

28 ماي 2023

المسيلة في :

رقم: 236/GE/2023

مستخلص من محضر اجتماع اللجنة العلمية لقسم الهندسة الكهربائية
المنعقد بتاريخ 2023-05-08
- بخصوص مطبوعة الدروس للأستاذ حريزي عبد الغفور

بخصوص مطبوعة الدروس المنجزة من طرف الأستاذ حريزي عبد الغفور أستاذ محاضر قسم "أ" بقسم الهندسة الكهربائية تحت عنوان: « Modélisation et identification des systèmes » فقد اطّلت اللجنة على التقارير الواردة من طرف لجنة الخبراء المكونة من الأستاذ إيدير عبد الحكيم أستاذ محاضر -أ- بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة ، الأستاذ بن يطو لطفي أستاذ بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة و الأستاذ بشوات محسن أستاذ محاضر -أ- بجامعة غرداية والتي كانت كلها ايجابية، لهذا فان اللجنة لا ترى مانعا أن تتخذه سندا في تدريس طلبة السنة الأولى ماستر روبوتات ميدان علوم و تكنولوجيا و أن تعتمد في أي تقييم للمسار العلمي للأستاذ المعني.

رئيس اللجنة العلمية

بوقرة عبد الرحمان



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed BOUDIAF - M'sila



Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique

Modélisation et identification des systèmes

Dr. HERIZI Abdelghafour

Ce cours a pour objectif de maîtriser les techniques modernes de l'automatique pour l'identification et l'estimation des modèles des systèmes, sur les plans des principes théoriques et de la mise en œuvre pratique à l'aide de nombreux exemples.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed BOUDIAF - M'sila



Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique

Modélisation et identification des systèmes

Dr. HERIZI Abdelghafour

Ce cours a pour objectif de maîtriser les techniques modernes de l'automatique pour l'identification et l'estimation des modèles des systèmes, sur les plans des principes théoriques et de la mise en œuvre pratique à l'aide de nombreux exemples.

Auteur

Dr. HERIZI Abdelghafour

abdelghafour.herizi@univ-msila.dz

abdelghafour_herizi@yahoo.fr

Faculté : Technologie

Département : Génie Electrique

Etablissement : Université Mohamed BOUDIAF de M'sila – Algérie

Intitulé de la matière : Modélisation et identification des systèmes

Semestre : 1

Unité d'Enseignement : UE Fondamentale

Code : UEF 1.1.1, **Crédits :** 2, **Coefficients :** 1

Volume Horaire Semestriel : 22h30 (15 semaines)

Volume horaire hebdomadaire : Cours : 1h30

Mode d'évaluation : Contrôle Continu : 100%

Description du cours

L'identification de système est une technique de l'automatique consistant à proposer une structure entre sa commande et sa réponse afin de déterminer à partir des mesures des entrées/sorties, les valeurs des paramètres du modèle. Ainsi trouvé, le modèle doit être capable de reproduire aussi fidèlement que possible le système physique, chimique, biologique, économique, ..., etc. L'informatique peut aider à exécuter la tâche d'identification par la génération de signaux test, l'acquisition des données et mesures, leur traitement en temps réel et enfin la validation du modèle.

Ce document est un support pédagogique du cours *modélisation et identification des systèmes* destiné aux étudiants de première année Master Robotique au département de Génie électrique (Faculté de Technologie). Ce polycopié de cours est organisé en cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation est la représentation (mathématique ou physique) d'un système par un autre plus simple et intégrant plus ou moins de connaissances physiques.

Afin de nous munir des éléments essentiels à la compréhension de cette étude, nous nous attacherons dans le deuxième chapitre à donner quelques généralités sur l'identification.

Nous étudierons ensuite dans le troisième chapitre les méthodes générales de l'identification du modèle non paramétrique et paramétrique des systèmes non bruités. Nous nous intéresserons à l'identification des modèles paramétriques.

Au quatrième chapitre, nous présenterons les principaux types d'algorithmes intervenant dans les méthodes d'identification récursives pour identifier les systèmes bruités.

Nous compléterons ce document par une étude pratique réalisée avec le logiciel MATLAB-SIMULINK, ceci afin de mettre en évidence les avantages des méthodes d'identification paramétriques (graphiques et statistiques).

Mode d'évaluation

L'évaluation de l'étudiant se fait par :

1. Examen de fin de semestre (100%)

CONTENU DE LA MATIERE

Chapitre I : Modélisation des systèmes

1. Introduction.....	1
2. Définition du modèle.....	1
3. Type du modèle.....	1
3.1 Modèle de connaissance.....	1
3.2 Modèle de représentation.....	4
2.2.1 Modèle non paramétrique.....	4
2.2.2 Modèle paramétrique.....	4
4. Modèle mathématique.....	5
5. Types de modèle mathématique.....	5
5.1 Modèle à temps continu.....	5
5.2 Modèle à temps discontinu ou discret.....	7
5.3 Modèle linéaire.....	8
5.4 Modèle non linéaire.....	9

Chapitre II : Généralités sur l'identification

1. Définition.....	10
2. Choix de la complexité du modèle.....	10
2.1 Modèle ARX.....	11
2.2 Modèle ARMAX.....	11
2.3 Modèle OE.....	12
2.4 Modèle de Box-Jenkins.....	12
3. Estimation des paramètres du modèle.....	13
3.1 Distance d'état (distance de sortie).....	13
3.2 Distance de prédiction.....	13
3.3 Distance de structure.....	13
4. Les étapes d'identification.....	14
4.1 La 1 ^{ère} étape.....	15
4.2 La 2 ^{ème} étape.....	15
4.3 La 3 ^{ème} étape.....	15
4.4 La 4 ^{ème} étape.....	15
5. Quelques problèmes posés par l'identification.....	15
5.1 Choix de la période d'échantillonnage.....	15
5.2 Choix du signal d'excitation.....	16
5.3 Effets des perturbations sur l'identification.....	16

Chapitre III : Méthodes d'identification des systèmes non bruités

1. Introduction.....	17
2. Méthodes d'identification du modèle non paramétrique.....	17
2.1 Mesure par la réponse indicielle.....	17
2.2 Mesure par la réponse impulsionnelle.....	17
2.2.1 Mesure par la TF.....	18
2.2.2 Mesure par corrélation.....	18
2.2.2.1 Mesure par l'auto-corrélation.....	18
2.2.2.2 Mesure par intercorrélation.....	18
3. Méthodes d'identification du modèle paramétrique.....	19
3.1 Méthodes paramétriques graphiques.....	19
3.1.1 Méthode de Strejc-Quentin.....	19
3.1.2 Méthode de Broida.....	20

3.1.3 Identification d'un intégrateur.....	21
3.2 Méthodes paramétriques statistiques.....	22
3.2.1 Algorithme d'adaptation paramétrique.....	22
3.2.2 Les algorithmes d'identification récursifs.....	24
3.2.2.1 Algorithme de gradient.....	25
3.2.2.2 Algorithme des Moindres Carrés Récursifs (M.C.R)	26
3.2.3 Initialisation de l'algorithme.....	27
3.2.4 Choix du gain d'adaptation.....	27
Chapitre IV : Identification des systèmes bruités	
1. Introduction.....	29
2. Méthodes basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction.....	29
2.1 Moindres carrés récursifs (M.C.R).....	29
2.2 Moindres carrés étendus (M.C.E).....	29
2.3 Maximums de vraisemblance récursif (M.V.S).....	31
2.4 Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (E.S.M.P.E).....	31
2.5 Moindre carrés généralisés (M.C.G).....	32
3. Méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur d'observation de l'erreur de prédiction.....	33
3.1 Variable instrumentale à observation retardée.....	34
3.2 Variable instrumentale à modèle auxiliaire.....	35
3.3 Erreur de sortie à compensateur fixe.....	36
3.4 Erreur de sortie à compensateur ajustable.....	37
4. Validation des modèles identifiées.....	38
Chapitre V : Simulation et validation des résultats	
1. Introduction.....	39
2. Les applications pour les méthodes graphiques.....	39
2.1 Méthode de Strejc-Quentin.....	39
2.2 Méthode de Broida.....	40
2.3 Processus intégrateur.....	41
3. Les applications pour les méthodes statistiques.....	43
3.1 La méthode des moindres carrés récursifs (M.C.R)	43
3.1.1 Système du premier ordre.....	44
3.1.2 Système du deuxième ordre.....	46
3.2 La méthode des moindres carrés étendus.....	48
3.3 La méthode de variable instrumentale à observations retardées.....	50
3.4 L'entrée est un échelon d'amplitude 10 et retardée de 100s.....	52
3.5 L'influence de la période d'échantillonnage.....	54
3.6 L'influence du nombre d'échantillons.....	56
Bibliographie.....	57

Chapitre 1 : Modélisation des systèmes

1. Introduction :

La modélisation est la représentation (mathématique ou physique) d'un système par un autre plus simple et intégrant plus ou moins de connaissances physiques, donc plus facile à étudier. Il existe deux types de modèles selon la complexité du système à étudier : modèle de connaissance ou de représentation.

2. Définition du modèle :

Le modèle est un ensemble d'équations mathématiques qui relie l'entrée $u(t)$ à la sortie $y(t)$, le modèle et le système doivent se conduire identiquement dans des conditions aussi variées que possible: le modèle doit être fidèle, précis et simple.

3. Type du modèle :

Il existe divers types de modèle chacun étant destiné à une application particulière, nous pouvons les classer en deux grandes catégories :

3.1 Modèle de connaissance :

Les modèles de connaissances sont basés généralement sur les lois (de la physique, de la chimie, ...) qui permettent de décrire complètement le système pour une meilleure simulation et conception des procédés. Ce type de modèle est souvent complexe et peu utilisé en automatique.

Exemple 1 : Soit le circuit RLC représenté par la figure suivante :

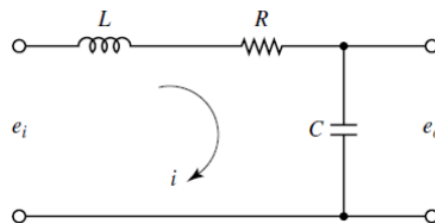


Figure (I.1) : Circuit RLC.

En appliquant la loi de tension de Kirchhoff, on obtient les équations suivantes :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \int idt = e_i$$

$$\frac{1}{c} \int idt = e_0$$

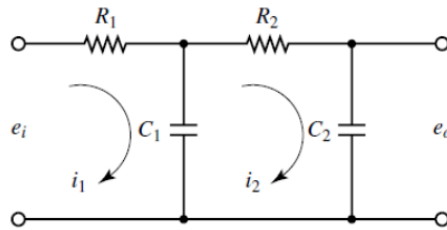
On peut obtenir la fonction de transfert du système en appliquant la transformée de Laplace sur les équations précédentes :

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{c} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{c} \frac{1}{s} I(s) = E_0(s)$$

Si e_i est l'entrée et e_0 la sortie, alors :

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Exemple 2 :**Figure (I.2) :** Circuit électrique en cascade.

Supposons que e_i est l'entrée et e_o est la sortie ; les capacités C_1 et C_2 ne sont pas chargées initialement. On constate que le deuxième étage du circuit (partie R_2C_2) constitue une charge pour le premier étage (partie R_1C_1). Les équations pour ce système sont comme suit :

$$\frac{1}{c_1} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 = e_i$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} \int (i_2 - i_1) dt + R_2 i_2 + \frac{1}{c_2} \int i_2 dt &= 0 \\ \frac{1}{c_2} \int i_2 dt &= e_o \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Laplace sur ces équations, on obtient :

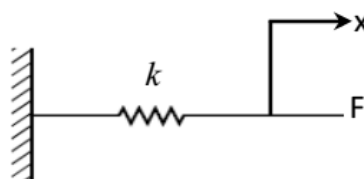
$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) &= E_i(s) \\ \frac{1}{c_1 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{c_2 s} I_2(s) &= 0 \\ \frac{1}{c_2 s} I_2(s) &= E_o(s) \end{aligned}$$

Et enfin, on obtient la fonction de transfert comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{E_0(s)}{E_i(s)} &= \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1) + (R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

Exemple 3 : Modélisation d'un ressort

La relation entre une force F exercé sur un ressort de raideur k dans le sens d'un déplacement x (Figure I.3) est donnée par : $F = kx$

**Figure (I.3) :** Système à ressort.

Les figures suivantes présentent deux systèmes à ressort, l'un en parallèle et l'autre en série :

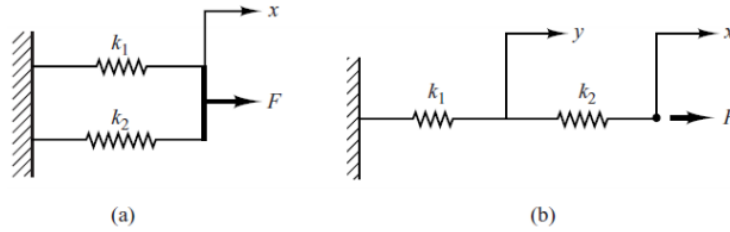


Figure (I.4) : Systèmes à ressort : (a) en parallèle, (b) en série

La raideur équivalente pour le système à ressorts en parallèle est donnée par :

$$k_1 x + k_2 x = F = k_{eq} x, \text{ avec : } k_{eq} = k_1 + k_2$$

Pour le système à ressort en série, on a :

$$k_1 y = F, k_2 (x - y) = F, \text{ d'où : } k_2 \left(x - \frac{F}{k_1} \right) = F, \text{ ou encore :}$$

$$k_2 x = \left(F + \frac{k_2}{k_1} F \right) = \frac{k_1 + k_2}{k_1} F = k_{eq} F$$

La raideur équivalente des ressorts en série est donc donnée par :

$$k_{eq} = \left(\frac{F}{x} \right) = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Exemple 4 : Modélisation de l'amortisseur

Un amortisseur à huile est un dispositif qui exerce un frottement visqueux ou un amortissement. Il se compose d'un piston et d'un cylindre rempli d'huile (voir figure ci-après), où b_1 est le coefficient de frottement visqueux.

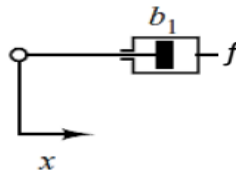


Figure (I.5) : Amortisseur à huile.

L'huile résiste à tout mouvement entre la tige et le cylindre rempli d'huile. L'amortisseur absorbe essentiellement l'énergie et la dissipe sous forme de chaleur. La relation entre une force f exercé sur l'amortisseur dans le sens d'un déplacement x est donnée par : $f = b_1 \cdot \frac{d}{dt} x = b_1 \cdot \dot{x}$

Soit le système d'amortisseurs en série ou en parallèle représenté par la figure suivante :

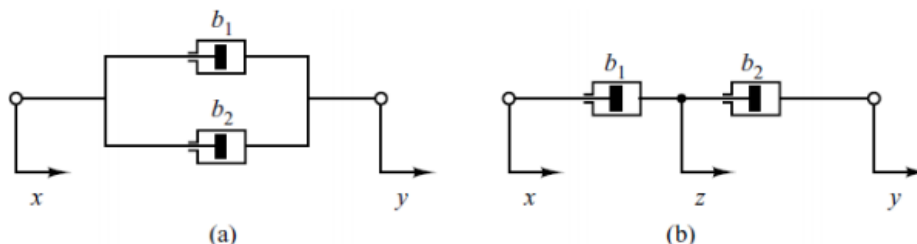


Figure (I.6) : Systèmes d'amortisseurs : (a) en parallèle, (b) en série.

Pour le système en parallèle, on a :

$$f = b_1(\dot{y} - \dot{x}) + b_2(\dot{y} - \dot{x}) = (b_1 + b_2)(\dot{y} - \dot{x}) = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

Avec : $b_{eq} = (b_1 + b_2)$

Pour le système en série, on a :

$$f = b_1(\dot{z} - \dot{x}) = b_2(\dot{y} - \dot{z}), \text{ donc : } (b_1 + b_2) \cdot \dot{z} = b_2\dot{y} + b_1\dot{x}$$

Avec $z = y - x$ est le déplacement entre les amortisseurs b_1 et b_2 , donc :

$$\dot{z} = \frac{1}{b_1+b_2} (b_2\dot{y} + b_1\dot{x})$$

$$\text{et } f = b_2(\dot{y} - \dot{z}) = b_2 \left[\dot{y} - \frac{1}{b_1+b_2} (b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \right] = \left[\frac{b_1 \cdot b_2}{b_1+b_2} (\dot{y} - \dot{x}) \right] = \frac{b_1 \cdot b_2}{b_1+b_2} \dot{z}$$

$$\text{donc : } b_{eq} = \frac{b_1 \cdot b_2}{b_1+b_2} = \frac{1}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}}$$

3.2 Modèle de représentation :

Lorsque l'analyse interne du système n'est pas possible (lois internes inconnues, mesures internes impossible ou difficiles) ou trop complexes, on est amené à considérer le système comme une boîte noire et à partir de l'observation de ses entrées/sorties (comportement externe) et de mesures expérimentales, on établit alors la relation mathématique qui lui correspond au mieux. Ce type de modèle est le plus utilisé en automatique. On distingue deux classes de modèle dynamique linéaire :

3.2.1 Modèles non paramétriques :

Ils sont décrits par des réponses impulsionnelles ou par des réponses indicielles, permettant de caractériser un système dynamique linéaire.

3.2.2 Modèles paramétriques :

Ils sont décrits par des fonctions de transfert dans le cas continu, ou bien par des équations aux différences dans le cas discret.

Exemple : Soit le moteur à courant continu asservis en vitesse.

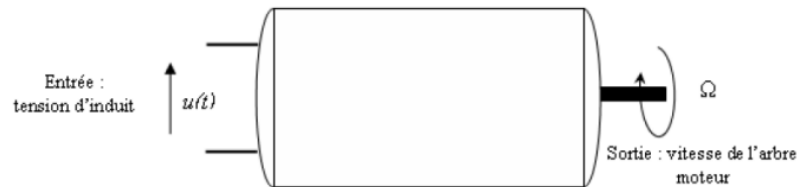


Figure (I.7) : Moteur à courant continu asservis en vitesse.

Son modèle physique (électrique) est représenté par la figure suivante :

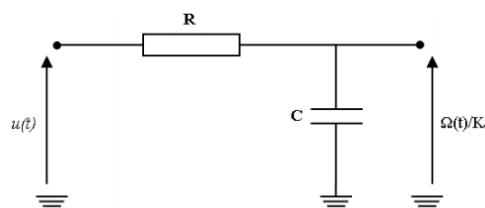


Figure (I.8) : Modèle électrique du moteur à courant continu.

Le modèle de connaissance est donné par :

$$\Omega(t) + \tau_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} = K_v u(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{RJ}{aR + \phi_0^2} \\ K_v = \phi_0 \frac{1}{aR + \phi_0^2} \end{cases}$$

a : nombre de paires de voies d'enroulement et ϕ_0 : flux par pôles (Wb).

Le modèle de représentation (obtenu expérimentalement) est donnée par :

$$\Omega(t) + \tau_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} = K_v u(t) \quad \text{avec : } \begin{cases} \tau_1 = 20ms \\ K_v = 50 (rd/s)/v \end{cases}$$

4. Modèle mathématique :

La détermination d'un modèle mathématique d'un processus nécessite en général diverses hypothèses simplificatrices afin de limiter sa complexité. Dans chaque application, il apparaît nécessaire de faire un compromis entre la finesse et la précision du modèle à mettre en œuvre d'une part, et la limite de complexité admissible, compte tenu des objectifs fixés, d'autre part.

Considérons à titre d'exemple un modèle d'automobile. Si le but du modèle est d'étudier la résistance au vent du véhicule, il suffit de prendre en compte la forme extérieure du véhicule et l'état des diverses surfaces qui le caractérisent. Si on s'intéresse à la résistance du véhicule en cas de choc, le modèle sera plus complexe et devra faire intervenir les caractéristiques géométriques et mécaniques de la carrosserie mais également du châssis et de l'ensemble de la structure interne de la voiture. Lorsque l'objectif est de prévoir le comportement du véhicule en fonctionnement, le modèle pourra être simplifié du point de vue de la plupart des structures qui pourront être supposées rigides mais par contre, on devra tenir compte des caractéristiques du moteur, des amortisseurs, ..., etc.

5. Types de modèle mathématique :

5.1 Modèle à temps continu :

Un procédé ou un système peut être représenté soit par ses équations d'état soit par sa fonction du transfert, la forme canonique de la représentation d'état est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (I.1)$$

Avec :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: Colonne qui représente les n variables d'état.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: Colonne qui représente les m commandes.

$y(t) \in \mathbb{R}^p$: Colonne qui représente les p sorties.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matrice d'état.

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: Matrice de commande.

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: Matrice d'observation.

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: Matrice d'action directe.

Le schéma bloc équivalent des équations d'état est illustré sur la figure suivante :

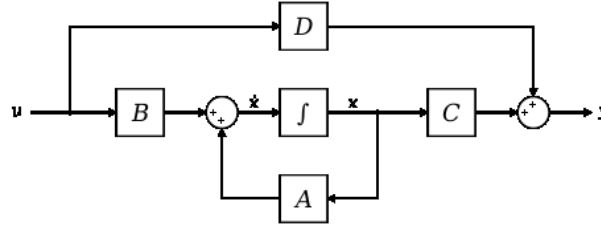


Figure (I.9) : Représentation d'état matricielle.

