



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Mohamed Boudiaf - M'sila Faculté de
technologie



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Département de GENIE CIVIL

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du
diplôme de MASTER

FILIERE : Génie Civil

SPECIALITE : Structures

THEME

**SIMULATION CRITIQUE DE LA THÉORIE
D'EULER POUR L'ÉVALUATION DE LA CAPACITÉ
PORTANTE DES COLONNE DE STRUCTURES
MÉTALLIQUES CONTREVENTÉES À NOEUDS
SEMI-RIGIDES, CAS DES GRANDS
DÉPLACEMENTS.**

Dirigé par :

Mr. Amour Ahmed

Présenté par :

Benguesmia Hacene

Promotion : 2023/2024.

Remerciements

Au terme de ce travail, nous devons remercier tout d'abord dieu qui nous a donné la force et le courage de suivre nos études et d'arriver à ce stade et à nos parents qui nous ont beaucoup soutenus pendant tous le long de notre parcours.

Un grand merci à mon encadreur Dr. AMOUR Ahmed qui nous a beaucoup aidé, soutenu et nous a permis d'arriver à ce niveau-là et pour ses excellents conseils et surtout pour son temps passé avec nous et sa patience, sans lui on n'aurait pas pu réaliser ce modeste travail et pour sa confiance en nous.

Nous tenons aussi à remercier les membres de jury qui nous ont fait honneur d'examiner ce travail.

Enfin, nous renouvelons nos remerciements à ceux qui nous ont aidés de près ou de loin pour réaliser ce travail sans oublier les enseignants qui ont contribué à notre formation

LISTE DES SYMBOLES

I : Moment d'inertie [mm^4]

E : Module de Young [MPa]

F : Force critique [N]

N : Charge appliqué [N]

l_f : Longueur de flambement [mm]

l : Longueur de la poutre [mm]

k_f : Coefficient de la longueur de flambement

σ_e : Limite élastique [MPa]

σ_k : Contrainte critique d'Euler [MPa]

ν : Coefficient de poisson

f_c : Flèche maximale [mm]

λ : Elancement

λ_k : Elancement critique d'Euler

λ̄ : Elancement réduit

P : Réaction transversale [N]

i : Rayon de giration [mm]

M_f : Moment fléchissant [N.mm]

M₀ : Moment fléchissant initiale [N.mm]

f_t : Flèche totale [mm]

Q : Charge concentrée [N]

q : Charge répartie [N.mm]

V : Effort tranchant [N]

N_t : Charge critique de Tetmayer [N]

G : Module d'élasticité transversale de l'acier [MPa]

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure 1.1 : Articulation poteau-poutre par cornières soudés sur la semelle du poteau	13
Figure 1.2 : Encastrement poteau-poutre intermédiaire	14
Figure 1.3 : La théorie de Bernoulli	16
Figure 1.4 : Adaptation dans la section	17
Figure 1.5 : Détermination de moment $M_z(x)$	19
Figure 1.6 : Formation de la rotule plastique	20
Figure 1.7 : Poutre bi-encastree chargée uniformément	20
Figure 1.8 : Les éléments de réductions M_A , M_B , T_A , T_B (figure 2.1.b)	21

CHAPITRE II

Figure 1.1 : Les états d'équilibre d'un système mécanique	24
Figure 1.2 : État primaire I et secondaire II adjacents	25
Figure 1.3 : Barre prismatique chargée de bout	28
Figure 1.4 : Appui permettant libre rotation de flexion	32
Figure 1.5 : Encastrement de gauchissement	33
Figure 1.6 : Instabilité par déversement	33
Figure 1.7 : Effet du niveau d'application des charges	38

CHAPITRE III

Figure 1.1 : Le flambement	43
Figure 1.2 : Poutre bi-articulée [3]	44
Figure 1.3 : Poutre encastree-libre	46
Figure 1.4 : Poutre bi-encastree	47
Figure 1.5 : Poutre encastree-articulée	48

CHAPITRE IV

Figure 1.1 : Flambement d'un poteau bi articulée **52**

CHAPITRE V

Figure 1.1 : Colonne bi-articulé **56**

Figure 1.2 : Colonne articulé-encasté **57**

Figure 1.3 : Colonne encasté-libre **57**

Figure 1.4 : Colonne bi-encasté **58**

	N° Page
INTRODUCTION GENERALE	02
CHAPITRE I : CLASSIFICATION D'ASSEMBLAGES POUTRES POTEAUX D. LES STRUCTURES METALLIQUES.	03
<i>1.1. Dimensionnement élastique des structures</i>	04
<i>1.1.1. Introduction</i>	04
<i>1.1.2. Rotules parfaites</i>	04
<i>1.1.3. Encastremets parfaits</i>	05
<i>1.1.4. Assemblages semi rigides</i>	05
1.2. Dimensionnement plastique des structures	06
<i>1.2.1. Historique du développement du calcul plastique des ossatures</i>	06
<i>1.2.2. Contrainte normale σ_x dans une poutre de section prismatique</i>	07
<i>1.2.3. Moment fléchissant $M_z(x)$ et rayon de courbure R dans une poutre de section prismatique fléchie</i>	07
<i>1.2.4. Moment élastique dans la poutre. bi-articulée chargée uniformément.</i>	08
<i>1.2.5. Adaptation dans la section et moment plastique dans la section transversale de la poutre</i>	09
<i>1.2.5.1. Notion de formation de rotules plastiques</i>	10
<i>1.2.5.2. Adaptation entre sections.</i>	11
CHAPITRE II : MODÉLISATION ÉNERGÉTIQUE DE L'INSTABILITE ELASTIQUE	14
2.1. Théorie de l'instabilité élastique par flambement. (Cours de R Maquoi)	15
<i>2.1.1. Introduction</i>	15
<i>2.1.2. Critère général de la stabilité élastique</i>	15
<i>2.1.3. Condition d'équilibre indifférent.</i>	18
<i>2.1.3.1. Principe de RAYLEIGH</i>	18
<i>2.1.3.2. Exemple d'application : la barre prismatique chargée de bout</i>	19

2.1.3.3. Méthode de RITZ	22
2.2. Théorie de l'instabilité élastique par déversement	23
2.2.1. Introduction.	23
2.2.2. Conditions d'appui	24
2.2.3. Théorie générale du déversement	25
2.2.3.1. Généralités.	25
2.2.3.1.2 Équations d'équilibres	26
2.2.3.1.3 Détermination du moment critique de flambement	28
2.2.3.1.4 Effet du niveau d'application des charges.	30
2.2.4 Exemples d'application	31
CHAPITRE III : LA THÉORIE DE FLAMBEMENT D'EULER.	33
3.1. Introduction	34
3.2. Définition du flambement	34
3.3. Notions de la sécurité	35
3.4. Étude du cas fondamental du flambement	35
3.4.1. Étude théorique du flambement	35
3.4.2. Notion de charge critique de flambement pour une colonne bi articulée.	35
3.4.3.1. Les autres cas qui se déduisent du cas fondamental	37
3.4.3.2. Colonne encastrée à sa base libre de l'autre	37
3.4.3.3. Colonne bi encastrée	38
3.4.4. Colonne encastrée articulée	39
3.4.4. Notion de longueur de flambement	40
CHAPITRE IV : CORRECTION À APPORTER À LA THÉORIE D'EULER POUR TENIR COMPTE DES GRANDS DÉPLACEMENTS	41
4.1. Correction à apporter à la théorie d'Euler pour tenir compte des grands déplacements	42
4.2. Introduction des imperfections géométriques et structurales ou la formulation d'Ayrton Perry.	44

<i>4.3. Courbes européennes de flambement.</i>	46
--	-----------

CHAPITRE V : SIMULATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT DES COLONNES AU FLAMBEMENT.

<i>5.1. Introduction.</i>	56
<i>5.2. Colonne bi-articule.</i>	56
<i>5.3. Colonne articule- encastre.</i>	57
<i>5.4. Colonne encasté-libre</i>	57
<i>5.5. Colonne bi- encasté.</i>	58

Introduction

Introduction général

L'étude approfondie de la théorie classique d'Euler pour évaluer la capacité de charge des poutres dans les structures métalliques est indispensable, surtout pour les structures comportant des joints semi-rigides et en tenant compte des déformations importantes. Ce sujet revêt une grande importance dans le domaine du génie civil et de l'ingénierie des structures, car le comportement des poutres sous des charges élevées peut être complexe et nécessite une compréhension précise de nombreux facteurs influents. Cette recherche se focalise sur la révision de la théorie traditionnelle d'Euler, qui suppose que les joints des poutres sont parfaitement rigides et inélastiques. Toutefois, dans la pratique, les joints sont souvent semi-rigides, ce qui signifie qu'ils peuvent subir certaines déformations sous l'action des charges. Cela peut avoir un impact significatif sur la stabilité des poutres et leur capacité de charge. De plus, cette étude comprend l'application de simulations pour vérifier la validité de la théorie dans des situations impliquant des déplacements importants. Cela permet d'obtenir des perspectives plus précises sur le comportement des poutres dans des conditions réelles, ce qui peut conduire à des améliorations dans la conception des structures métalliques et à des normes de sécurité plus élevées. En somme, cette recherche vise à fournir une analyse exhaustive de la théorie classique et à identifier les aspects qui pourraient nécessiter des ajustements ou des améliorations. Ce processus permettra de développer une compréhension plus approfondie du comportement des poutres sous différentes charges, contribuant ainsi à améliorer la sécurité et l'efficacité des structures métalliques dans le domaine de l'ingénierie civile.

