

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et Applications

Thème

Étude mathématique et numérique d'un problème d'écoulement à surface libre

Présentée par :

M^{elle} MECHEGUEG Leyla

Soutenu publiquement le : 19/06/2023.

Devant le jury composé de :

N.BENHAMIDOUCHE

Prof,

Université de M'sila

Président.

N.BOUNAB

M.C.B,

Université de M'sila

Encadreur.

W.DELLOUM

M.A.A,

Université de M'sila

Examineur.

Année universitaire 2022/2023

Introduction	viii
1 Notions préliminaires et définitions	1
1.1 Les fluides	2
1.2 Débit ([17])	3
1.2.1 Débit massique	3
1.2.2 Débit volumique	3
1.3 Description d'un fluide en mouvement ([5])	3
1.3.1 Description d'Euler	3
1.3.2 Description de Lagrange	3
1.4 Les écoulements des fluides	4
1.4.1 Écoulement potentiel	4
1.4.2 Écoulement irrotationnel ([5])	5
1.4.3 Écoulement incompressible	5
1.4.4 Écoulement uniforme	5
1.4.5 Écoulement stationnaire	5
1.5 Utilisation de la théorie de la variable complexe ([6])	5
1.6 Théorie de lignes de courants libre([5])	6
1.7 Quelques équations de la mécanique des fluides	7
1.7.1 Équation du mouvement des fluides ([22])	7
1.7.2 Théorème de Bernoulli	8
1.7.3 Équation de continuité ([22])	8
1.7.4 Ligne et fonction de courant	9
1.7.5 Conservation de l'énergie	10
1.7.6 Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ	11
1.7.7 Les équations de stokes ([22])	12

1.8	Transformation conforme ([8])	12
1.9	Quelques transformation classiques ([9])	12
1.9.1	Transformation linéaire	12
1.9.2	Transformation inverse	12
1.9.3	Transformation linéaire fractionnelle	12
1.9.4	Transformation de Joukovski	13
2	La résolution analytique d'un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel devant un obstacle	14
2.1	Position du problème	15
2.2	Méthode de Résolution	16
2.3	Formulation du problème	16
2.4	Solution analytique	17
2.4.1	Première étape	17
2.4.2	Deuxième étape	20
3	Discussion des résultats	24
3.1	Transformation de Schwartz-Christoffel	25
3.2	Discussion des résultats	33
	Conclusion générale	34
	Bibliographie	35

Table des figures

1.1	Arrangement des atomes pour les différentes phases.	2
1.2	Trajectoire de la particule P.	4
1.3	Ligne de courant à $t = t_0$	9
2.1	jet libre.	15
2.2	écoulement après la symétrie.	16
2.3	Le plan f	18
2.4	Le plan ς	19
2.5	Le plan f dans le région.	21
2.6	La solution exacte.	23
3.1	Plan de variable Ω	26
3.2	Plan de variable λ	26
3.3	La solution exacte ([19]).	27
3.4	plan f	28
3.5	Le plan f	29
3.6	plan ς	30
3.7	plan ς	31
3.8	La solution exacte.	32
3.9	Comparaison entre des solutions analytique trouver.	33

Liste des tableaux

2.1	Représentation des points du plan z sur le plan f	17
2.2	Représentation des points du plan f sur le plan ς	18
2.3	Le demi-cercle séparé en différentes régions	21
3.1	Représentation des points du plan z sur le plan f	28
3.2	Représentation des points du plan z sur le plan f	29
3.3	Représentation des points du plan f sur le plan ς	30
3.4	Représentation des points du plan f sur le plan ς	31

Remerciements

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir permis d'accomplir ce travail.

Je remercie également M^d.BOUNAB Noura de m'avoir encadrée et contribué à cette recherche.

Je remercie les membres de jury N.BENHAMIDOUCHE et W.DELOUM d'avoir évalué mon travail et de l'avoir soutenu par leur suggestions.

Mes remerciements aussi au Dr.ABDELKEBIR Saad , ainsi qu'aux professeurs et étudiants du département de mathématiques.

Je remercie également ma famille pour leur soutien et assistance tout au long de mes études.

Dédicaces

Je dédie la réussite de mes études :

A mon père **Nour Eddinne**

A ma mère **Barkahoum**

A mes frères **Kacem , Souhil et Mohammed**

A ma soeur **Donya**

A mon fiancé **Riyad**

A tout ma famille

A tout mes amies

Notations

ρ	Masse de volumique
\vec{u}	Le vecteur vitesse
m	La masse
\vec{a}	L'accélération
P	La pression
S	La surface
V	Le volume
n	La normale
f	La force
C	Une courbe
(x, y)	Le plan
i	Le nombre complexe
z	La variable complexe
ϕ	Fonction potentielle
ψ	Fonction de courant
D_v	Débit volumique
D_m	Débit massique
$M_0(x_0, y_0, z_0)$	Position initiale
σ	Le tenseur des contraintes
(u, v)	Composantes du vecteur vitesse

Introduction

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède , connu par son principe qui fut à l'origine de la statique des fluides .

La mécanique des fluides est une branche de la mécanique des milieux continus qui étudie les mouvements des fluides (liquides et gaz) et des forces internes associées et a nombreuses applications dans divers domaines tels que l'ingénierie navale , l'aéronautique , météorologie , climatologie ou océanographie. ([16])

La mécanique des fluides se compose de deux sous branches ([2]) :

- La statique des fluides ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos .
- La dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement en calculant diverses propriétés du fluide comme la vitesse , la pression , la masse volumique et la température en tant que fonctions de l'espace et du temps .

L'écoulement à surface libre est un écoulement soumis à la force de gravité au contact du conteneur (canal , rivière , conduite) et de la partie air où la pression est généralement à la surface libre.

L'écoulement de fluide parfait a été étudié par plusieurs chercheurs tels que Dias et J.M Vanden-Broeck (1990)([9]) ,ils ont étudié numériquement un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide inviscous et incompressible issue d'un nozzle, sous l'influence de la gravité .

Divers problèmes de ce type ont été étudiés par A.Gasmi et H.Mekias ([3]) ils ont étudié le problème de l'écoulement potentiel bidimensionnel de surface libre d'un fluide incompressible émergeant d'une fente d'un réservoir d'une longueur infinie, en Considérant le fluide est parfait et l'écoulement est irrotationnel . Le problème était caractérisé par une condition aux limite non linéaire sur la surface libre, ensuite ils ont le résolu numériquement par la technique de troncature de la série.

Aussi, B.Bouderah et N.Bounab ([18]) ont traité un problème concernant un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et nonviscous dans un canal avec un nozzle en 2D, où ils ont trouvé

la solution exacte en utilisant le théorème des lignes de courant, et aussi la solution numérique du problème avec la technique de troncation de la série, en considérant l'effet de la tension de surface.

Et nous dans ce travail, on va étudier analytiquement un écoulement à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux dans un canal avec un orifice qui forme un angle $\alpha = \pi/4$ avec l'horizontal, en utilisant d'autres transformations conformes et une simple intégration afin de résoudre l'équation intégrale-différentielle qui caractérise notre problème.

Ce travail englobe trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on a introduit quelques définitions et notions préliminaires sur les écoulements et quelques équations de la mécanique des fluides.

Aussi, on a présenté quelques définitions et formules des transformations conformes et transformations classiques.

Dans le deuxième chapitre, on a traité un écoulement potentiel et bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux dans un canal avec un orifice qui forme un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$, où on a abouti à l'aide de quelques transformations conformes et des calculs des intégrales à la solution analytique.

Dans le dernier chapitre, on a fait une discussion des résultats obtenus.

Enfin, ce travail se termine par une conclusion générale.

