La deuxième est discontinue  $u_{glis}$  [29].

$$u = u_{eq} + u_{glis} \quad (2.7)$$

Avec :

$u_{eq}$  : La commande équivalente

$u_{glis}$  : La commande glissement

La commande équivalente assure le maintien du système sur la surface de glissement, elle est déterminée par le modèle du système, dans ce cas il s'agit d'un modèle en immersion linéaire ou non linéaire. Cette partie est conçue avec la méthode de la commande équivalente comme suit :

$$\dot{S}(x) = \left(\frac{dS}{dx}\right)^T \frac{dx}{dt} = 0 \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^T (f(x) + g(x)u) = 0 \quad (2.9)$$

$$u_{eq} = \left[\left(\frac{dS}{dx}\right)^T g(x)\right]^{-1} \left(\frac{dS}{dx}\right)^T f(x), \text{ avec } \left(\frac{dS}{dx}\right)^T g(x) \neq 0 \quad (2.10)$$

La commande glissement représente la partie discontinue, Il est constitué de la fonction signe "sign" de la surface de glissement  $S$ , multipliée par une constante de glissement  $K_{glis}$ . Cette commande est déterminée pour garantir l'attractivité de la variable à contrôler vers la surface et satisfaire la condition de convergence. On peut définir cette commande comme suit [29]:

$$U_{glis} = K_{glis} \cdot \text{Sign}(S(x)) \quad (2.11)$$

## 2.7. Broutement ( Chattering ) :

Un régime glissant idéal requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie. Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner un phénomène de broutement, appelé réticence ou "chattering" en anglais. Celui-ci se caractérise par de fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement. Les principales raisons à l'origine de ce phénomène sont les limitations des actionneurs ou les retards de commutation au niveau de la commande. Ces commutations détériorent la précision de la commande et peuvent

s'avérer néfastes pour l'organe de commande en provoquant une détérioration prématurée des systèmes mécaniques et une élévation de température dans les systèmes électriques (perte d'énergie non négligeable) [24,30].

## 2.8. Réduction du phénomène de broutement (*chattering*)

Dans le but de réduire ou éliminer ce phénomène, plusieurs solutions ont été apportées. Dans cette section, nous proposons de décrire les techniques de limitation de la condition de glissement [24,30]:

- Remplacer la fonction  $sign(s)$  par une fonction  $sat(s)$ , Alors la composante discontinue dévient:  $u_{glis} = -ksat(s)$

$$sat(s) = \begin{cases} \frac{s}{\Phi} & si \quad |s| \leq \Phi \\ sign(s) & si \quad |s| > \Phi \end{cases} \quad (2.12)$$

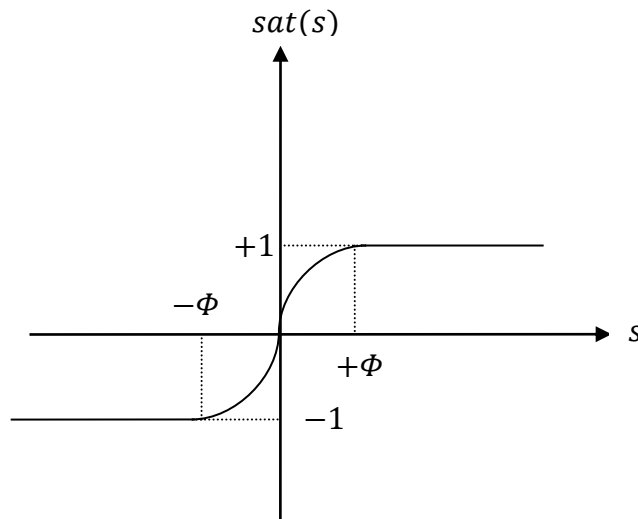


Figure 2.17. Fonction de saturation sat.

- Remplacer la fonction  $sign(s)$  par une fonction  $cont(s)$ , la composante discontinue  $u_{glis} = -kcont(s)$

$$cont(s) = \begin{cases} \frac{s}{|s|+\delta} & si \quad |s| \leq \Phi \\ sign(s) & si \quad |s| > \Phi \end{cases} \quad avec \delta > 0 \quad (2.13)$$

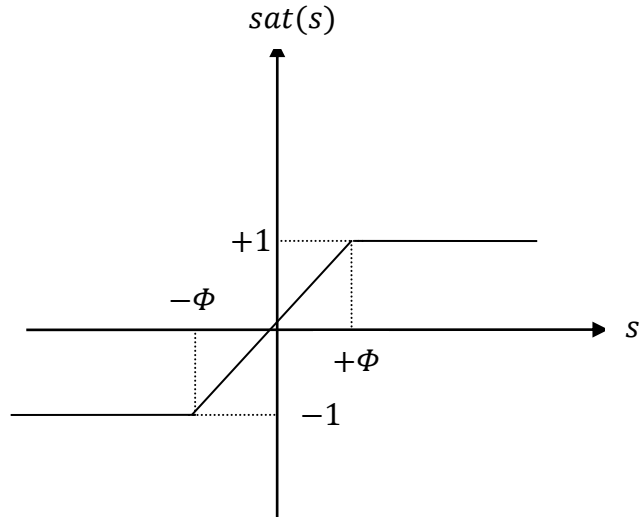


Figure 2.18. Fonction de saturation cont.

## 2.9. Application de la commande par mode de glissant

### 2.9.1. Position de problème

Afin de valider les performances de la loi de commande par mode de glissant sur les systèmes complètement actionnée, on considère le problème de suivi de trajectoire d'un pendule inversé. Sa dynamique est donnée par son modèle d'état suivant [31] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Avec :

$$f(x) = \frac{g \sin(x_1) - (m_p l x_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1)) / (m_c + m_p)}{l \left( \frac{4}{3} - m_p \cos^2(x_1) / (m_c + m_p) \right)} \quad (2.15)$$

$$g(x) = \frac{\cos(x_1) / (m_c + m_p)}{l \left( \frac{4}{3} - m_p \cos^2(x_1) / (m_c + m_p) \right)} \quad (2.16)$$

avec  $x_1$  est la position angulaire du pendule et  $x_2$  sa vitesse angulaire. Les valeurs des paramètres du système sont:  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $m_c = 1\text{kg}$ ,  $m_p = 0.1\text{kg}$ ,  $l = 0.5\text{m}$ .

L'objectif est de forcer le signal de sortie du système  $y$  à suivre la trajectoire désirée  $y_d = 0.5 \sin(t)$ , avec les conditions initiales suivantes:  $x_1(0) = 0.2$ ,  $x_2(0) = 0$ .

L'erreur de poursuite est définie par :

$$e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (2.17)$$

et la surface de glissement est définie par :

$$s(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e(t), \lambda > 0 \quad (2.18)$$

Avec :  $n = 2$

Alors:

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t) \quad (2.19)$$

La solution de l'équation  $s(t) = 0$  implique que l'erreur de poursuite  $e(t)$  converge vers zéro avec une certaine constante de temps [7], par conséquent, l'objectif de la commande revient alors à forcer le signal  $s(t)$  à converger vers zéro lorsque le temps  $t$  tends vers l'infini.