Le but :

Dans cette investigation, nous essayons de montrer que la théorie de base de la charge critique d'Euler n'est en réalité qu'une simplification de la tâche. Cette théorie basée sur une idéalisation du comportement de la colonne comprimée, à savoir que la configuration de l'état déformé coïncide avec celle non déformé.

Avec l'introduction des imperfections géométriques et structurales et l'interaction de l'effet de la plasticité font que cette charge critique est toujours plafonnée supérieurement par cette charge critique P_{cr} d'Euler.

CHAPITRE I
CLASSIFICATION
D'ASSEMBLAGES POUTRES
POTEAUX DANS LES
STRUCTURES METALLIQUES

1.1. Dimensionnement élastique des structures

1.1.1 Introduction

Les méthodes habituelles d'analyse d'ensemble d'une structure métallique considèrent les assemblages poutre-colonne soit comme des rotules, soit comme des encastremets parfaits.

La rotule ne transmet aucun moment entre les pièces assemblées. Les assemblages «rotule» sont principalement dimensionnés pour la reprise d'un effort tranchant.

L'encastrement parfait ne permet aucune rotation relative des pièces assemblées, et transmet l'intégralité du moment appliqué, si l'assemblage est correctement dimensionné.

Ces assemblages ne sont en réalité que des vues de l'esprit destinées à faciliter le calcul d'une structure ou la recherche de la capacité portante d'une colonne.

Le comportement des assemblages réels est intermédiaire entre ces deux cas extrêmes : les assemblages les plus rigides possèdent toujours une certaine flexibilité, et ceux que l'on considère généralement comme des rotules, sont capables de transmettre un petit moment de flexion. On aura donc toujours des assemblages semi-rigides.

1.1.2. Rotules parfaites

De tels assemblages poutre-colonne doivent transmettre la réaction de la poutre calculée lors du dimensionnement et subir, sans dommage, la rotation relative de l'extrémité de la poutre par rapport à la colonne. Ils ne peuvent, en aucun cas, transmettre un moment de flexion capable d'affecter la distribution des efforts dans la structure. [1]

$$M(\varphi) = 0, \quad M = 0$$

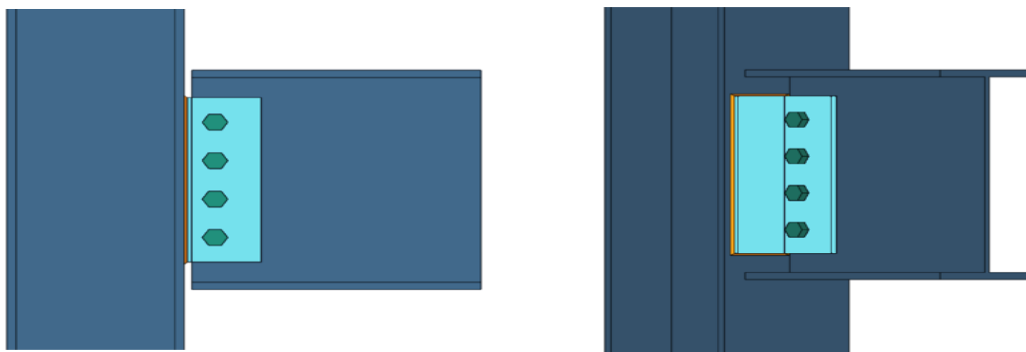
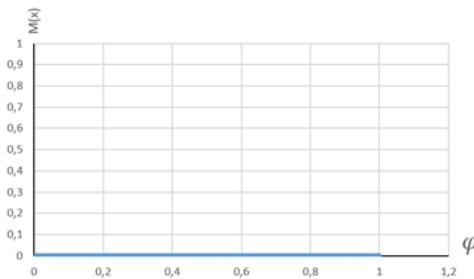


Figure 1.1 : Articulation poteau-poutre par cornières soudées sur la semelle du poteau

1.1.3. Encastrements parfaits

Les encastrements parfaits doivent reprendre la réaction et le moment de flexion calculés lors du dimensionnement. Leurs déformations n'auront aucune influence significative sur la distribution des efforts dans la structure ainsi que sur les déformations d'ensemble de celle-ci.

$$\varphi(M) = 0, \quad \varphi = 0$$

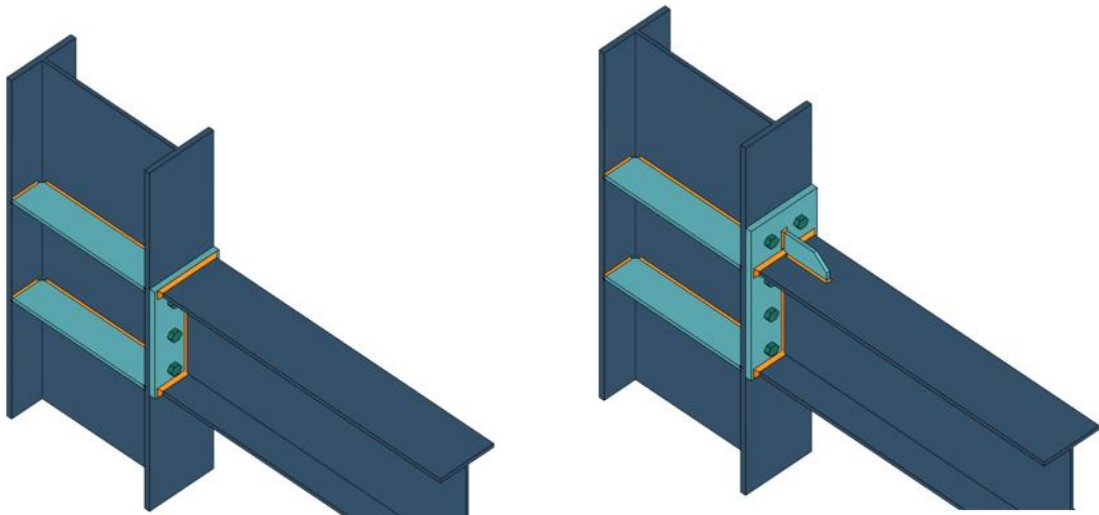
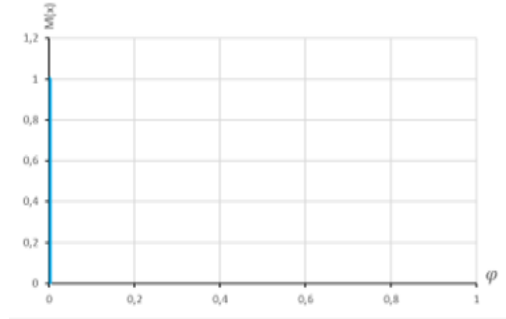
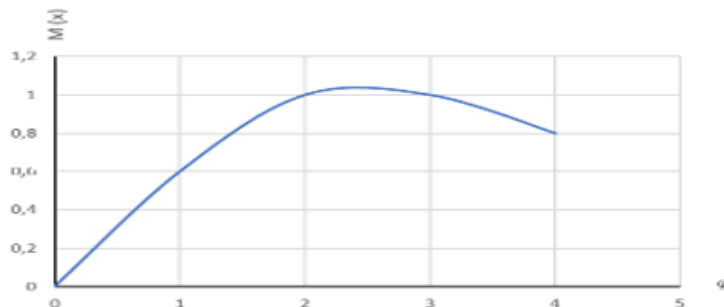


Figure 1.2 : Encastrement poteau-poutre intermédiaire

1.1.4. Assemblages semi-rigides

Ils doivent fournir un certain degré d'interaction prévisible entre les parties assemblées de la structure. Celui-ci est relié aux propriétés des courbes réelles moment-rotation de l'assemblage employé. Ces assemblages pourront reprendre la réaction et le mo

$$M = f(\varphi)$$



1.2. Dimensionnement plastique des structures

1.2.1. Historique du développement du calcul plastique des ossatures

Les premiers travaux sur la plasticité sont fort anciens :

Rappelons Tresca (1864) et Von Mises, qui ont écrit les conditions de plasticité.

Il y eut ensuite de nombreux travaux dans différents pays :

En France

Notamment des travaux de Caquot : courbe intrinsèque des différents matériaux. Énoncé du théorème fondamental d'adaptation.

En construction métallique : travaux de la sous-commission de plasticité de la Chambre Syndicale (à partir de 1947), sous la conduite de Dutheil. Résultats : introduction du coefficient de forme en flexion, calcul des pannes en continuité avec prise en compte de l'adaptation entre sections.

En Italie

Travaux déjà fort anciens de Colonnetti et son équipe.

Généralisation des théorèmes fondés en élasticité par l'étude du potentiel Menabrea, Castigliano, Maxwell-Betti, par l'introduction de la fonction de Colonnetti (potentiel élastique plus travail de déformation plastique).

Développement actuel des méthodes de calcul.

En Russie

Études très poussées, notamment sur le domaine élastique et ses frontières, par Rjanitsyn.

L'étude est actuellement très développée, malheureusement assez peu connue.

Actuellement Syndicat de la Construction Métallique de France.

Dans les pays Anglo-Saxons : Grande-Bretagne, U.S.A.

Les méthodes de calcul par les théorèmes fondamentaux du corps rigide plastique sont nées en Grande-Bretagne.

L'impulsion a été donnée, dès avant 1940, par Sir John Baker de l'Université de Cambridge.