CHAPITRE 1

Notions préliminaires et définitions

Dans ce chapitre, on a cité quelques définitions et concepts de base de la mécanique des fluides

Contenu :

1. Les Fluides
2. Débit
3. Description d'un fluide en mouvement
4. Les écoulements des fluides
5. Utilisation de la théorie de la variable complexe
6. Quelques équations de la mécanique des fluides
7. Transformation conforme
8. Quelques transformations classiques

1.1 Les fluides

Un fluide (liquide ou gaz) peut être considéré comme une substance constituée d'un grand nombre de très petites particules de matière qui sont libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. En tant que tel, c'est un milieu continu de matière, déformable, non rigide et capable de s'écouler. ([15])

Les liquides ont "un volume propre, mais pas de forme propre", et les gaz n'ont pas "volume propre mais occupent tout l'espace qui leur est offert". En effet, il est possible de passer de la phase gazeuse à la phase liquide à cause de la continuité de l'état fluide. Cependant, dans des conditions normales de pression et de température, la différence entre la phase liquide et la phase gazeuse est très nette.

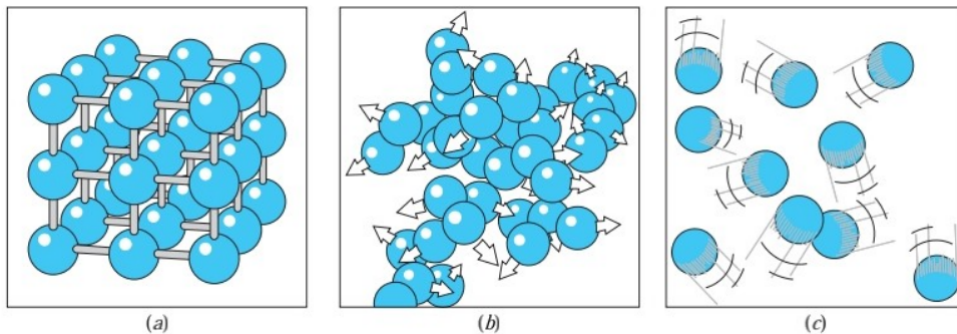


FIGURE 1.1 – Arrangement des atomes pour les différentes phases.

- (a) dans un solide, les molécules occupent des positions relativement fixes
- (b) dans un liquide, les groupes de molécules bougent les uns par rapport aux autres
- (c) dans un gaz, les molécules bougent de façon aléatoire

Fluide parfait : est un fluide non visqueux (viscosité nulle) c'est-à-dire que le fluide s'écoule sans aucune résistance (interne ou externe).

Fluide incompressible : un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée est constant. Il dépend de la pression extérieure.

Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, ... etc)

Fluide compressible : un fluide est dit compressible si le volume occupé par une masse donnée change. Il dépend de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles.

Des exemples de liquides sont (l'air, l'hydrogène et le méthane).

Fluide réels : Les fluides réels sont des fluides visqueux pendant leur mouvement, les particules sont soumises à des frottements.

1.2 Débit ([17])

1.2.1 Débit massique

c'est la masse de fluide qui passe la section S par unité de temps.
donnée par :

$$D_m = \int \int_S \rho \vec{u} \vec{n} ds$$

1.2.2 Débit volumique

C'est le volume de fluide qui passe la section S par unité de temps.
Donnée par :

$$D_v = \int \int_S \vec{u} \vec{n} ds$$

1.3 Description d'un fluide en mouvement ([5])

1.3.1 Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à différencier l'écoulement en donnant les composantes du vecteur vitesse et autres grandeurs physiques en chaque point de l'espace, c'est-à-dire qu'on fixe un point de l'espace et qu'on remarque des changements de quantités associées aux particules du fluides passant par ce point.

-A l'instant t_1 , on identifie une particule en M de vitesse P_1

-Au temps $t_2 = t_1 + dt$, on trouve au même point M de l'espace, une autre particule P_2 avec une vitesse et des propriétés physiques différentes.

Donc, nous en M et au temps t_1

$$\vec{u} = \vec{u}(P_1, t_1) = \vec{u}(x, y, z, t_1).$$

Et à l'instant t_2 , on a au même point M

$$\vec{u} = \vec{u}(P_2, t_2) = \vec{u}(x, y, z, t_2).$$

1.3.2 Description de Lagrange

La méthode consiste à étudier différentes grandeurs (densité, température T, pression ...etc) pour chaque particule, lors de son mouvement.

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par la trajectoire de la particule identifiée établie.

L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

par conséquent, la description du mouvement consiste à déterminer le vecteur de position $\vec{r}(M_0, t)$ de toutes les particules dans le fluide à tout instant t

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t).$$

C'est à dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t).$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t), \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

Trajectoire

Une trajectoire est la succession des positions spatiales occupées par une particule donnée dans le temps.

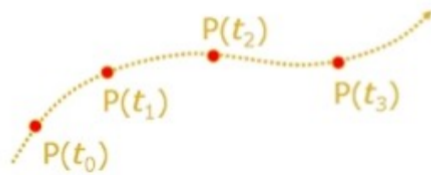


FIGURE 1.2 – Trajectoire de la particule P.

1.4 Les écoulements des fluides

1.4.1 Écoulement potentiel

On appelle un écoulement est potentiel si son vecteur vitesse est dérivé d'un potentiel.
c'est à dire :

$$\vec{u} = \nabla \phi$$

La fonction $\phi(x, t)$ est le potentiel de vitesse.

1.4.2 Écoulement irrotationnel ([5])

L'écoulement est irrotationnel si :

$$\text{rot } \vec{u} = 0$$

où \vec{u} représente le vecteur de vitesse

Sinon, il est appelé rotationnel.

1.4.3 Écoulement incompressible

L'écoulement est incompressible si le volume des particules reste constant dans le fluide pendant son temps de mouvement.

1.4.4 Écoulement uniforme

Si les composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées, l'écoulement est dit uniforme. ([5])

1.4.5 Écoulement stationnaire

Un écoulement est permanent ou stationnaire lorsque la grandeur caractéristique en chaque point donné du domaine ne change pas avec le temps (vitesse, masse volumique, pression, température, etc...) ([2])

$$\partial_t u = \partial_t \rho = \partial_t P = \partial_t T = 0$$

1.5 Utilisation de la théorie de la variable complexe ([6])

soient ϕ et ψ la fonction de potentiel et la fonction de courant du flux de potentiel bidimensionnel. On relie le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$, alors nous définissons la fonction complexe $f(z)$ comme :

$$f(z) = \phi + i\psi$$

tel que $i^2 = -1$

$f(z)$ est appelé le potentiel d'écoulement complexe. Puisque les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ satisfont l'équation de Laplace, cela vaut aussi :

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Puis les relations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.1)$$

La théorie des variables complexes fournit une méthode très puissante pour obtenir des solutions de quelque écoulement.

Si le plan (x, y) est traité comme le plan $z = x + iy$, alors la fonction $f(z)$ est analytique dans le domaine du flux.

De plus, la vitesse complexe est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= u - iv \end{aligned} \quad (1.2)$$

Le plan de flux sera également analytique. Cette propriété très importante nous permettra ensuite d'utiliser la théorie des fonctions analytiques complexes pour résoudre notre problème considéré.

1.6 Théorie de lignes de courants libres ([5])

La théorie des lignes de courant libres est l'étude des problèmes d'écoulement possibles délimités par des parois droites rigides et des lignes de courant libres de forme inconnue sur lesquelles la pression est supposée constante.

S'il n'y a pas de ligne d'écoulement libre et que les effets gravitationnels sont négligés, la surface d'écoulement dans le plan physique est un polygone.

Si les lignes de courant libres et les effets gravitationnels ainsi que les effets de tension superficielle sont également négligés, la surface d'écoulement peut être convertie en une surface polygonale par transformation conforme.

Cette région est un odographe parfait d'un certain niveau

$$\Omega = \log(1/\frac{df}{dz})$$

Pour le cas où l'écoulement est en partie limité par des surfaces libres, nous donnons la méthode de séparation introduite par Kirchhoff (1869).

L'idée est d'introduire une fonction complexe définie par :

$$\Omega = \log \left(u / \frac{df}{dz} \right) = \log \left(\frac{u}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{u}{q} \right) + i\theta \quad (1.3)$$

où $f = \Phi + i\Psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$, $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, (u, v) sont les composantes des axes x et y du vecteur vitesse suivant, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et u est la vitesse de référence.