L'équation de la dynamique de  $s$  peut s'écrire comme suit :

$$\dot{s} = \lambda e(t) + \dot{y}_d - f(x) - g(x)u \quad (2.20)$$

En utilisant la technique de la commande équivalente on trouve que :

$$u_{eq} = \frac{1}{g(x)}(\lambda e(t) + \dot{y}_d - f(x)) \quad (2.21)$$

et on définit la partie discontinue comme suit :

$$U_{glis} = \frac{k}{g(x)} \text{Signe}(S(x)) \quad (2.22)$$

À partir de l'équation (2.) et (2.) on peut définir la loi de commande globale comme suit :

$$u = u_{eq} + U_{glis} = \frac{1}{g(x)}(\lambda e(t) + \dot{y}_d - f(x) + k \text{Sign}(S(x))) \quad (2.23)$$

Les valeurs des paramètres de la commande sont choisies comme suit :  $k = 7,5$  et  $\lambda = 5$ .

En remplaçant cette loi de commande dans la dynamique de  $S_1$ , on obtient :

$$\dot{s} = -k \text{Sign}(S(x)) \quad (2.24)$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad (2.25)$$

Par dérivation, on obtient :

$$\dot{V} = S\dot{S} = -K|S| \leq 0 \quad (2.26)$$

on a  $K > 0$  alors on peut conclure, que  $S$  converge vers zéro ce qui implique que  $e(t)$  et  $\dot{e}(t)$  converge aussi vers zéro.

### 2.9.2. Résultats de simulation

Les Figures 2.9 et 2.10 présentent respectivement les résultats de simulation de la position  $y = x_1$  et de la vitesse  $\dot{y} = x_2$ .

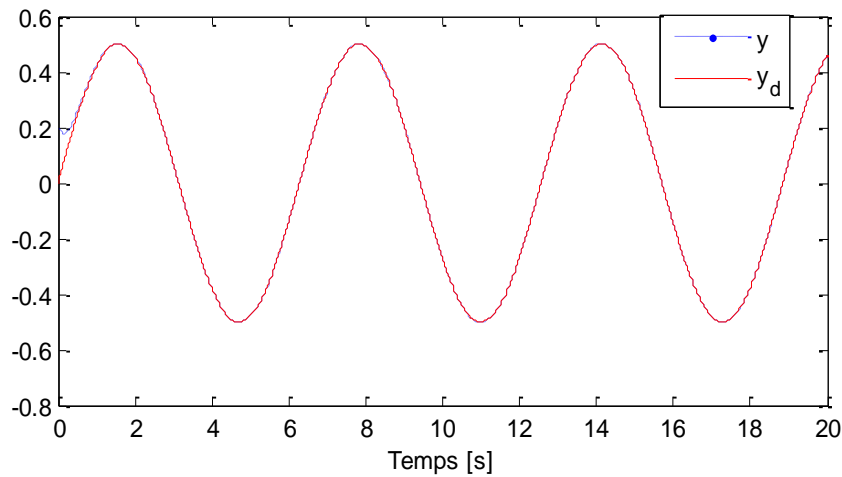


Figure 2.19. Position angulaire  $y = x_1$ , trajectoire désirée  $y_d$ .

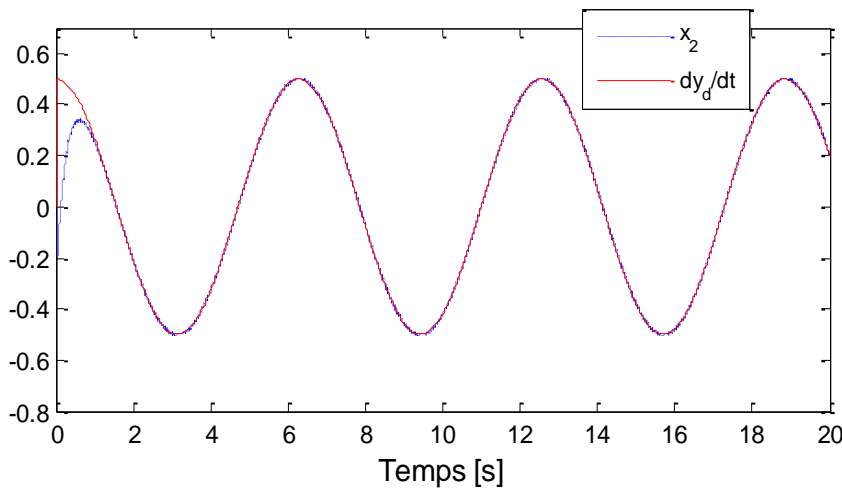


Figure 2.20. Vitesse angulaire  $\dot{y} = x_2$ , dérivée de la trajectoire désirée  $\dot{y}_d$ .

La Figure 2.11 présente l'évolution du signal de commande  $u$ , tandis que la Figure 2.12 présente la trajectoire de la surface de glissement. Ces résultats montrent que les sorties du système convergent vers leurs trajectoires désirées, et que le signal de la commande est borné.

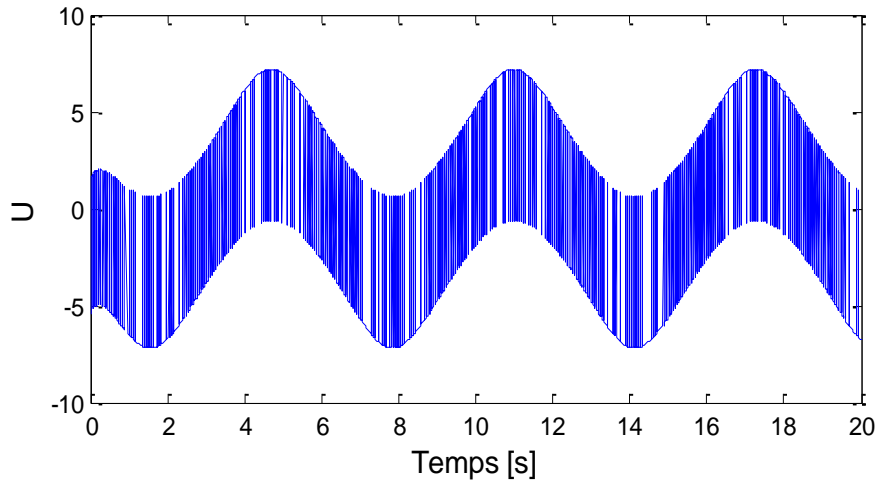


Figure 2.21. Evolution du signal de commande  $u$ .

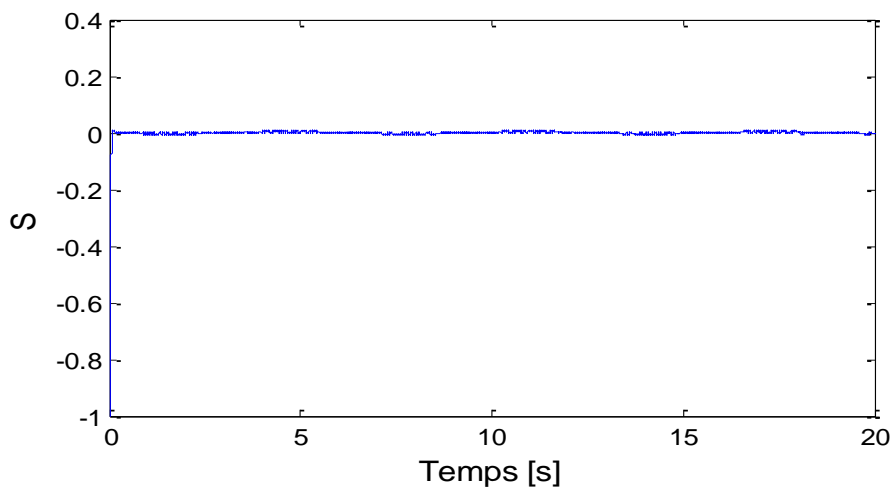


Figure 2.22. Trajectoire de la surface de glissement  $S$ .