Les colonnes x , u et y représentent des vecteurs $x \in X$, $u \in U$ et $y \in Y$ dans des bases des espaces vectoriels X , U et Y . Les vecteurs X , U et Y vérifient les équations :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (I.2)$$

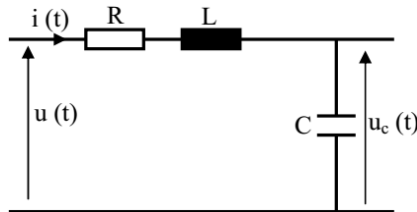
En posant $x(t = 0) = 0$, la transformation de Laplace de ce système conduit à :

$$\begin{cases} L\{\dot{X} = AX + BU\} \Rightarrow pX(p) = AX(p) + BU(p) \Rightarrow X(p) = [pI_n - A]^{-1}BU(p) \\ L\{Y = CX + DU\} \Rightarrow Y(p) = CX(p) + DU(p) \Rightarrow Y(p) = (C \cdot [pI_n - A]^{-1}B + D)U(p) \end{cases} \quad (I.3)$$

Alors la fonction du transfert du système est donnée par :

$$G(p) = C \cdot [pI_n - A]^{-1}B + D \quad (I.4)$$

Exemple : Soit le circuit RLC suivant :



Les équations électriques de l'entrée $u(t)$ et la sortie $u_c(t)$ sont données par :

$$\begin{cases} \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u_c(t) + \frac{1}{L}u(t) \end{cases} \quad (I.5)$$

On pose $x_1(t) = u_c(t)$, $x_2(t) = i(t)$, Alors :

$$X = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, U = [u(t)], Y = [u_c(t)]$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} U$$

$$Y = [1 \quad 0]X + [0]U$$

La fonction du transfert est donnée par : $G(p) = C \cdot [pI_n - A]^{-1}B + D$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0]$$

$$\text{Donc : } G(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

$$\text{Si } RC = LC = 1, \text{ Alors : } G(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

Instructions Matlab :

```
A= [0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1 0]; D=[0] ;
sys=ss(A,B,C,D) ;% ss permet de déclarer le modèle
                %par ses équations d'état
% on utilise tf pour afficher la fonction du transfert
y=tf(sys)
Transfer function:
      1
-----
s^2 + s + 1
```

5.2 Modèle à temps discontinu ou discret :

A cause du développement du calculateur numérique, la commande numérique des procédés est l'un des vastes domaines dans l'automatique. Cette commande nécessite un modèle de représentation échantillonné. Ce modèle peut être établi directement à partir d'une fonction du transfert continu ou à partir de la discrétisation des équations d'état.

Dans le cas du passage d'une fonction du transfert continue à une fonction du transfert discrète (avec un temps d'échantillonnage T_e) on peut remplacer l'opérateur de dérivé p par l'une des approximations suivantes :

- Approximation rectangulaire retardée du dérivé :

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - T_e)}{T_e} \Rightarrow p \approx \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

- Approximation rectangulaire avancée du dérivé :

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t + T_e) - x(t)}{T_e} \Rightarrow p \approx \frac{z - 1}{T_e}$$

- Approximation bilinéaire (Trapézoïdale) du dérivé :

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{2}{T_e} \cdot \frac{x(t) - x(t - T_e)}{x(t) + x(t - T_e)} \Rightarrow p \approx \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La fonction bilinear de MATLAB de la toolbox control permet de transformer une fonction de transfert en temps continu à une fonction de transfert en temps discret. On notera qu'en automatique les praticiens parlent d'une transformation de Tustin.

On peut légèrement modifier la transformée bilinéaire - on parle de prewarping - en introduisant une fréquence f_p dite fréquence pivot.

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\pi f_p T_e}{\tan(\pi f_p T_e)} \cdot \frac{2}{T_e} \cdot \frac{x(t) - x(t - T_e)}{x(t) + x(t - T_e)} \Rightarrow p \approx \frac{\pi f_p T_e}{\tan(\pi f_p T_e)} \cdot \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La représentation par les équations d'état a la forme générale suivante :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k \\ Y_k = C_k X_k + D_k U_k \end{cases}$$

Si le modèle est linéaire invariant le système devient :

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + BU_k \\ Y_k = CX_k + DU_k \end{cases}$$

Instructions Matlab :

Prenant l'exemple précédent avec $R = L = C = 1$, les matrices des équations d'état deviennent :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

```
A= [0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1 0]; D=[0]; fz = 10
[Ad,Bd,Cd,Dd]=bilinear (A,B,C,D,fz) ;
% bilinear permet de déclarer le modèle
% par ses équations d'état discrètes
% fz : fréquence de l'échantillonnage
% on utilise tf pour afficher la fonction du transfert
[Ad,Bd,Cd,Dd]=bilinear (A,B,C,D,fz)
Ad =
    0.9952    0.0950
   -0.0950    0.9002
Bd =
    0.0150
    0.3005
Cd =
    0.3155    0.0150
Dd =
    0.0024
% fonction du transfert
num=[1];den=[1 1 1];
[numd,dend]=bilinear (num,den,10)
numd =
    0.0024    0.0048    0.0024
dend =
    1.0000   -1.8955    0.9050
y1=tf(numd,dend,0.1)
Transfer function:
0.002375 z^2 + 0.004751 z + 0.002375
-----
          z^2 - 1.895 z + 0.905
Sampling time (seconds): 0.1
```

5.3 Modèle linéaire :

Un tel modèle caractérise un processus susceptible d'être décrit par une équation différentielle ordinaire ou une équation récurrente à coefficients constants (stationnaire) ou fonction du temps (non stationnaire) ou par un ensemble d'équations de ce type.

La propriété fondamentale des systèmes linéaires s'exprime par le principe de superposition : si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ représentent respectivement l'évolution des sorties du processus pour les entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sur un horizon et pour un état initial donné, alors, à l'entrée $u(t)$:

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \quad (\text{I.6})$$

Où α_1 et α_2 sont réels, correspondant à la sortie :

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad (\text{I.7})$$

Sur le même horizon et pour les mêmes conditions initiales.

Les systèmes linéaires stationnaires admettent une représentation entrée-sortie par fonction ou matrice de transfert, en s ou en z selon qu'il s'agit d'un modèle continu ou discret.

5.4 Modèle non linéaire :

Dans un modèle non linéaire, le théorème de superposition n'est plus valable. L'aspect non linéaire peut être intrinsèque et quasiment irréductible, comme dans la modélisation de la loi d'action de masse en chimie, ou correspondre à l'association d'éléments à caractéristiques non linéaires à des systèmes pour lesquels un modèle linéaire est utilisable comme c'est le cas des systèmes à non linéarités séparables (figure (I.10)).

Dans certains cas, lorsque le processus non linéaire est utilisé dans une plage de variation limitée de ses variables d'état, l'évolution s'effectuant autour d'une valeur x_0 donnée, il est possible d'effectuer une linéarisation autour de ce point de fonctionnement en prenant comme nouvelle variable l'expression $\delta x = x - x_0$.

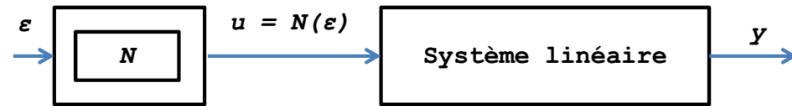


Figure (I.10) : Système à non linéarité séparable.

On néglige alors dans développement limité de la fonction $f(\cdot)$ les termes d'ordre supérieur à 1. Il vient par exemple pour la relation :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (\text{I.8})$$

Si la fonction f admet des dérivées partielles continues au premier ordre, le modèle linéarisé (I.9) valable pour (x, u) évoluant dans un voisinage de (x_0, u_0) :

$$\frac{d}{dt} \delta x = F_x(x_0, u_0, t) \delta x + F_u(x_0, u_0, t) \delta u \quad (\text{I.9})$$

Avec :

$$\delta x = x - x_0, \delta u = u - u_0, \text{ et où :}$$

$$F_x = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, F_u = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$$

Sont les matrices jacobiniennes de f en x et u . Il est également possible d'effectuer une linéarisation autour d'une trajectoire d'évolution, donnée solution de (I.8).

Pour certains processus non linéaires et/ou non stationnaires, on adopte aussi parfois une représentation multi-modèle, chaque modèle étant représentatif de l'évolution du processus dans un domaine limité de l'espace et du temps. Ainsi un système linéaire non stationnaire peut être représenté par un ensemble de modèles linéaires à coefficients constants se succédant au cours du temps.

La mise en œuvre de tels modèles en vue de la résolution d'un problème donné nécessite bien sûr une validation terminale.

Chapitre II : Généralités sur l'identification

1. Définition :

L'identification est l'opération de détermination du modèle dynamique d'un procédé (système) à partir des mesures entrées/sorties. La connaissance du modèle dynamique est nécessaire pour la conception et la mise en œuvre d'un système performant de régulation. Pratiquement, l'identification a généralement pour but la détermination de modèle de conduite, utilisables pour simuler, commander ou régler un processus. Ce modèle peut être physique (au sens de simulateur analogique ou numérique et de modèle réduit), ou bien un modèle abstrait (modèle mathématique, i.e. système d'équations algébriques ou différentielle).

L'identification constitue une phase importante dans la définition du modèle, c'est par elle que le choix de la classe de modèles à adapter puis les valeurs des paramètres qui le caractérisent vont se préciser.

Le plus souvent l'identification s'effectue en optimisant un critère de qualité qui caractérise l'écart entre le comportement du processus (repéré par un ensemble de mesures), et celui de son modèle (étudié par simulation) pour un ensemble de sollicitations données.

De nombreuses méthodes d'identification sont précisées dans la suite correspondant le plus souvent à l'un des schémas des figures (II.1) et (II.2).

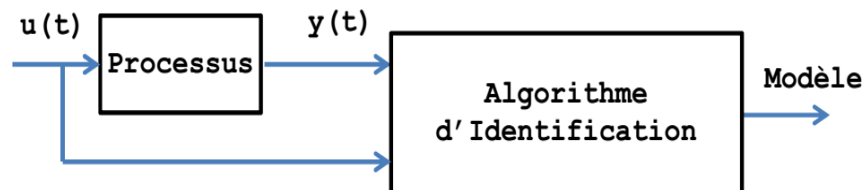


Figure (II.1) : Identification à partir du comportement entrée-sortie.

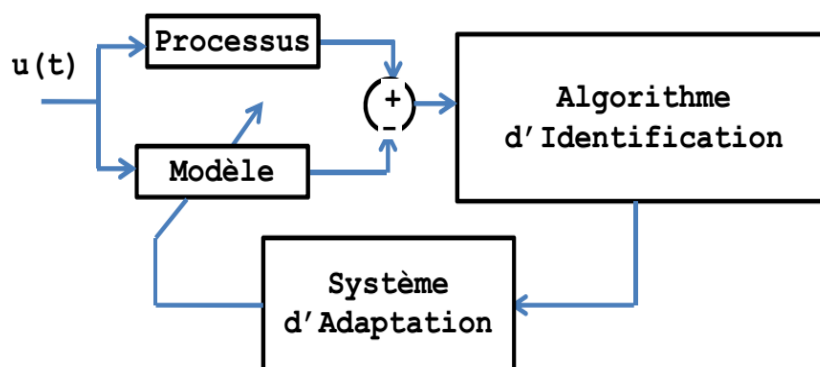


Figure (II.2) : Identification de type paramétrique.

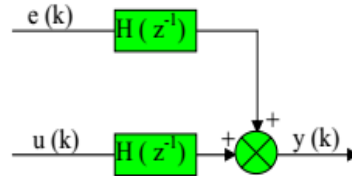
2. Choix de la complexité du modèle :

L'objectif de l'identification est de trouver les paramètres d'un modèle entrée-sortie. Mais, en pratique, la sortie mesurée des procédés est généralement bruitée. Cela est dû soit à l'effet des perturbations aléatoires agissant à différents endroits du procédé, soit à des bruits de mesure.

Ces perturbations à caractère aléatoire sont modélisées souvent par des modèles ARMA, le procédé plus la perturbation étant modélisés par un modèle ARMAX. En temps discret la forme générale de la sortie est donnée par :

$$y(k) = G(z)u(k) + H(z)e(k) \tag{II.1}$$

Avec : $y(k)$: les sorties, $u(k)$: les entrées et $e(k)$: les bruits.



Les hypothèses sur la structure sont effectuées à travers la forme des fonctions $G(z)$ et $H(z)$. Ces modèles-hypothèses tiennent en considération l'ordre du système, le retard, etc... , et aussi l'effet et le type du bruit.

2.1 Modèle ARX :

Le modèle ARX (AutoRégressif à variables eXogènes) est un modèle entrée-sortie de la forme générale :

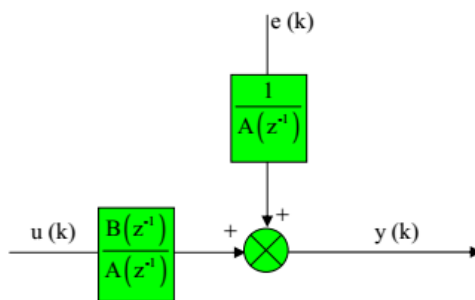
$$\hat{y}(k) + a_1y(k - 1) + \dots + a_{na}y(k - na) = b_1u(k - 1) + \dots + b_{nb}u(k - nb) + e(k)$$

Où y sont les sorties du système, u les entrées et e une séquence de nombres aléatoires indépendants d'espérance μ nulle et de variance σ^2 généralement appelé bruit de boucle ou bruit d'état dans le cas ARX. Ce modèle est généralement représenté sous la forme compacte :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k)$$

Avec :

$$\begin{cases} A(z) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{na}z^{-na} \\ B(z) = b_1z^{-1} + \dots + b_{nb}z^{-nb} \end{cases}$$



Ce modèle est le plus simple, donne souvent de bons résultats. Le seul problème est le traitement du bruit qui est soumis à la même dynamique que l'entrée.

2.2 Modèle ARMAX :

Le modèle ARMAX (AutoRégressif à Moyenne Ajusté et à variables eXogènes) est un modèle entrée-sortie de la forme générale :

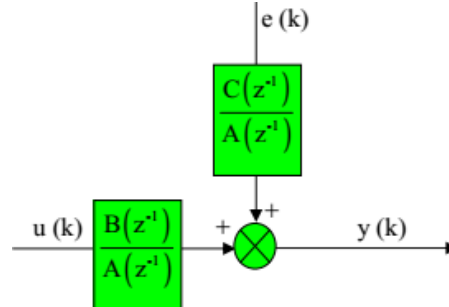
$$\hat{y}(k) + a_1y(k - 1) + \dots + a_{na}y(k - na) = b_1u(k - 1) + \dots + b_{nb}u(k - nb) + e(k) + c_1e(k - 1) + \dots + c_{nc}e(k - nc)$$

Sous la forme compacte :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})e(k)$$

Avec :

$$\begin{cases} A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na} \\ B(z) = b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \\ C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{nc} z^{-nc} \end{cases}$$



Ce modèle est proche du modèle ARX, il s'utilise dans les mêmes cas. Il permet de créer un modèle de bruit un peu réaliste.

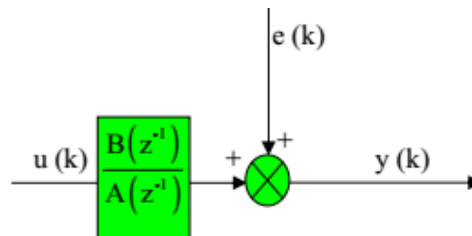
2.3 Modèle OE :

Le modèle OE (Output Error) calcule l'estimation de l'erreur de prédiction d'un modèle d'erreur de sortie. Sa forme générale est :

$$\hat{y}(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{na} y(k-na) = b_1 u(k-1) + \dots + b_{nb} u(k-nb) + b_1 e(k-1) + \dots + b_{nb} e(k-nb)$$

Sous la forme compacte :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + A(z^{-1})e(k)$$

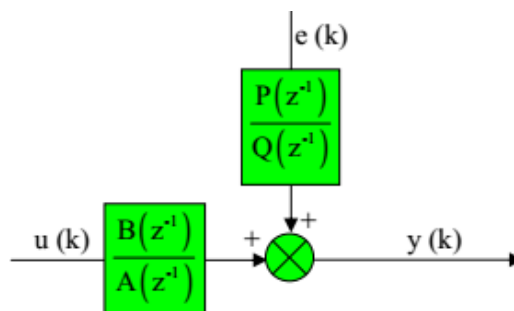


Il semble plus simple que les précédents, mais le calcul des paramètres est difficile. Parfait lorsque le bruit est un bruit de capteur c.-à-d. proche de la sortie.

2.4 Modèle de Box-Jenkins :

Le modèle de Box-Jenkins est le modèle complet par excellence, où la dynamique de l'entrée est différente à celle du bruit. Sa forme compacte :

$$A(z^{-1})Q(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})Q(z^{-1})u(k) + A(z^{-1})P(z^{-1})e(k)$$



3. Estimation des paramètres du modèle :

L'affectation des valeurs numériques se fait par choix d'un critère exprimant l'écart entre le système et le modèle qu'il faut minimiser. Ce critère peut s'exprimer de diverses façons. On distingue trois distances :

3.1 Distance d'état (distance de sortie) :

Elle est basée sur la différence entre la sortie réelle du procédé et celle du modèle.

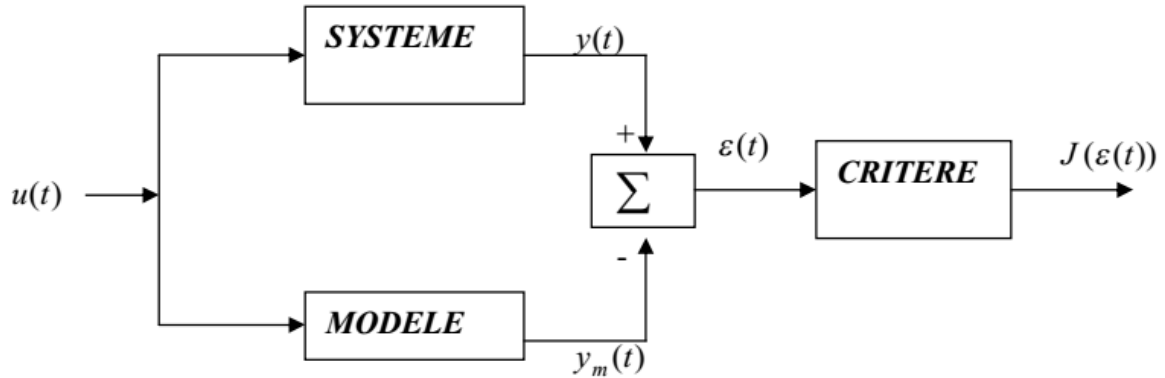


Figure (II.3) : Distance d'état.

Avec :

$y_m(t)$: Sortie du modèle à l'instant t et $y(t)$: sortie réelle du système.

$$J = f(\varepsilon(t)) = \sum_{i=1}^t [y(i) - y_m(i)]^2$$

3.2 Distance de prédiction :

C'est la différence entre la sortie du système à l'instant t et la sortie que prédit le modèle au même instant.

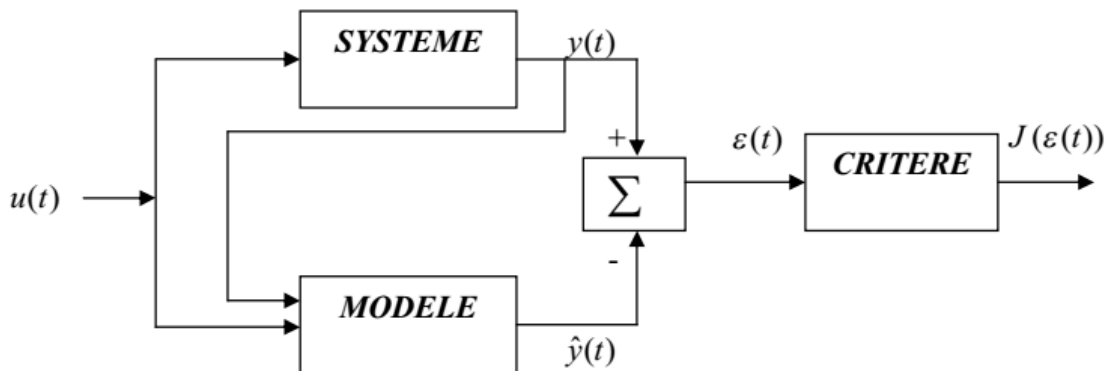


Figure (II.4) : Distance de prédiction.

$$J = f(\varepsilon(t)) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{y}(i)]^2$$

On note que $\hat{y}(t)$ est la sortie prédite du modèle à l'instant t .

3.3 Distance de structure :

Elle est en fonction de la différence entre les paramètres du système et ceux du modèle.

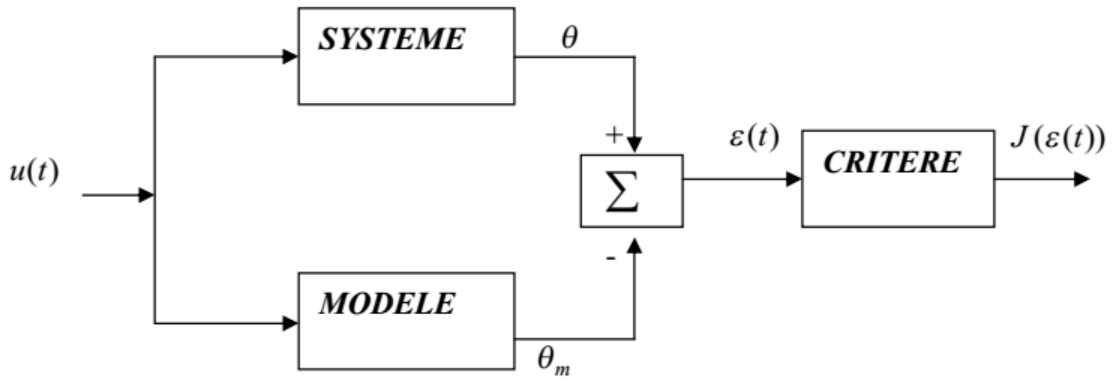


Figure (II.5) : Distance de structure

$$\varepsilon = \theta - \theta_m$$

$$J = f(\varepsilon(t)) = (\theta - \theta_m)^T A (\theta - \theta_m) = \varepsilon^T A \varepsilon$$

Avec :

A : Matrice de pondération définie positive.

θ : Vecteur de paramètres du système.

θ_m : Vecteur de paramètres du modèle.

4. Les étapes d'identification :

L'identification est une approche expérimentale pour la détermination du modèle dynamique d'un système. Cette approche peut être décomposée en quatre étapes selon la figure ci-après.