– la partie réelle de Ω sur la ligne de courant libre est constante, c'est à dire $\log \left(\frac{u}{q} = cte \right)$.

– La partie imaginaire Ω est constante sur chaque paroi rectiligne, c'est à dire $\theta = cte$.

Par conséquent, le flux est représenté par une figure plane rectiligne (polygone) notée Ω .

Avec la transformation de Schwarz-Christoffel, l'espace polygonal Ω est transformé dans le demi-plan supérieur de la variable auxiliaire λ . Par conséquent, le flux dans le plan λ est uniforme représenté par la fonction de potentiel $F(\lambda) = c\lambda$ pour illustrer ce qui précède on donne quelques propriétés de la transformation conforme de Schwarz-Christoffel.

1.7 Quelques équations de la mécanique des fluides

1.7.1 Équation du mouvement des fluides ([22])

Selon la dépendance fondamentale de la dynamique, la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume V est égale à la somme des forces agissant sur cet élément de volume, soit :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho u dx] = \int_V f dx + \int_{\Sigma} \sigma \cdot n ds$$

où : Σ est la surface délimitant le volume de V

ds est l'élément de surface normal n

f est la force exercée par unité de volume

σ est le tenseur des contraintes

La masse de l'élément fluide ρdx reste constante pendant ce mouvement. Ainsi, vous pouvez écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho u dx] = \int_V \rho \frac{du}{dt} dx$$

L'intégrale des forces de surface peut être écrite sous la forme $\int_v \text{div} \sigma dx$ en utilisant le théorème d'Ostrogradsky. Lorsque le volume V tend vers zéro, l'équation du mouvement prend la forme :

$$\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) = f + \text{div} \sigma \quad (1.4)$$

1.7.2 Théorème de Bernoulli

Premier théorème de Bernoulli

Dans un écoulement stationnaire ([5]) :

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = cte \quad (1.5)$$

deuxième théorème de Bernoulli

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \left[\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \frac{u^2}{2} \right] = -\nabla \hat{p} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH \quad (1.6)$$

où : $\hat{p} = P + \rho gz$

1.7.3 Équation de continuité ([22])

Soit une partie du fluide de densité ρ délimitée par une surface fermée S (de volume V).

Soit ds le vecteur de base de la surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée.

La partie de fluide a une masse :

$$m = \int \int_V \rho dV$$

Le débit massique sortant de la surface est égal $\int \int_S \rho u ds$

La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{dm_S}{dt} - \int \int_S \rho u ds = \int \int_V \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

où $\frac{dm_S}{dt}$ représente la débit massique de fluide interne au volume considéré, compte positif s'il s'agit d'un source et négatif s'il s'agit d'un puits compte tenu du théorème d'Ostrogradsk pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume.

$$\int \int_S u ds = \int \int_V \int \text{div}(\rho u) dV$$

L'équation de conservation de la masse écrit :

$$\frac{dm_S}{dt} = \int \int_V \int \left\{ \left(\text{div}(\rho u) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \right\} dV.$$

L'équation écrite ci-dessus est valable quel que soit le volume V considéré et l'intégrale est nulle, ce qui conduit à une expression locale de la conservation de masse :

$$\text{div}(\rho u + \frac{\partial \rho}{\partial t}) = 0 \quad (1.7)$$

Cas particuliers :

1. Écoulement stationnaire :

Dans ce cas, sans changement explicite dans le temps $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ donc

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 = \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho \quad (1.8)$$

2. fluide incompressible :

Dans ce cas, $\rho = \text{cte}$ donc :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

1.7.4 Ligne et fonction de courant

Ligne de courant

Les lignes de courant sont une famille de courbes qui sont des enveloppes de champs de vitesse pour chaque instant.

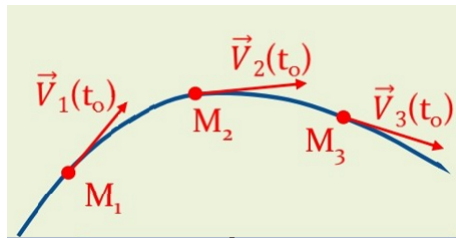


FIGURE 1.3 – Ligne de courant à $t = t_0$.

Fonction de courant ([1])

Si l'on suppose que l'écoulement est incompressible (c'est à dire $\frac{D\rho}{Dt} = 0$) donc, l'équation de continuité est donnée :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.9)$$

Nous introduisons une nouvelle fonction ψ à partir de x et y que nous appelons la fonction de courant vérifiant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.10)$$

Les surfaces définies par ($\psi = cte$) sont des lignes de courant , c'est à dire des différentielles exactes donné :

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \\ &= -vdx + udy \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.7.5 Conservation de l'énergie

Nous évaluerons l'évolution temporelle de l'énergie cinétique de l'élément fluide,unités de volume et de masse,restreintes aux écoulements de fluides incompressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (1.13)$$

En utilisant l'équation du mouvement pour exprimer la dérivée d'Euler de la vitesse (1.13)on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + u_i f_i$$

Soit,comme précédemment,décomposer le tenseur des contraintes en une partie isotrope $-p\delta_{i,j}$ et un déviateur $d_{i,j}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \frac{\partial u_i d_{i,j}}{\partial x_j} - d_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (1.14)$$

Ou en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = u \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \nabla \cdot (u \cdot d) - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.15)$$

Enfin,compte tenu de la condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot u = 0$) ,on peut écrire le premier terme du second terme (1.15) comme une divergence,soit :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \nabla \cdot \left[u \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + u \cdot d \right] - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.16)$$

Nous réécrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique sous forme intégrale en intégrant chaque terme sur un volume fixe V et en appliquant le théorème de divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V e_c dV \right) = \int_S \frac{\rho u^2}{2} u \cdot ndS + \int_S (\sigma \cdot u) \cdot ndS + \int_V u \cdot f dV - \sigma \cdot \nabla u dV \quad (1.17)$$

Quelle est la signification physique de divers termes(1.17)

1. Le premier terme du deuxième terme est le flux d'énergie cinétique dû à la "convection" traverse la surface S.
2. Le second terme est le travail par unité de temps des contraintes exercées sur la surface S.

3. Le troisième terme est le travail effectué par les forces volumiques par unité de temps.

4. Enfin, le quatrième terme concerne la déformation du volume V , représentée énergie dissipée par la viscosité lors de cette déformation.

1.7.6 Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ

Considérons un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible et non visqueux. hors de :

$$\vec{u} = \text{grad}\vec{\phi}$$

et

$$\text{div}\vec{u} = 0$$

D'où

$$\text{div}(\text{grad}\vec{\phi}) = 0$$

Donc

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

c'est à dire

$$\Delta\phi = 0 \tag{1.18}$$

De même ,d'après :

$$\vec{u} = (u, v) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)$$

et

$$\text{rot}\vec{u} = 0$$

on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

c'est à dire

$$\Delta\psi = 0$$

Alors, la fonction potentielle ϕ et la fonction ligne de courant ψ et vérifient l'équation de Laplace.

1.7.7 Les équations de Stokes ([22])

L'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\nu \nabla u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

En négligeant dans l'équation de Navier-Stokes incompressible stationnaire les termes proportionnels à la masse volumique du fluide $(u \cdot \nabla)u$, on obtient l'équation de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \nabla u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Plus la vitesse d'écoulement est lente en termes d'amplitude et de valeurs Ω la viscosité plus le modèle de Stokes est une approximation valide des équations Navier-Stokes.

La principale différence entre les deux équations est que le terme de vitesse linéaire a disparu, l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles linéaire.

1.8 Transformation conforme ([8])

On dit que la transformation $z = x + iy \rightarrow Z(z) = X(x, y) + iY(x, y)$ est conforme si elle conserve les angles.

Une condition nécessaire et suffisante pour une transformation conforme est que la fonction $Z(z)$ soit analytique.