## 2.10. Conclusion

Dans la technique de commande par mode glissant la loi de commande change d'une manière discontinue selon des conditions déterminées. Elle contient deux termes ; le premier terme est le terme continu (commande équivalente), il est utilisé pour pré-positionner l'état futur de système et le deuxième terme est le terme discontinu de

## *Chapitre 2 - Aspects théoriques de la commande par mode glissant*

fréquences élevée (commande glissant), il est utilisé pour assurer l'attractivité de la surface et la compensation des perturbations externes ou des erreurs de modélisation.

Dans ce chapitre, on a présenté les idées clés de la commande par modes glissant tel que la définition des systèmes à structure variable, le principe de fonctionnement de cette commande, la définition du régime glissant, puis les étapes de conception d'une commande par mode glissant. À la fin de ce chapitre, nous proposons de l'application de cette stratégie de commande pour traiter le problème de suivi de trajectoire d'un pendule inversé.

*CHAPITRE 3 :*  
*COMMANDE PAR MODE*  
*GLISSANT DES SYSTEMES*  
*SOUS-ACTIONNES*

### **3.1. Introduction :**

Comme il est mentionné au chapitre 1, la conception d'une loi de commande pour des systèmes MIMO sous-actionnés est plus complexe que celle des systèmes MIMO complètement actionnée. Cela est due au couplage qui existe entre les sorties et les entrées. Différents schémas de commande ont été développés pour des systèmes sous-actionnés au cours des deux dernières décennies.

Le problème de stabilisation des systèmes mécaniques sous-actionnés constitue un domaine passionnant pour les automaticiens, présentant plusieurs types de problèmes, et pouvant chacun faire appel à des techniques de contrôles différentes [32,15]. A titre d'exemple on peut citer :

- La stabilisation locale en un point d'équilibre. Elle consiste à stabiliser la partie non actionnée en sa position d'équilibre instable, et la partie actionnée en une position finale désirée partant de conditions initiales suffisamment proche de l'équilibre désirée.
- La stabilisation orbitale où le système en boucle fermée auto-génère une orbite périodique.
- La stabilisation globale qui consiste à amener la partie non actionnée de n'importe quelles conditions initiales à la position d'équilibre instable et la partie actionnée à une position finale désirée.

En effet, La commande par mode de glissement a été appliquée avec succès à des classes de systèmes sous-actionnés ayant des dynamiques connues [33-39]. Dans ce chapitre nous proposons deux schémas de commande de type mode glissant pour la stabilisation globale d'un système non linéaire sous-actionné de deuxième ordre. Dans ces deux approches, on propose d'utiliser une seule loi de commande  $u$  comme une combinaison des deux lois de commande équivalente, aussi des résultats de simulation est présentés afin de valider les performances de ces lois de commande.

### **3.2. Position du problème**

Considérons une classe des systèmes sous-actionnés non linéaires incertains à deux degrés de liberté donnée par son modèle d'état suivant [40,41,42]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + b_1(x)u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + b_2(x)u \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  est le vecteur d'état du système supposé disponible pour la mesure,  $y = [x_1, x_3]^T$  est la sortie du système,  $u$  est l'entrée de commande,  $f_1(x), f_2(x), b_1(x)$  et  $b_2(x)$  sont des fonctions continues non linéaires inconnues.

**Hypothèse:** Les gains de commande  $b_1(x)$  et  $b_2(x)$  sont bornés, non nuls et de signe commun inconnu, c'est-à-dire  $0 < \underline{b}_i \leq |b_i(x)| < \bar{b}_i$ ,  $i = 1, 2$ , où  $\underline{b}_i$  et  $\bar{b}_i$  sont des constantes positives inconnues.

**Objectif:** Notre objectif est de développer une loi de commande  $u$  pour assurer la convergence de  $x_1$  et  $x_3$  respectivement vers les valeurs désirées  $x_{d1}$  et  $x_{d3}$ , sous la contrainte que tous les signaux impliqués dans la boucle de commande doivent être bornés.

Définissons les erreurs suivantes

$$e_1(t) = x_1(t) - x_{d1} \quad (3.2)$$

$$e_2(t) = x_3(t) - x_{d3} \quad (3.3)$$

avec:  $x_{d1}$  et  $x_{d3}$  sont des valeurs constantes désirées.

Les surfaces de glissement correspondantes sont définies par :

$$S_1(t) = \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1, \lambda_1 \geq 0 \quad (3.4)$$

$$S_2(t) = \dot{e}_2 + \lambda_2 e_2, \lambda_2 \geq 0 \quad (3.5)$$

Les équations dynamiques de  $S_1$  et  $S_2$  sont alors :

$$\dot{S}_1 = \lambda_1 x_2 + f_1(x) + b_1(x)u \quad (3.6)$$

$$\dot{S}_2 = \lambda_2 x_4 + f_2(x) + b_2(x)u \quad (3.7)$$

Si les fonctions  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $b_1(x)$  et  $b_2(x)$  sont connues exactement, on définit la commande équivalente pour chaque sous-système comme suit :

$$u_1 = -b_1^{-1}(x)(\lambda_1 x_2 + f_1(x)) \quad (3.8)$$

$$u_2 = -b_2^{-1}(x)(\lambda_2 x_4 + f_2(x)) \quad (3.9)$$

Puisque l'objectif est de concevoir une loi de commande unique  $u$  qui assure la convergence de  $x_1(t)$  et  $x_3(t)$  respectivement vers les valeurs désirées  $x_{d1}$  et  $x_{d3}$ , c'est-à-dire, les deux erreurs  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  convergent vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ , il est évident que les deux lois de commande équivalentes (3.8) et (3.9) ne peut pas assurer cet objectif, car chacune d'eux est conçue uniquement pour stabiliser le sous-système correspondant.

Afin de surmonter ce problème, on trouve dans la littérature deux solutions ; la première consiste à utiliser une seule surface de glissement par hybridation des deux surfaces (3.4) et (3.5) [33-38], la seconde solution, qui est adopté dans ce travail, consiste à utiliser une seule loi de commande  $u$  comme une combinaison des deux lois (3.8) et (3.9) [40,42].

D'après (3.4) et (3.5), la solution de l'équation  $S_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , implique que l'erreur  $e_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , et tous ses dérivés convergent vers zéro. Alors, l'objectif de la commande devient la conception d'une loi de commande  $u$  pour forcer  $S_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  à converger vers zéro.

### 3.3. Première approche de commande par mode glissant

La loi de commande de type mode glissant propose dans cette partie est définie comme suit [40]:

$$u^* = u_1 - b_1^{-1}(K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \alpha(S_1 - S_2)) \quad (3.10)$$

où  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $Q$  sont des paramètres positifs.

La substitution de (3.10) dans (3.6) conduit à :

$$\dot{S}_1 = -K \operatorname{sgn}(S_1) - QS_1 - \alpha(S_1 - S_2) \quad (3.11)$$

Afin de maintenir la surface  $S_1$  à zéro, la condition de glissement bien connue suivante doit être satisfaite [7] :

$$S_1 \dot{S}_1 \leq -\eta_s |S_1| \quad (3.12)$$

avec  $\eta_s$  est une constante positive.