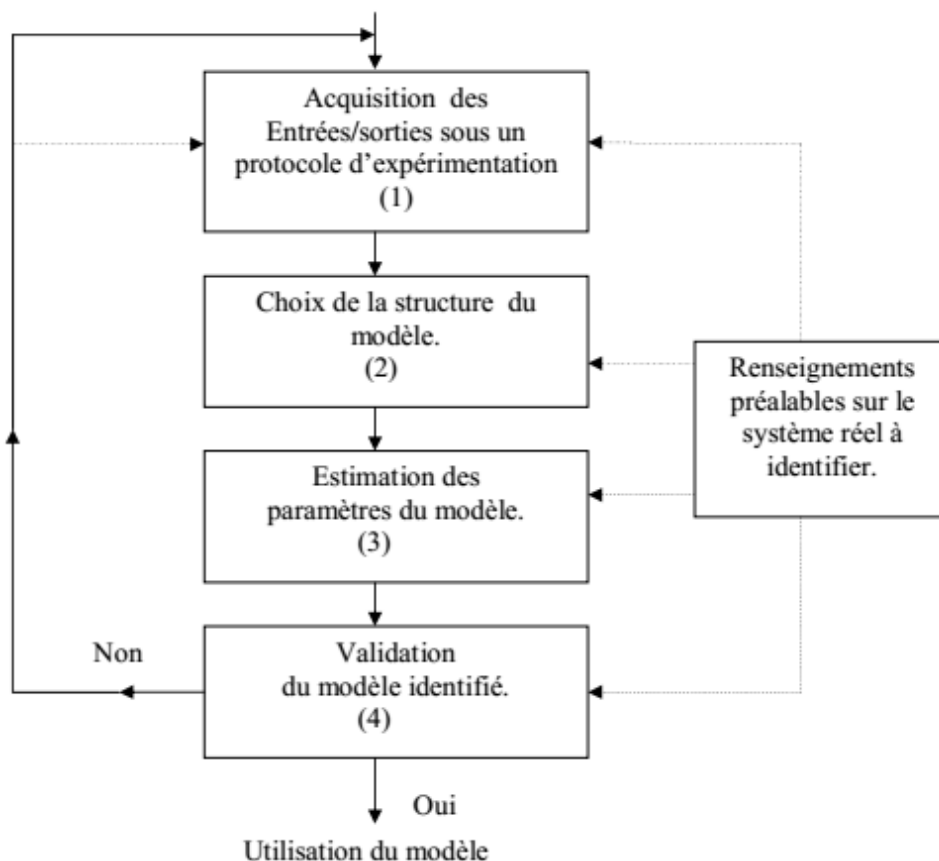


Figure (II.6) : Procédure d'identification d'un modèle de système.

4.1 La 1^{ère} étape :

La première étape fournit les données entrées/sorties susceptibles de permettre l'extraction d'un modèle de procédé significatif. Le protocole d'acquisition est un problème-clé car il conditionne en grande partie le succès d'une opération d'identification. Il doit tenir compte d'une part des contraintes pratiques, ce qui requiert en général l'utilisation de signaux d'excitation de faible amplitude et d'autre part de la nécessité d'exciter le système à identifier dans une bande de fréquences suffisamment large afin d'obtenir un modèle significatif pour le calcul de la commande.

4.2 La 2^{ème} étape :

Le choix d'une structure non convenable conduit souvent à une mauvaise estimation, malgré toutes les précautions prises aux niveaux de la période d'échantillonnage, de la méthode d'identification paramétrique, du signal d'excitation, du gain d'adaptation et du nombre d'observations effectuées.

4.3 La 3^{ème} étape :

Elle consiste à trouver les valeurs numériques des coefficients qui interviennent dans la structure du modèle. Ces valeurs numériques sont déterminées pour que le comportement du modèle soit le plus proche de celui du procédé. Cette proximité se mesure à l'aide d'un critère qui devra être minimisé.

4.4 La 4^{ème} étape :

Une fois l'algorithme d'identification appliqué et le modèle obtenu, il reste à examiner celui-ci. Selon la qualité du modèle obtenu on remet en cause l'une ou l'autre des étapes (signal d'excitation, structure du modèle,...) et on recommence jusqu'à obtenir un modèle satisfaisant. Dans la pratique, on essaie un certain nombre de modèles avant de choisir le meilleur.

5. Quelques problèmes posés par l'identification :

5.1 Choix de la période d'échantillonnage :

Afin de pouvoir restituer un signal continu à partir de sa séquence discrétisée, il faut que sa fréquence d'échantillonnage F_e vérifie le théorème de Shannon :

$$F_e \geq 2F_{max}$$

Où :

F_e : est la fréquence d'échantillonnage

F_{max} : est la fréquence maximale contenue dans le signal à transmettre.

$F_e = 2F_{max}$ est une limite théorique ; en pratique, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage plus grande avec une marge de sécurité, ce qui nous donne :

$$F_{max} < F_e < 25F_{max}$$

5.2 Choix du signal d'excitation :

Le choix du signal d'excitation a une grande influence sur la qualité de l'estimation paramétrique. On doit exciter le système dans toute sa gamme de fréquences sans pour autant perturber son point de fonctionnement. L'entrée idéale sur le plan fréquentiel est un bruit blanc. Comme ce dernier est difficile à réaliser alors, on considère une entrée avec les propriétés suivantes :

- Valeur moyenne nulle.
- Faible influence sur la sortie.
- Spectre riche.

Le signal répondant aux exigences citées ci-dessus existe et s'appelle séquence binaire pseudo-aléatoire (S.B.P.A). C'est une succession d'impulsions rectangulaires modulées en largeur.

Exemple : Génération de la SBPA par Matlab

```

N=3;      % nombre de bit du registre à décalage
Te=1;    % Te = periode d'échantillonnage
p=2;     % p = diviseur de fréquence (d'échantillonnage)
a=1;     % a = niveau (la SBPA varie entre -a et +a)
n=1;     % n = nombre de périodes de la SBPA
L=2^N-1; % La longueur résultante est L'=n*p*L où L=2^N-1
ROT=[zeros(N-1,1);1],[eye(N,N-1)]; %matrice de rotation
R=ones(1,N); %matrice des registres
SBPA=zeros(n*p*L,1); %matrice contenant la séquence
SBPA(1)=R(N); %sortie initiale
for i=1:L %calcul de la SBPA
    for ij=1:n
        for j=1:p
            SBPA((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L)=a*R(N);
            t((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L)=((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L-1)*Te;
        end;
    end;
R=R*ROT;
if N==3
    R(1)=-R(1)*R(2);
elseif N==4 R(1)=-R(3)*R(2);
elseif N==5 R(1)=-R(4)*R(2);
elseif N==6 R(1)=-R(5)*R(4);
elseif N==7 R(1)=-R(6)*R(5);
elseif N==8 R(1)=-R(1)*R(2)*R(3)*R(7);
elseif N==9 R(1)=-R(8)*R(4);
elseif N== 10 R(1)=-R(9)*R(6);
else R(1)=-R(1)*R(N);
end
end

```

On peut utiliser aussi l'instruction $a*\text{sign}(\text{rand}-0.5)$.

5.3 Effets des perturbations sur l'identification :

La sortie mesurée des procédés est en générale bruitée. Cela est dû soit à l'effet des perturbations agissant à différents endroits du procédé, soit à des bruits de mesure. Ces perturbations introduisent des erreurs dans l'estimation des paramètres des modèles du procédé.

Chapitre III : Méthodes d'identification des systèmes non bruités

1. Introduction :

Pour une bonne connaissance quantitative du système, de nombreuses méthodes d'identification sont apparues ces dernières années. Elles sont applicables en particulier à des procédés industriels.

2. Méthodes d'identification du modèle non paramétrique :

Pour ces méthodes, le système est caractérisé par sa réponse indicielle ou impulsionnelle dont cette dernière peut être déterminée, soit par corrélation, soit par la transformée de Fourier.

2.1 Mesure par la réponse indicielle :

La réponse indicielle est une grandeur temporelle à partir de laquelle, on peut déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$. Cette méthode consiste à appliquer à l'entrée du système un échelon unitaire $u(t)$.

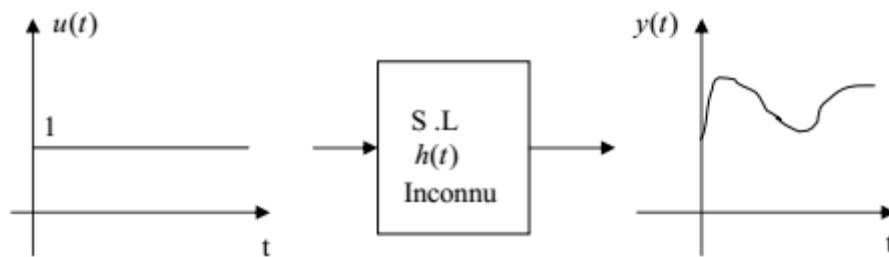


Figure (III.1) : La réponse indicielle du système.

En effet, on peut montrer que la réponse impulsionnelle $h(t)$, qui caractérise le système, n'est rien d'autre que la dérivée par rapport au temps de la réponse indicielle.

– Le calcul de : $\frac{dy(t)}{dt}$

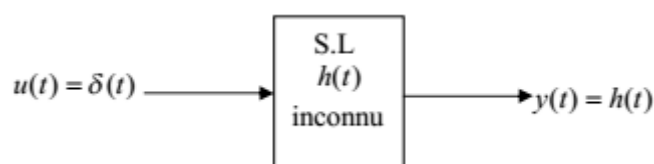
$$\text{On a : } y(t) = u(t) * h(t) \xrightarrow{TL} Y(p) = U(p) \cdot H(p)$$

$$Y(p) = \frac{K}{p} \cdot H(p) \Rightarrow H(p) = \frac{p \cdot Y(p)}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = K \cdot h(t)$$

2.2 Mesure par la réponse impulsionnelle :

On applique à l'entrée du système linéaire une impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$ et on obtient en sortie $y(t) = h(t)$, qui est la réponse impulsionnelle du système.



$$y(t) = u(t) * h(t) = h(t)$$

2.2.1 Mesure par la Transformée de Fourier (T.F) :

L'usage de cette méthode permet de translater au domaine fréquentiel, les signaux d'entrées $u(t)$, et de sorties $y(t)$, afin de pouvoir substituer le produit de convolution dans le domaine de temps par un produit simple dans le domaine de fréquence.

$$y(t) = u(t) * h(t) \xrightarrow{TF} Y(f) = U(f) \cdot H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{U(f)}$$

2.2.2 Par corrélation :

On distingue deux types de mesures :

2.2.2.1 Mesure par autocorrélation :

Comme le montre le schéma suivant :

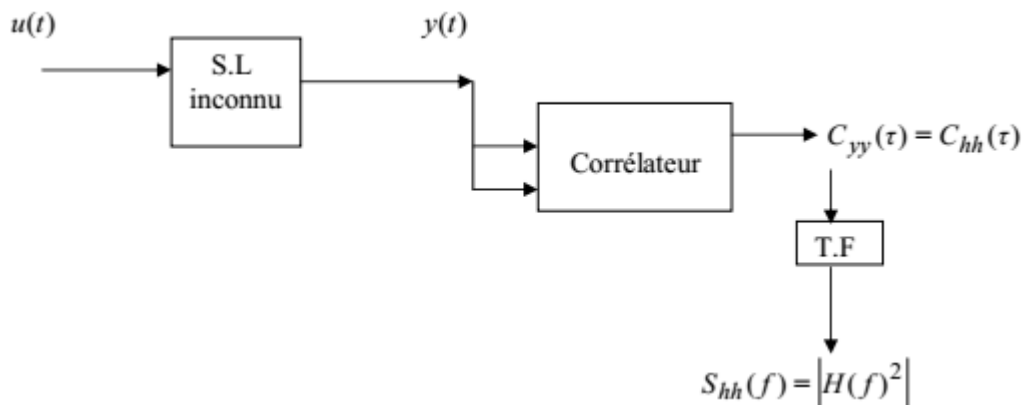


Figure (III.2): Application de la méthode d'auto- corrélation.

$$C_{yy}(\tau) = C_{uu}(\tau) * C_{hh}(\tau)$$

Si : $u(t)$ choisi tel que :

$$C_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$$

Alors :

$$C_{yy}(\tau) = \delta(\tau) * C_{hh}(\tau)$$

2.2.2.2 Mesure par intercorrélation :

On a aussi la relation suivante entre l'entrée $u(\tau)$ et la sortie $y(\tau)$ d'un système linéaire.

$$C_{yu}(\tau) = C_{uu}(\tau) * h(\tau) *$$

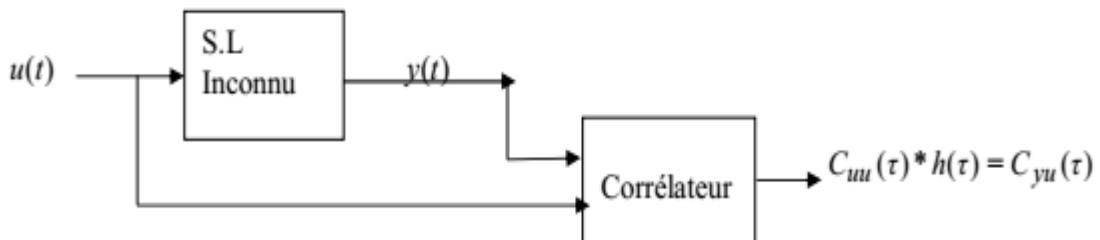


Figure (III.3): Application de la méthode d'intercorrélation.

Si on choisit $u(t)$ tel que $C_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$, on obtient à la sortie du corrélateur :

$$C_{yu}(\tau) = \delta(\tau) * h(\tau)$$

3. Méthodes d'identification du modèle paramétrique :

Dans cette partie, on va étudier les méthodes utilisant le modèle paramétrique. Ce dernier consiste à caractériser un système par l'ensemble des paramètres qu'il convient de déterminer, ce qui revient à trouver le vecteur paramètres correspondant. Ces méthodes sont souvent utilisées dans l'industrie pour identifier les systèmes dynamiques. Il existe deux types :

- Méthodes paramétriques graphiques (déterministes).
- Méthodes paramétriques statistiques.

3.1 Méthodes paramétriques graphiques :

Nous présentons successivement quelques méthodes fondamentales susceptibles d'obtenir un modèle paramétrique à partir du modèle non paramétrique en utilisant la réponse à un échelon (Strejc-Quentin).

3.1.1 Méthode de Strejc-Quentin :

Cette méthode permet d'identifier un processus présentant une réponse indicielle aperiodique. Le modèle mathématique proposé par Strejc-Quentin est de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{(1 + Tp)^n}$$

Les paramètres à identifier sont : le gain statique K , le retard τ , la constante de temps T et l'ordre n .

Pour identifier les paramètres du modèle à partir de la réponse indicielle du système, on trace la tangente au point d'inflexion I . Cette dernière permet de déterminer T_1 et T_2 .

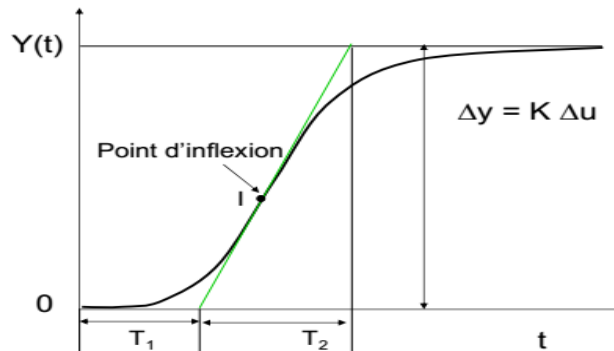


Figure (III.4) : Réponse indicielle du procédé.

1. Le gain statique est mesuré directement par $K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$
2. On trace la tangente au point d'inflexion I pour déterminer deux valeurs : T_1 et T_2 .
3. Relever T_1 et T_2 en déduire l'ordre n en utilisant le tableau ci-joint. Entre deux lignes du tableau, on choisit la valeur de n la plus petite.
4. Déterminer la constante du temps T à partir du tableau : $\frac{T_2}{T}$
5. Déterminer le retard τ quand il existe à partir de la différence entre la valeur de T_1 mesurée et celle donnée par la colonne du tableau $\frac{T_1}{T_2}$.

Tableau pour estimer l'ordre, la constante de temps et le retard du modèle de Strejc.

n	$\frac{T_1}{T}$	$\frac{T_2}{T}$	$\frac{T_1}{T_2}$
1	0	1	0
2	0.282	2.718	0.104
3	0.805	3.695	0.218
4	1.425	4.463	0.319
5	2.100	5.119	0.410

Tableau (III.1) : Tableau de Strejc-Quentin.

3.1.2 Méthode de Broïda :

Le modèle proposé pour approcher le comportement du système est un premier ordre avec un retard pur. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{1 + Tp}$$

Avec :

K : Gain statique.

τ : Retard du modèle.

T : Constante de temps.

Le principe n'est pas de faire coïncider la tangente au point d'inflexion (souvent imprécis), mais d'ajuster les paramètres T et τ pour que les courbes de réponse du modèle et du processus aient deux points communs judicieusement choisis. Les points communs C_1 et C_2 habituellement utilisés correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale. Le modèle de Broïda donne les points C_1 et C_2 .

$$\frac{y(t)}{K \cdot E_0} = 0.28 \Rightarrow \frac{t - \tau}{T} = 0.328$$

$$\frac{y(t)}{K \cdot E_0} = 0.40 \Rightarrow \frac{t - \tau}{T} = 0.510$$

La méthode d'identification s'appuie sur les résultats de l'équations précédentes. Soient t_1 et t_2 les temps au bout desquels la réponse expérimentale atteint respectivement 28% et 40% de la valeur finale. On va simplement résoudre le système donné par :

$$t_1 - \tau = 0.328T \text{ et } t_2 - \tau = 0.510T$$

La résolution de ces équations donne :

$$T = 5.5 (t_2 - t_1) \text{ et } \tau = 2.8 t_1 - 1.8 t_2$$

Le gain K est déterminé comme dans la méthode de Strejc-Quentin.

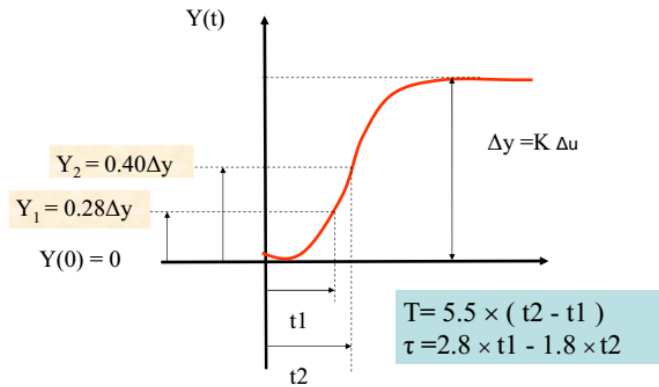


Figure (III.5) : Réponse indicielle du procédé.

3.1.3 Identification d'un processus intégrateur :

Un processus du type intégrateur est caractérisé par le fait qu'une variation en échelon appliquée à son entrée correspond à une variation en rampe de sa sortie lors du régime permanent (voir figure III.6).

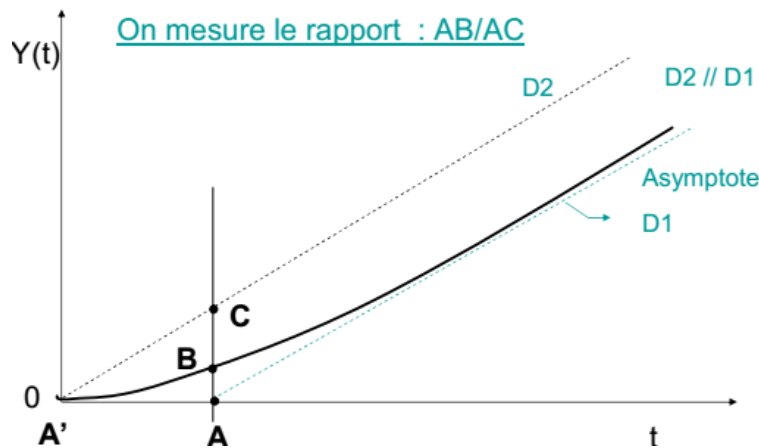


Figure (III.6) : Réponse indicielle du processus intégrateur.

n	AB/AC
1	0.368
2	0.271
3	0.224
4	0.195
5	0.175

Tableau (III.2) : Tableau de processus intégrateur.

On trace une droite (D2) passant par l'origine, parallèle à l'asymptote (D1) pour une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p} \frac{e^{-\tau p}}{(1 + Tp)^n}$$

Avec :

- K : Gain en vitesse.
- T : Constante de temps.
- n : Ordre du modèle.

Il est aisé de tirer de la mesure de AB/AC , grâce au tableau (III.2), la valeur de n ; la constante de temps T est déterminée par la relation $T = A'A/n$.

Les méthodes d'identification graphiques sont simples à utiliser et ne nécessitent que peu de matériels, mais rien n'empêche qu'elles présentent plusieurs inconvénients et parmi eux on cite :

- Sont limitées dans le choix des modèles.
- Nécessitent des signaux test d'amplitude importante (rarement tolérés par les installations industrielles)
- Sont sensibles aux perturbations (et il n'est pas possible ici de modéliser les perturbations)
- La procédure est longue, et il n'y a pas de procédures explicites de validation des modèles.

3.2 Méthodes statistiques :

La disponibilité d'un calculateur numérique permet de mettre en place des algorithmes d'estimation automatique des paramètres des modèles échantillonnés des procédés.

Le traitement de données E/S peut se faire à l'aide d'algorithmes non récursifs (traitement en bloc de données obtenues sur un horizon de temps) ou récursifs (traitement pas à pas de données), le second type d'algorithme présente l'avantage d'être en temps réel et nécessite moins de ressources en terme de calcul.

L'identification paramétrique statistique et généralement basée sur l'erreur entre la sortie du procédé $y(t)$ et celle prédite $\hat{y}(t)$ par le modèle (erreur de prédiction).

3.2.1 Algorithme d'adaptation paramétrique :

L'objectif de cet algorithme est de piloter les paramètres du modèle ajustable de prédiction à partir des informations recueillis sur le système à chaque pas d'échantillonnage. La figure suivante montre le principe d'estimation des paramètres du modèle par un algorithme d'adaptation paramétrique.