1.9 Quelques transformations classiques ([9])

1.9.1 Transformation linéaire

La transformation linéaire $\omega = Az$ où $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ est une double transformation : expansion/contraction associée au coefficient a et à l'angle de rotation α .

1.9.2 Transformation inverse

Transformation linéaire $\omega = Z^{-1}$ pour Z différent de zéro transforme les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles, selon que l'objet passe par l'origine ou non.

1.9.3 Transformation linéaire fractionnelle

La transformation $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c et d des complexes, transforme les cercles et réciproquement.

1.9.4 Transformation de Joukowski

Il existe d'autres transformations utiles, en particulier celles que Joukowski a largement réalisées utilisées dans l'aviation.

Cette transformation est définie comme $\omega = z + \frac{a^2}{z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

La transformation transforme le cercle centré à l'origine en une ellipse avions sortis, un cas particulier est un cercle de rayon $r = a$ qui se confond en un segment à droite (ellipse dégénérée de petit axe nul). Les conditions à l'infini restent les mêmes. Sinon, un cercle décentré mais centré sur l'axe des X est transformé en un profil symétrique similaire à la forme d'un profil aérodynamique, le profil dit Joukowski.

CHAPITRE 2

La résolution analytique d'un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel devant un obstacle

Dans ce chapitre , nous formulons le problème en décrivant le modèle à l'aide de variables complexes théoriques et simplifions la géométrie en utilisant des transformations. Ensuite on a résolu l'équation intégrodifférentielle qui décrit notre problème.

Contenu :

1. Position de problème
2. Méthode de Résolution
3. Formulation du problème
4. Solution analytique

2.1 Position du problème

On considère un écoulement dans un canal avec un orifice forme un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec l'horizontal et un hauteur H délimité par les paroi rigides AB , BC , $A'B'$ et $B'C'$. Avec une surface libre présentée par la courbe CD , (figure 2.1)

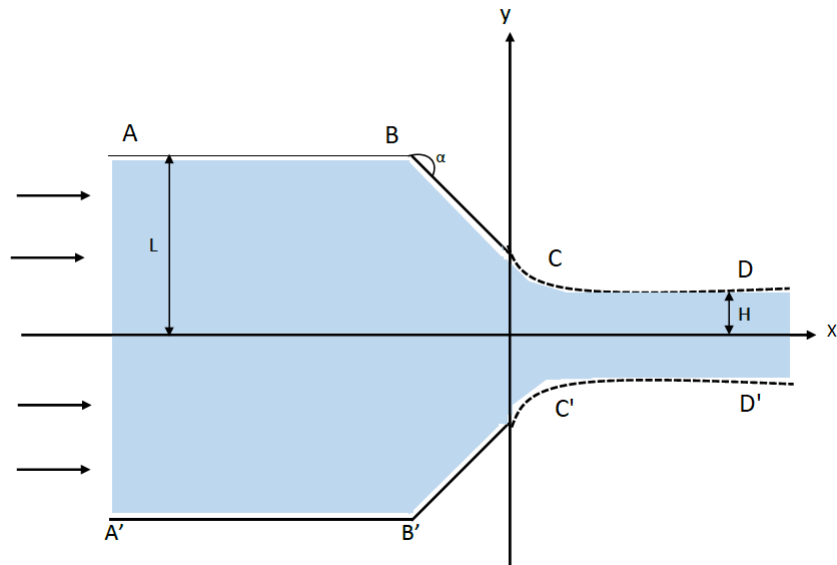


FIGURE 2.1 – jet libre.

Avec la symétrie et les conditions suivants :

On considère que le fluide occupe le demi-plan horizontal supérieur , Avec un hauteur H . Comme il est indiqué au (Figure 2.2)

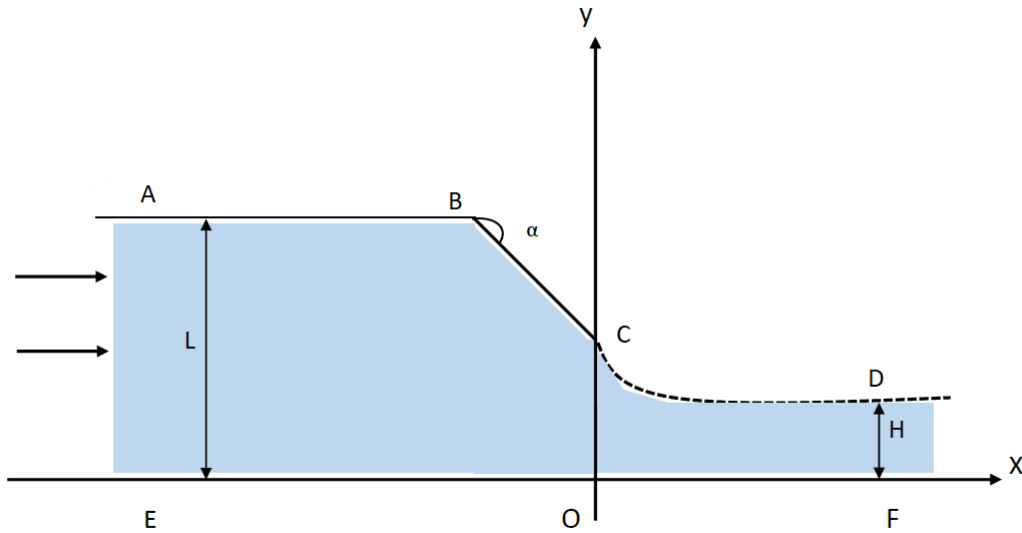


FIGURE 2.2 – écoulement après la symétrie.

2.2 Méthode de Résolution

Formule de Plemelj([8]) :Les formules de Cauchy peuvent également de afficher une série de formules appelées formules de Plemelj,qu'on va utilisé dans le calcul de la forme surface libre de problème traité.

Où on utilise la formule suivant :

$$\phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Omega} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2.2)$$

2.3 Formulation du problème

Nous déterminerons que le débit du système présenté ici obéit à l'équation $Q = \nabla\phi$, sauf pour la source dans le domaine du flux , ce qui signifie

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2.3)$$

Nous introduisons des grandeurs , appelées fonctions de flux , définies comme

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (2.4)$$

Nous additionnons les équations (2.3) et (2.4) pour obtenir les condition de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous laissons la variable complexe $z = x + iy$ dénoter le plan physique et introduisons le potentiel complexe

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (2.6)$$

En raison ϕ et ψ sous réserve des condition de Cauchy-Riemann , c'est une fonction analytique dans le domaine $Z = X + iY$, n'importe où dans le flux sauf à la source.

Nous introduisons le conjugué complexe de la vitesse f noté

$$f'(z) = \varphi(z) = u - iv \quad (2.7)$$

C'est aussi une fonction analytique , la vitesse complexe est liée à la vitesse du fluide exprimé comme :

$$\varphi = qe^{-i\sigma} \quad (2.8)$$

Où σ est l'angle du vecteur vitesse par rapport à l'axe horizontal et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ est le module de vitesse.