Pour ce faire, il faut choisir  $K$  et  $\alpha$  tels que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$K > \max(|\alpha(S_1 - S_2)|) \quad (3.13)$$

À partir de (3.11) et (3.13), il est clair que  $S_1$  converge vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini ( $S_1 \rightarrow 0$  quant  $t \rightarrow \infty$ ).

Puisque nous avons  $\text{sgn}(S_1) \approx S_1$  quant  $S_1 \rightarrow 0$ , l'équation (3.11), dans ce cas, devient  $\dot{S}_1 = -(K + Q + \alpha)S_1 + \alpha S_2$ .

En utilisant la transformation Laplace, cette dernière équation peut s'écrire

$$S_1(p) = \frac{\alpha}{p+(K+Q+\alpha)} S_2(p) \quad (3.14)$$

si on considère  $K + Q + \alpha \gg 1$ , à partir de la fonction de transfert stable  $\frac{\alpha}{p+(K+Q+\alpha)}$  on peut conclure que  $S_2 \rightarrow 0$  quant  $S_1 \rightarrow 0$ .

### 3.4. Résultats de simulation

Afin de tester l'efficacité de la loi de commande PID floue adaptative proposée, on considère le problème de stabilisation du système de pont roulant présenté par la Figure 3.1. Ce système a deux degrés de liberté, à savoir, la position horizontale du chariot  $x$  et sa position angulaire  $\theta$  de la charge. Ce système est commandé par la force motrice du chariot  $F$ . Le principal défi dans la commande de ce système consiste au couplage entre le mouvement de déplacement du chariot et le mouvement de rotation du balancier.

La dynamique du pont roulant est donnée par [33,42] :

$$(M + m)\ddot{x} + lm(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = F \quad (3.23)$$

$$\ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (3.24)$$

où  $m$  et  $M$  sont les masses de la charge et du chariot respectivement,  $l$  est la longueur de la corde et  $g$  est l'accélération de la gravité. Dans la simulation, les valeurs suivantes sont utilisées:  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $m = 0.8 \text{ kg}$ ,  $M = 1 \text{ kg}$ ,  $l = 0.305 \text{ m}$ .

On peut écrire cette dynamique (3.43) dans l'espace d'état comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(x) + b_1(x)u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= f_2(x) + b_2(x)u\end{aligned}\quad (3.25)$$

où :

$$x_1 = x, x_3 = \theta$$

$$f_1(x) = \frac{lmx_4^2 \sin(x_2) + mgsin(x_2)\cos(x_2)}{M + m\sin(x_2^2)} \quad (3.26)$$

$$b_1(x) = \frac{1}{M + mL\sin(x_2^2)} \quad (3.27)$$

$$f_2(x) = -\frac{(M+m)gsin(x_2) + lm(x_4^2 \sin(x_2)\cos(x_2))}{M + mL\sin(x_2^2)} \quad (3.27)$$

$$b_2(x) = -\frac{\cos(x_2)}{M + mL\sin(x_2^2)} \quad (3.28)$$

L'objectif de commande ici est de forcer les sorties du système  $x_1 = x$  et  $x_3 = \theta$  à converger respectivement vers des valeurs désirées  $x_d$  et  $\theta_d$ . Dans les simulations on prend :  $x_d = 5$  et  $\theta_d = 0$ , et les états initiaux suivantes :  $x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0, \theta(0) = -\frac{\pi}{3}$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

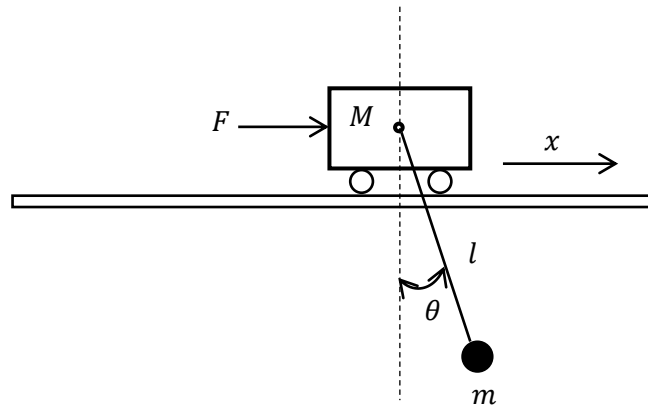


Figure 3.23. Système de ponts roulant

Les paramètres de conception sont choisis comme suit:  $Q = 4, K = 2, \eta = 0.5, \beta = 0.13, \alpha = 4.2, \gamma = 0.01, \lambda_1 = 0.65,$  et  $\lambda_2 = 40$ .

Les résultats de simulation de cette loi de commande sont illustrés par les Figures 3.2 à 4.6.