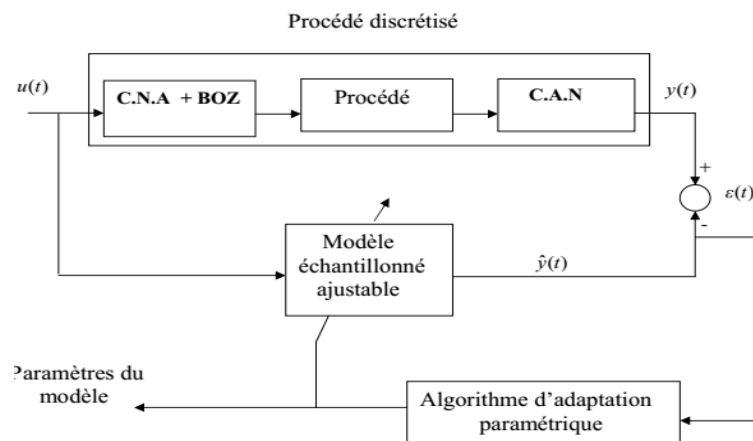


Figure (III.7) : Principe de l'estimation des paramètres d'un modèle.

Principe de l'algorithme :

Soit le système discret de la forme :

$$y(t) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t)$$

Où :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A}$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \dots + a_{n_B}q^{-n_B}$$

Qui s'écrit encore à l'instant $(t + 1)$ sous la forme :

$$y(t + 1) = - \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t + 1 - i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t - d + 1 - i) = \theta^T \phi(t)$$

d : est le retard pur échantillonné

$y(t)$ et $u(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du procédé

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_{n_A}, b_1, \dots, a_{n_B}]$$

$$\phi(t)^T = [-y(t) \dots - y(t + 1 - n_A), u(t - d) \dots u(t - d - n_B + 1)]$$

Exemple :

Considérons le modèle du procédé sans retard à l'instant $t + 1$ décrit sous la forme :

$$y(t + 1) = - \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t + 1 - i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t + 1 - i) = \theta^T \phi(t) \quad (\text{III.5})$$

Avec le vecteur de paramètres :

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_{n_A}, b_1, \dots, a_{n_B}]$$

Avec le vecteur d'observation :

$$\phi(t)^T = [-y(t) \dots - y(t + 1 - n_A), u(t) \dots u(t - n_B + 1)]$$

Pour le modèle de l'équation (III.5) un prédicteur basé sur l'estimation des paramètres $\hat{\theta}(t)$, peut être obtenu en remplaçant dans l'équation (III.3), $\theta(t)$ par $\hat{\theta}(t)$. On obtient alors :

$$\hat{y}^0(t + 1) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (\text{III.6})$$

$\hat{y}^0(t + 1)$: est la prédiction a priori du modèle à l'instant t

On définit l'erreur de prédiction à l'instant t par :

$$\varepsilon^0(t + 1) = y(t + 1) - \hat{y}^0(t + 1)$$

On se fixe alors pour objectif la recherche d'un algorithme récursif ayant la forme :

$$\hat{\theta}(t + 1) = f[\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^0(t + 1)]$$

qui minimisera l'erreur (procédé – modèle) au sens d'un critère à définir.

On définit en général un 'vecteur 'des paramètres dont les composantes sont les différents paramètres qui doivent être identifiés .Les algorithmes d'adaptation paramétrique ont tous la structure ci-après.

[Nouvelle estimation des paramètres] = [estimation précédente des paramètres] + [gain d'adaptation]*[fonction des mesures]*[fonction de l'erreur de prédiction].

3.2.2 Les algorithmes d'identification récurrents :

Contrairement aux méthodes en temps différé qui nécessitent l'acquisition de toutes les données avant le calcul des paramètres, les méthodes en temps réel du type récurrent réactualisent les valeurs des paramètres à chaque nouvelle acquisition.

3.2.2.1 Algorithme de gradient :

L'algorithme d'adaptation paramétrique du gradient a comme objectif de minimiser un critère quadratique en terme de l'erreur de prédiction.

Considérons le modèle discrétisé d'un procédé décrit par :

$$y(t+1) = a_1 y(t) - a_2 y(t-1) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) = \theta^T \phi(t) \quad (\text{III.7})$$

Où :

$$\theta^T = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2] \quad (\text{III.8})$$

est le vecteur des paramètres

$$\phi(t)^T = [-y(t) \ -y(t-1) \ u(t) \ u(t-1)] \quad (\text{III.9})$$

est le vecteur d'observation (mesure).

Le modèle de prédiction ajustable (a priori) sera décrit dans ce cas par :

$$\hat{y}^0(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) - \hat{a}_2(t)y(t-1) + \hat{b}_1(t)u(t) + \hat{b}_2(t)u(t-1) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t)$$

Où :

$\hat{y}^0(t+1)$: Représente la prédiction a priori dépendant des valeurs des paramètres estimés à l'instant t .

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \hat{b}_1(t), \hat{b}_2(t)] \quad (\text{III.10})$$

est le vecteur des paramètres estimés.

La sortie a posteriori de prédiction sera donnée par :

$$\hat{y}(t+1) = -\hat{a}_1(t+1)y(t) - \hat{a}_2(t+1)y(t-1) + \hat{b}_1(t+1)u(t) + \hat{b}_2(t+1)u(t-1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad (\text{III.11})$$

On définit l'erreur de prédiction « a priori » :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \quad (\text{III.13})$$

et une erreur de prédiction « a posteriori » :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad (\text{III.14})$$

On cherche un algorithme d'adaptation paramétrique récurrent. La structure d'un tel algorithme est donnée comme suit :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Delta \hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + f(\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^0(t+1)) \quad (\text{III.15})$$

Le terme de correction $f(\cdot)$ doit dépendre uniquement des informations disponibles à l'instant $t + 1$. Le terme de correction doit nous permettre de minimiser à chaque pas de critère :

$$\min_{\hat{\theta}(t)} J(t + 1) = [\varepsilon^0(t + 1)]^2 \quad (\text{III.16})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique correspondant aura la forme :

$$\hat{\theta}(t + 1) = \hat{\theta}(t) - F \frac{\delta J(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)} \quad (\text{III.17})$$

Où :

$F = \alpha I$ ($\alpha > 0$) est le gain d'adaptation matriciel

I : matrice diagonale unitaire et $\frac{\delta J(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)}$ est le gradient du critère de l'équation par rapport à $\hat{\theta}(t)$.

De l'équation (III.16) on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\delta J(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)} = \frac{\delta \varepsilon^0(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)} \varepsilon^0(t + 1) \quad (\text{III.18})$$

Sachant que :

$$\varepsilon^0(t + 1) = y(t + 1) - \hat{y}^0(t + 1) = y(t + 1) - \hat{\theta}^T \phi(t) \quad (\text{III.19})$$

Donc :

$$\frac{\delta \varepsilon^0(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)} = -\phi(t) \quad (\text{III.20})$$

Introduisant l'équation (III.20) dans l'équation (III.18), ce qui donne :

$$\hat{\theta}(t + 1) = \hat{\theta}(t) + F \phi(t) \varepsilon^0(t + 1) \quad (\text{III.21})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique donné dans l'équation (III.21) présente des risques d'instabilité si le gain d'adaptation est grand. Pour éviter ce problème d'instabilité, on utilise la même approche du gradient mais on considère un autre critère :

$$\min_{\hat{\theta}(t+1)} J(t + 1) = [\varepsilon(t + 1)]^2 \quad (\text{III.22})$$

On refait les mêmes calculs que précédemment, l'algorithme d'adaptation devient alors :

$$\hat{\theta}(t + 1) = \hat{\theta}(t) + \frac{F \phi(t) \varepsilon^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F \phi(t)} \quad (\text{III.23})$$

Qui est un algorithme stable quelque soit le gain F (positif).

3.2.2.2 Algorithme des Moindres Carrés Récursifs :

On considère les mêmes équations pour le procédé, le modèle de prédiction et les erreurs de prédiction utilisées dans l'algorithme du gradient, à savoir les équations (III.7) à (III.14).

L'objectif est de trouver un algorithme récursif de la forme de l'équation (III.15) qui minimise le critère des moindres carrés.

$$\min_{\hat{\theta}(t)} J(t) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i - 1)]^2 \quad (\text{III.24})$$

Le terme $\hat{\theta}(t)^T \phi(i - 1)$ correspond à :

$$\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1) = -\hat{a}_1 y(i-1) - \hat{a}_2(t) y(i-2) + \hat{b}_1(t) u(i-1) + \hat{b}_2(t) u(i-2) \quad (\text{III.25})$$

C'est donc la prédiction de la sortie à l'instant $i (i \leq t)$ basée sur l'estimation des paramètres à l'instant t obtenue à l'aide de t mesures.

Dans un premier temps, il s'agit d'estimer le vecteur de paramètres θ à l'instant t pour qu'il minimise la somme des carrés des écarts entre le procédé et le modèle de prédiction sur un horizon de t mesures. La valeur $\hat{\theta}(t)$ qui minimise le critère (III.24) s'obtient en cherchant la valeur qui annule $\frac{\partial J(t)}{\partial \hat{\theta}(t)}$:

$$\frac{\partial J(t)}{\partial \hat{\theta}(t)} = -2 \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)] \phi(i-1) = 0 \quad (\text{III.26})$$

De l'équation (III.26), tenant compte de :

$$[\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)] \phi(i-1) = \phi(i-1) \phi(i-1)^T \hat{\theta}(t)$$

On obtient :

$$[\phi(i-1) \phi(i-1)^T] \hat{\theta}(t) = \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i-1)$$

Il en résulte :

$$\hat{\theta}(t) = [\sum_{i=1}^t \phi(i-1) \phi(i-1)^T]^{-1} \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i-1) = F(t) \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i-1) \quad (\text{III.27})$$

Où :

$$F(t)^{-1} = \sum_{i=1}^t \phi(i-1) \phi(i-1)^T \quad (\text{III.28})$$

Cet algorithme d'estimation n'est pas récursif, on considère l'estimation de $\hat{\theta}(t+1)$:

$$\hat{\theta}(t+1) = F(t+1)^{-1} \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i-1) \quad (\text{III.29})$$

$$F(t+1)^{-1} = \sum_{i=1}^{t+1} \phi(i-1) \phi(i-1)^T \quad (\text{III.30})$$

Pour éviter l'inversion de la matrice $F(t+1)$ à chaque pas d'échantillonnage, on utilise le Lemme d'inversion matricielle :

$$A = F(t)^{-1}, B = \phi(t), C = 1, D = \phi(t)^T$$

On aura :

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t) \phi(t) \phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)} \quad (\text{III.31})$$

En regroupant les différentes équations, nous donnons ci-après une formulation de l'algorithme d'adaptation paramétrique (A.A.P) des moindres carrés récursifs (M.C.R).

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t) \phi(t) \varepsilon(t+1) \quad (\text{III.32})$$

$$F(t+1)^{-1} = F(t)^{-1} + \phi(t) \phi(t)^T \quad (\text{III.33})$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t) \phi(t) \phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)} \quad (\text{III.34})$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)} \quad (\text{III.35})$$

3.2.3 Initialisation de l'algorithme :

La matrice $F(t + 1)$ appelée « gain d'adaptation », est une matrice définie positive [voir l'annexe]. Son rôle est de moduler automatiquement la longueur du pas de correction. En pratique, On démarre l'algorithme à $t=0$ en posant :

$$F(0) = \frac{1}{\delta}I = GI, \quad 0 < \delta \ll 1 \quad (I \text{ est une matrice identité, } G = \frac{1}{\delta}).$$

Généralement les valeurs de δ varient entre 10^{-2} et 10^{-4} .

3.2.4 Choix du gain d'adaptation :

L'algorithme des M.C.R est à gain décroissant et tend vers zéro quand l'horizon d'estimation augmente, ce qui garantit la convergence de l'algorithme lorsque les paramètres à estimer sont constants. Dans le cas des paramètres variables, l'algorithme ne converge pas, il faut donc augmenter à chaque pas la valeur du gain en fonction des variations des paramètres, et ceci en introduisant deux facteurs de pondération $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ dans l'équation de $F(t + 1)^{-1}$ qui se réécrit comme suit :

$$F(t + 1)^{-1} = \lambda_1(t)F(t) + \lambda_2(t)\phi(t)\phi(t)^T \quad (\text{III.36})$$

Avec :

$\lambda_1(t)$: Facteurs de croissance tel que $0 < \lambda_1(t) \leq 1$

$\lambda_2(t)$: Facteurs de croissance tel que $0 < \lambda_2(t) \leq 2$

Pour chaque choix des facteurs $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ correspond un profil de variation de la matrice du gain F , qui peut être utilisée pour l'identification des paramètres variables. En utilisant le Lemme d'inversion matricielle, on obtient :

$$F(t + 1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \right] \quad (\text{III.37})$$

Les méthodes statistiques est une approche moderne de l'identification .Elle présente beaucoup d'avantages. On cite :

- Obtention d'une estimation du modèle au fur et à mesure que le procédé évolue.
- Compression importante des données, car les algorithmes récursifs ne traitent à chaque instant qu'une paire entrée /sortie au lieu de l'ensemble de données entrée /sortie.
- Mise en œuvre aisée sur micro-ordinateur.
- Possibilité de réalisation de systèmes d'identification temps réel.
- Elimine les défauts mentionnés des méthodes graphiques et permet un suivi des paramètres en temps réel.
- Permet de modéliser (et supprimer si besoin) les perturbations.

Elle représente aussi des inconvénients. On cite:

- Il n'y a pas de structure unique « procédé + perturbation » pour décrire toutes les situations rencontrées en pratique, et il n'y a pas non plus une méthode unique d'identification donnant dans toutes les situations des estimations non biaisées.

Chapitre IV : Identification des systèmes bruités

1. Introduction :

Dans ce chapitre, on va étudier l'effet des perturbations sur l'estimation des paramètres des modèles du procédé quand on utilise l'algorithme des moindres carrés récursifs ou non récursif. Ces perturbations introduisent des erreurs qui s'appellent « biais des paramètres ». Il existe des méthodes appropriées d'identification récursive assurant asymptotiquement une estimation non biaisée des paramètres.

On distingue deux catégories de méthodes d'identification récursive.

- Méthodes basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction
- Méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction.

2. Méthodes basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction :

Les méthodes d'identification entrent dans cette catégorie :

- Moindres carrés récursifs (M.C.R)
- Moindres carrés étendus (M.C.E).
- Maximum de vraisemblance récursif (M.V.R).
- Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendue (E.S.M.P.E).
- Moindres carrés généralisés (M.C.G).

2.1 Moindres carrés récursifs (M.C.R) :

La méthode des moindres carrés récursifs a été expliquée en détail dans le chapitre précédent.

2.2 Moindres carrés étendus (M.C.E) :

Cette méthode a été développée pour pouvoir identifier sans biais des modèles « procédé + perturbation » de la forme :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (\text{IV.1})$$

Avec :

$C(q^{-1})$: polynôme bruit.

$e(t)$: bruit blanc gaussien.

Le problème est d'identifier le modèle du procédé et du bruit, afin de pouvoir obtenir une erreur de prédiction blanche.

Principe de la méthode :

Soit le modèle du procédé décrit par l'équation :

$$y(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i e(t+1-i) + e(t+1)$$

En supposant que les paramètres sont connus, la sortie du modèle est :

$$\hat{y}(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i e(t+1-i) \quad (IV.2)$$

L'erreur de prédiction est donnée par :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = e(t+1)$$

Donc, l'équation (IV.2) devient :

$$\hat{y}(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i \varepsilon(t+1-i) \quad (IV.3)$$

Dans le cas des paramètres inconnus, la sortie modèle sera donnée par l'équation (IV.3), où on remplace les valeurs réelles des paramètres par leurs estimations, on aura donc :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= \sum_{i=1}^{n_A} \hat{a}_i(t) y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} \hat{b}_i(t) u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i(t) \varepsilon(t+1-i) \\ &= \hat{\theta}(t) \phi^T(t) \end{aligned}$$

Avec :

$$\phi^T(t) = [-y(t) \dots y(t+1-n_A), u(t) \dots u(t+1-n_B), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t+1-n_C)]$$

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)]$$

La sortie prédite par le modèle à l'instant $t+1$ est :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= \sum_{i=1}^{n_A} \hat{a}_i(t+1) y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} \hat{b}_i(t+1) u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i(t+1) \varepsilon(t+1-i) \\ &= \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \end{aligned}$$

L'erreur de prédiction à l'instant $t+1$ est :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1)$$

L'erreur de prédiction « a priori » est :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1)$$

En utilisant l'algorithme d'adaptation paramétrique donné par les équations (III.30), (III.32) et (III.34).

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t) \phi(t) \varepsilon(t+1)$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)}$$

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1(t) F(t)^{-1} + \lambda_2 \phi(t) \phi(t)^T$$

En présence du bruit et avec un gain décroissant asymptotiquement, $\varepsilon(t)$ tend d'une façon asymptotique vers un bruit blanc, ce qui garantit une estimation non biaisée des paramètres a_i et b_i .

2.3 Maximum de vraisemblance récursif (M.V.S) :

C'est une amélioration de la méthode des moindres carrés étendus (M.C.E). en effet au lieu d'utiliser dans l'algorithme d'adaptation paramétrique $\phi(t)$, on le filtre par $1/\hat{C}(t, q^{-1})$, avec $\hat{C}(t, q^{-1})$ une estimation à l'instant t de $C(q^{-1})$.

La sortie prédite à l'instant $t + 1$ est :

$$\hat{y}(t + 1) = \hat{\theta}(t + 1)^T \phi(t)$$

Les erreurs de prédiction correspondantes sont données par :

$$\varepsilon(t + 1) = y(t + 1) - \hat{y}(t + 1)$$

L'estimation du polynôme $C(q^{-1})$ à l'instant t s'écrit :

$$\hat{C}(t, q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_C} \hat{c}_i(t) q^{-i}$$

Le vecteur d'observations $\phi(t)$ est défini par :

$$\phi^T(t) = \frac{1}{\hat{c}(t, q^{-1})} [-y(t) \dots -y(t + 1 - n_A), u(t) \dots u(t + 1 - n_B), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t + 1 - n_C)] \quad (\text{IV.4})$$

Qui correspond au filtrage des composantes de $\phi(t)$ par $\frac{1}{\hat{c}(t, q^{-1})}$

L'algorithme est donné par (III.32), (III.35) et (III.36) où $\phi(t)$ est donné par l'équation (IV.4).

Dans le cas général :

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)]$$

$$\phi^T(t) = \frac{1}{\hat{c}(t, q^{-1})} [-y(t) \dots -y(t + 1 - n_A), u(t) \dots u(t + 1 - n_B), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t + 1 - n_C)]$$

2.4 Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (E.S.M.P.E) :

Il s'agit d'une extension de la méthode d'erreur de sortie. Soit le modèle du « procédé + perturbation » donné par l'équation suivante :

$$y(t + 1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 \varepsilon(t) + \varepsilon(t + 1)$$

Le prédicteur ajustable « a priori » des M.C.E est donné par l'équation :

$$\hat{y}^0(t + 1) = -\hat{a}_1 y(t) + \hat{b}_1 u(t) + \hat{c}_1 \varepsilon(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t)$$

Rajoutant et en retranchant le terme $\pm \hat{a}_1(t) \hat{y}(t)$

$$\hat{y}^0(t + 1) = -\hat{a}_1 y(t) + \hat{b}_1 u(t) + \hat{c}_1 \varepsilon(t) \pm \hat{a}_1(t) \hat{y}(t) \quad (\text{IV.5})$$

et en regroupant différemment les termes de l'équation (III.5) on obtient la structure de prédiction ajustable « a priori » utilisée dans l'E.S.M.P.E

$$\hat{y}^0(t + 1) = -\hat{a}_1(t) y(t) + \hat{b}_1(t) u(t) + \hat{h}_1(t) \varepsilon(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t)$$

Où :

$$\hat{h}_1(t) = \hat{c}_1(t) - \hat{a}_1(t) ;$$

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{h}_1(t)] ;$$

$$\phi(t)^T = [-\hat{y}(t), u(t), \varepsilon(t)]$$

Le prédicteur ajustable « a posteriori » est donné par :

$$\hat{y}(t + 1) = \hat{\theta}(t + 1) \phi(t)$$

Et les erreurs de prédiction sont données par :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1)$$

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1)$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique est celui donné par les équations (III.32), (III.35) et (III.36). Dans le cas général :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{h}_1(t) \dots \hat{h}_{n_C}(t)]$$

$$\hat{\phi}(t)^T = [-\hat{y}(t) \dots -\hat{y}(t - n_A + 1), u(t) \dots u(t - n_B + 1), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t - n_C + 1)]$$

Comme pour les M.C.E, $\varepsilon(t)$ tend asymptotiquement vers un bruit blanc, garantissant ainsi une estimation non biaisée des paramètres de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ (si l'entrée est suffisamment riche). Notons que les valeurs des coefficients de $C(q^{-1})$ s'obtiennent en utilisant la relation suivante : $c_i = h_i + a_i$

2.5 Moindres carrés généralisés (M.C.G) :

L'objectif de cette méthode est d'obtenir une erreur de prédiction « blanche » pour un modèle « procédé+ perturbation » ayant la structure suivante :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + \frac{1}{C(q^{-1})}e(t) \quad (IV.6)$$

Le terme $C(q^{-1})e(t)$ du modèle ARMAX « auto-régressif à moyenne ajustée et entrée exogène » a été remplacé par $1/C(t, q^{-1})e(t)$. Nous présenterons cette méthode à l'aide d'un exemple.

Le modèle « procédé+ perturbation » est donné par l'équation suivante :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + \frac{e(t+1)}{1+c_1q^{-1}}$$

Définissons :

$$\alpha(t+1) = (1 + a_1q^{-1})y(t+1) - b_1u(t) = \frac{e(t+1)}{1+c_1q^{-1}} \quad (IV.7)$$

On a alors la relation : $(1 + C_1q^{-1})\alpha(t+1) = e(t+1)$

$\alpha(t+1)$: est un processus AR « autor-égressif ».

En supposant les paramètres connus, nous pouvons construire un prédicteur assurant une erreur de prédiction blanche :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) - c_1\alpha(t) \quad (IV.8)$$

En effet :

$$y(t+1) - \hat{y}(t+1) = \frac{e(t+1)}{1+c_1q^{-1}} = e(t+1)$$

Dans le cas des paramètres inconnus, le prédicteur s'obtient en remplaçant les paramètres connus dans l'équation (IV.5) par leurs estimations.