2.4 Solution analytique

2.4.1 Première étape

Dans cette étape , on a traité le problème en utilisant quelques transformations conformes .
Où le domaine occupée par le fluide dans le plan f sera transformer (Figure 2.2) en demi-plan supérieure (Figure 2.3) , où l'on représente les points dans (tableau 2.1)

les points	plan z	plan f
A	$x = -\infty , y = 1$	$\phi = -\infty , \psi = 0$
B	$x = -1 , y = 1$	$\phi = -1 , \psi = 0$
C	$x = 0 , y = 1/2$	$\phi = 0 , \psi = 0$
D	$x = +\infty , y = 1/4$	$\phi = 0 , \psi = -1$

TABLE 2.1 – Représentation des points du plan z sur le plan f

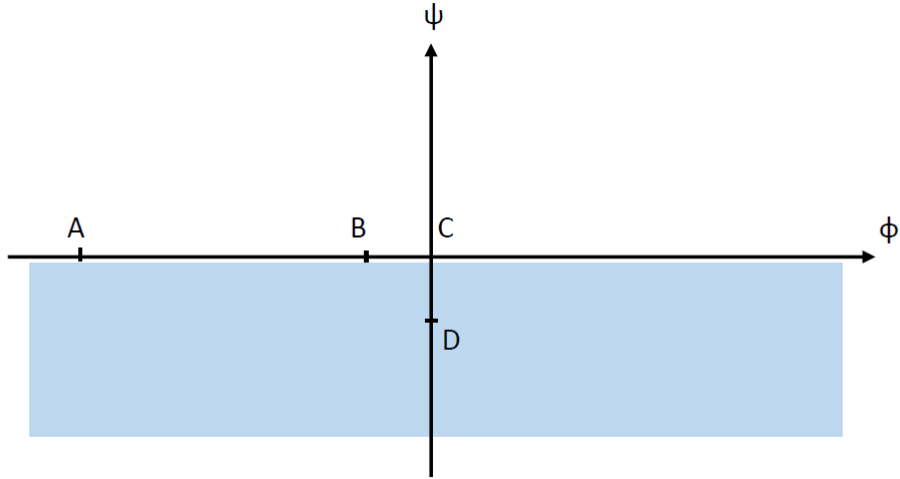


FIGURE 2.3 – Le plan f .

Tous les points du système sont maintenant dans une bande infinie entre $\psi = 0$ et $\psi = -1$ sur le plan f .

Pour reformuler le problème en utilisant la méthode intégrale , introduit la variable complexe $\zeta = t + i\eta$, qui permettent de mapper des bandes infinies sur la partie inférieure du plan ζ dont la transformation conformationnelle :

$$\zeta = t + i\eta = e^{\pi\omega} \quad (2.9)$$

les points	plan f	plan ζ
A	$\phi = -\infty , \psi = 0$	$t = 0 , \eta = 0$
B	$\phi = -1 , \psi = 0$	$t = e^{-\pi} , \eta = 0$
C	$\phi = 0 , \psi = 0$	$t = 1 , \eta = 0$
D	$\phi = 0 , \psi = -1$	$t = -1 , \eta = 0$

TABLE 2.2 – Représentation des points du plan f sur le plan ζ

Tous les points sont maintenant sur l'axe (ot) .

La surface libre correspondent à $-1 < t < 1$ alors que l'orifice correspond à $0 < t < +\infty$.

Les équations doivent être reformulées pour le plan ζ en utilisant la géométrie du système intégré . Nous introduisons une nouvelle fonction analytique appelée hodographe logarithmique , définie comme :

$$\phi(\zeta) = \sigma(\zeta) + i\tau(\zeta) \quad (2.10)$$

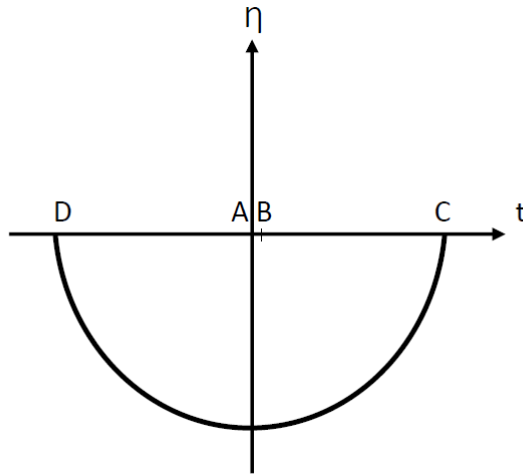


FIGURE 2.4 – Le plan ζ .

Lié à (2.7) par :

$$f'(z(\zeta)) = u - iv = \frac{1}{\mu} e^{-i\phi(\zeta)} \quad (2.11)$$

Où μ est la profondeur moyenne du fluide amont sans dimension . Pour obtenir une interprétation physique de la fonction , nous modifions la forme comme suite :

$$\varphi = u - iv = \frac{1}{\mu} e^{\tau(\zeta)} e^{-i\sigma(\zeta)} \quad (2.12)$$

En comparant le résultat (2.12) avec (2.8) , nous observons que

$$q = \frac{1}{\mu} e^{\tau(\zeta)} \text{ et } \sigma = \sigma(\zeta).$$

où : $\frac{1}{\mu} e^{\tau(\zeta)}$ donne l'amplitude de la vitesse du fluide
 $\sigma(\zeta)$ donne l'angle entre les lignes de courant et l'axe des x .

les valeurs limites sont :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < t < -1 \\ \frac{-\pi}{4} & \text{si } -1 < t < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

2.4.2 Deuxième étape

L'équation reliant $\tau(t)$ et $\sigma(t)$ sur l'axe réel peut être vérifiée en appliquant la fonction d'intégration circulaire $\phi(\zeta)$ autour de la courbe notée Ω_0 (Figure 2.5)

On a un sens négatif avec une singularité hors du domaine de l'intervalle , on utilisant le théorème de Cauchy , alors :

$$\int_{\Omega_0} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = 0 \quad (2.13)$$

où ζ_0 est un point à l'extérieur.

En fait , on laisse reposer le point singulier $\zeta_0 = t_0$ sur l'axe réel et on évite de parcourir autour de lui un demi-cercle de rayon défini noté Ω_1 , on utilise le théorème des résidus pour obtenir la contribution intégrale de Ω_1 :

$$\int_{\Omega_1} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - t_0} d\zeta = -i\pi\phi(t_0)$$

De plus , la contribution intégrale du demi-cercle de rayon infini noté par :

$$\int_{\Omega_4} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - t_0} d\zeta = 0$$

Ces résultats sont remplacés par l'équation (2.13) pour obtenir :

$$\phi(t_0) = \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt$$

qui aboutit à la formation des parties réelles et imaginaires

$$\tau(t_0) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(t)}{t - t_0} dt \quad (2.14)$$

$$\sigma(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(t)}{t - t_0} dt \quad (2.15)$$

où les barres représentent les valeur clés de Cauchy , région de l'intégral dans l'équation (2.14) est divisée en régions intégrales séparées , notées comme suite :

les régions	Limite inférieure t	Limite supérieure t
Ω_1	$-\infty$	-1
Ω_2	-1	0
Ω_3	0	$+\infty$

TABLE 2.3 – Le demi-cercle séparé en différentes régions

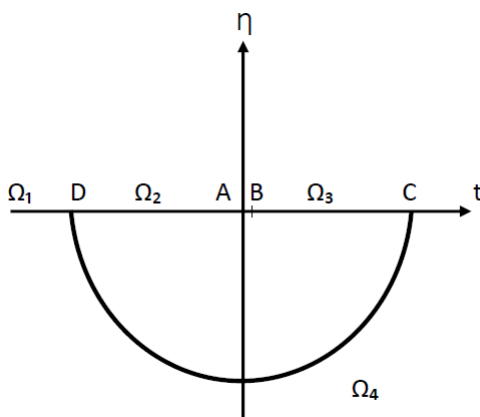


FIGURE 2.5 – Le plan f dans le région.