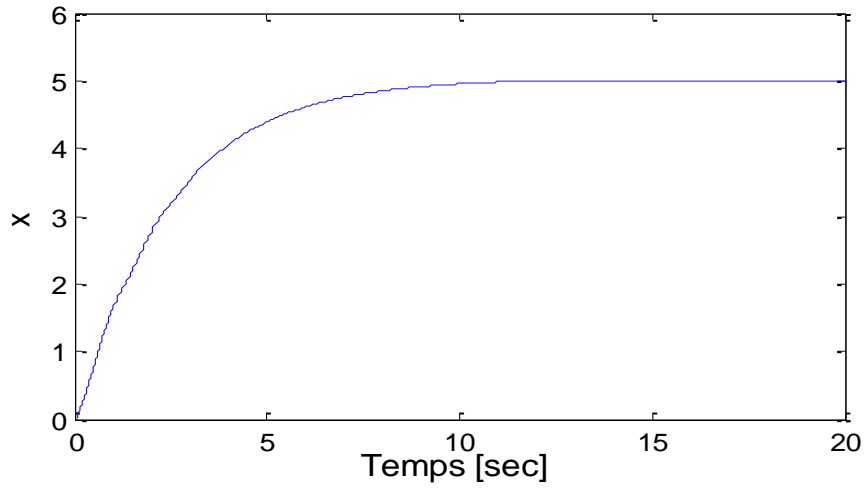


Figure 3.24. Evolution du signal de position  $x$

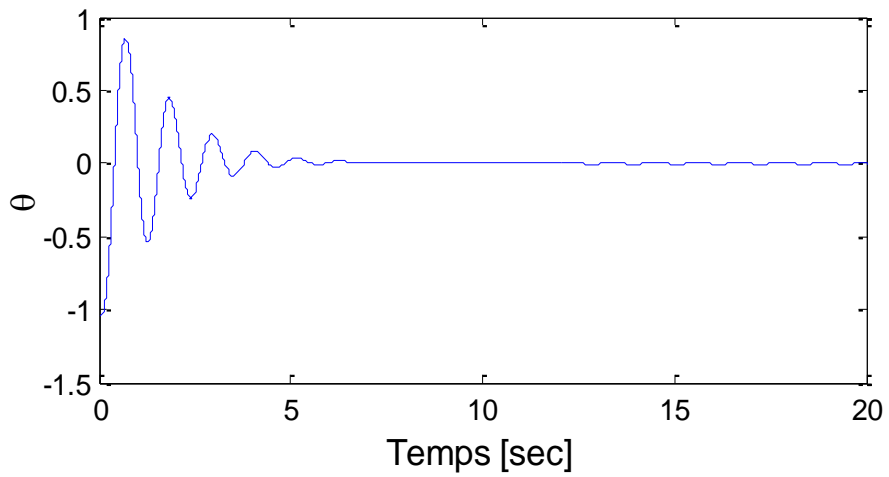


Figure 3.25. Evolution du signal d'angle  $\theta$

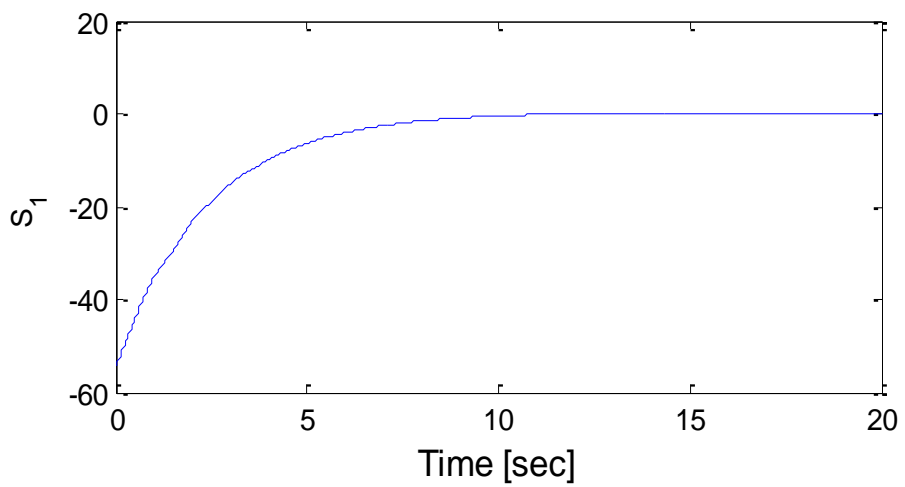
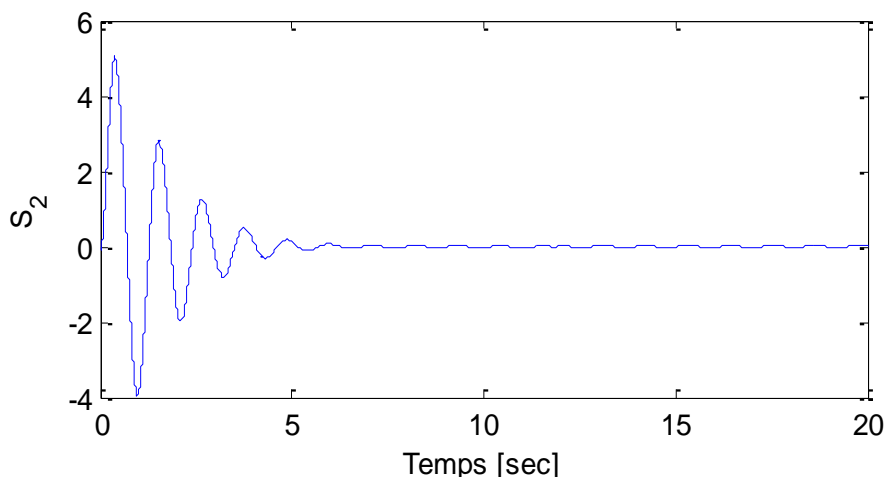
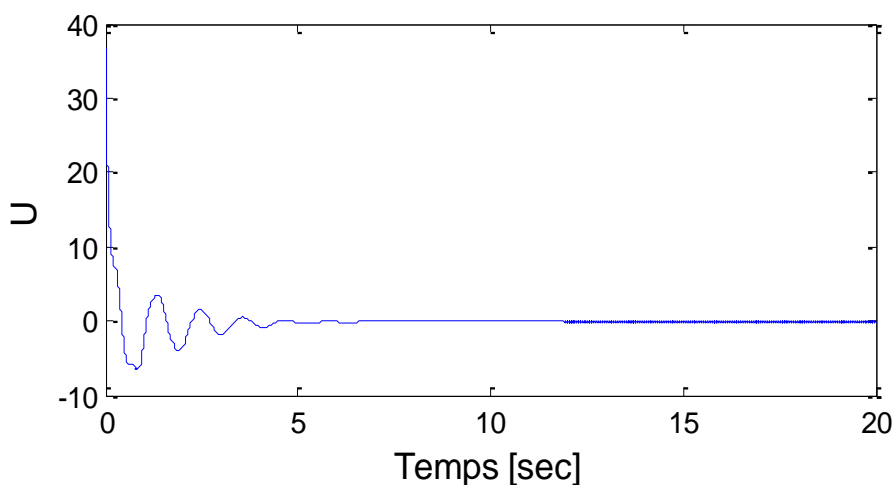


Figure 3.26. Trajectoire de la surface de glissement  $S_1$



**Figure 3.27.** Trajectoire de la surface de glissement  $S_2$



**Figure 2.28.** Evolution du signal de commande  $u$

On remarque que les trajectoires de sorties  $x$  et  $\theta$  convergent vers les valeurs désirées et que les deux surface de glissement  $S_1$  et  $S_2$  convergent vers zéro. De plus, le signal de commande  $u$  est bornée.

### 3.5. Deuxième loi de commande par mode glissant

Malgré que l'utilisation de la loi de commande de type mode glissant précédente permet de résoudre le problème de la commande d'un système sous-actionnée à deux degrés de liberté, cette loi de commande a certaines limitations à cause elle basée sur la condition que  $K > \max(|\alpha(S_1 - S_2)|)$  et condition la stabilité de la fonction de transfert  $\frac{\alpha}{p+(K+Q+\alpha)}$  qui elles ne sont pas réalisable dans plusieurs cas. Dans cette deuxième section nous proposons, pour résoudre ces problèmes et aussi améliore les performances de la

sortie, d'utilisée la loi de commande de type par mode glissant suivante :

$$u^* = u_1 - b_1^{-1}(K \operatorname{sgn}(S_1) + Q_1 S_1 + \beta |S_2 - S_1| \operatorname{sgn}(S_1) + Q_2 \operatorname{sign}(S_2) - \alpha(S_2 - S_1)) \quad (3.10)$$

où  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  sont des paramètres positifs.

En remplaçant cette loi de commande dans la dynamique de  $S_1$ , on obtient :

$$\dot{S}_1 = -K \operatorname{sgn}(S_1) - Q_1 S_1 - \beta |S_2 - S_1| \operatorname{sgn}(S_1) - Q_2 \operatorname{sign}(S_2) + \sigma \quad (3.11)$$

où :  $\sigma = -\alpha(S_2 - S_1)$ .

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V = \frac{1}{2} S_1^2 \quad (3.12)$$

Par dérivation, on obtient :

$$\dot{V} = -K |S_1| - Q_1 S_1^2 - \beta |S_2 - S_1| |S_1| - Q_2 \operatorname{sign}(S_2) S_1 - \alpha(S_2 - S_1) S_1 \quad (3.13)$$

qui peut être bornée comme suit :

$$\dot{V} \leq -(K - Q_2) |S_1| - Q_1 S_1^2 - (\beta - \alpha) |S_2 - S_1| |S_1| \quad (3.14)$$

Si on choisit  $K > Q$  et  $\beta > \alpha$ , alors on peut conclure, d'après la lemme de Barbalat [8] que  $S_1$  converge asymptotiquement vers zéro.

Maintenant nous allons étudier le comportement de  $S_2$  quand  $S_1$  converge vers zéro.