Les théorèmes fondamentaux ont été énoncés par Greenberg et Prager.

À signaler les travaux de Heyman (Cambridge) et Horne (Manchester)

De nombreux travaux en Amérique, notamment à l'Université de L'high, avec le Professeur Beedle.

Les pays anglo-saxons sont les premiers à avoir des règlements de calcul en plasticité et à les appliquer dans la pratique.

En Europe, actuellement

Tous les pays développent des recherches sur le calcul en plasticité, notamment en Belgique avec le Professeur Massonnet, en France avec le C.T.I.C.M. [2]

1.2.2. Distribution de la Contrainte normale σ_x dans une poutre de section prismatique

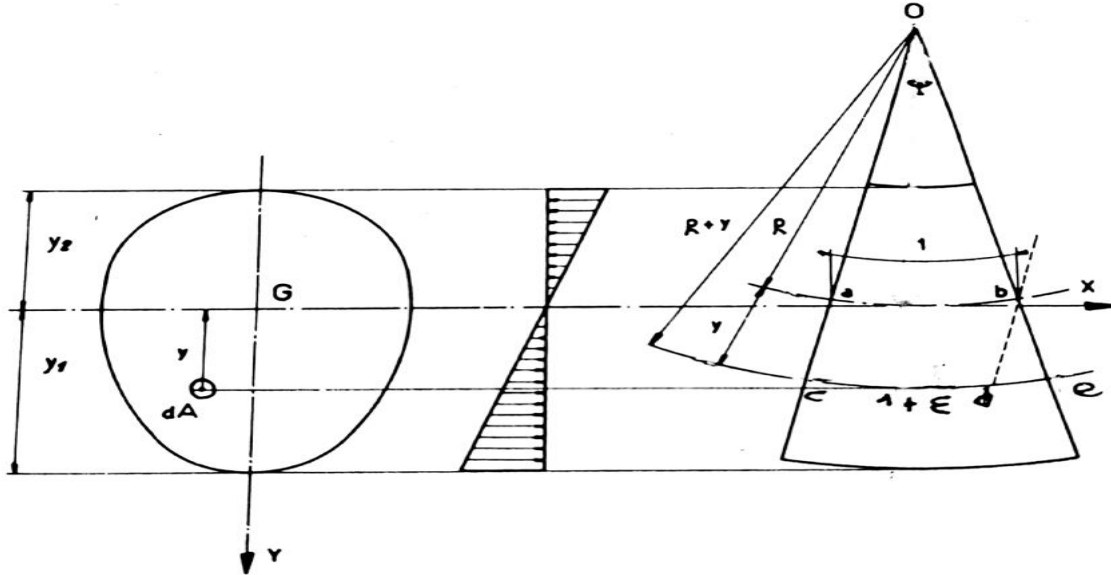


Figure 1.3 : La théorie de Bernoulli

Si on prend une fibre ab sur l'axe neutre longueur unitaire $ab = 1 = l_0$

La fibre située à y de l'axe neutre subie une déformation

$$\Delta L = l - l_0 \quad \text{et} \quad l = cd + de = 1 + \Delta L$$

Or la similitude entre les secteurs circulaires impose

$$\frac{ab}{R} = \frac{ce}{R+y} \quad \text{Ou} \quad \frac{R}{ab} = \frac{R+y}{ce} \Rightarrow \frac{R+y}{R} = \frac{ce}{ab} = \frac{cd+de}{ab}$$

$$\text{Or } cd = ab \Rightarrow \frac{R+y}{R} = \frac{ab+de}{ab} = 1 + \frac{de}{ab}$$

$$\frac{R+y}{R} = 1 + \frac{\Delta L}{ab} = 1 + \epsilon, \quad \epsilon = \frac{\Delta L}{ab}$$

$$1 + \frac{y}{R} = 1 + \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{y}{R} \tag{1.1}$$

$$\text{Dans la phase de comportement élastique linéaire } \sigma_x = E\epsilon \Rightarrow \sigma_x = E \frac{y}{R} \tag{1.2}$$

Ce qui explique que le contrainte normale σ_x en proportionnelle à distance par rapport à l'axe neutre [3]

1.2.3. Moment fléchissant $M_z(x)$ et rayon de courbure R dans une poutre de section prismatique fléchie

Exprimons que :

1) Le résultant des forces F_{xi} doit être nulle :

$$\sum F_{xi} = 0 \quad \text{Ou} \quad \int_A \frac{\sigma_x dA}{F_{xi}} = 0 \quad \text{Ou} \quad \int_A \frac{E}{R} y da = 0 \tag{1.3}$$

$\Rightarrow \frac{E}{R} \int_A y \cdot dA = 0$ avec $\int_A y \cdot dA$ Est le moment plastique qui explique que l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section droite.

2) D'autre part, la somme des moments de ses forces par rapport à l'axe neutre doit être égale au moment M du couple.

$$\int_A \sigma_x \cdot y \cdot da = \int_A \frac{E}{R} y^2 da = \frac{E}{R} \int_A y^2 dA = M_z(x) \tag{1.4}$$

Or

$\int_A y^2 dA$ N'est rien d'autre que le moment d'inertie I de la section droite par rapport à l'axe neutre.

$$\Rightarrow \frac{EI}{R} = M_z(x) \quad \text{Or la courbure } \chi = \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \chi EI = M_z(x) \Rightarrow \chi = \frac{M_z(x)}{EI} \tag{1.5}$$

χ mesure également l'angle ψ angle de rotations relatives de 2 sections distants de l'unité de longueur.

\Rightarrow La rotation totale des section *extrêmes* de la poutre par rapport à l'autre vous donc

$$\phi = \psi \cdot L = \frac{M_z(x) \cdot L}{EI} \tag{1.6}$$

1.2.4. Moment élastique dans la poutre bi-articulée chargée uniformément

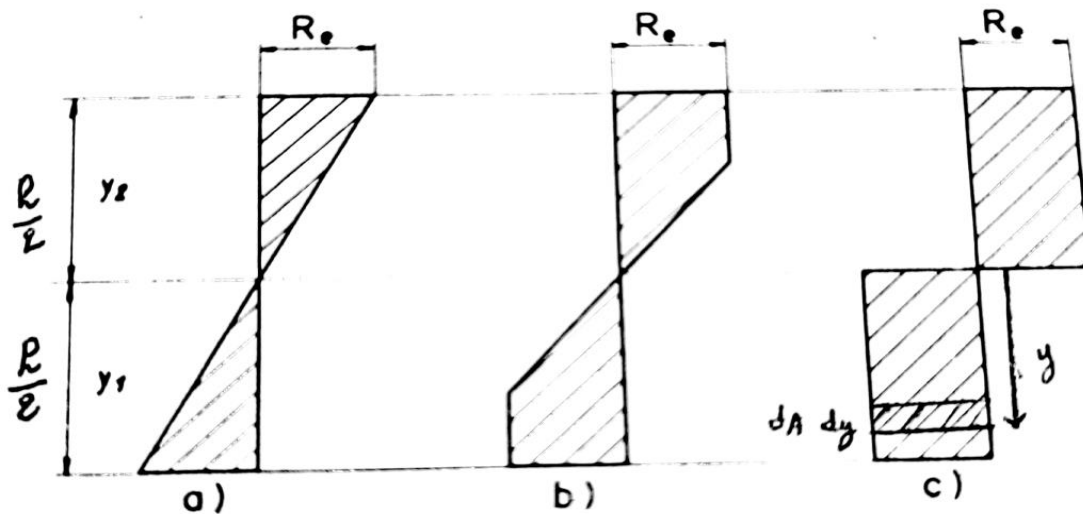


Figure 1.4 : Adaptation dans la section

Nous avons démontré dans (1.2) que $\sigma_x = E \frac{y}{R}$

Et la courbure $\chi = \frac{1}{R}$

$$\Rightarrow \chi = \frac{M_z(x)}{EI} \quad (1.5)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{Ey}{R} = Ey \cdot \frac{M_z(x)}{EI}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{M_z(x)}{I} \cdot y = \frac{M_z(x)}{\frac{I}{y}}$$

$$\sigma_x = \frac{M_z(x)}{\frac{I}{y}} \quad (1.7)$$

$\Rightarrow M_z(x) = \sigma_x \frac{I}{y}$ la valeur maximum que pour emein de σ_x en σ_e : la fibre la plus tendue au la plus comprimé (poutre symétrique par rapport axe neutre)

\Rightarrow Le moment élastique (état (6))

$$M_e = \sigma_e \frac{2I}{h} \quad \text{Or } I = \frac{bh^3}{12}$$

$$M_e = \frac{2 \cdot bh^3}{12 \cdot h} \sigma_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_e \Rightarrow M_e = W \cdot \sigma_e \quad (1.8)$$

Ou $W = \frac{bh^2}{6}$: module de rigidité flexionnelle élastique

1.2.5. Adaptation dans la section et moment plastique dans la section transversale de la poutre

Voir figure 1.4.