Le prédicteur ajustable « a priori » sera donné par :

$$\hat{y}^0(t+1) = \hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) + \hat{c}_1(t)\alpha(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (IV.9)$$

Où :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{c}_1(t)] \\ \phi(t)^T &= [y(t), u(t), \alpha(t)]\end{aligned}\quad (IV.10)$$

La quantité $\alpha(t)$ sera estimée à l'aide de l'équation (IV.7) dans laquelle on remplace les valeurs inconnues des paramètres par leurs estimations :

$$\alpha(t) = \hat{A}(t, q^{-1})y(t) - q^{-d}\hat{B}(t, q^{-1})u(t) = (1 + \hat{a}_1(t)q^{-1}) - \hat{b}_1(t)u(t-1)$$

L'erreur de prédiction « a priori » est donnée par :

$$e^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \quad (IV.11)$$

L'équation du prédicteur ajustable donnée dans l'équation (IV.9) ayant la formulation permettant l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés, on va utiliser, comme pour les M.C.E, l'algorithme d'adaptation paramétrique donné par les équations (III.32), (III.35) et (III.36). dans ce cas $\phi(t)$ est donné par l'équation (IV.10) et $e^0(t+1)$ par l'équation (IV.11).

Dans le cas général:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)]; \\ \phi(t)^T &= [-y(t) \dots -y(t-n_A+1), u(t) \dots u(t-n_B+1), -\alpha(t) \dots -\alpha(t-n_C+1)]\end{aligned}$$

3. Méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction (Type II) :

Les méthodes d'identification récursive suivantes entrent dans cette catégorie :

- Variable instrumentale à observations retardées (VIOR).
- Variable instrumentale à modèle auxiliaire (VIMA).
- Erreur de sortie à compensateur fixe (ESCF)
- Erreur de sortie à compensateur ajustable (ESCA)

3.1 Variable instrumentale à observations retardées :

L'objectif est de trouver un nouveau vecteur des observations qui soit fortement corrélé avec les variables non bruitées mais non corrélé avec le bruit pour pouvoir obtenir $E\{y(t), \varepsilon(t+1)\} = 0$

Exemple :

Soit le modèle « procédé+perturbation » :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) - c_1e(t) + e(t+1) \quad (IV.12)$$

Considérons le prédicteur ajustable des moindres carrés récursifs :

$$\hat{y}^0(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (IV.13)$$

Où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)], \phi(t)^T = [-y(t), u(t)] \quad (IV.14)$$

Et respectivement :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad (\text{IV.15})$$

L'erreur de prédiction « a posteriori » à l'expression :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) = [\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T \phi(t) + c_1 e(t) + e(t+1) \quad (\text{IV.16})$$

En tenant compte de :

$$y(t+1) = \theta^T \phi(t) + c_1 e(t) + e(t+1) \quad (\text{IV.17})$$

Où : $\theta^T = [a_1, b_1]$

Evaluons maintenant $E\{\phi(t), \varepsilon(t+1)\}$ pour $\hat{\theta} = \theta$:

$$E\{\phi(t), \varepsilon(t+1)\}^T = [-E\{y(t), \varepsilon(t+1)\}, 0] \neq 0 \quad (\text{IV.18})$$

La deuxième composante est nulle, car $u(t)$ est indépendant de $e(t)$ et $e(t+1)$. Le biais va être provoqué par :

$$E\{y(t), \varepsilon(t+1)\} \approx c_1 E\{e^2(t)\} = c_1 \sigma^2$$

Car $y(t)$ et $\varepsilon(t+1)$ contiennent un terme en $e(t)$. Remplaçant maintenant dans le vecteur des observations utilisées par les M.C.R. ($\phi(t) = \varphi(t)$), la première composante $-y(t)$ par sa valeur décalée d'un pas. On crée ainsi une « variable instrumentale ». Le nouveau vecteur des observations sera :

$$\phi(t)^T = \varphi_{IV}(t)^T [-y(t-1), u(t)] \quad (\text{IV.19})$$

En utilisant l'équation (IV.12) décalée de deux pas, on observe que l'expression de $y(t-1)$ contiendra des termes en $e(t-1)$ et $e(t-2)$, ce qui aura pour conséquence :

$$E\{y(t-1), \varepsilon(t+1)\} = 0 \Rightarrow E\{\phi(t)^T, \varepsilon(t+1)\} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

C'est-à-dire c'est ce que nous recherchons pour obtenir des estimations paramétriques non biaisées. L'algorithme d'adaptation paramétrique (A.A.P) reste celui des M.C.R, dans le quel on utilise le vecteur instrumental $\phi(t)$ donné par l'équation (IV.19).

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\varepsilon(t+1) \quad (\text{IV.21})$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (\text{IV.22})$$

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1 F(t)^{-1} + \lambda_2 \phi(t)\phi(t)^T \quad (\text{IV.23})$$

Dans le cas général, le vecteur instrumental $\phi(t)$ est donné par :

$$\phi(t)^T = \varphi_{IV}(t)^T = [-y(t-n_C), -y(t-n_C-1) \dots -y(t-n_C-n_A+1), u(t), u(t-1) \dots u(t-n_B+1)] \quad (\text{IV.24})$$

Où : le retard des observations n_C doit satisfaire la condition :

$$n_C \geq \text{deg}C(q^{-1}) \quad (\text{IV.25})$$

afin d'obtenir la décorrélation souhaitée entre les observations et l'erreur de prédiction.

3.2 Variable instrumentale à modèle auxiliaire :

L'objectif est le même que pour la variable instrumentale à observations retardées. Le modèle « procédé + perturbation » considéré dans ce cas est celui de la structure S_2 :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + w'(t) \quad (\text{IV.26})$$

Où :

$$w'(t+1) = A(q^{-1})w(t) \quad (\text{IV.27})$$

$w(t)$ est une perturbation quelconque, indépendante de $u(t)$, à valeur moyenne nulle et variance finie.

L'objectif final est d'obtenir des estimations non biaisées des coefficients de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sans prendre en compte une modélisation de la perturbation.

Exemple :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + w'(t+1) \quad (\text{IV.28})$$

Où $w'(t+1)$ est donné par l'équation (IV.27) avec $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1}$.

Considérons le prédicteur ajustable des moindres carrés récurrents :

$$\hat{y}^0(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (\text{IV.29})$$

Où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)], \phi(t)^T = [-y(t), u(t)] \quad (\text{IV.30})$$

Et respectivement :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad (\text{IV.31})$$

L'erreur de prédiction étant définies par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \\ \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Définissons un modèle de prédiction auxiliaire qui va engendrer la variable instrumentale :

$$y_{IV}(t) = \hat{a}_1(t)y_{IV}(t-1) + \hat{b}_1u(t-1) \quad (\text{IV.33})$$

Le nouveau vecteur des paramètres est définie par :

$$\phi(t)^T = \varphi_{IV}(t)^T = [y_{IV}(t), u(t)] \quad (\text{IV.34})$$

On remplace donc $y(t)$, $y(t-1)$, ... par $y_{IV}(t)$, $y_{IV}(t-1)$, ...

Dans le cas général, le vecteur des observation a la structure :

$$\phi(t)^T = \varphi_{IV}(t)^T = [y_{IV}(t), y_{IV}(t-1), u(t), u(t-1)] \quad (\text{IV.35})$$

Et la variable instrumentale y_{IV} est engendrée par le modèle auxiliaire :

$$\hat{A}(t, q^{-1})y_{IV}(t) = q^{-d}\hat{B}(t, q^{-1})u(t) \quad (\text{IV.36})$$

Où :

$$\begin{aligned} \hat{A}(t, q^{-1}) &= 1 + \hat{a}_1q^{-1} + \dots \\ \hat{B}(t, q^{-1}) &= \hat{b}_1q^{-1} + \hat{b}_2q^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique reste celui des M.C.R. donné par l'équation (IV.21), (IV.22) et (IV.23). Dans le quel $\phi(t)$ est donné par l'équation (IV.35).

3.3 Erreur de sortie à compensateur fixe :

Le « modèle + perturbation » est celui donné par les équations (IV.26) et (IV.27) et respectivement pour l'exemple du premier ordre par l'équation (IV.28) L'idée sous-jacente à cette méthode est l'observation qu'en absence des perturbations, la sortie prédite par le prédicteur des M.C.R. $\hat{y}(t+1)$ tend vers $y(t+1)$. Dans ces conditions, on peut remplacer $y(t)$ dans l'équation de prédicteur par $\hat{y}(t)$.

Exemple :

Considérons le prédicteur ajustable M.C.R. pour le modèle « procédé + perturbation » de l'équation (IV.28)

$$\hat{y}^0(t+1) = \hat{a}_1(t)\hat{y}(t) + \hat{b}_1(t)u(t) \quad (\text{IV.38})$$

et remplaçant dans l'équation (IV.28) $y(t)$ par $\hat{y}(t)$ (prédicteur type « erreur de sortie »). Nous obtenons alors :

$$\hat{y}^0(t+1) = -\hat{a}_1(t)\hat{y}(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (\text{IV.39})$$

Où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)], \phi(t)^T = [-\hat{y}(t), u(t)] \quad (\text{IV.40})$$

et

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \Rightarrow \hat{y}(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t-1) \quad (\text{IV.41})$$

représente la nouvelle prédiction « a posteriori ».

Dans le cas général, le vecteur des observations utilisé dans le prédicteur et dans l'algorithme d'adaptation paramétrique est de la forme :

$$\phi(t)^T = [-\hat{y}(t), -\hat{y}(t-1) \dots -\hat{y}(t-n_A+1), u(t) \dots u(t-n_B+1)] \quad (\text{IV.42})$$

L'erreur de prédiction étant définies par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \\ \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

On définit aussi une erreur d'adaptation (v) obtenue par filtrage de l'erreur de prédiction :

$$\begin{aligned} v(t+1) &= D(q^{-1})\varepsilon(t+1) \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_D}q^{-n_D} \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

$$v^0(t+1) = \varepsilon^0(t+1) + \sum_{i=1}^{n_D} d_i \varepsilon(t+1-i) \quad (\text{IV.45})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique est de type M.C.R, dans le quel on utilise $\phi(t)$, donné par l'équation (IV.40) (respectivement (IV.48) et on remplace $\varepsilon(t+1)$ par l'erreur d'adaptation $v(t+1)$.

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)v(t+1) \quad (\text{IV.46})$$

$$v(t+1) = \frac{v^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (\text{IV.47})$$

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1 F(t)^{-1} + \lambda_2 \phi(t)\phi(t)^T \quad (\text{IV.48})$$

C'est une méthode qui assure donc une identification non biaisée des coefficients $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$, sans modélisation de la perturbation.

3.4 Erreur de sortie à compensateur ajustable :

Il s'agit d'une modification de la méthode de l'erreur de sortie à compensateur fixe. Dans cette méthode, on identifie simultanément les paramètres du procédé et du compensateur.

Les équations des prédicteurs et des erreurs de prédictions restent les mêmes que pour la méthode d'erreur de sortie à compensateur fixe (et sont données par les équations (IV.39), (IV.40), (IV.41) et (IV.43))

Le changement intervient au niveau de la génération de l'erreur d'adaptation. On remplace les équations (IV.44) et (IV.45) par :

$$v(t+1) = \widehat{D}(t+1, q^{-1})\varepsilon(t+1) \quad (\text{IV.49})$$

$$\widehat{D}(t, q^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_D} \hat{d}_i q^{-i}; n_D = n_A \quad (\text{IV.50})$$

$$v^0(t+1) = \varepsilon^0(t+1) + \sum_{i=1}^{n_D} \hat{d}_i \varepsilon(t+1-i) \quad (\text{IV.51})$$

Les nouveaux vecteurs des paramètres ajustables et des observations pour l'exemple du premier ordre considéré seront :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{d}_1(t)] \\ \phi(t)^T &= [-\hat{y}(t), u(t), -\varepsilon(t)] \end{aligned} \quad (\text{IV.52})$$

Dans le cas général:

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{d}_1(t) \dots \hat{d}_{n_D}(t)] \quad (\text{IV.53})$$

$$\phi(t)^T = [-\hat{y}(t) \dots -\hat{y}(t-n_A+1), u(t) \dots u(t-n_B+1), -\varepsilon(t) \dots -\varepsilon(t-n_D+1)] \quad (\text{IV.54})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique reste celui donné par les équations (IV.46), (IV.47) et (IV.48) où maintenant $v^0(t+1)$, $\hat{\theta}(t)$, $\phi(t)$ sont donnés par les équations (IV.51), (IV.52) et (IV.54).

Notons que cette méthode conduit à une augmentation du nombre de paramètres à estimer par rapport à l'erreur de sortie à compensateur fixe. Elle ne doit être utilisée que dans le cas que la méthode à compensateur fixe diverge. A noter que cette méthode peut diverger si transitoirement $\widehat{D}(t, q^{-1})$ a des racines à l'extérieur du cercle unité.

4. validation des modèles :

4.1 validation des modèles identifiés avec les méthodes de type I :

Le principe de la méthode de validation est le suivant :

- si la structure « procédé+perturbation » choisie est correcte.
- si on a utilisé une méthode d'identification appropriée pour la structure choisie.

La validation des modèles identifiés avec les méthodes de type I se fait en testant si l'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$ tend asymptotiquement vers un bruit blanc, ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\varepsilon(t)\varepsilon(t-i)\} = 0, i = 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots$$

4.1 validation des modèles identifiés avec les méthodes de type II :

Le principe de la méthode de validation est le suivant :

- si la perturbation est indépendante de l'entrée ($E\{w(t)u(t)\} = 0$).
- si la structure « procédé + perturbation » choisie est correcte.
- si on a utilisé une méthode d'identification appropriée pour la structure choisie.

La validation des modèles identifiés avec les méthodes de type II se fait en testant si

$$E[\varepsilon(t) \hat{y}(t-i)] \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \hat{y}(t-1) = 0$$

Un modèle identifié acceptable doit vérifier la condition $|RN(i)| \leq 0.15$

Où : $i = 1, 2, 3, \dots, \max(n_A, n_B + d)$ et les $RN(i)$ sont des estimations des intercorrélations normalisées.

$$RN(i) = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \hat{y}(t-i) \right] / \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{y}^2(t) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Chapitre V : Simulation et validation des résultats

1. Introduction :

Dans ce chapitre, on effectuera certaines simulations afin de valider les différents algorithmes détaillés dans les chapitres précédents.

2. Les applications pour les méthodes d'identifications graphiques

2.1 Méthode de Strejc-Quentin :

Pour tester cette méthode, on considère un système dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{100}{(p + 4)(p + 5)(p + 1)}$$

Le modèle mathématique proposé par Strejc-Quentin est de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{(1 + Tp)^n}$$

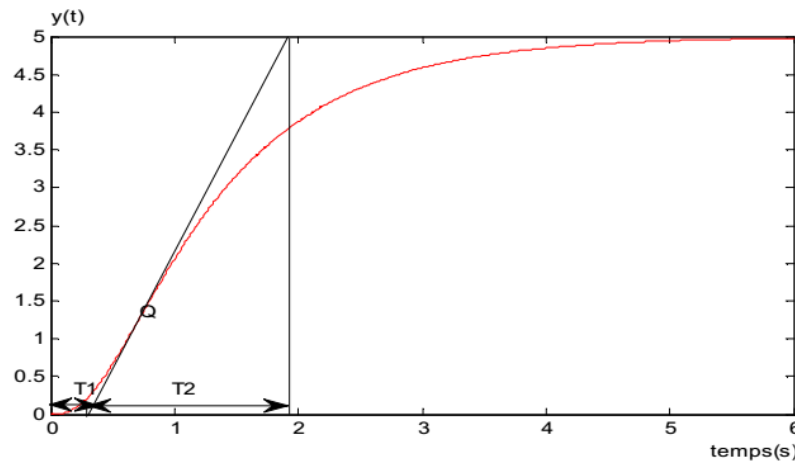


Figure (V.1) : Réponse indicielle du procédé.

La méthodologie :

- Le gain statique est mesuré directement de la valeur finale de la sortie : $K=5$.
- On trace la tangente au point d'inflexion Q et on mesure $T1 = 0.32$ s et $T2=1.58$ s.
- D'après le tableau, avec $T1/T2 = 0.202$, un ordre $n=2$ semble convenir.
- La constante de temps T est évaluée à partir de $T2/T = 2.718$ de tableau du Strejc-Quentin, Cela donne $T = 0.58$ s
- D'après le tableau, $T1/T = 0.282$, ce qui donnerait une valeur de $T1=0.163$ s. Or on mesure $T1=0.32$ s
- On peut déduire un retard $\tau = 0.157$ s

En remplaçant les paramètres obtenus, on aura

$$H(p) = \frac{5e^{-0.157p}}{(1 + 0.58p)^2}$$

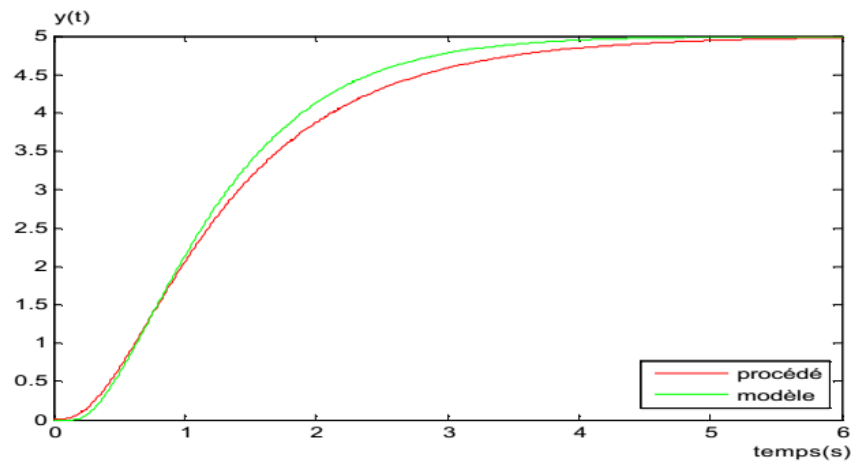


Figure (V.2) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

D'après la figure (V.2), on remarque que la réponse indicielle du procédé est proche de celle du modèle de Strejc- Quentin mais la réponse de ce dernier est plus retardée.

2.2 Méthode de Broïda :

On reprend la même fonction de transfert que précédemment

$$H(p) = \frac{100}{(p + 4)(p + 5)(p + 1)}$$

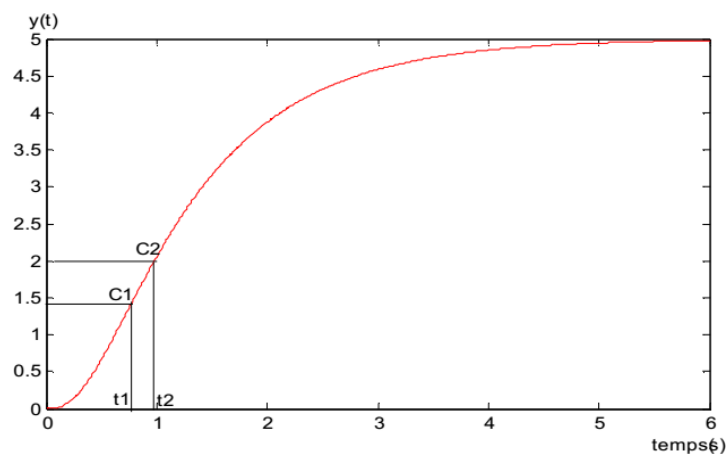


Figure (V.3) : Réponse indicielle du procédé.

Soit la fonction de transfert du modèle de Broïda suivant :

$$H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{(1 + Tp)}$$

Avec :

K, T, τ sont les paramètres à identifier.

Les points communs C1 et C2 habituellement utilisés correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale.

D'après la figure (V.3), on relève les valeurs de t1 et t2 correspondant respectivement à la projection de C1 et C2 sur l'axe des abscisses. Donc t1= 0.721 s et t2=0.942 s.

$$T = 5.5 (t_2 - t_1)$$

$$\tau = 2.8 t_1 - 1.8 t_2$$

Le gain statique est mesuré directement de la valeur finale de la sortie $K=5$ comme dans la méthode de Strejc-Quentin.

En remplaçant les valeurs de K , T , τ , on aura :

$$H(p) = \frac{5e^{-0.32p}}{(1 + 1.21p)}$$

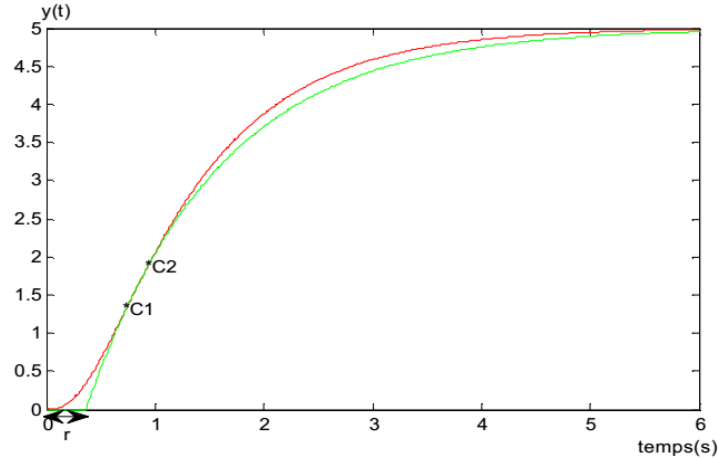


Figure (V.4) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

La figure (V.4) donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de Broïda. La concordance des deux points C1 et C2 est bien vérifiée, or la réponse indicielle du modèle de Broïda comporte un retard τ .