Puisque  $S_1 = 0$  alors  $\operatorname{sign}(S_1) = 0$ , l'équation (3.11) devient :

$$\dot{S}_1 = -\alpha S_2 - Q_2 \operatorname{sign}(S_2) \quad (3.15)$$

Par ailleurs, à partir des équations (4.7) et (4.9), on trouve :

$$u = b_2^{-1} \dot{S}_2 + u_2 \quad (3.16)$$

On déduit la valeur du terme  $u$  de (3.6) puis on la remplace dans (3.16), il vient :

$$\dot{S}_1 = B_{21} \dot{S}_2 + \Delta_{21} \quad (3.17)$$

où  $B_{21} = b_1/b_2$  et  $\Delta_{21} = b_1(u_2 - u_1)$ .

De l'équation (3.15) et (3.17), on obtient:

$$B_{21}\dot{S}_2 + \Delta_{21} = -\alpha S_2 - Q_2 \text{sign}(S_2) \quad (3.18)$$

Alors la dynamique de  $S_2$  s'écrit comme suit :

$$\dot{S}_2 = B_{21}^{-1}(-\alpha S_2 - Q_2 \text{sign}(S_2) - \Delta_{21}) \quad (3.19)$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante:

$$V_2 = \frac{1}{2} S_2^2 \quad (3.20)$$

La dérivée de  $V_2$  est donnée par :

$$\dot{V}_2 = -\alpha B_{21}^{-1} S_2^2 - Q_2 B_{21}^{-1} |S_2| - B_{21}^{-1} \Delta_{21} S_2 \quad (3.21)$$

qui peut être bornée comme suit :

$$\dot{V}_2 \leq -\alpha B_{21}^{-1} S_2^2 - Q_2 B_{21}^{-1} |S_2| \left(1 - \frac{|\Delta_{21}|}{Q_2}\right) \quad (3.22)$$

Il est clair que, si on choisit  $Q_2 \geq |\Delta_{21}|$ , alors  $\dot{V}_2 \leq 0$ , et par conséquent, la surface de glissement  $S_2$  converge vers zéro.

### 3.6. Résultats de simulation

Pour tester les performances de la loi de commande de type mode glissant nous considérons le problème de stabilisation du système de pont roulant dont le modèle dynamique est donné à la section 3.2.1.

L'objectif de commande ici est de forcer les sorties du système  $x_1 = x$  et  $x_3 = \theta$  à converger respectivement vers des valeurs désirées  $x_d$  et  $\theta_d$ . Dans les simulations on prend :  $x_d = 5$  et  $\theta_d = 0$ , et les états initiaux suivantes :  $x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0, \theta(0) = -\frac{\pi}{3}$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

Les paramètres de conception sont choisis comme suit:  $Q_1 = 0.51, Q_2 = 0.017, K = 0.15, \eta = 0.5, \beta = 0.1, \alpha = 0.1, \gamma = 0.01, \lambda_1 = 10.9$  et  $\lambda_2 = 0.01$ .

Les résultats de la simulation de cette loi de commande sont illustrés par les Figures 3.2 à 4.6.