Quand toutes les fibres de porte et d'autres de l'axe neutre sent plastifiée

Donc la section transversale est complètement plastifiée le passage à la plastification des fibres les plus *extrêmes* jusqu'aux fibres adjacents à l'axe neutre ce qui introduit donc la section en question (à mi portée du cas d'exemple)

D'où le moment M_p :

$$M_p = \int_{-\frac{h}{2}}^0 \sigma_x \cdot y \, dA + \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot y \, dA \quad \text{Ou } dA = b \cdot dy$$

$$\text{YE } [-\frac{h}{2}, 0] \quad \sigma_x = -\sigma_e$$

$$\text{YE } [0, \frac{h}{2}] \quad \sigma_x = +\sigma_e$$

$$\text{Donc } M_p = \int_{-\frac{h}{2}}^0 -\sigma_e \cdot y \, dA + \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_e \cdot y \, dA$$

$$M_\rho = \sigma_e \left[\int_{-\frac{h}{2}}^0 -bydy + \int_0^{\frac{h}{2}} bydy \right] = b\sigma_e \left[\left[-\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^0 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{h}{2}} \right]$$

$$M_\rho = -b\sigma_e \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^0 + b\sigma_e \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{h}{2}}$$

$$M_\rho = -b\sigma_e \left(0 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) + b\sigma_e \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

$$M_\rho = b\sigma_e \frac{h^2}{8} + b\sigma_e \frac{h^2}{8} = \frac{bh^2}{4} \sigma_e$$

$$M_\rho = \frac{bh^2}{4} \sigma_e = z\sigma_e \tag{1.9}$$

Le passage de M_e à M_p s'appelle : phénomène d'adaptation dans la section transversale elle même

⇒ Le gain de faire travailler une section prismatique à sa juste limite ultime M_p (plastification)

$$\alpha = \frac{M_p}{M_e} = \frac{z\sigma_e}{W\sigma_e} = \frac{z}{w} = \frac{bh^2 \cdot 6}{4 \cdot bh^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 150\%$$

1.2.5.1. Notion de formation de rotules plastique

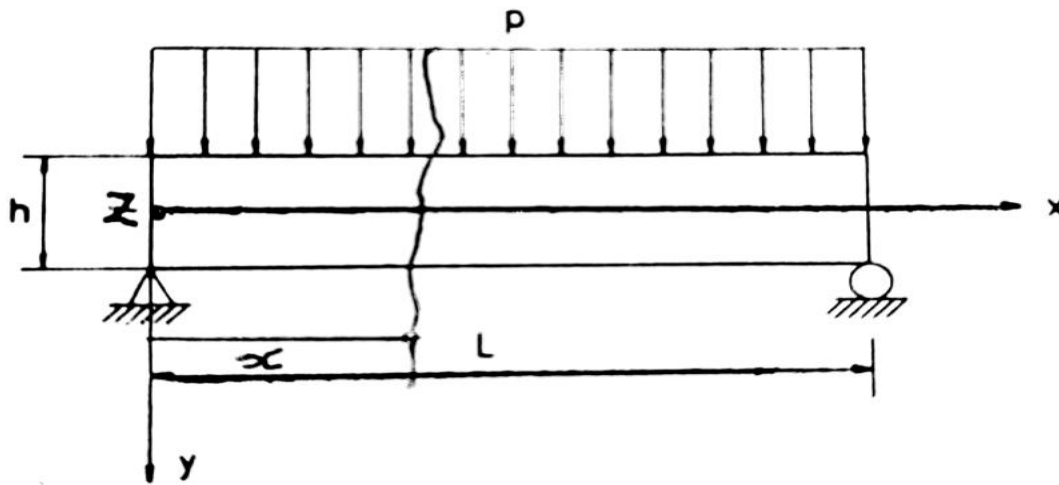


Figure 1.5 : Détermination de moment $M_z(x)$

Cette poutre simplement appuyée aux 2 extrêmits en isostatique.

Pour quelle se transforme mécanisme de ruine il suffit de l'apparition d'une rotule à l'endroit du moment max :

Calculons le moment de flexion en tout point x

$$M_z(x) = R_A x - qx \frac{x}{L} = \frac{qL}{2} x - \frac{qx^2}{2} \tag{1.10}$$

Le moment est max quand l'effort tranchant nulle

$$\Rightarrow T = \frac{dM_z(x)}{d(x)} = 0 = \frac{qL}{2} - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$M_z \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{qL}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{qL^2}{8} = \frac{qL^2}{8} \Rightarrow M_z \text{max} = \frac{qL^2}{8}$$

Le moment max se passe à mi travée et est égal à $M_z \text{max} = \frac{qL^2}{8}$ (1.11)

On a démontré au (1.9) que $M_p = z\sigma_e$ qui tend à diminuer le rayon de courbure R est à la limite R tend vers 0.

Ce qui va valoir à ce qui la courbure $\chi = \frac{1}{R}$ va tendre vers l'infinie.

D'où

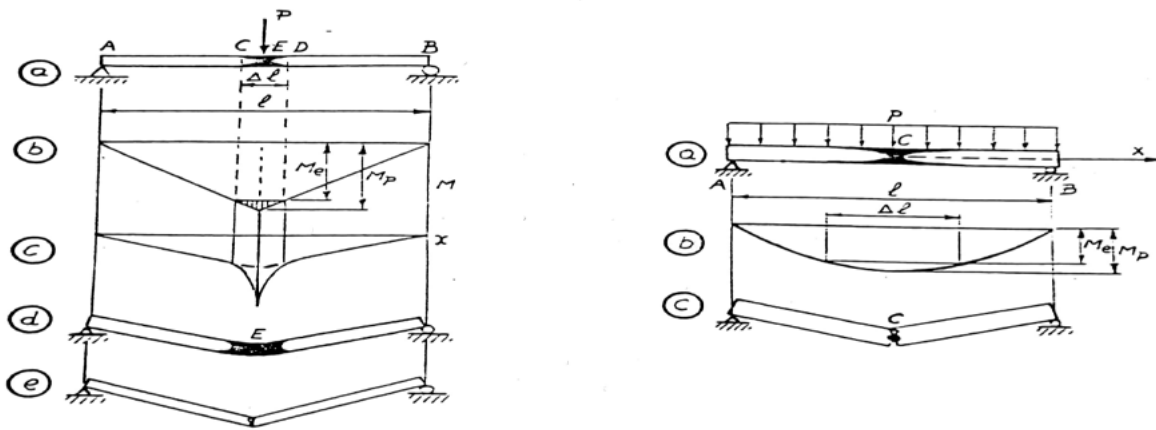


Figure 1.6 : Formation de la rotule plastique

1.2.5.2. Adaptation entre sections

Considérons à présent une structure de degré d'hyperstaticité de degré 2 caractérisé par une poutre bi-encastée chargée uniformément.

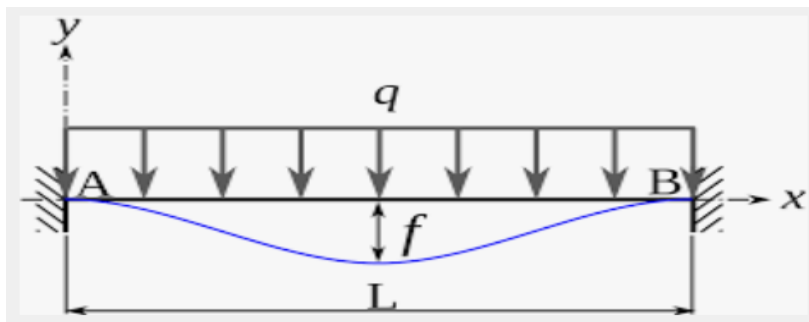


Figure 1.7 : Poutre bi-encastée chargée uniformément

Le nombre d'inconnu hyperstatique est $N = 4 - 2 = 2$ nous négligeons l'effet de câble pour lequel $(\sum Ni = 0)$ pas d'effort normal dans la poutre.

Proposons-nous de rechercher le moment $M(x)$ et l'effort tranchant en tout point x de la poutre à partir de l'extrémité de gauche A.

Décomposons la sollicitation de la poutre en 2 parties :

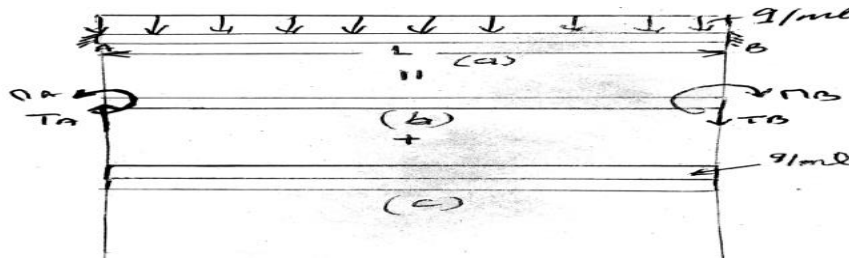


Figure 1.8 :

Les éléments de réductions M_A, M_B, T_A, T_B (figure 2.1.b)

- a) Les forces extérieures appliquées directement à la poutre (figure 2.1.c) dans la sollicitation à la poutre n'est pas chargée et le moment de flexion varie linéairement entre A et B.

$$M_1(x) = ax + b \text{ Avec}$$

$$X = 0 \Rightarrow M_1(0) = M_A \Rightarrow b = M_A$$

$$X = L \Rightarrow M_1(L) = M_B \Rightarrow M_B = aL + M_A$$

$$a = \frac{M_B - M_A}{L}$$

$$\Rightarrow M_1(x) = \frac{M_B - M_A}{L}x + M_A$$

$$\Rightarrow M_1(x) = M_A - \frac{M_A}{L}x + \frac{M_B}{L}x$$

$$M_1(x) = M_A \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{M_B}{L}x = M_A \left(\frac{L-x}{L}\right) + M_B \frac{x}{L}$$

$$M_1(x) = M_A \left(\frac{L-x}{L}\right) + M_B \frac{x}{L} \tag{1.12}$$

$$L'effort\ tranchant\ T_1(x) = \frac{dM_1(x)}{dx}$$

$$T_1(x) = -\frac{M_A}{L} + \frac{M_B}{L} = \frac{M_B - M_A}{L}$$

$$T_1(x) = \frac{M_B - M_A}{L} \tag{1.13}$$

Pour la sollicitation b appelons $\mu(x)$ le moment fendissant et l'effort tranchant