2.3 Processus intégrateur :

Pour tester cette méthode, on considère un système de deuxième ordre dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{100}{p(10p + 3)}$$

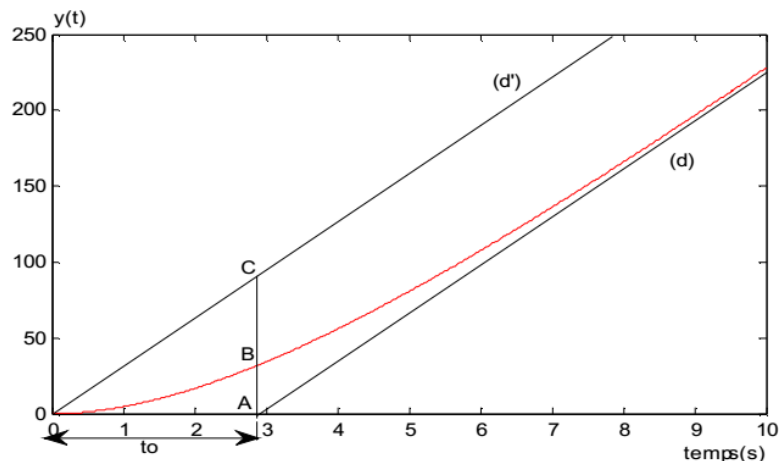


Figure (V.5) : Réponse indicielle du processus intégrateur du 2^{ème} ordre.

Avec :

- (d) : représente l'asymptote de la courbe.
- (d') : représente une droite parallèle à l'asymptote (d).

- A : représente le point d'intersection entre l'axe des abscisses et l'asymptote (d).
- B : représente le point d'intersection entre la courbe et la droite (AC).
- C : représente le point d'intersection entre la droite (d') et (AC).

La fonction de transfert du modèle est sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p} \frac{1}{(1 + Tp)^n}$$

Où : K, T, n sont les paramètres à identifier.

De la figure (V.5) on mesure le rapport $\frac{AC}{AB} = \frac{93.56}{32.11} = 0.34$ et grâce au tableau du processus intégrateur, on peut déduire la valeur de $n=2$. La constante de temps T est déterminée par la relation : $T = \frac{t_o}{n} = \frac{9.2}{2} = 1.45s$, avec t_o c'est la valeur mesurée sur la figure (V.5).

En remplaçant les valeurs de K, T et n, on aura :

$$H(p) = \frac{33.33}{p(1 + 1.45p)^2}$$

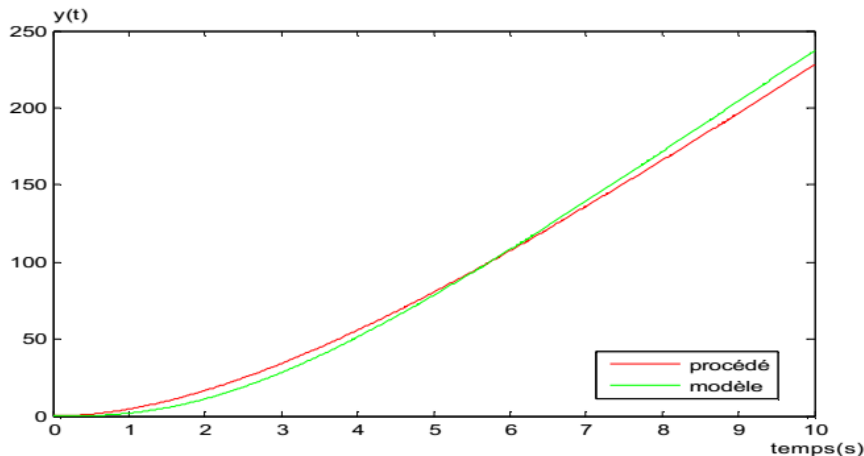


Figure (V.6) : Réponse indicielle du modèle et du processus intégrateur du 2^{ème} ordre.

Commentaires :

D'après les allures obtenues dans les figures (V.2) et (V.4) pour les méthodes de Strejc-Quentin et Broïda, on constate que :

- La sortie du modèle de Strejc-Quentin est mieux que la sortie du modèle de Broïda vu le retard des deux méthodes (le retard de strejc-quentin est inférieur à celui de Broïda).
- La difficulté de la méthode de Strejc-Quentin se pose essentiellement dans la détermination de point d'inflexion et le tracé de la tangente.
- La méthode de Broïda est moins onéreuse (en terme des étapes à suivre) que celle de Strejc-Quentin.
- Pour les systèmes ayant un intégrateur, on a abouti à une réponse indicielle du modèle de processus intégrateur plus au moins proche de celle du procédé, comme nous la montre la figure (V.6).

3. Les applications pour les méthodes d'identification statistiques :

3.1 Méthode des moindres carrés récursifs (M.C.R) :

Soit un système de premier ordre dont la fonction de transfert est la suivante :

$$G(p) = \frac{9}{1 + 6p}$$

Après la discrétisation du système continu, avec une période d'échantillonnage $T_e=1.75s$, on aura la fonction de transfert discrète tel que :

$$G(z) = \frac{2.277}{z - 0.747}$$

Qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$G(z^{-1}) = \frac{2.277z^{-1}}{1 - 0.747z^{-1}}$$

Soit la fonction de transfert discrète du modèle du système à identifier qui est donné par :

$$\hat{G}(z^{-1}) = \frac{b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1}}$$

La forme récurrente du modèle étant :

$$y(t + 1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + e(t)$$

Tel que $\theta = [a_1 \ b_1]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Pour exciter tous les modes du processus, on lui applique un signal riche en fréquences proche d'un bruit blanc. On choisit pour cela une séquence binaire pseudo-aléatoire (S.B.P.A).

Dans cet exemple, on choisit une séquence pseudo-aléatoire, comme signal d'entrée, qui est donnée par la figure (V.7).

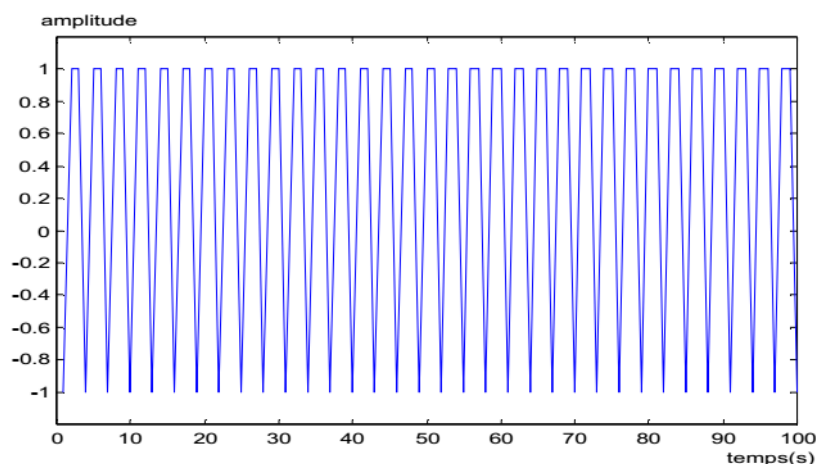


Figure (V.7) : Séquences binaires pseudo aléatoires SBPA.

Après l'application de l'algorithme des moindres carrés récursifs (M.C.R) implanté sous logiciel Matlab, nous avons relevé les paramètres du modèle de prédiction ainsi que les différentes courbes représentées dans les figures ci-dessous :

3.1.1 Système du premier ordre :

On reprend les mêmes exemples que précédemment, mais cette fois –ci on ajoute un bruit blanc gaussien, la forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t + 1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + e(t)$$

Avec : $e(t)$ un bruit gaussien.

Pour valider le modèle il faut que l'autocorrélation du l'erreur soit proche de celle du bruit blanc.

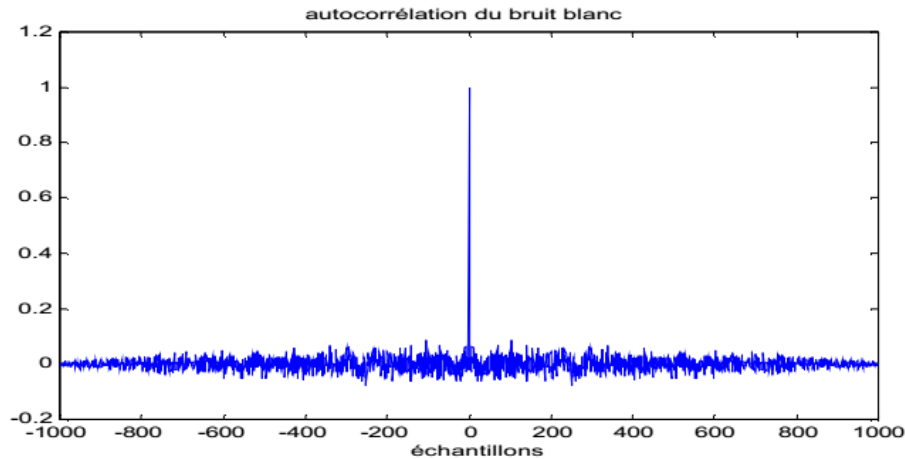


Figure (V.8) : Autocorrélation du bruit blanc gaussien.

$\theta = [a_1 \ b_1]$ Vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont : $a_1 = -0.7626$, $b_1 = 2.2719$

Les différentes courbes relevées :

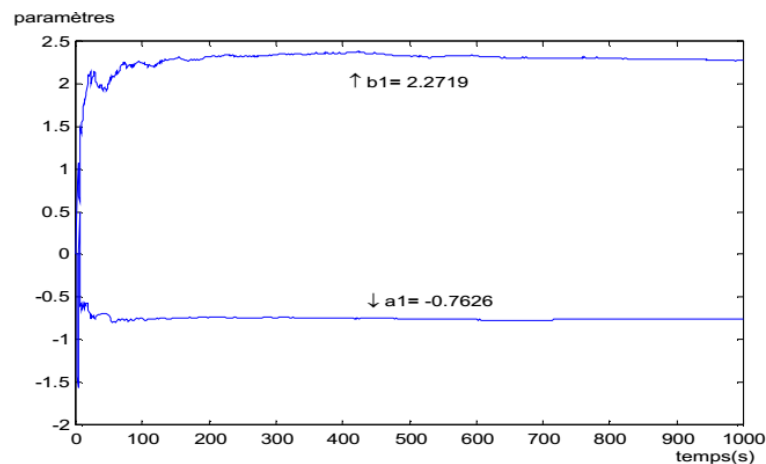


Figure (V.9) : Evolution des paramètres du modèle du 1er ordre.

Erreur quadratique = 0.0461

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.0063
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 4.6571
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 4.7745

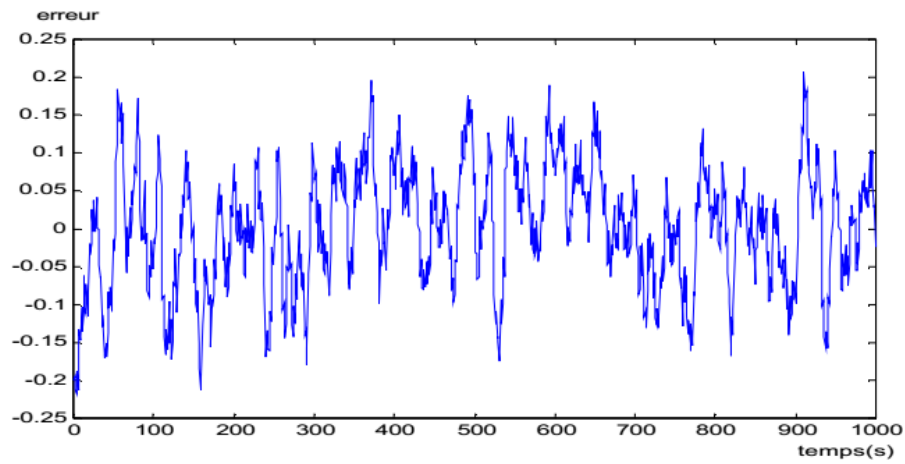


Figure (V.10) : Erreur de prédiction.

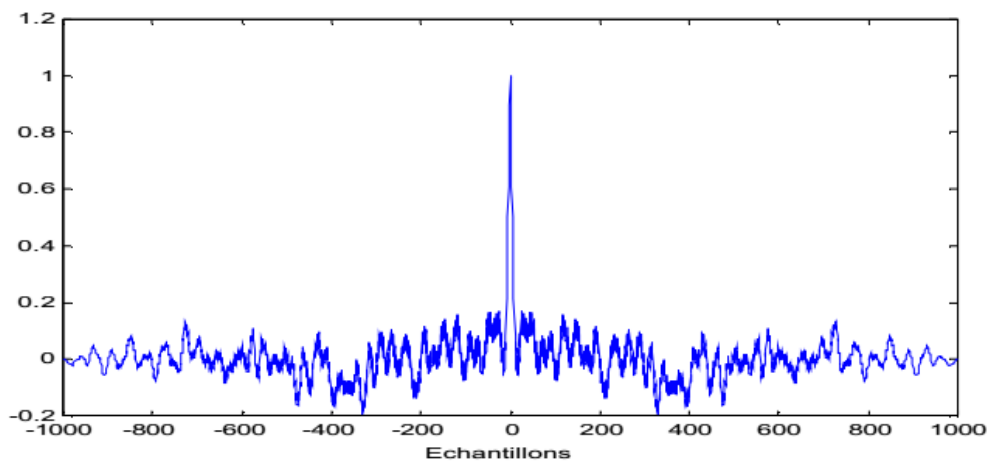


Figure (V.11) : Autocorrélation de l'erreur de prédiction.

D'après la figure (V.11), on peut dire que ce modèle est validé, car l'autocorrélation de l'erreur de prédiction est proche de celle du bruit blanc.

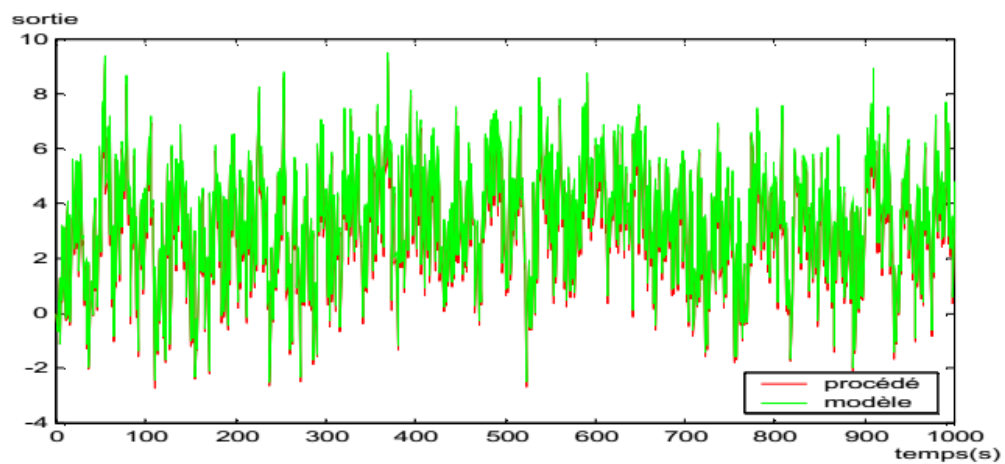


Figure (V.12) : Les sorties du procédé et du modèle.

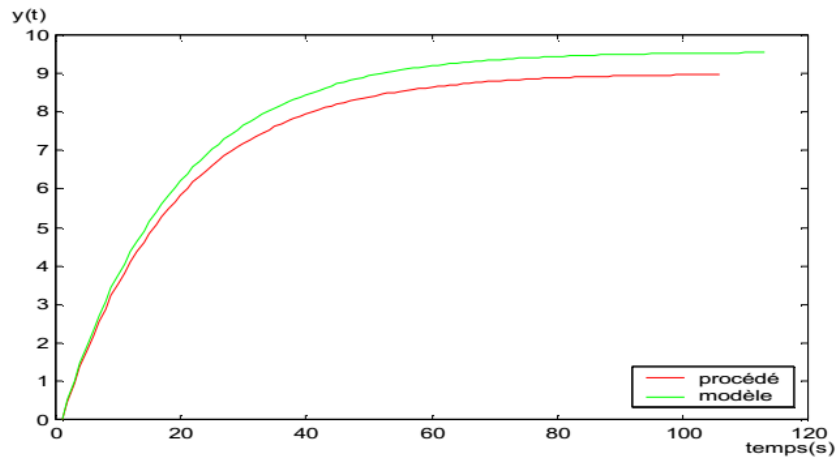


Figure (V.13) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

3.1.2 Système de 2^{ème} ordre :

Soit un système de deuxième ordre qui est donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 3p + 3p^2}$$

Après la discrétisation du système avec une période d'échantillonnage de $T_e=2s$ on aura :

$$G(z) = \frac{0.344z + 0.1749}{z^2 - 0.6165z + 0.1353}$$

Qu'on peut s'écrire sous la forme :

$$G(z) = \frac{0.344z^{-1} + 0.1749z^{-2}}{1 - 0.6165z^{-1} + 0.1353z^{-2}}$$

Soit la fonction de transfert discrète du modèle du système à identifier qui est donné par :

$$\hat{G}(z^{-1}) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 - a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

La forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t + 1) = -a_1y(t) - a_2y(t - 1) + b_1u(t) + b_2u(t - 1) + e(t)$$

Avec :

$e(t)$ un bruit gaussien

$\theta = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont :

$a_1 = -0.58338$, $a_2 = 0.13906$, $b_1 = 0.34228$ et $b_2 = 0.16818$

Les différentes courbes relevées :

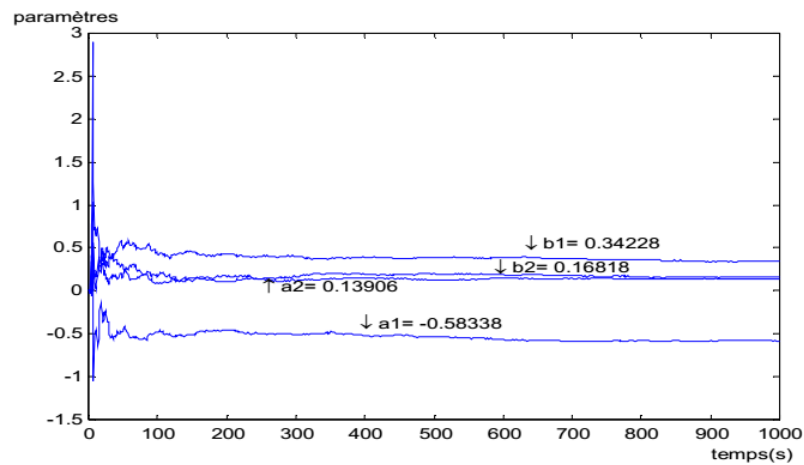


Figure (V.14) : Evolution des paramètres du modèle du 2^{ème} ordre.

Erreur quadratique = 0.3641

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur =Variance (erreur) = 0.2851
- Energie du procédé =Variance (procédé) = 1.4260
- Energie du modèle =Variance (modèle) = 1.735

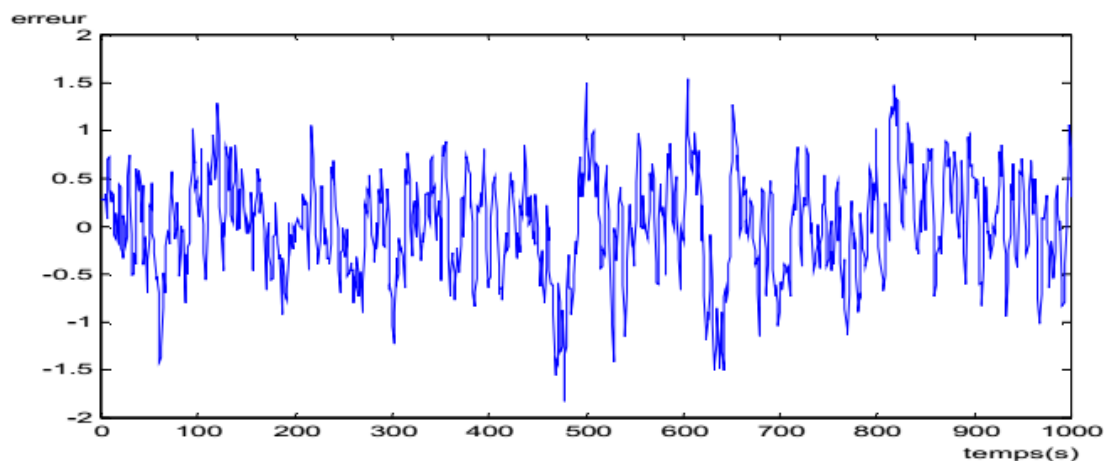


Figure (V.15) : Erreur de prédiction

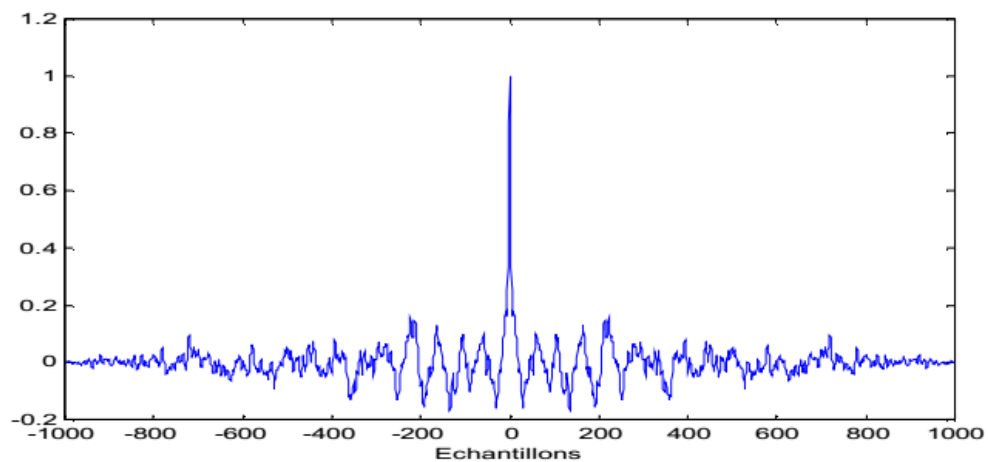


Figure (V.16) : Autocorrélation du l'erreur de prédiction.

D'après la figure (V.16), on peut dire que ce modèle est validé, car l'autocorrélation de l'erreur de prédiction est proche de celle du bruit blanc.