On devise l'intégrale de l'équation (2.14) en deux intégrales :

$$\begin{aligned}
\tau(t_0) &= \frac{-1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sigma(t)}{t-t_0} dt + \int_{-1}^0 \frac{\sigma(t)}{t-t_0} dt \right] \\
&= \frac{-1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{0}{t-t_0} dt + \int_{-1}^0 \frac{-\pi/4}{t-t_0} dt \right] \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{1}{t-t_0} dt \\
&= \frac{1}{4} [\ln(t-t_0)]_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{4} [\ln(-t_0) - \ln(-1-t_0)] \\
&= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{t_0}{1+t_0}\right)
\end{aligned}$$

Alors on obtient l'équation suivante :

$$\tau(t) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) \quad (2.16)$$

Les expressions pour obtenir les points z coupés se trouvant sur la surface libre sont nécessaires , pour obtenir ces expressions nous écrivons l'expression de z en réarrangeant l'équation (2.11)

$$\frac{d\omega}{dz} = u - iv = \frac{1}{\mu} e^{-i\phi(s)} \implies \frac{dz}{d\omega} = \mu e^{i\phi(s)}$$

$$\implies dz = \mu e^{i\phi(\varsigma)} d\omega \quad (2.17)$$

Avec les différenciations et les réarrangements de transformation (2.9) on obtient une équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{d\varsigma}{d\omega} = \pi e^{\pi\omega} = \pi\varsigma &\implies \frac{d\omega}{d\varsigma} = \frac{1}{\pi\varsigma} \\ &\implies d\omega = \frac{1}{\pi\varsigma} d\varsigma \end{aligned}$$

alors l'équation (2.17)

$$dz = \frac{\mu}{\pi} \frac{e^{i\phi(\varsigma)}}{\varsigma} d\varsigma$$

ς est réel alors :

$$dz = \frac{\mu}{\pi} \frac{e^{i\phi(t)}}{t} dt$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{e^{i\phi(\lambda)}}{\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{e^{i(\sigma(\lambda)+i\tau(\lambda))}}{\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

$$z(t) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{e^{i\sigma(\lambda)-\tau(\lambda)}}{\lambda} d\lambda \quad (2.19)$$

Nous avons utilisé $e^{i\sigma(\lambda)} = \cos(\sigma(\lambda)) + i \sin(\sigma(\lambda))$ et l'équation (2.9) pour obtenir les expressions de x et

y

$$x(t) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{\cos(\sigma(\lambda))e^{-\tau(\lambda)}}{\lambda} d\lambda$$
$$y(t) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{\sin(\sigma(\lambda))e^{-\tau(\lambda)}}{\lambda} d\lambda$$

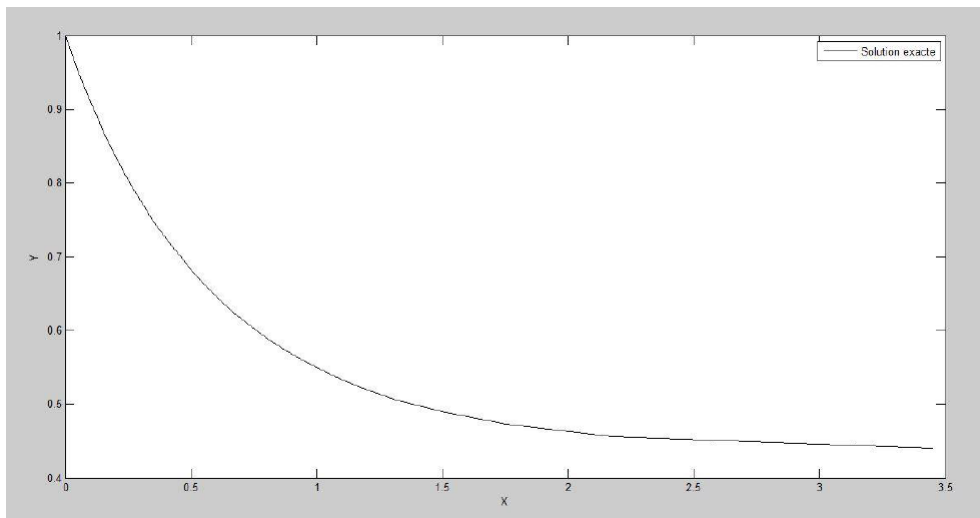


FIGURE 2.6 – La solution exacte.

CHAPITRE 3

Discussion des résultats

Ce chapitre est consacré à la discussion des résultats obtenus

Contenu :

1. Transformation de Schwartz-Christoffel
2. Discussion des résultats

3.1 Transformation de Schwartz-Christoffel

La transformation de Schwartz-Christoffel est une transformation conforme souvent utilisée pour résoudre des problèmes de flux. Cette transformation effectue une transformation dans le polygone du plan complexe (figure 3.1) vers le demi-plan supérieur (figure 3.2) de la variable complexe λ .

Laissez a_1, a_2, \dots, a_n points correspondant à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ à partir de l'axe réel du plan λ on définit la transformation de Schwarz-Christoffel représentant l'intérieur du polygone du demi-plan supérieur par la formule ([1]) :

$$\Omega = M \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} + N \quad (3.1)$$

où : M et N sont des constantes complexes.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les angles intérieurs au polygone.

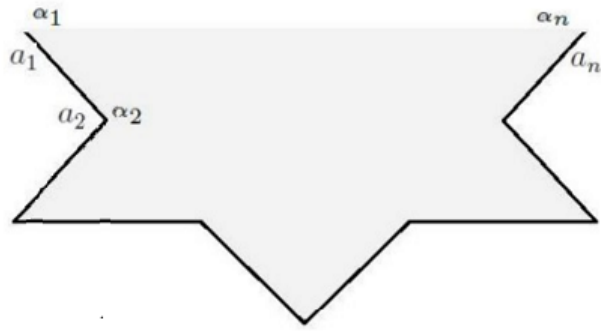


FIGURE 3.1 – Plan de variable Ω .

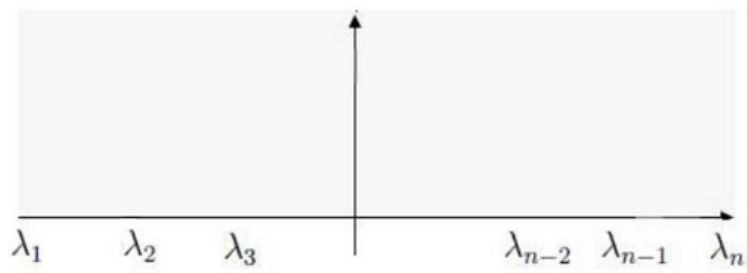


FIGURE 3.2 – Plan de variable λ .

Le problème à été résolu analytiquement par Dr.BOUNAB et Dr.BOUDERAH ,ils ont trouvé un bon résultat en utilisant la méthode de Kirchhoff et la transformation de Schwartz-Christoffel pour le même problème qu'on a étudié de notre mémoire par d'autre transformation conforme et de la méthode d'intégration. leur résultat est indique dans la (figure 3.3)

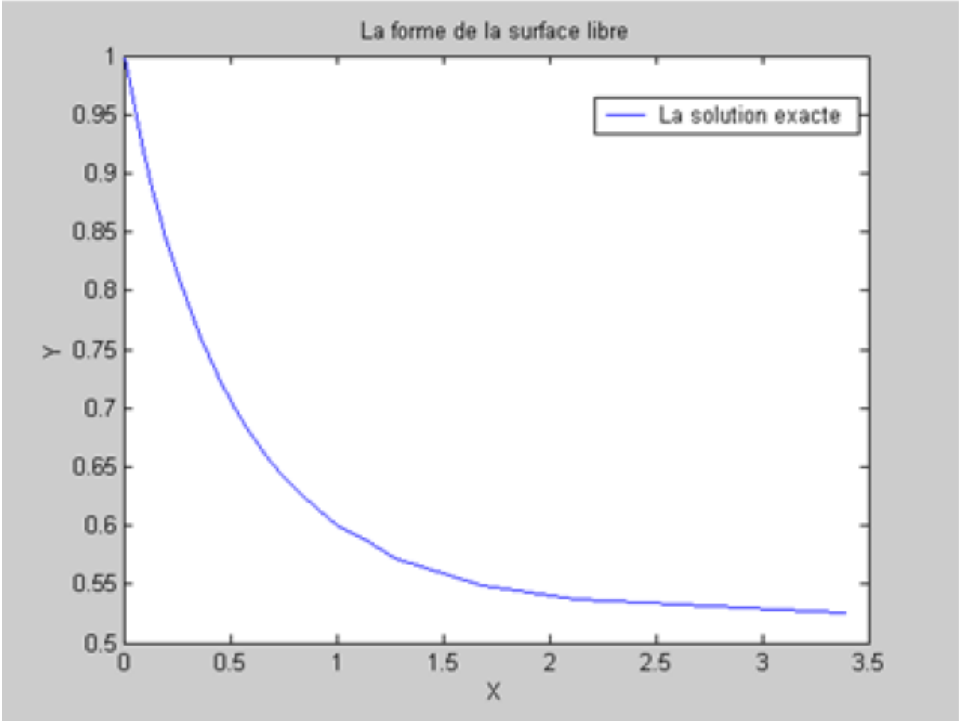


FIGURE 3.3 – La solution exacte ([19]).

et nous dans notre étude on a trouvé

les points	plan Z	plan f
A=A'	$x = -\infty, y = 1$	$\phi = -\infty, \psi = 0$
B=B'	$x = -1, y = 1$	$\phi = -1, \psi = 0$
C=C'	$x = 0, y = 1/2$	$\phi = 0, \psi = 0$
D	$x = +\infty, y = 1/4$	$\phi = 0, \psi = -1$
D'	$x = -\infty, y = -1/4$	$\phi = 0, \psi = 1$

TABLE 3.1 – Représentation des points du plan z sur le plan f .