D'après le principe de superposition.

$$M(x) = M_1(x) + \mu(x) = M_A \frac{L-x}{L} + M_B \frac{x}{L} + \mu(x) \tag{1.14}$$

$$T(x) = T_1(x) + \tau(x) = \frac{M_B - M_A}{L} + \tau(x) \quad (1.15)$$

$\mu(x)$ est le moment fléchissant dû aux charges appliquées à la poutre

Or a démontré au (1.10) que $\mu(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}$

$$\Rightarrow M(x) = M_A \frac{L-x}{L} + M_B \frac{x}{L} + \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad (1.16)$$

CHAPITRE II
MODÉLISATION ÉNERGÉTIQUE
DE L'INSTABILITE ELASTIQUE

2.1. Théorie de l'instabilité élastique par flambement

2.1.1. Introduction

Le souci d'économie, l'apparition des matériaux à haute résistance et la meilleure connaissance des lois régissant le comportement des structures a conduit à une réduction progressive des sections résistantes. Par ailleurs, la taille des structures va sans cesse croissant. Les éléments structuraux deviennent de plus en plus élancés et le danger d'instabilité, quasi inexistant dans le passé en raison de la massivité des structures de l'époque, devient de plus en plus menaçant.

Les phénomènes d'instabilité sont pour ainsi dire partout présents : barres comprimées (flambement), ou fléchies (déversement), plaques et coques (voilement), ... Ils peuvent affecter soit des éléments individuels d'une structure, soit la construction dans son ensemble.

On peut affirmer que les sinistres survenant à des structures métalliques sont davantage dus à des phénomènes d'instabilité qu'à une sollicitation excessive du matériau. On comprend dès lors toute l'importance d'une étude approfondie des dits phénomènes. [4]

2.1.2. Critère général de la stabilité élastique

En mécanique rationnelle, un corps rigide est dit stable lorsque, ayant été déplacé modérément par rapport à sa position d'équilibre de référence, il tend à reprendre celle-ci de lui-même. Si, au contraire, le déplacement ainsi donné va en s'amplifiant, le corps est dit instable. Lorsque le corps reste en équilibre dans l'état déplacé, l'équilibre est Indifférent. Ainsi, une bille placée successivement au fond de la face concave d'une calotte sphérique, sur la face convexe de cette même calotte ou sur un plan horizontal est respectivement en état d'équilibre stable, instable et indifférent (fig. 1.1.).

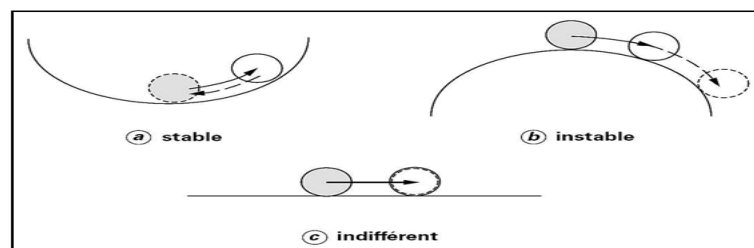


Figure 1.1 : Les états d'équilibre d'un système mécanique

On caractérisera ces trois genres d'équilibre à l'aide d'une quantité énergétique, à savoir l'énergie potentielle π du corps, qui n'est autre que la variation d'énergie subie par le corps, par rapport à l'état d'équilibre de référence, au cours du déplacement perturbateur. En stabilité des constructions, on se bornera à considérer les systèmes structuraux élastiques conservatifs, qui possèdent une énergie potentielle interne V et pour lesquels les forces extérieures dérivent d'une énergie potentielle externe U , de sorte que :

$$\pi = U + V \quad (1-1)$$

L'énergie potentielle totale π dépend d'une ou plusieurs fonctions d'une ou plusieurs variables, représentant le champ de déplacement. Dans le problème d'EULER (flambement) par exemple, π est une fonctionnelle de la forme $\pi [v(x)]$ où $v(x)$ est une fonction déformée admissible, c'est-à-dire satisfaisant toutes les conditions cinématiques du problème ; cette fonction doit en outre être continue de même que ses dérivées successives.

Pour les trois cas représentés à la figure 1.1., on aura donc :

- π Augmente si l'équilibre est stable ;
- π Diminue si l'équilibre est instable ;
- π Est constant si l'équilibre est indifférent.

Les corps déformés plastiquement constituent des corps dissipatifs : l'énergie interne n'est plus déterminée univoquement par la configuration du corps. Par ailleurs, l'existence de U impose que le travail produit par les forces extérieures soit indépendant du chemin suivi pour passer de la configuration initiale à la configuration finale et ne dépende que des seules coordonnées décrivant la configuration du système ; cela exclut donc les instabilités dynamiques de toute nature.

On étudiera ci-après la stabilité d'une configuration d'équilibre particulière sous l'action de forces extérieures données ; celle configuration constituera l'état primaire I. Celui-ci sera stable si et seulement si l'énergie totale π est un minimum relatif pour cet état. En d'autres termes, l'énergie π de ce corps augmente si on place celui-ci dans un quelconque état secondaire II, adjacent et infiniment voisin de l'état secondaire I (On exclut le passage d'un état I à un état II situé à distance finie, ainsi que le représente la figure 1.2.

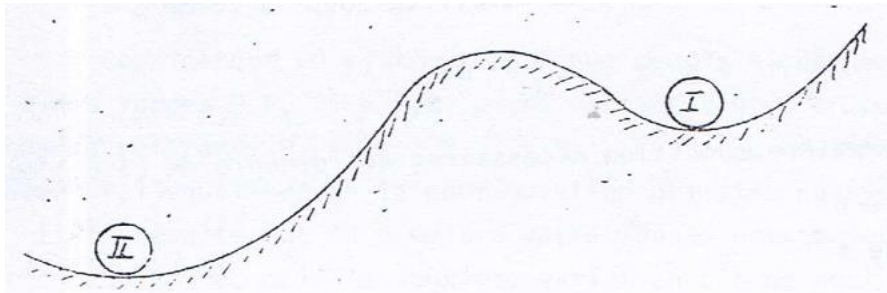


Figure 1.2 : État primaire I et secondaire II adjacents

Les états adjacents à l'état primaire doivent toujours respecter les conditions cinématiques du système étudié. Un état adjacent est ainsi obtenu, à partir de l'état primaire, par un champ de déplacement infiniment petit q , dit cinématiquement admissible. Il y correspond une variation d'énergie potentielle, fonction de q , valant :

$$\Delta\pi (q) = \pi_{II} - \pi_I = \pi (Q + q) - \pi(Q)$$

Où la coordonnée généralisée Q définit l'état primaire supposé ne dépendre que d'un seul paramètre par souci de simplification.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité de l'équilibre de l'état primaire I est l'existence d'un voisinage de l'état I tel que la variation d'énergie ne soit pas négative pour tous les états II appartenant à ce voisinage :

$$\Delta\pi(q) > 0 \rightarrow \text{stabilité} \quad (1.3)$$

Pour discuter le critère de stabilité (1.3.), choisissons un état primaire caractérisé par Q_o , développons $\pi(Q_o + q)$ en série de TAYLOR, au voisinage de Q_o :

$$\pi(Q_o + q) = \pi(Q_o) + \left(\frac{\partial \pi}{\partial Q}\right)_{Q_o} q + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2}\right)_{Q_o} q^2 + \dots \quad (1.4)$$

Où les dérivées partielles sont évaluées en $Q = Q_o$. Cette relation peut être réécrite sous la forme :

$$\pi(Q_o) + \Delta\pi = \pi(Q_o) + \delta\pi + \delta^2\pi + \dots \quad (1.5)$$

Où $\delta\pi, \delta^2\pi$ sont les variations première, seconde... de π respectivement. On peut ainsi écrire le critère de stabilité sous la forme :

$$\Delta\pi = \delta\pi + \delta^2\pi + \dots > 0 \quad (1.6)$$

La première condition nécessaire, qui découle de (1.6.) est que :

$$\delta\pi = 0 \quad (1.7)$$

Ce qui entraîne :

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0 \quad (1.8)$$

Car l'incrément de déplacement q peut prendre des valeurs positives ou négative. Cette condition exprime le théorème des travaux virtuels, ou, ce qui est équivalent, le caractère stationnaire de l'énergie totale ; elle est satisfaite ipso facto, puisque le corps étudié est en équilibre.

La seconde condition nécessaire, déduite de (1.6.) est :

$$\delta^2\pi > 0 \quad (1.9)$$

Pour toutes les valeurs non nulles, de l'incrément q ; cela entraîne :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} > 0 \quad (1.10)$$

Car le coefficient q^2 est toujours positif. La stabilité est donc assurée si la variation seconde de l'énergie potentielle dans le stade primaire est positive pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible. Cette seconde variation est alors dite définie positive.