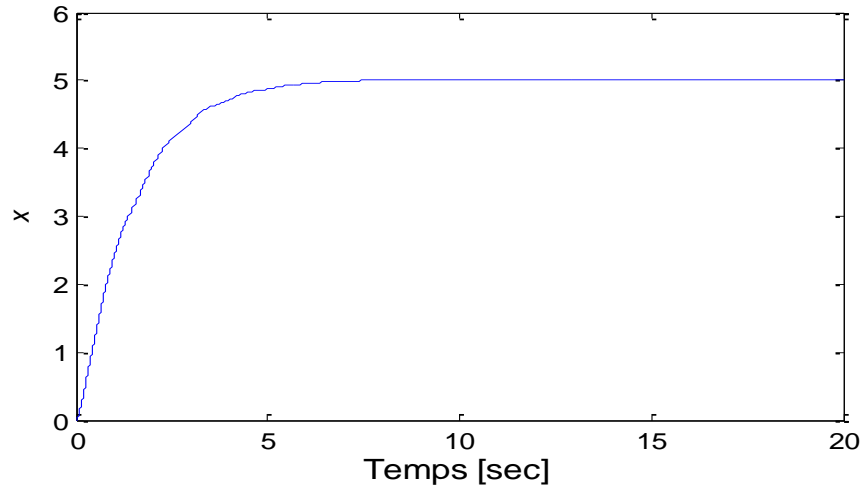


Figure 3.29. Evolution du signal de position  $x$

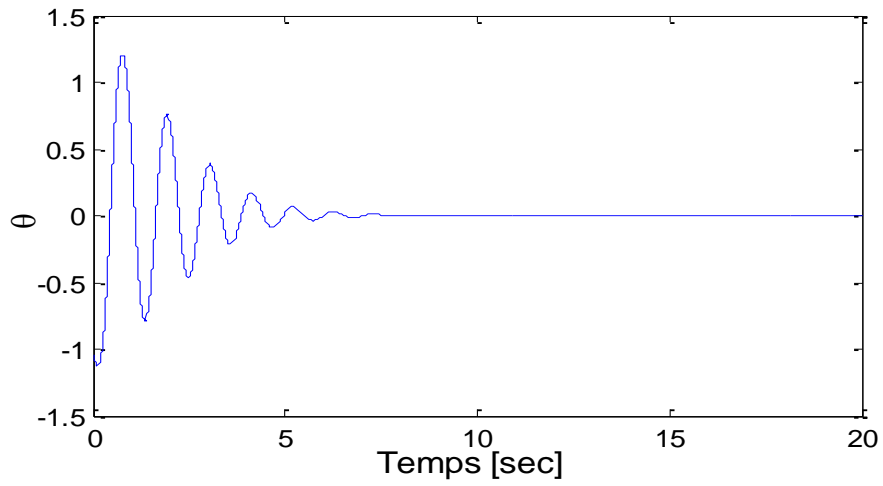


Figure 3.30. Evolution du signal d'angle  $\theta$

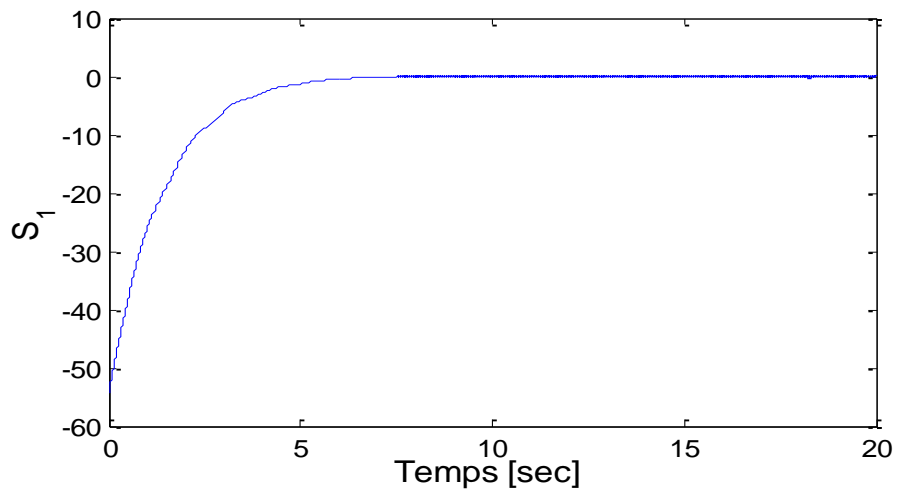
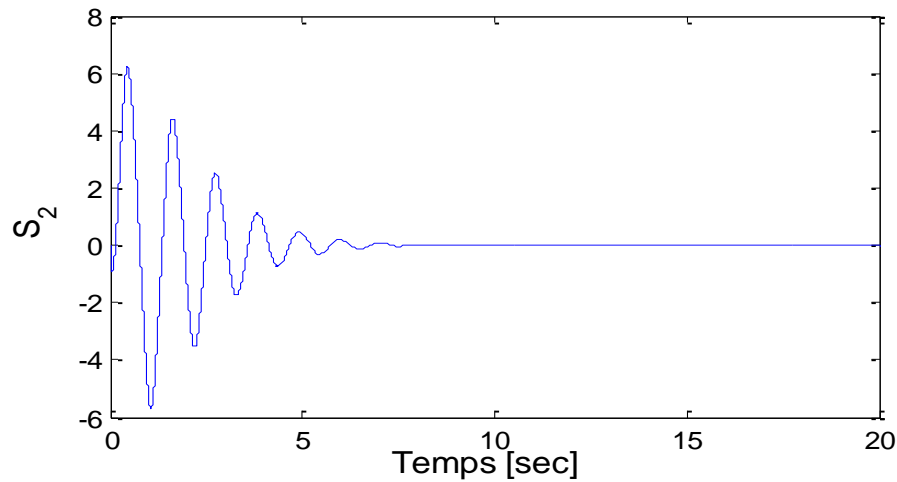
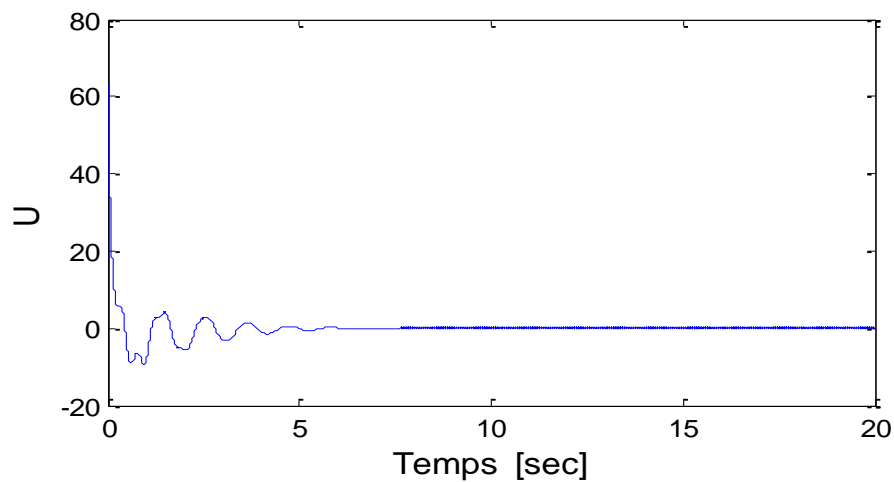


Figure 3.31. Trajectoire de la surface de glissement  $S_1$



**Figure 3.32.** Trajectoire de la surface de glissement  $S_2$



**Figure 3.33.** Evolution du signal de commande  $u$

On remarque que les trajectoires de sorties  $x$  et  $\theta$  convergent vers les valeurs désirées et que les deux surface de glissement  $S_1$  et  $S_2$  convergent vers zéro. De plus, le signal de commande  $u$  est bornée.

### 3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, deux schémas de commande de type mode de glissant on été développés pour une classe des systèmes non linéaires sous-actionnés dont la dynamique est completent connu. Dans les deux schémas, une seule loi de commande  $u$  on été utilisée pour stabiliser les deux états du systeme de sortie, où cette loi de commande combiné les des deux lois de commande équivalente. et les deux surface de glissement.

Dans le deuxième schéma, des termes de glissement additionnelles ont été utilisées pour améliorer les performances de commande et résoudre les problèmes de la première loi de commande.

Ces schémas de commande proposés assurent la convergence des sorties du système asymptotiquement vers les valeurs désirées et la bornitude de tous les signaux inhérents au système en boucle fermée. Des exemples de simulation numérique ont été effectués pour montrer l'efficacité des lois de commande utilisées.

*CONCLUSION*  
*GENERALE*

## ***Conclusion Générale***

Les travaux de notre mémoire basent à l'extension de l'utilisation de la commande par mode de glissant pour prendre en charge des classes systèmes non linéaires sous-actionnée. Les schémas de commande appliquée utilisent les avantages de la commande par mode d'à savoir la structure simple et les qualités de la robustesse et la stabilité de haut niveau.

Dans le premier chapitre, nous avons d'abord présenté les différentes formes des modèles de commande correspondant aux différentes classes de systèmes non linéaires. Ensuite, nous avons exposé quelques exemples et quelques concepts de modulation pour la classe des systèmes sous actionnée non linéaire. Enfin, des intérêts de l'étude de ces systèmes sont donnés.

Dans le deuxième chapitre nous nous sommes intéressés au problème de la commande à structure variable pour les systèmes non linéaire complètement actionnée. Nous nous sommes donc attachés à exposer leurs notions essentielles telles que la définition des systèmes à structure variable, le principe de fonctionnement de cette commande, la définition du régime glissant, et les étapes de conception d'une commande par mode glissant. À la fin de ce chapitre, Nous nous sommes proposés de l'application de cette stratégie de commande pour traiter le problème de suivi de trajectoire d'un pendule inversé.

Le dernier chapitre a été réservé au problème de la commande des systèmes sous actionnés non linéaire dont la dynamique est complètement connu. Deux schémas de commande de type mode de glissant on été développés. Dans les deux schémas, une seule loi de commande on été utilisée pour stabiliser les deux états du système de sortie, Ces schémas de commande proposés assurent la convergence des sorties du système asymptotiquement vers les valeurs désirées et la bornitude de tous les signaux inhérents au système en boucle fermée. une exemples de simulation numérique ont été effectué pour montrer l'efficacité des lois de commande utilisée.

# Bibliographie

- [1] D Zehar, "Commande par mode glissant des systèmes sous actionnés," Setif , 2019.
- [2] C. C Chung, "Nonlinear control of a wwinging pendulum," *Automatica*, vol. 40, pp. 851-862, 1995.
- [3] M,W Spong and D.J Block, "The Pendubot: a mechatronic system for control research and education," in *Procedeings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Dec.1995, pp. 555-556.
- [4] A Mahindrakar and R Banavar, "A swing-up of the acrobot based on a simple pendulum strategy," *International Journal of Control*, vol. 78, no. 6, pp. 424–429, 2005.
- [5] K.J Astrom and K Furuta, "Swining up a pendulum by energy control," 1996.
- [6] N Cherrat, "Contribution à la commande PID floue adaptative des systèmes," Jijel, 2019.
- [7] J. J. E Slotine and W Li, *Applied Nonlinear Control*. USA: Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, New-Jersey, 1991.
- [8] HK Khalil, *Nonlinear Systems, 2nd edn.*: Prentice-Hall ,EnglewoodCliffs, 1996.
- [9] S Bennett, *A history of Control Engineernig.*: IEE Control Engineering Series, 1993.
- [10] C Aguilar, "Approximate feedback linearization and sliding mode control for the single inverted pendulum," 2002.
- [11] A.S Shiriaev, A Pogromsky, and H Ludvigsen, "on global properties of passivity- based control of an inverted pendulum," vol. 10, no. 04, 2000.
- [12] W Zhong and H Röck, "Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart," , Mexico City, Mexico, 2001.
- [13] K.H Lundberg and J.K Roberge, "Classical dual-inverted-pendulum control," in *IEEE* , vol. 5, 2003.
- [14] V Sukontanakarn and M Parnichkun, "Real-time optimal control for rotary inverted pendulum," *American Journal of Applied Sciences*, vol. 6, no. 6, pp. 1106–1115, 2009.