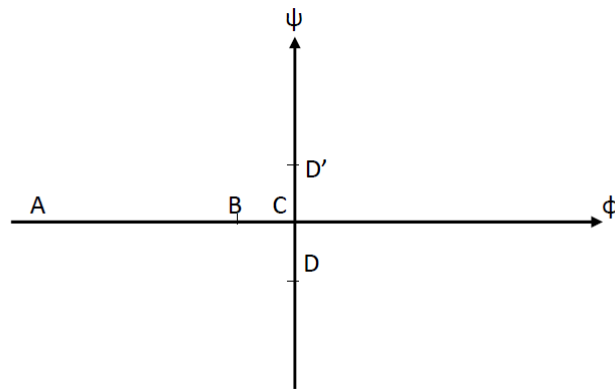


FIGURE 3.4 – plan f .

les points	plan z	plan f
A	$x = -\infty, y = 1$	$\phi = -\infty, \psi = 0$
B	$x = -1, y = 1$	$\phi = -1, \psi = 0$
C	$x = 0, y = 1/2$	$\phi = 0, \psi = 0$
D	$x = +\infty, y = 1/4$	$\phi = 0, \psi = -1$

TABLE 3.2 – Représentation des points du plan z sur le plan f

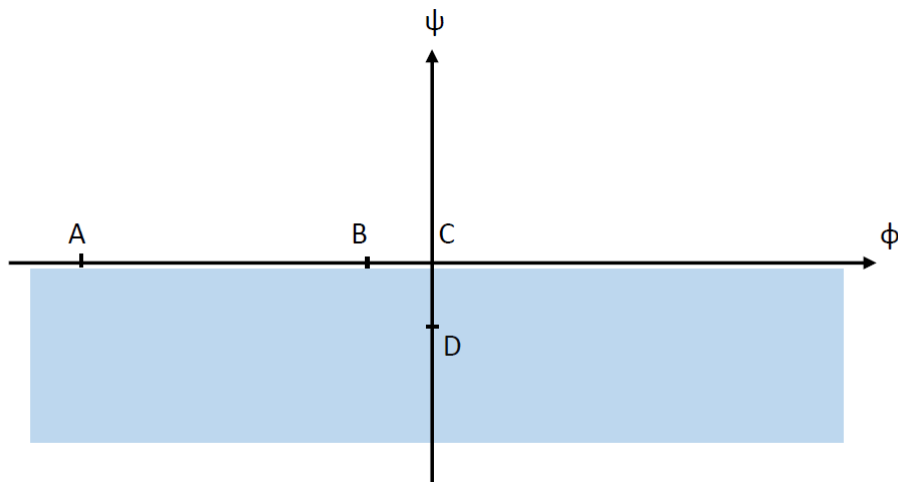


FIGURE 3.5 – Le plan f .

les points	plan f	plan ς
A	$\phi = -\infty, \psi = 0$	$t = 0, \eta = 0$
B	$\phi = -1, \psi = 0$	$t = e^{-\pi}, \eta = 0$
C	$\phi = 0, \psi = 0$	$t = 1, \eta = 0$
D	$\phi = 0, \psi = -1$	$t = -1, \eta = 0$

TABLE 3.3 – Représentation des points du plan f sur le plan ς

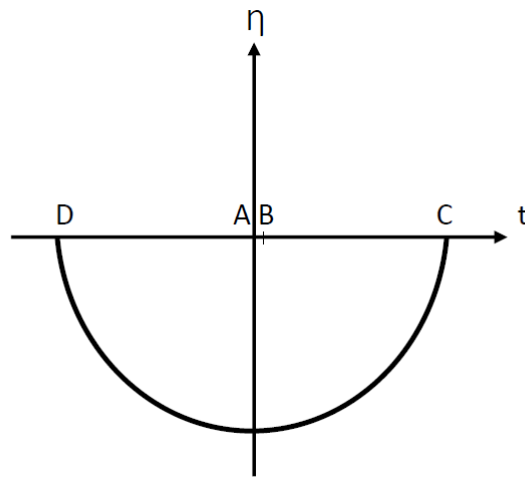


FIGURE 3.6 – plan ς .

les points	plan f	plan ζ
A=A'	$\phi = -\infty, \psi = 0$	$t = 0, \eta = 0$
B=B'	$\phi = -1, \psi = 0$	$t = 0, \eta = ie^{-\frac{\pi}{2}}$
C=C'	$\phi = 0, \psi = 0$	$t = 0, \eta = 1$
D	$\phi = 0, \psi = -1$	$t = 1, \eta = 0$
D'	$\phi = 0, \psi = 1$	$t = -1, \eta = 0$

TABLE 3.4 – Représentation des points du plan f sur le plan ζ

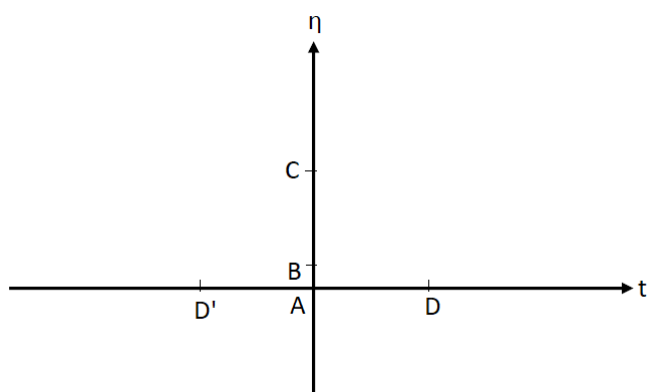


FIGURE 3.7 – plan ζ .

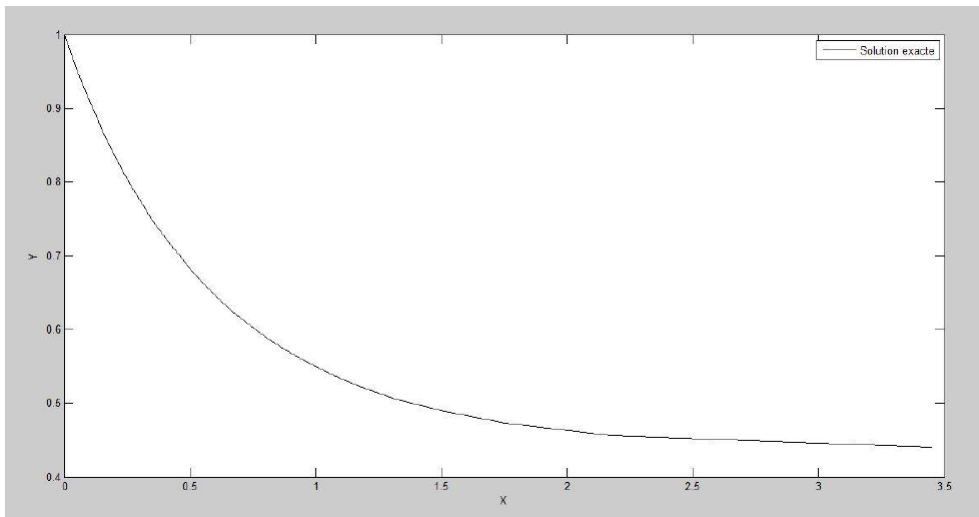


FIGURE 3.8 – La solution exacte.