Si $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} < 0$, la structure est instable tandis que si $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = 0$, il devient nécessaire d'examiner les variations d'ordre supérieure avant de conclure par exemple, si $\delta\pi = \delta^2\pi = 0$, alors $\delta^3\pi < 0$

correspondra à un système instable ; si $\delta^3\pi = 0$, alors $\delta^4\pi > 0$ sera l'indicateur d'un système stable tandis que $\delta^4\pi < 0$ correspondra à un système instable. Pour la plupart des cas pratiques, il n'est cependant pas nécessaire de pousser l'analyse au-delà de la variation seconde pour déterminer les propriétés de stabilité.

2.1.3. Conditions d'équilibre indifférent

1.3.1. Principe de RAYLEIGH

Considérons un système élastique soumis à chargement radial, c'est-à-dire à des forces P P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) variant toutes proportionnellement à des valeurs de référence P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Pour une certaine valeur P_{cr} du multiplicateur P_i l'équilibre de la configuration primaire du système cesse d'être stable. Il en résulte que la première variation $\delta\pi$ est toujours nulle, le corps étant en équilibre, mais la deuxième variation $\delta^2\pi$ ne peut plus être définie positive, sinon le corps serait toujours stable, ce qui contredirait l'hypothèse faite. La deuxième variation $\delta^2\pi$ doit donc être semi-définie positive ; c'est-à-dire qu'elle reste positive sauf pour une certaine configuration secondaire $Q_c = Q_o + q_c$, pour laquelle on a :

$$\delta^2\pi (q_c) = 0 \tag{1.11}$$

On atteint alors un état d'équilibre indifférent : le système peut soit garder sa configuration primaire, soit prendre la configuration secondaire caractérisée par le déplacement q_c . On dit aussi que pour le multiplicateur $P = P_{cr}$ des charges extérieures, il y a bifurcation de l'équilibre. Ce phénomène est donc caractérisé par la valeur minimum nulle de la variation seconde, pour le champ de déplacement non nul q_c , soit :

$$\delta^2\pi (q_c) = 0 = \text{Minimum} \tag{1.12}$$

En vertu de (1.1), on peut écrire :

$$\delta^2\pi = \delta^2U + \delta^2V$$

Où δ^2U est l'ensemble des termes de second ordre de l'énergie des forces extérieures et δ^2V l'ensemble des termes de second ordre de l'énergie potentielle interne. La quantité U est au signe près le travail T des forces extérieures, celui-ci est habituellement proportionnel à la force P_i de sorte que $T = PT$; dès lors on peut écrire :

$$\delta^2U = - p \delta^2 T \tag{1.13}$$

On rappellera que δ^2U et δ^2T sont des fonctions quadratiques et Homogènes du champ de déplacement q . Dès lors la condition de minimum (1.12) s'identifie à la condition :

$$\delta^2V(q) - P_{cr} \delta^2 T(q) > 0 \quad \text{si } q \neq q_c \tag{1.14.a}$$

$$\delta^2V(q_c) - P_{cr} \delta^2 T(q_c) = 0 \tag{1.14.b}$$

D'où on tire la valeur du multiplicateur critique :

$$P_{cr} = \frac{\delta^2 V(q_c)}{\delta^2 T(q_c)} < \frac{\delta^2 V(q)}{\delta^2 T(q)} \tag{1.15}$$

Ou encore :

$$P_{cr} = \text{Min} \frac{\delta^2 V(q)}{\delta^2 T(q)} \tag{1.16}$$

En d'autres termes, si on calcule le quotient $\delta^2 V / \delta^2 T$ en y introduisant, au lieu du déplacement d'instabilité inconnu q_c , un déplacement q cinématiquement admissible, on obtient toujours une valeur erronée par excès du multiplicateur critique des charges. Ceci constitue le principe de RAYLEIGH, établi originaires dans le cadre de la théorie des vibrations.

On peut montrer qu'une erreur de premier ordre dans le choix du champ de déplacement q a comme conséquence une erreur du second ordre sur la valeur de P_{cr} . Il faut y voir la raison principale de la puissance extraordinaire du principe de RAYLEIGH.

Le principe de RAYLEIGH sera notamment d'une grande utilité dans les problèmes d'instabilité régis par des équations différentielles difficilement intégrables.

2.1.3.2. Exemple d'application la barre prismatique chargée de bout

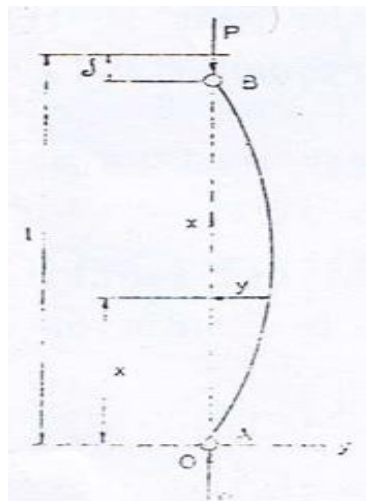


Figure 1.3 : Barre prismatique chargée de bout

Dans le cas particulier de la barre bi-articulée chargée de bout, le champ de déplacement devient la déformée transversale v qui doit, faut-il le rappeler, être cinématiquement admissible. On sait par la géométrie analytique que la longueur ds d'un élément d'arc, mesuré le long de la position déformée de la barre, s'écrit :

$$\begin{aligned} ds &= dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} \\ &= dx \sqrt{1 + v'^2} \end{aligned} \tag{1.17.a}$$

En développant le radical en série et en ne s'intéressant pas aux termes de degré supérieur au second ordre, on a :

$$ds = dx \left(1 + \frac{1}{2} v'^2 \right) \quad (1.17.b)$$

La différence entre la longueur développée de la barre dans sa configuration déformée et la longueur de la corde représente le déplacement r du point d'application de la charge P durant le flambement de la barre :

$$r = \frac{1}{2} \int_0^{L-r} v'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L v'^2 dx \quad (1.18)$$

Car r est infiniment petit lorsque le flambement s'amorce.

Si on néglige les déformations par effort tranchant devant celles dues à la flexion, et pour autant que les déplacements restent faibles, l'énergie potentielle interne varie au cours du flambement :

$$\Delta v \equiv V_{II} - V_I = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \equiv \frac{1}{2} EI \int_0^L v''^2 dx \quad (1.19.a)$$

Tandis que l'énergie potentielle externe varie de :

$$\Delta U \equiv -Pr = -\frac{1}{2} P \int_0^L v'^2 dx \quad (1.19.b)$$

Imaginons maintenant un déplacement virtuel $\epsilon\eta(x)$ cinématiquement admissible à partir de la configuration II déformée $v(x)$ ci-dessus, la quantité ϵ étant arbitrairement petite. Il vient alors, à l'état III :

$$r + dr = \frac{1}{2} \int_0^L (v' + \epsilon\eta')^2 dx \quad (1.20)$$

$$\Delta V + d\Delta V = \frac{1}{2} EI \int_0^L (v'' + \epsilon\eta'')^2 dx \quad (1.21)$$

L'énergie potentielle totale a varié par rapport à l'état I :

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= \pi_{III} - \pi_I = \frac{1}{2} EI \int_0^L (v'' + \epsilon\eta'')^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^L (v' + \epsilon\eta')^2 dx \\ &= \frac{1}{2} EI \int_0^L v''^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^L v'^2 dx \\ &+ \epsilon [EI \int_0^L v'' \eta'' dx - P \int_0^L v' \eta' dx] \\ &+ \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} EI \int_0^L \eta''^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^L \eta'^2 dx \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

La variation première $\delta\pi$ est le terme en ϵ :

$$\delta\pi = \epsilon [EI \int_0^L v'' \eta'' dx - P \int_0^L v' \eta' dx] \quad (1.23)$$

Tandis que la variation seconde est :

$$\delta^2\pi = \frac{1}{2} \varepsilon^2 [EI \int_0^L \eta''^2 dx - P \int_0^L \eta'^2 dx] \quad (1.24)$$

D'après le principe de RAYLEIGH, la charge critique P_{cr} rend $\delta^2\pi$ minimum, d'où, d'après (1.24) :

$$P_{cr} = \text{Min} \frac{\frac{EI}{2} \int_0^L \eta''^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^L \eta'^2 dx} \quad (1.25)$$

On ignore généralement la forme exacte de la déformée de flambement, ce qui empêche de trouver directement la valeur critique du multiplicateur. Par contre, on connaît l'allure générale de la déformée, ce qui permet d'obtenir une valeur approchée par excès du multiplicateur qui sera d'autant meilleure que la déformée choisie sera proche de la déformée réelle de flambement.

Par le cours de Mécanique des Matériaux, on sait que la déformée réelle de flambement de la barre chargée de bout, obtenue en résolvant l'équation différentielle, est une sinusoïde de type :

$$\eta = A \sin \frac{\pi X}{L} \quad (1.26)$$

On doit donc attendre que l'approche énergétique développée plus haut fournisse la charge critique d'EULER en adoptant la déformée (1.26). Il est facile de voir qu'il en est bien ainsi en remarquant que :

$$\int_0^L \eta''^2 dx = \frac{A^2 \pi^4}{2L^3}$$

$$\int_0^L \eta'^2 dx = \frac{A^2 \pi^2}{2L}$$

D'où, par (1.25) :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 9.869 \frac{EI}{L^2} \quad (1.27)$$

Si on avait choisi une déformée approximative de type parabole cubique, par analogie avec la déformée d'une poutre sur deux appuis chargés d'une force concentrée en son milieu, on aurait :

$$\eta = \frac{P}{48EI} (31^2 x - 4x^3) \quad (x \leq \frac{1}{2}) \quad (1.28)$$

D'où :

$$\eta' = \frac{P}{48EI} (31^2 - 12x^2)$$

$$\eta'' = -\frac{P}{48EI} \cdot 24x$$

Et, tous calculs faits, par (1.25) :

$$P_{cr, appr} = \frac{10EI}{L^2} \quad (1.29)$$

Un calcul similaire, conduit en adoptant la déformée de la poutre chargée cette fois uniformément, à savoir :

$$\eta = \frac{P}{24EI} (1^3x - 2.1x^3 + x^4) \quad (1.30)$$

Conduirait à la valeur :

$$P_{cr, appr} = \frac{9.88EI}{L^2} \quad (1.31)$$

On constate que les deux valeurs approchées sont proches de la valeur exacte.