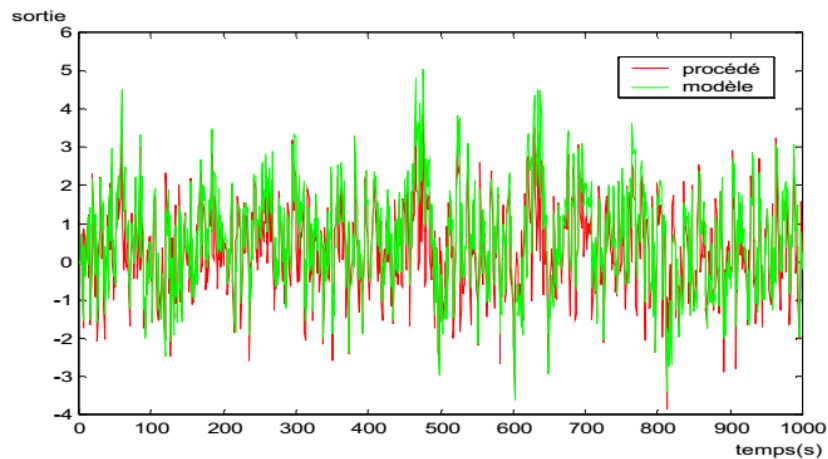


Figure (V.17) : Les sorties du système et du modèle.

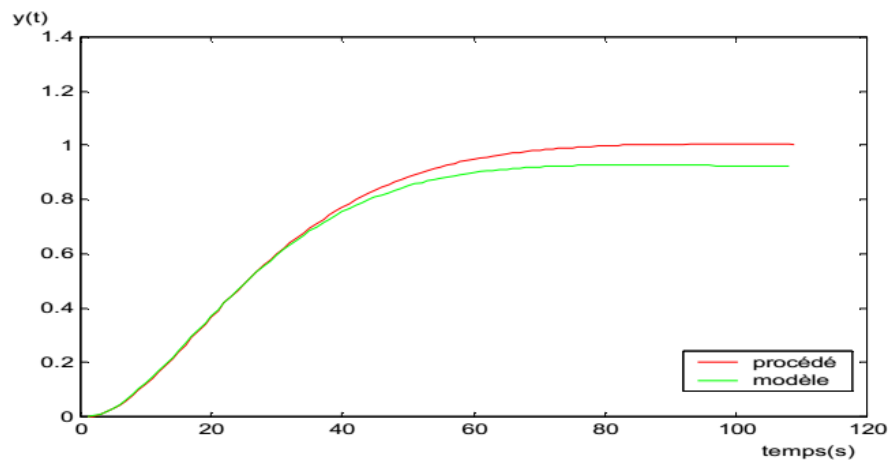


Figure (V.18) : Réponse indicielle du modèle et du procédé.

Les résultats obtenus à partir des exemples précédents montrent que les paramètres retrouvés convergent vers les vrais paramètres du procédé comme nous le montre les figures (V.9) et (V.14). On constate que les valeurs des erreurs quadratiques et les réponses indicielles (voir les figures (V.13) et (V.18)) obtenues en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs ne sont pas satisfaisantes, ce qui nous ramène à considérer une autre structure « procédé + perturbation » par exemple la structure S3.

Nous choisissons, parmi les méthodes d'identification applicables à la structure S3, la méthode de moindre carré étendu (M.C.E) et la méthode de variable instrumental à observations retardées (V.I.O.R).

3.2 La méthode de moindre carrée étendue (M.C.E):

On reprend le même exemple du système du premier ordre, la forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t + 1) = a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) + e(t + 1)$$

Avec : $e(t)$ un bruit gaussien, $c_1 = 0.43$

Tel que : $\theta = [a_1 \ b_1 \ c_1]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont : $a_1 = -0.74429$, $b_1 = 2.2843$ et $c_1 = 0.41492$

Les différentes courbes relevées :

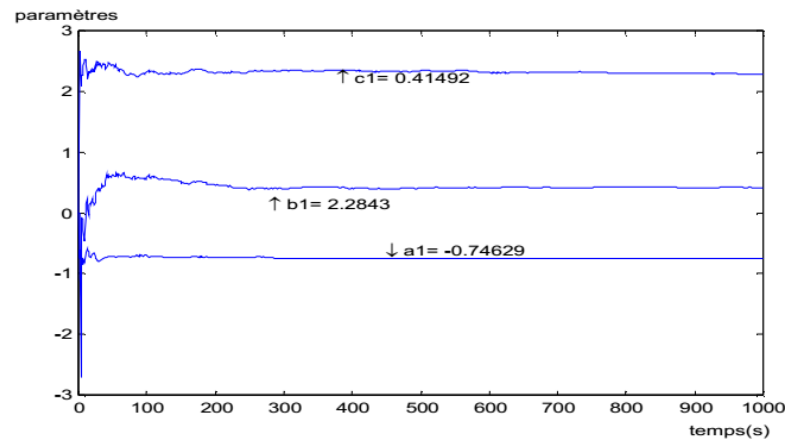


Figure (V.19) : Evolution des paramètres du modèle du 1^{er} ordre.

Erreur quadratique = $7.4031e-004$

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = $7.3852e-004$
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 6.4895
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 6.4075

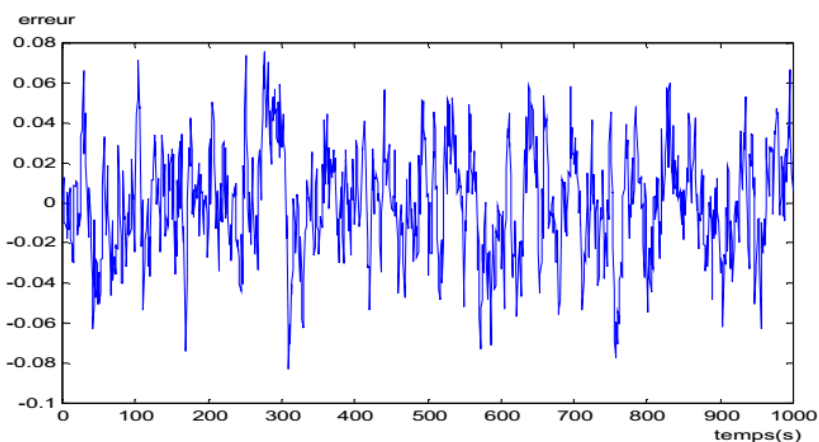


Figure (V.20) : Erreur de prédiction.

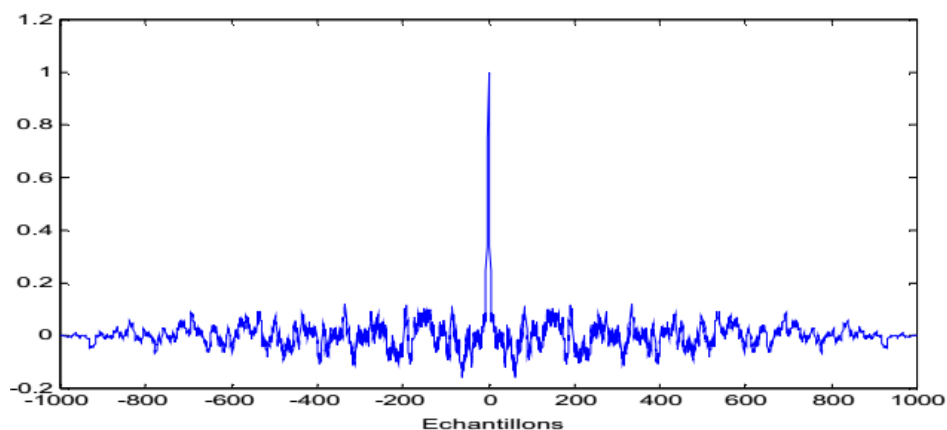


Figure (V.21) : Autocorrélation de l'erreur de prédiction.

D'après la figure (V.21), on peut dire que ce modèle est validé, car l'autocorrélation de l'erreur de prédiction est proche de celle du bruit blanc.

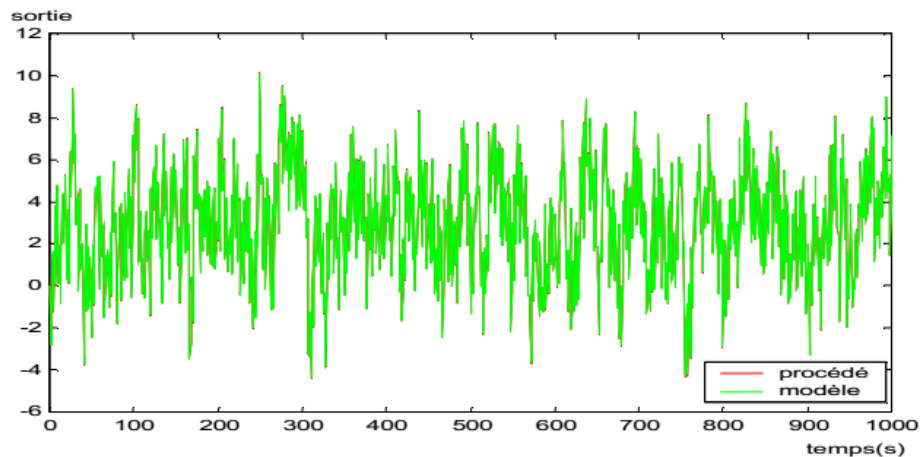


Figure (V.22) : Les sorties du système et du modèle.

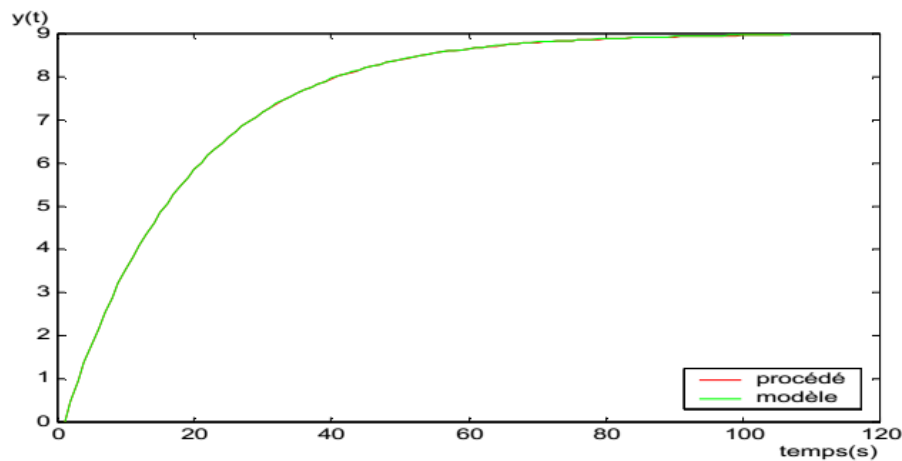


Figure (V.23) : Réponse indicielle du modèle et du procédé.

On constate que les valeurs estimées de a_1 et b_1 sont meilleures que dans le cas des moindres carrés récursifs (l'erreur quadratique est plus faible), d'autre part, l'autocorrélation (figure V.21) de l'erreur est beaucoup plus proche de celle du bruit blanc, et la réponse indicielle du modèle se confond avec celle du procédé (voir la figure (V.23)).

3.3 La méthode de variable instrumentale à observations retardées :

On reprend le même exemple du système du premier ordre. La forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t + 1) = a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) + e(t + 1)$$

Avec : $e(t)$ un bruit gaussien, $c_1 = 0.43$

Tel que : $\theta = [a_1 \ b_1]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont : $a_1 = -0.763$ et $b_1 = 2.289$

Les différentes courbes relevées :

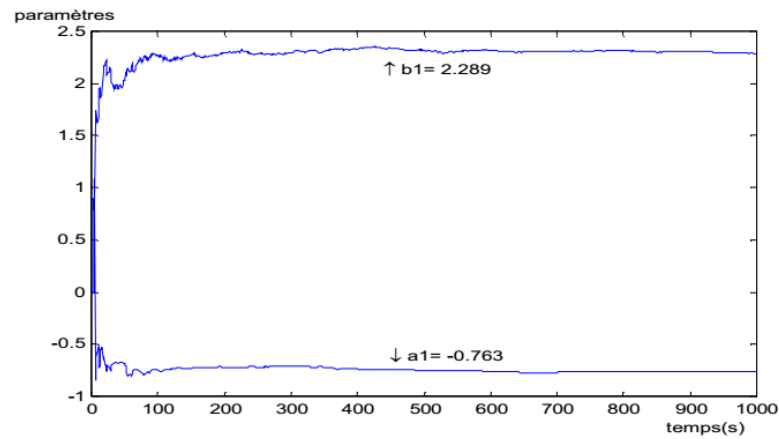


Figure (V.24) : Evolution des paramètres du modèle.

Erreur quadratique = 0.0611

Test de validation : décorrélation prédiction/erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.0070
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 5.0195
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 5.1774

Critère de validation : $|RN(i)| \leq 0.15$

$RN(1) = 3.9198e - 13$

Avec $RN(i)$: les intercorrélations normalisées. $i = 1, 2, 3, \dots, \max(n_A, n_B + d)$

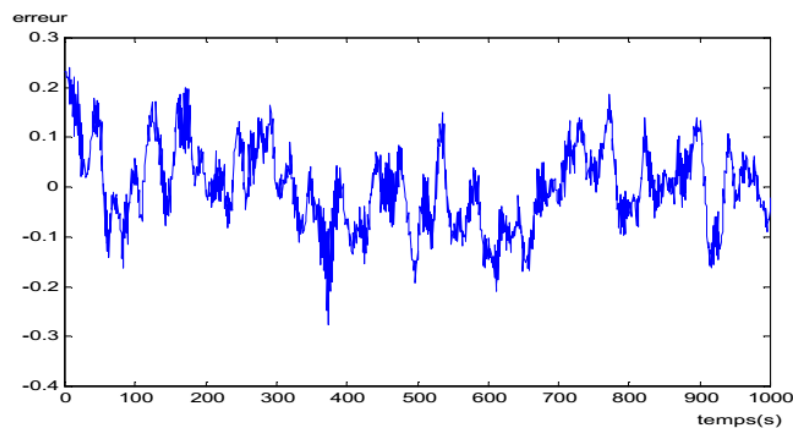


Figure (V.25) : Erreur de prédiction.

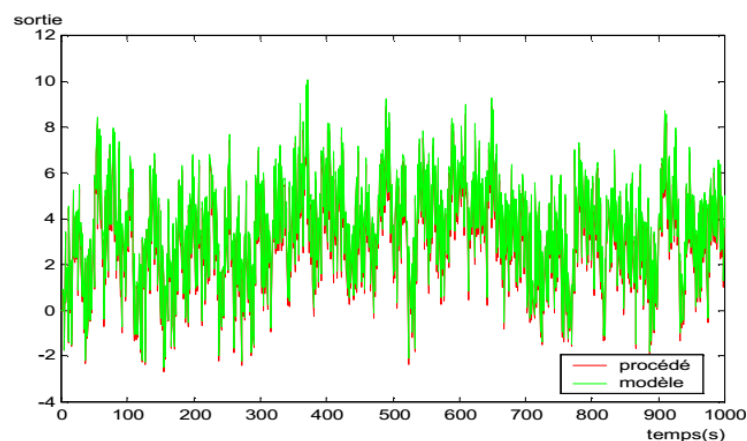


Figure (V.26) : Les sorties du procédé et du modèle.

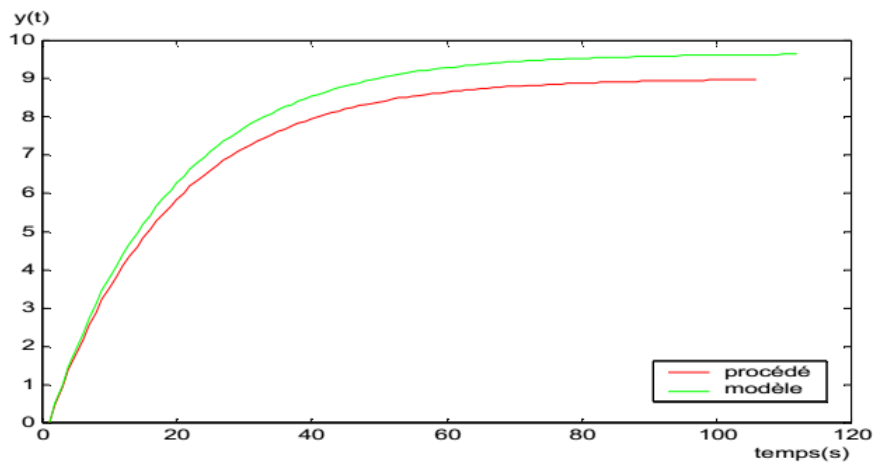


Figure (V.27) : Réponse indicielle du modèle et du procédé.

Les résultats obtenus dans la méthode de variable instrumental à observations retardées (V.I.O.R), nous amène à conclure comme suite :

L'erreur quadratique est plus élevée par rapport à celle des moindres carrés étendus (M.C.E), aussi le modèle est validé car l'intercorrélacion normalisée est inférieure à 0.15.

3.4 L'entrée est un échelon d'amplitude 10 et retardé de 100s :

On reprend le même exemple du système du premier ordre La forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t + 1) = a_1 y(t) + b_1 u(t) + e(t)$$

Avec : $e(t)$ un bruit gaussien.

$u(t)$: échelon d'amplitude 10 et retardé de 100s

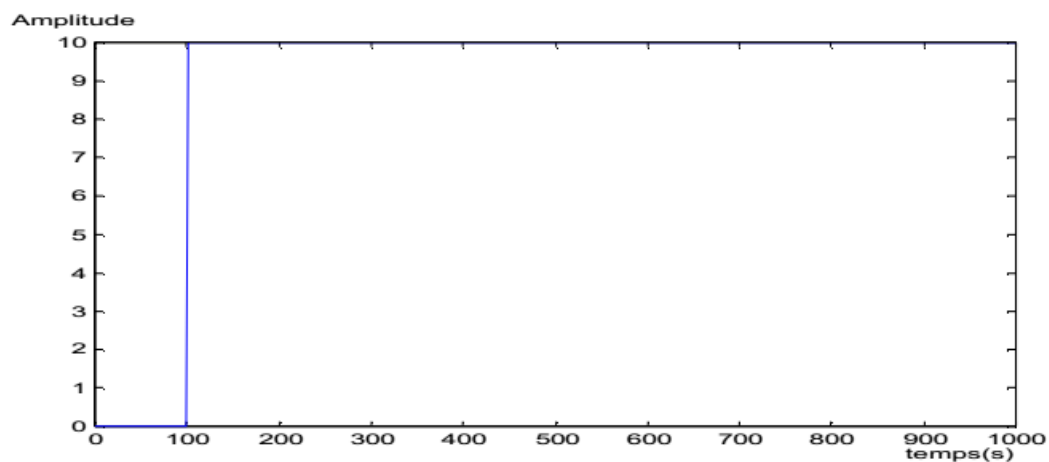


Figure (V.28) : Echelon retardé.

Tel que : $\theta = [a_1 \ b_1]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont : $a_1 = 2.2$, $b_1 = -0.75504$

Les différentes courbes relevées :

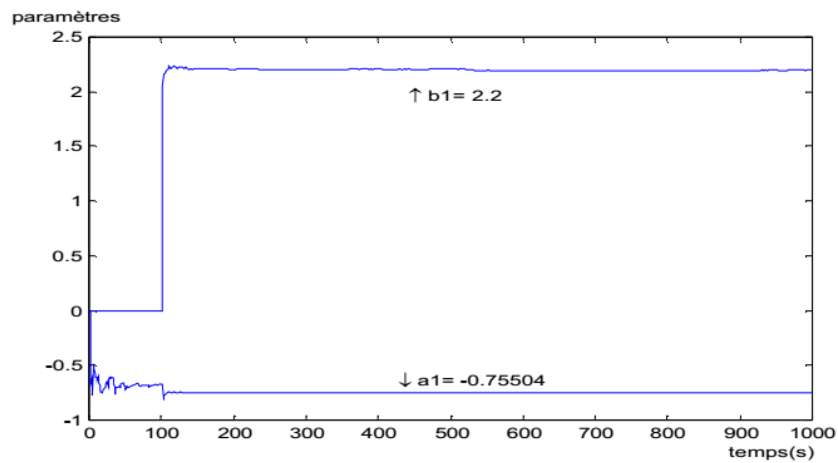


Figure (V.29) : Evolution des paramètres du modèle.

Erreur quadratique = 0.0507

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.0149
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 737.6534
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 734.6729

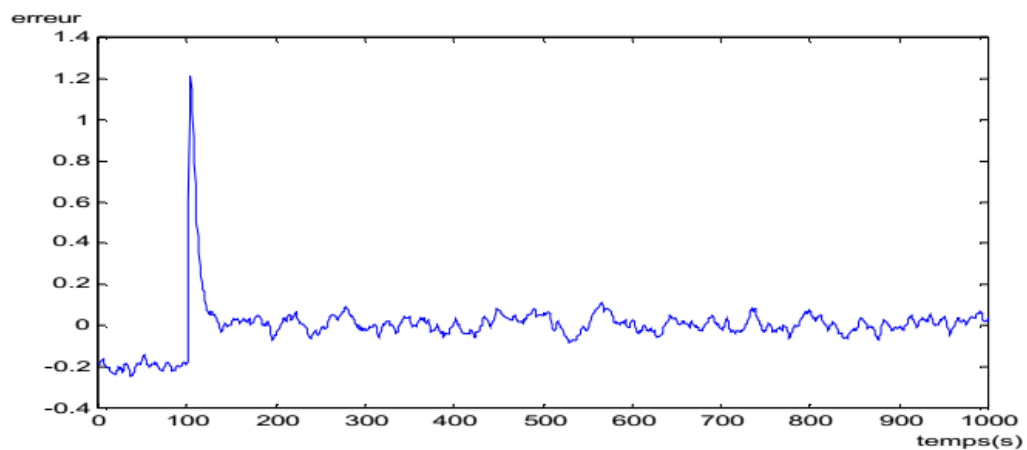


Figure (V.30) : Erreur de prédiction.