3.2 Discussion des résultats

Les deux travaux consistent à trouver la forme de la surface libre d'un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel dans un canal avec un orifice qui forme un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec l'horizontal en négligeant la gravité et les forces de la tension de la surface, les deux résultats sont presque égaux dont l'erreur variée entre $\epsilon \approx 10^{-5}$ et 10^{-7} (comme indique les graphes citées au dessus).

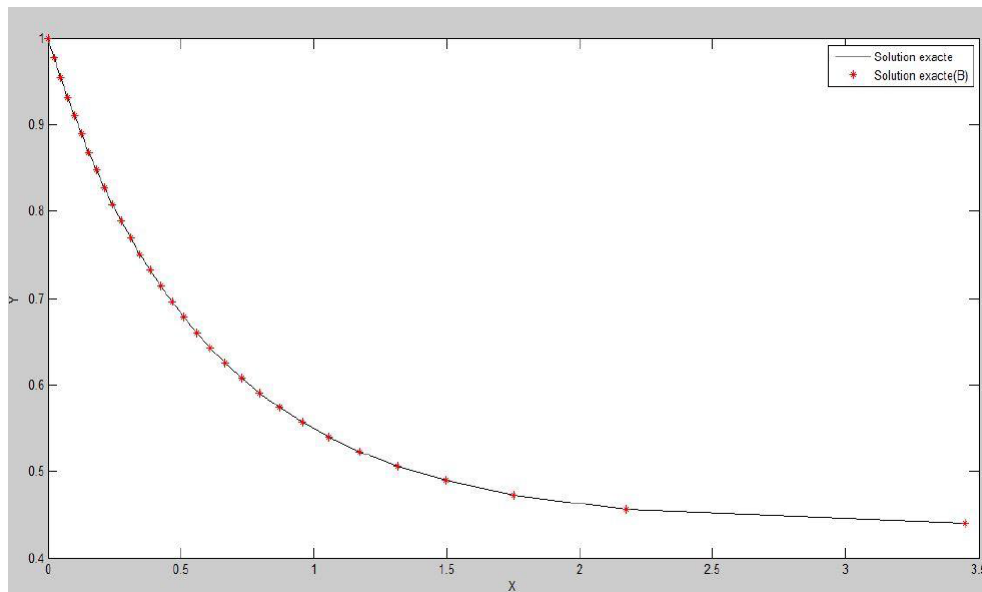


FIGURE 3.9 – Comparaison entre des solutions analytiques trouvées.

Alors , on remarque que Les deux résultats sont presque égaux même si les deux méthodes utilisées pour la résolution du problème sont différentes.

Conclusion générale

Dans ce mémoire , on a étudié analytiquement un problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux dans un canal avec un orifice qui forme un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec l'horizontal en appliquant quelques transformations conformes (Plemelj...) et méthode d'intégration pour résoudre l'équation intégral-différentiel obtenue dans ce problème où on a trouvé la solution exacte qui est la forme de surface libre de l'écoulement étudié . Aussi le problème était résolu analytiquement par Dr.BOUNAB([19]) ou elle a trouvé la forme de la surface libre avec une autre transformation conforme c'est la transformation de Schwartz-Christoffel et la méthode de ligne de courant .

Enfin , on a aboutit a des résultats qui sont très proches (qui coïncident presque) . Donc on peut conclure que notre méthode de résolution est très fiable .

Notre perspective concerne l'application de cette méthode d'intégration à d'autres domaines d'écoulements (d'autre géométrie du domaine), et aussi avec d'autres conditions aux limites ...

Bibliographie

- [1] A.Amara,"Calcul numérique d'un jet bidimensionnel d'un fluide devant un mur de forme quelconque",Thèse de Doctorat,2018.(Université de M'sila)
- [2] A.Benhacine éq.Nemouchi,"Mécanique des fluides" (MDF)(ST2-B),cours mécanique des fluides.
- [3] A. Gasmi and H. Mekias, A jet from a container and flow past a vertical flat plate, Appl. Math, Sci. 1 (2007), 2687-2698.
- [4] A. Gasmi and H. Mekias, The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet, J. Phys. A,Math. Gen. 36 (2003), 851-862.
- [5] A.Laiadi,"Effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles",Thèse de Magister,2012.(Université Kasdi Merbah Ouargla)
- [6] A.Laiadi,"Sur quelques problèmes d'écoulements à surface libres avec tension de surface",Thèse de Doctorat,2018.(Université de Biskra)
- [7] A.R. Elcrat and L.N. Trefthen, "Classical free-streamline flows over a polygonal obstacle", J. Comp and Applied Math. 14(1986), 256-265.
- [8] Christophe Ancey,"Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides",Laboratoire hydraulique environnementale(LHE).École Polytechnique Fédérale de Lausanne Écublens CH-1015 Lausanne.
- [9] F. Dias and J. M. Vanden-Broeck, Flows emerging from a nozzle and filling under gravity, J. Fluid. Mech, 213 (1990), 465-477.

- [10] F. Toison and J. Hureau, "Potential flow issuing from a two-dimensional curved nozzle", *Phys. Fluids*. 13(3) (2001), 793-798.
- [11] J.M. Vanden-Broeck and J. B. Keller, Weir flows, *J. Fluid Mech.* 176 (1987), 283-293.
- [12] J. M. Vanden-Broeck, Flow under a gate, *Phys. Fluids*, 29 (10) (1986), 3148-3151.
- [13] J. M. Vanden-Broeck. "The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle", *J. Fluid Mech.* 133 (1983), 255-264.
- [14] J. Roussel-E. N. S. C. R. Mécanique des fluides (2010).
- [15] K.Bekrentchir, "Mecanique des fluides", Cours et exercices corrigés. (Université des sciences et de technologie M.Boudiaf d'Oran)
- [16] M.Bourich, "Mécanique des fluides", Cours de mécanique des fluides. Université CADI AYAD (2014).
- [17] M.chantal, "Mécanique des fluides", Cours mécanique des fluides.
- [18] N.Bounab and Bouderah, "Computing solution of the Flow due to a Nozzle". *I. J of computer Application*, 67 (13) (2013), 14-18.
- [19] N.Bounab, Simulation numérique de quelques écoulements potentiels en 2D " Curved Nozzle", Thèse Doctorat. (2015).
- [20] R.Benhamouda, "Notions de mecanique des fluides", cours et exercices corrigés, Centre de publication universitaire, 2008
- [21] S.Daoudi, "Mécanique des fluides", 2015/2016. (Université de Borj Bou Arréridj)
- [22] Z.Salloum, "Étude mathématique d'écoulement de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers", *Matématiques générales* [math.GM], 2008. (Université Paris-Est).

المخلص:

هذا العمل يهدف الى دراسة مشكلة عددية تتعلق بالتدفق المحتمل وثنائي الابعاد لسائل غير قابل للضغط وغير لزج ينطلق من فتحة باستخدام بعض التحويلات المطابقة مع اهمال التوتر السطحي والجاذبية، وذلك بحل معادلة تفاضلية تكاملية

الكلمات المفتاحية: سائل مثالي، سطح حر، التحويل المطابق، معادلة تفاضلية تكاملية

Abstract

This work consists to studying a numerical problem of potential and two-dimensional flow of an incompressible and non-viscous fluid issuing out of an orifice using some conformal transformations which neglecting surface tension and gravity , and solving an integro-differential equation.

Key words: Perfect fluid , Free surface , Conformale transformation , Integro-differential equation.

Résumé

Ce travail consiste à étudier un problème numériquement d'un écoulement potentiel et bidimensionnel d'un fluide incompressible et non viscos issue d'un orifice en utilisant quelques transformations conformes en négligeant la tension surface et la gravité, en résolvant une équation intégro-différentiel.

Mots clés: Fluide parfait , Surface libre , Transformation conforme , équation Intégro-différentiel.