2.1.3.3. Méthode de RITZ

La méthode de RITZ donne la solution directe du problème de minimum représenté par (1.12.) pour une forme de déformée choisie a priori. Elle consiste à représenter le déplacement $v = f(x)$ par une somme finie :

$$V = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_n\phi_n(x) \quad (1.32)$$

Dans laquelle les $\phi_i(x)$ sont des fonctions arbitrairement choisies mais cinématiquement admissibles tandis que les coefficients a_i sont des paramètres à optimiser.

L'énergie totale π est une fonction quadratique et homogène, en les déplacements. Sa variation seconde sera donc une fonction quadratique et homogène des coefficients a_i . On déterminera les a_i pour que $\delta^2\pi$ satisfasse la condition de minimum (1.12). On se trouve ainsi ramené au problème de recherche d'extrémum d'une fonction de n variables a_1, a_2, \dots, a_n et les conditions nécessaires sont :

$$\frac{\partial(\delta^2\pi)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.33)$$

Les dérivées premières d'une fonction quadratique et homogène sont des fonctions linéaires. Les équations (1.33) constituent donc un système de n équations linéaires et homogènes, permettant de déterminer les paramètres a_i . Ce système ne peut admettre la solution triviale $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, puisqu'on admet qu'une déformée d'instabilité non nulle se produit ; la solution correspond donc à l'annulation du déterminant des coefficients des a_i :

$$\det a = 0 \quad (1.34)$$

La condition (1.34) est une équation de degré n en l'inconnue p(x) ; la plus petite racine positive fournit la valeur cherchée P_{cr} . En substituant P_{cr} à P dans (1.34), on obtient un système d'équations linéaires homogènes, compatibles, dont on ne peut tirer que (n-1) rapports entre les a_i . Le premier coefficient a_1 reste donc indéterminé et peut être choisi arbitrairement.

(x) On choisit habituellement un état de référence $\bar{\rho}$ que l'on fait croître à l'aide d'un multiplicateur de charge P.

De même, si on choisissait la j^e racine de (1.34) (au lieu de retenir la plus petite), on trouverait les rapports associés au j^e mode d'instabilité. On voit donc que la méthode de RITZ ne fournit que n modes d'instabilité, alors que la structure étudiée en présente une infinité ; les résultats obtenus par cette méthode seront d'autant plus complets que n sera choisi plus élevé.

On constate en pratique qu'un choix habile des fonctions $\phi_i(x)$ entraîne une décroissance rapide des paramètres a_i lorsque i augmente. Dès lors un petit nombre de termes fournit déjà une très bonne évaluation de la charge critique.

A titre d'exemple, reprenons l'exemple déjà traité plus haut en adaptant une combinaison des deux déformées, soit :

$$\eta = (31^2x - 4x^3) + \alpha (1^3x - 21x^3 + x^4) \quad (x \leq \frac{1}{2}) \quad (1.35)$$

Où α est une constante, qui sera déterminée de manière à rendre minimum la charge

Critique trouvée. En effectuant les calculs, on trouve que :

$$P_{cr, appr} = \frac{9.872EI}{L^2} \quad (1.36)$$

Qui ne diffère de la valeur exacte que de 1/3000.

Il importe de remarquer que la méthode de RITZ permet de trouver la meilleure valeur du multiplicateur critique pour une forme de déformée choisie ; la solution n'en reste pas moins approchée tant que l'allure de la déformée ne s'identifie pas à celle réelle d'instabilité.

2.2. Théorie de l'instabilité élastique par déversement

2.2.1. Introduction

Le flambement étudié au paragraphe 2.1 est un phénomène d'instabilité plane. Par contre, Le déversement, spécifique des pièces fléchies autour de leur axe fort, Par contre est une instabilité spatiale : elle fait intervenir à la fois la flexion et la torsion de la poutre.

On l'intéresse ici au déversement des poutres droites fléchies autour de leur axe fort d'inertie sous l'action de forces transversales ou de couples de forces. La déformée associée à ce mode d'instabilité est assez complexe ; c'est pourquoi on utilisera de préférence l'approche énergétique.

Le déversement a été très longtemps considéré comme un flambement latéral de la partie comprimée de la poutre dans le plan perpendiculaire au plan de flexion ; cette conception est erronée en toute rigueur puisqu'elle conduit à négliger la torsion du profil. Le déversement est ainsi appelé à tort flambement latéral, vocable auquel il est préférable de substituer le terme

propre déversement ; il n'en reste pas moins que le terme consacré dans la littérature anglosaxonne est latéral buckling.

On analysera seulement le déversement de poutres isostatiques.

2.2.2. Conditions d'appui

Pour une poutre isostatique, il est aisé de spécifier les conditions d'appui vis-à-vis de la flexion autour des deux axes principaux d'inertie. Il faut toutefois préciser en outre les fixations d'extrémité selon leur faculté à permettre ou non un gauchissement des sections terminales.

Un appui à fourche autorise la rotation de torsion tout en permettant un libre gauchissement de la section terminale ; ainsi, au droit d'un tel appui, les deux semelles d'une section en I ou en H peuvent prendre indépendamment une inclinaison dans le plan horizontal par rapport au plan de l'âme de la poutre. Un tel appui permet une libre rotation de flexion (figure 3.1.). On aura donc pour les conditions de torsion d'un appui fourche :

$\psi = 0$ (Rotation de torsion empêchée)
 (3.1.a.b)

$\psi'' = 0$ (Contraintes normales de torsion non uniforme nulles)

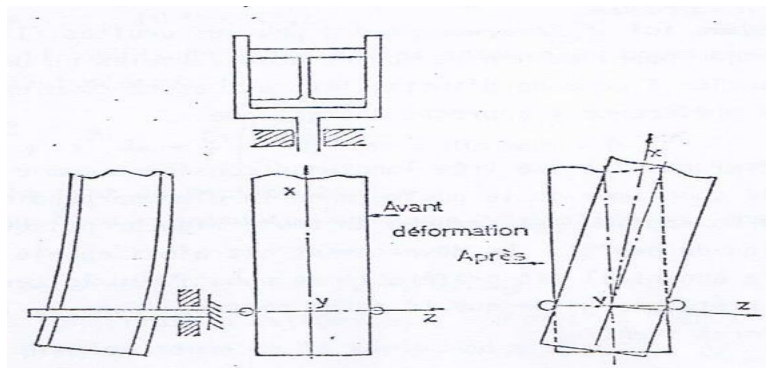


Figure 1.4 : Appui permettant libre rotation de flexion

Un encastrement de gauchissement autorise la rotation de torsion tout en empêchant le gauchissement de la section terminale ; il permet néanmoins la rotation de flexion. Un tel appui, s'il est correctement exécuté, permet d'accroître très sensiblement la rigidité torsion Nelle de la poutre et contribue ainsi à un relèvement sensible de la charge critique. Pour le réaliser, on soudera par exemple la section terminale sur une plaque d'about de très forte épaisseur (figure 3.2.) ; en cas de doute sérieux sur l'efficacité du dispositif mis en œuvre la prudence commande d'assimiler l'appui à un appui à fourche. Un encastrement de gauchissement parfait est donc caractérisé par :

$\psi = 0$ (rotation de torsion empêchée)

(3.2.a.b)

$\psi' = 0$

(Gauchissement u empêché)

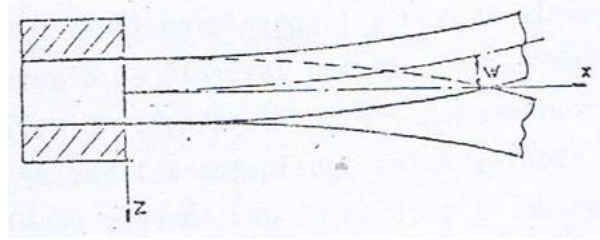


Figure 1.5 : Encastrement de gauchissement

2.2.3. Théorie générale du déversement

2.2.3.1. Généralités

Imaginons une poutre sur deux appuis d'extrémité distants de L . par faite ment rectiligne, avec une âme parfaitement verticale. Admettons que les charges transversales appliquées le long de l'axe de la poutre, au niveau des centres de gravité, agissent rigoureusement dans le plan moyen de l'âme. Une telle poutre se dérobera brusquement, ainsi que l'expérience le montre, par basculement transversal accompagné de torsion (fig. 3.3.), et ce, pour une valeur déterminée de la charge appliquée. Cette charge, qui engendre le déversement de la poutre, est appelée charge critique de déversement.