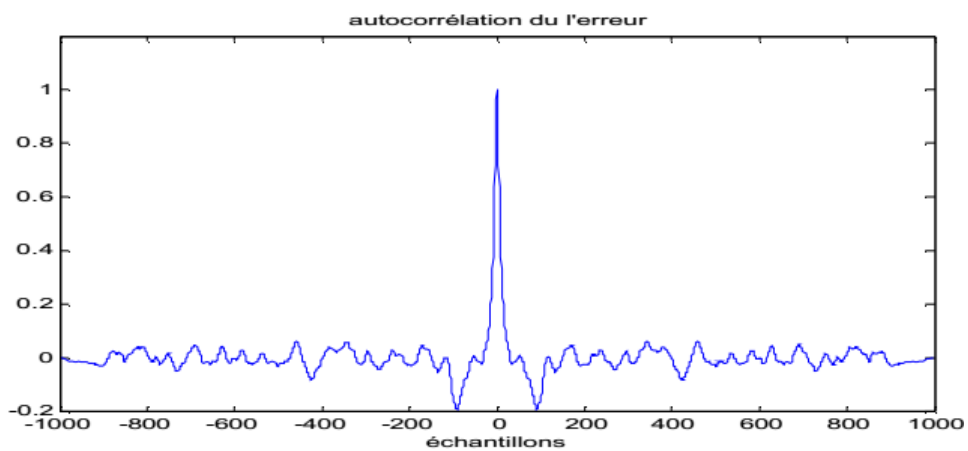


Figure (V.31) : Autocorrélation du l'erreur.

D'après la figure (V.31), on peut dire que ce modèle est validé, car l'autocorrélation du l'erreur de prédiction est proche de celle du bruit blanc.

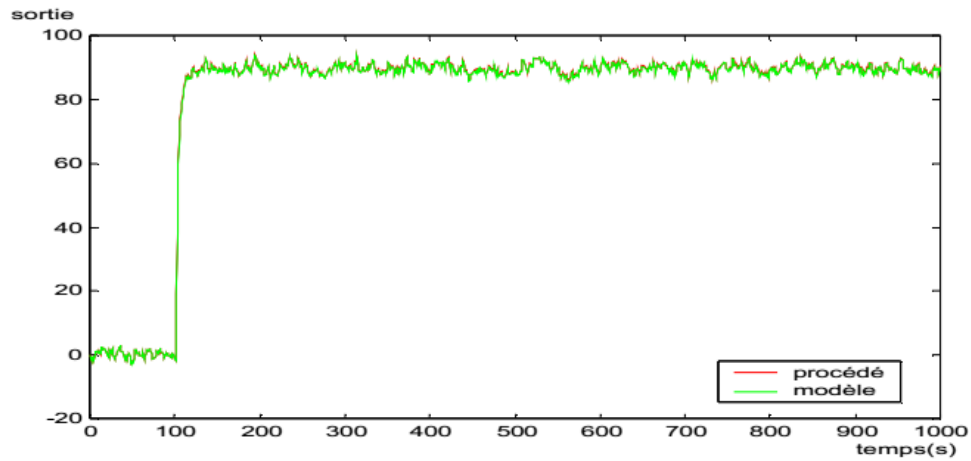


Figure (V.32) : Les sorties du système et du modèle.

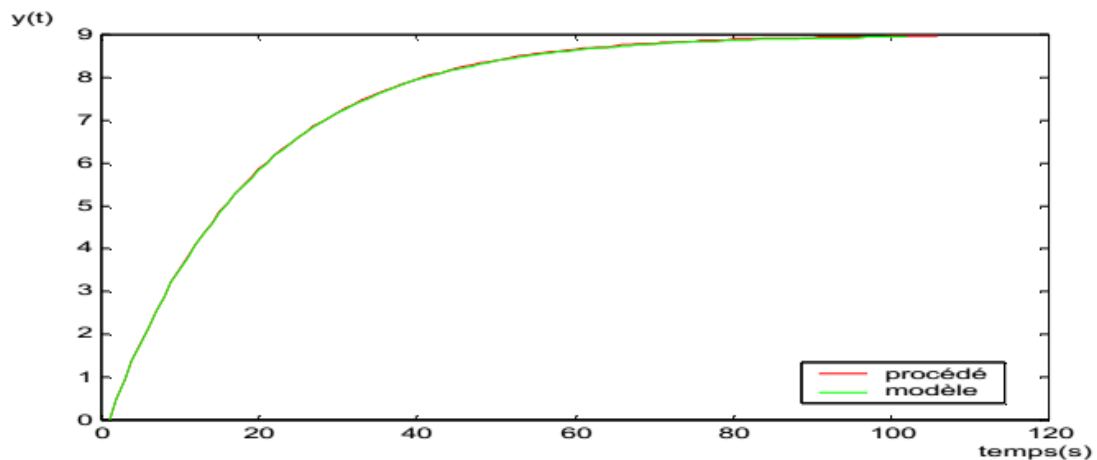


Figure (V.33) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

3.5 Influence de la période d'échantillonnage :

On reprend l'exemple du système de premier ordre qui est de la forme suivante :

$$G(p) = \frac{9}{1 + 6p}$$

Après la discrétisation du système continu, avec une période d'échantillonnage $T_e=0.1s$, on aura la fonction de transfert discrète tel que :

$$G(z) = \frac{0.1488}{z - 0.9835}$$

Qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$G(z^{-1}) = \frac{0.1488z^{-1}}{1 - 0.9835z^{-1}}$$

Soit la fonction de transfert discrète du modèle du système à identifier qui est donné par :

$$\hat{G}(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

En utilisant le programme des moindres carrés étendus (M.C.E) implémenté sous MATLAB, on relève les courbes suivantes :

Les différentes courbes relevées:

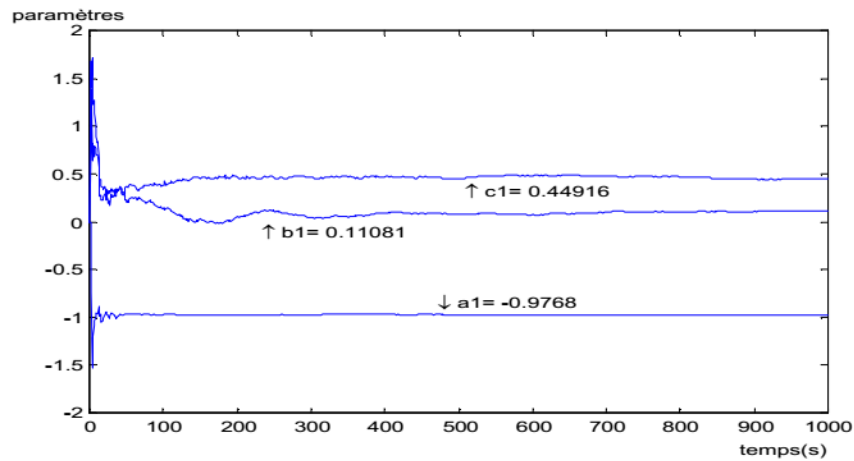


Figure (V.34) : Evolution des paramètres du modèle du 1^{er} ordre.

Erreur quadratique = 1.0931

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur= Variance (erreur) = 0.8535
- Energie du procédé =Variance (procédé) = 34.8699
- Energie du modèle =Variance (modèle) = 30.4280

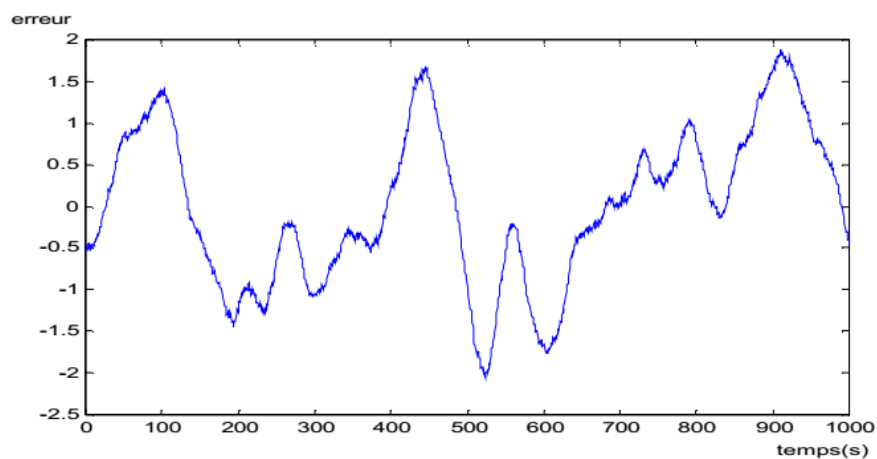


Figure (V.35) : Erreur de prédiction.

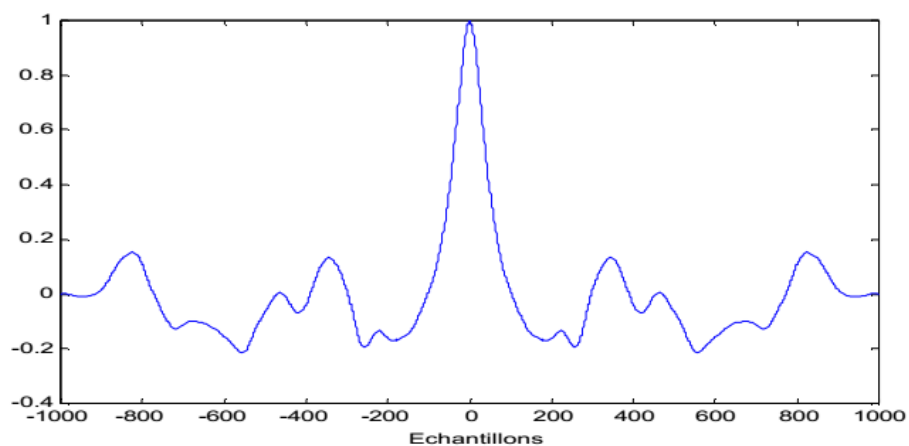


Figure (V.36) : Autocorrélation du l'erreur.

D'après la figure (V.36), on peut dire que ce modèle n'est pas validé, car l'autocorrélation de l'erreur de prédiction est différente de celle du bruit blanc.

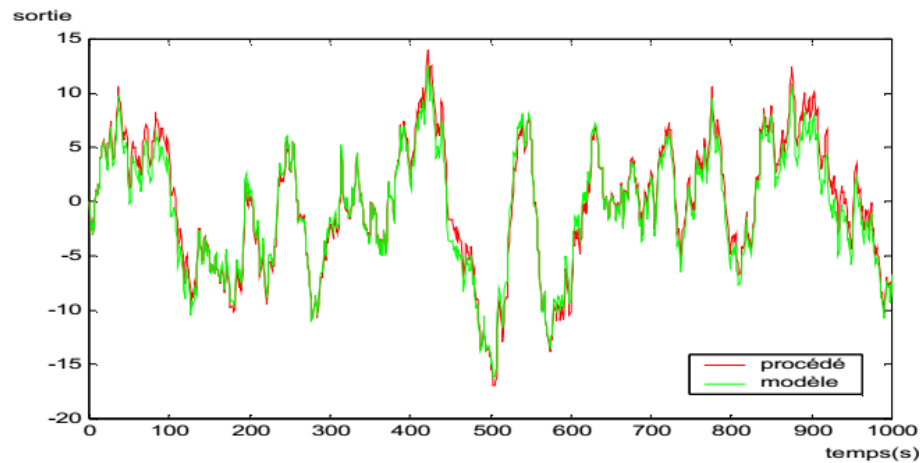


Figure (V.37) : Les sorties du système et du modèle.

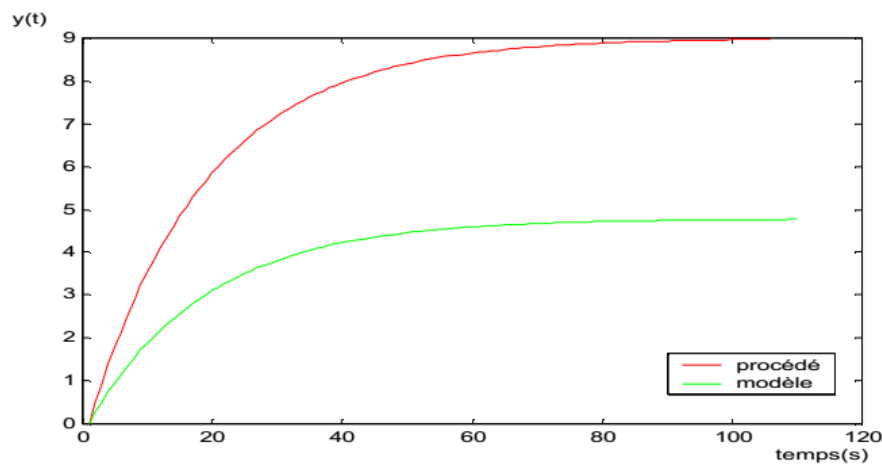


Figure (V.38) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

D'après la figure (V.38), on remarque que les réponses indicielles du modèle et du procédé sont différentes, cela est dû au mauvais choix de la période d'échantillonnage.

On peut conclure que le choix de la période d'échantillonnage est important, elle doit être choisie convenablement en respectant la condition du théorème de Shannon :

Cas du système du premier ordre : $\frac{T}{4} < T_e < T$ et dans notre cas T_e est comprise entre $1.5 < T_e < 6$.

3.6 Influence de nombre d'échantillons :

On reprend le même exemple du système de premier ordre discrétisé, pour cette fois ci on considère 100 échantillons :

$$G(z^{-1}) = \frac{2.277z^{-1}}{1 - 0.747z^{-1}}$$

En utilisant le programme des moindres carrés étendus (M.C.E) implémenté sous MATLAB, on relève les courbes suivantes :

Les différentes courbes relevées:

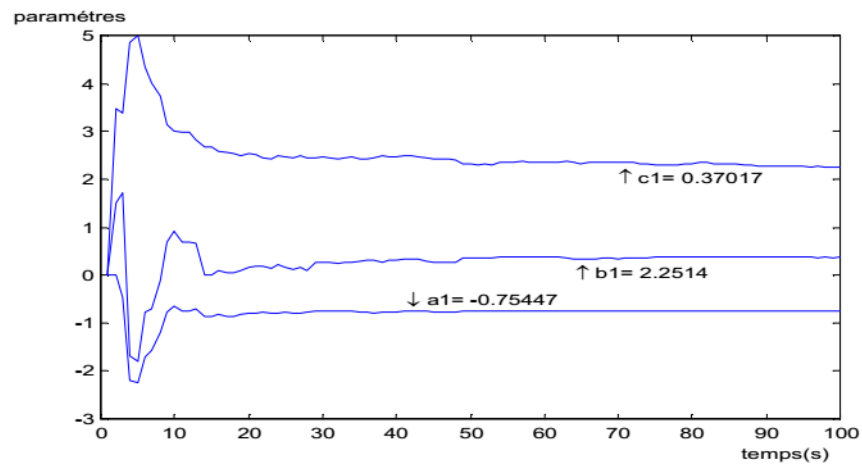


Figure (V.39) : Evolution des paramètres du modèle du 1^{er} ordre.

Erreur quadratique = 0.0060

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.0039
- Energie du l'erreur Variance (procédé) = 5.0413
- Energie du l'erreur Variance (modèle) = 4.8535

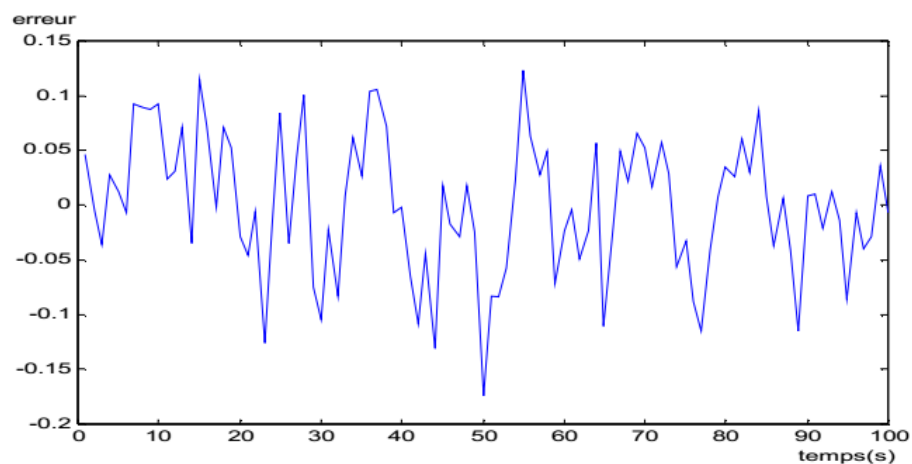


Figure (V.40) : Erreur de prédiction.

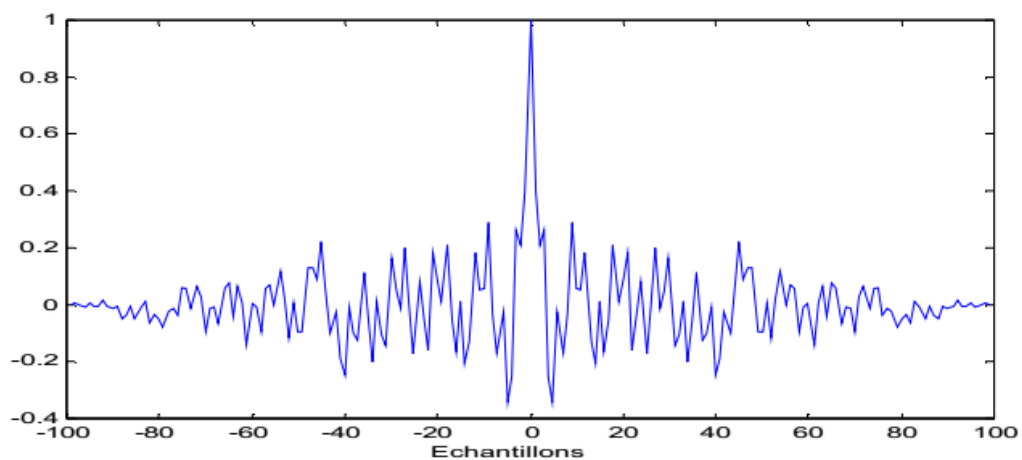


Figure (V.41) : Autocorrélation du l'erreur de prédiction.

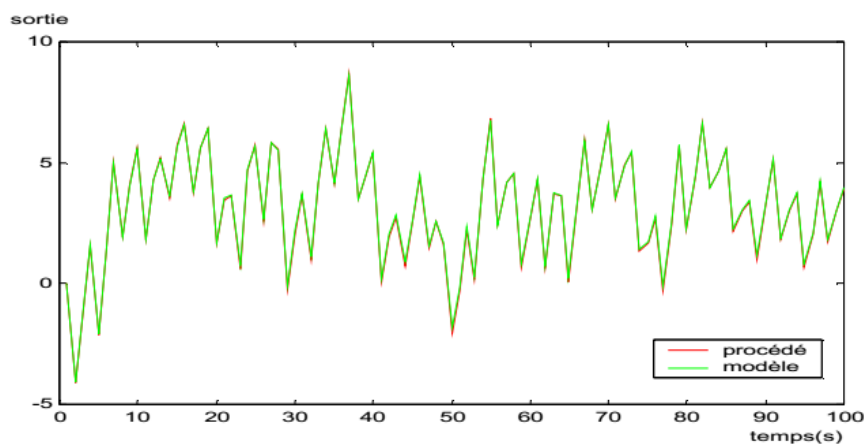


Figure (V.42) : Les sorties du système et du modèle.

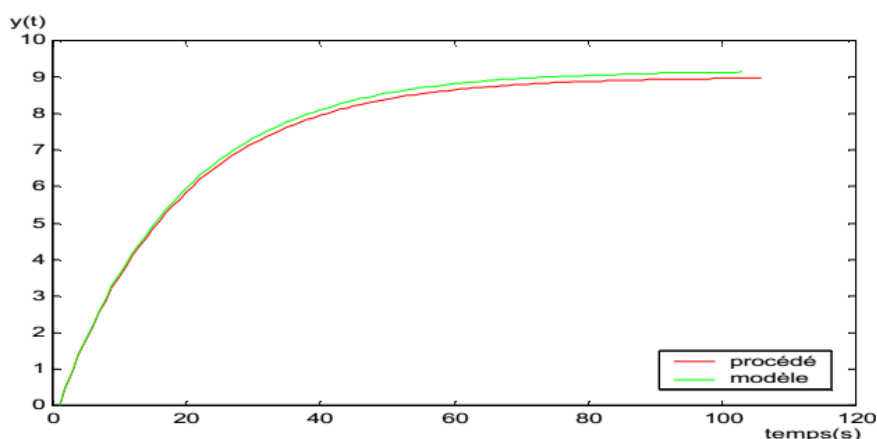


Figure (V.43) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

D'après les résultats obtenus, on constate que l'erreur quadratique pour le nombre d'échantillons 1000 est assez faible par rapport à l'erreur quadratique à 100 échantillons. Ce qui signifie que le nombre d'échantillons influe sur la qualité de l'estimation des paramètres.

Conclusion :

Après l'implémentation sous MATLAB des algorithmes de l'identification (M.C.R et M.C.E et V.I.O.R), on peut conclure ce qui suit :

- Comparant les deux entrées (S.B.P.A et échelon), on remarque que l'entrée S.B.P.A est plus fiable comparée à celle de l'échelon puisqu' elle nous donne une erreur quadratique plus faible.
- La méthode des M.C.E est plus performante que celle des M.C.R. Elle permet une meilleure convergence des paramètres (donne une erreur quadratique plus petite), cela est dû à la structure du modèle choisie (voir les courbes relevées en dessus).
- Si on compare la méthode des M.C.E à celle du V.I.O.R, on constate que cette dernière a une erreur quadratique plus élevée vu qu'elle ne prend pas en considération la modélisation des perturbations, ce qui signifie que la M.C.E est la meilleure.
- Quand le nombre de données utilisés pour l'identification augmente la qualité de l'estimation augmente.

Bibliographie

- [1] Etienne DOMBRE, Wisama KHALIL, Modélisation, identification et commande des robots, éditeur HERMÈS / LAVOISIER, 1999.
- [2] E. Walter, L. Pronzato : Identification de modèles paramétriques, Masson, 1997.
- [3] Ioan Landau, Identification des systèmes, Hermes Science Publications, 1998.
- [4] Bruno Despres, Lois De Conservations Euleriennes, Lagrangiennes Et Methodes Numeriques (Mathematiques & Applications), Springer, 2010
- [5] Michel Vergé, Daniel Jaume, Modélisation structurée des systèmes avec les Bond Graphs, TECHNIP, 2003.
- [6] P. Borne et al. Modélisation et identification des processus. Technip, Paris, 1993.
- [7] J. Richalet. Pratique de l'identification. Hermes, Paris, 1991.
- [8] N. Baoune, M. Samer. Identification des Systèmes linéaires. Mémoire Master, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, 2008.