- 
- [15] S Riachy, "Contribution à l'estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés," Lille, 2008.
- [16] M.W Spong, "The singup control problem of the acrobot," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 15 , no. 1, pp. 49–55, 1995.
- [17] M.W Sowing, "The swing up control problem for the acrobot," *Control systems magazine*, vol. 15, no. 1, 1995.
- [18] N.P.I Aneke, "control of underactuated mechanical systems," Eindhoven, 2003.
- [19] A Djoudi and T Benabdellah, "synthèse et Application des lois de commande nonlinéaires sur un pendule invers," 2007.
- [20] Jong H, Park, and Kyonug, "Biped robot walking using gravity-compensated inverted pendulum mode and computed torque control," in *International conference on Robotics and Automation*, vol. 4, Belgium, 1998.
- [21] A. E Saadallah and A Boudab, "Commande PID robuste d'un pendule inversé rotatif," Jijel, 2019.
- [22] Abderrezek H, "Contribution A La Commande Robuste Des Systèmes Non Linéaires," Setif, Algerie, 2014.
- [23] T Ahmed-Ali, "quelques notions sur la commande non linéaire par modes glissants et la commande non linéaire de type backstepping," Caen, 2011.
- [24] A Boubakir, "Méthodes de commande par mode de glissement appliquées au bras manipulateur et au système hydraulique CE105 à réservoirs couplés," Alger, 2007.
- [25] RA Decarlo and SH , Matthews, G.P Zak, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems," *Proc. IEEE. CODEN IEEPAD*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [26] SMC Alaoui, "Commande et observateur par modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur ," Maroc, 2009.
- [27] H Sira-Ramirez, "Differential Geometric Methods in Variable-Structure Control," *International Journal of Control*, vol. 48, no. 4, pp. 1359-1390, 1988.
- [28] U Itkis, *Control systems of variable structure*. New-York: Wiley, 1973.
- [29] V Bregeault, "Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants,"

- France, 2010.
- [30] B Heck, "Sliding Mode Control for Singularly Perturbed Systems.," *Int. J. Control*, vol. 53, pp. 985-1001, 1991.
- [31] Nidhal Cherrat and Boubertakh Hamid, "An adaptive fuzzy PID control for a class of SISO uncertain nonlinear systems," in *The 5th International Conference on Electrical Engineering – Boumerdes (ICEE-B)*, Alger, 2017, pp. 1-6.
- [32] B dAndrea Novel, *Commande non linéaire des robots.*: Hermès, 1988.
- [33] W Wang, J Yi, D Zhao, and D Liu, "Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems.," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 151, no. 6, pp. 683-690, 2004.
- [34] Y Ming and L Baoyin, "Disturbance adaptive control for an underactuated spherical robot based on hierarchical sliding-mode technology," in *In Control Conference (CCC), 2012 31st Chinese*, Chinese, 2012, pp. 4787-4791.
- [35] W Wang, J Yi, D Zhao, and X Liu, "Design of cascade fuzzy sliding-mode controller," in *American Control Conference*, Portland, 2005, pp. 4649-4654.
- [36] w Wang, X Liu, and J Yi, "Structure design of two types of sliding-mode controllers for a class of under-actuated mechanical systms," *IET Control Theory and Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 163-172, 2007.
- [37] Yinxing Hao, Jianqiang Yi, Dongbin Zhao, and Dianwei Qian, "Robust control using incremental sliding mode for underactuated systems with mismatched uncertainties," in *American Control Conference*, Washington, USA, 2007, pp. 532-537.
- [38] YJ Mon and CM Lin, "Hierarchical fuzzy sliding-mode control," in *3rd International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'02)*, Honolulu, 2002, pp. 656-661.
- [39] LA Tuan and SG Lee, "Sliding mode controls of double-pendulum crane Sliding mode controls of double-pendulum crane," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 27, no. 6, pp. 1863-1873, 2013.
- [40] F. Nafa, S Labiod, and H Chekireb, "Direct adaptive fuzzy sliding mode decoupling control for a class of underactuated mechanical systems," *Turkish Journal of Electrical*

*Engineering & Computer Sciences*, vol. 21, no. 6, pp. 1615-1630, 2013.

[41] M.W. Spong, "Underactuated mechanical systems," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 230, pp. 135-150, 1998.

[42] Nidhal Cherrat and Boubertakh Hamid, "An adaptive fuzzy PID control for a class of uncertain nonlinear underactuated systems," in *8th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC-2016)*, Algiers, Algeria, 2016, pp. 677-682.

## Abstract:

This objective of this works is the use of the sliding mode technique in the control of classes of nonlinear underactuated systems second order. That is, two sliding mode type controls (SMC) is designed to achieve some predefined desired performances by assuming that the system dynamics is known. In these schemes, only control law which includes some parts of the control law of each subsystem and the sliding surfaces of the two subsystems is used to control of two systems outputs. In addition, the stability analysis of the control approaches are performed by using the Lyapunov method, and for each scheme, simulation results are given to highlight its performance.

Key words:

Sliding mode, underactuated systems, Nonlinear systems, Lyapunov stability.

Résumé :

L'objectif de ce travail est d'utiliser la technique de mode glissant dans la commande de classes des systèmes non linéaires sous-actionnés de deuxième ordre. Alors, deux lois de commande de type mode glissant (MG) sont concevoir pour atteindre certaines performances prédéfinies souhaitées en supposant que la dynamique du système est connue. Dans ces schémas, une seule loi de commande qui comprend certaines parties de la loi de commande de chaque sous-système et les surfaces de glissement des deux sous-systèmes est utilisé pour commander les deux systèmes de sortie. De plus, l'analyse de la stabilité des schémas de commande proposés est effectuée par la synthèse de Lyapunov, et pour chaque schéma, des résultats de simulation sont donnés pour illustrer ses performances.

Mots clés:

Mode glissant, systèmes sous-actionnés, Systèmes non linéaire, Stabilité de Lyapunov.

## ملخص:

الهدف من هذا العمل هو استخدام تقنية الوضع الانزلاقي في التحكم في فئة الأنظمة غير الخطية من نوع سوزاكسيوني من الرتبة الثانية. لذلك، تم اقتراح قانونين للتحكم من النوع الإنزلاقي (MG) لتحقيق بعض الأداءات المطلوب و المحدد مسبقاً على افتراض أن ديناميكيات النظام معروفة. في هذه المناهج، يتم استخدام قانون تحكم واحد، و الذي يتضمن بعض الأجزاء من قانون التحكم لكل نظام فرعي والمساحات المنزلة لهذين النظامين الفرعيين، للتحكم في نظامي الإخراج. علاوة على ذلك، يتم إجراء تحليل الاستقرار لهذه المناهج المقترحة بواسطة طريقة ليابونوف، ولكل منهج، يتم تقديم نتائج المحاكاة لتوضيح أدائه.

## كلمات مفتاحية :

تحكم إنزلاقي، أنظمة لاخطية، نظام سوزاكسيوني، استقرار ليابونوف.