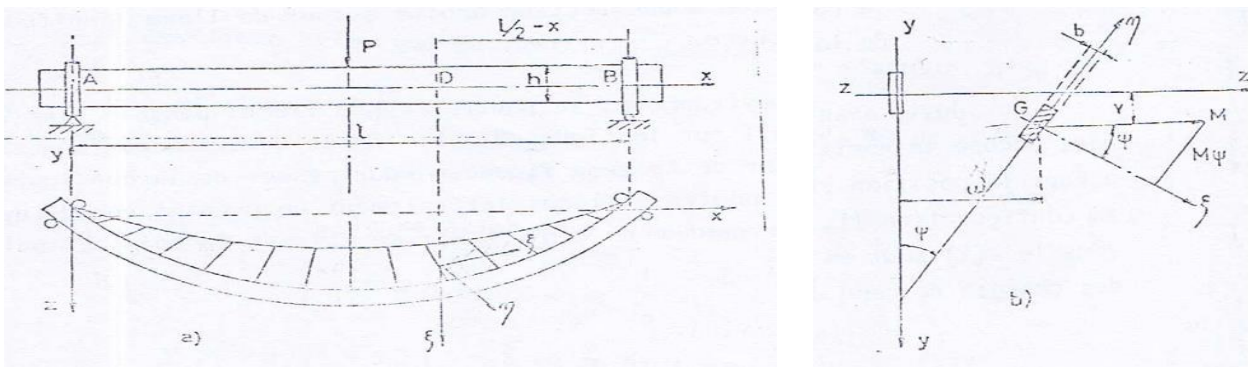


Figure 1.6 : Instabilité par déversement

On admettra dans ce qui suit que la direction d'action des forces transversales subsiste pendant la déformation associée au déversement. Lorsque la poutre, déjà fléchié dans le plan de l'âme, déverse, son énergie interne de déformation augmente puisqu'à l'énergie de flexion existante viennent s'ajouter d'une part une énergie de flexion latérale et d'autre part une énergie de torsion de la poutre autour de son axe longitudinal. Simultanément les points d'application des forces transversales appliquées à l'axe de la poutre s'abaissent en raison de la torsion de la section et ces charges développent donc un certain travail supplémentaire. Lors du déversement, l'énergie de flexion de la poutre dans son plan varie aussi quelque peu ; on négligera toutefois cette variation devant les énergies de flexion latérale et de torsion, ce

qui revient à supposer que la variation de courbure de la poutre dans le plan de l'âme reste faible et peut être négligée dans l'écriture des équations d'équilibre. Cette approximation est d'autant plus justifiée que la rigidité flexionnelle de la poutre dans le plan de l'âme est grande vis-à-vis de sa rigidité flexionnelle dans le plan perpendiculaire à l'âme.

Appelons :

- L La portée de la poutre ;
- $B = EI_y$ La raideur flexionnelle de la poutre pour la flexion dans le sens Perpendiculaire à l'âme ;
- ε, η les axes solidaires de la section droite et entraînés par le déversement de la poutre ;
- C La raideur torsion Nelle de la poutre en torsion uniforme :
- C_1 La raideur de gauchissement de la poutre ;
- V, W Les déplacements du centre de gravité selon Oy et Oz respectivement
- ψ La rotation d'une section droite autour de l'axe longitudinal Ox de la poutre.

Juste avant déversement, la poutre, ayant fléchi dans le plan de son âme, occupe la position I sur la figure, 3.3.b. Après déversement, admettons qu'elle occupe la position II sur cette même figure. Pour passer de la configuration I à la configuration II, la poutre a fléchi latéralement en prenant une déformée transversale $w(x)$ tout en tournant d'un angle $\psi(x)$; ce faisant le point d'application des charges descend de :

$$V(x) = w(x) \cdot \psi(x) \tag{3.3}$$

2.2.3.2. Équations d'équilibres

La variation d'énergie entre l'état I et l'état II vaut :

$$\Delta\pi = \pi_{II} - \pi_I$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L M_y x dx + \frac{1}{2} \int_0^L M_t \psi' dx - \int_0^L P V dx \tag{3.4}$$

On peut exprimer la courbure x dans le plan xoz à partir de $x = -w''$ et traduire la relation entre le moment fléchissant et la courbure à l'aide de la relation $M_y = EI_y x = -B w''$. Quant

au moment de torsion, on a vu au chapitre précédent, qu'il est donné par $M_t = c\psi' - c_1\psi'''$. On peut donc, compte tenu de (3.3), écrire la relation (3.4) ci-dessus sous la forme suivante:

$$\Delta\pi = \frac{B}{2} \int_0^L W''^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^L \psi'^2 dx - \frac{c_1}{2} \int_0^L \psi' \psi''' dx - \int_0^L P w \psi dx \quad (3.5)$$

Si à partir de l'état II, on donne une déformation virtuelle amenant le système à l'état adjacent III, on a :

$$\begin{aligned} \Delta\pi + d\Delta\pi = \pi_{III} - \pi_I = & \frac{B}{2} \int_0^L (w'' + \varepsilon\omega'')^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^L (\psi' + \varepsilon\phi')^2 dx - \frac{c_1}{2} \int_0^L (\psi' + \varepsilon\phi')(\psi''' \\ & + \varepsilon\phi''') dx - \int_0^L P (w + \varepsilon\omega)(\psi + \varepsilon\phi) dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

Où ε est une quantité infiniment petite arbitraire tandis que ω et ϕ sont des déplacements de même nature que w et ψ et cinématiquement admissibles.

L'équilibre exige que la variation première $\delta\pi$ s'annule, d'où :

$$B \int_0^L (w'' \omega'' dx + c \int_0^L \psi' \phi' dx - \frac{c_1}{2} \int_0^L (\psi''' \phi' + \psi' \phi''')) dx - \int_0^L p(\omega\psi + w\phi) dx = 0 \quad (3.7)$$

En intégrant par parties, la relation (3.7) devient :

$$\begin{aligned} B \{ w'' \omega' \Big|_0^L - \int_0^L w''' \omega' dx \} + C \{ \psi' \phi \Big|_0^L - \int_0^L \psi'' \phi dx \} \\ - \frac{c_1}{2} \{ \psi''' \phi \Big|_0^L + \psi' \phi'' \Big|_0^L - \int_0^L \psi'''' \phi dx + \int_0^L \psi'' \phi'' dx \} - \int_0^L p(w\psi + w\phi) dx = 0 \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} B \{ w'' \omega' \Big|_0^L - w''' \omega \Big|_0^L + \int_0^L w'''' \omega dx \} + C \{ \psi' \phi \Big|_0^L - \int_0^L \psi'' \phi dx \} \\ - \frac{c_1}{2} \{ 2\psi''' \phi \Big|_0^L + \psi' \phi'' \Big|_0^L - 2 \int_0^L \psi'''' \phi dx + \psi'' \phi' \Big|_0^L \} - \int_0^L p(w\psi + w\phi) dx = 0 \end{aligned}$$

Les termes aux limites doivent s'annuler en raison des conditions d'appui. En effet, d'une part, si la poutre est libre en flexion autour de l'axe Oy à ses extrémités on a $w'' = 0$, tandis que si elle est encastree à ladite flexion, on a $\omega' = 0$. D'autre part les conditions (3.1) ou (3.2) entraînent l'annulation des termes aux limites en ψ ou ϕ .

Il reste donc :

$$\int_0^L B w'''' - p\psi \omega dx - \int_0^L C \psi'' - c_1 \psi'''' + p w \phi dx = 0$$

Pour que cette relation s'annule, quels que soient ω et ϕ , on doit avoir simultanément :

$$Bw'''' - p\psi = 0 \quad (3.8)$$

$$C\psi'' - C_1\psi'''' + pw = 0 \quad (3.9)$$

La première de ces relations n'est autre que l'équation de l'élastique pour la flexion latérale. Elle montre que le moment fléchissant M_y , vaut $M\psi$, M désignant le moment de flexion sollicitant la poutre dans le plan de son âme. En effet, à partir de l'expression connue :

$$w'' = -\frac{M_y}{B}$$

On a :

$$w'' = -\frac{M\psi}{B} \quad (3.10)$$

Qui, dérivée deux fois par rapport à x , donne, en vertu de $M'' = -p$:

$$w'''' = \frac{p\psi}{B}$$

Relation identique à (3.8)

La seconde relation (3.9) traduit l'équilibre en torsion de la poutre :

$$dM_t = -pw \, dx \quad (3.11)$$

M_t Désignant le moment de torsion

2.2.3.3. Détermination du moment critique de déversement

Au déversement, l'équilibre est indifférent pour un champ de déplacement déterminé. On traduit cette condition en exprimant que la variation seconde $\delta^2\pi$ de l'énergie totale est minimum et nulle pour le champ de déplacement réel. La variation seconde est l'ensemble des termes de second ordre de l'expression (3.6). On obtient donc, en repassant des symboles ω et ϕ à w et ψ :

$$\frac{B}{2} \int_0^L w''^2 \, dx + \frac{c}{2} \int_0^L \psi'^2 \, dx - \frac{c_1}{2} \int_0^L \psi' \psi'''' \, dx - \int_0^L p w \psi \, dx = \text{Minimum} = 0 \quad (3.12.a)$$

On extériorise la sollicitation extérieure, caractérisée par le moment fléchissant M , en substituant à w'' dans (3.12.a), son expression (3.10.) et on tient compte de l'équation d'équilibre (3.9) pour éliminer le terme pw de la dernière intégrale de (3.12.a). Il vient alors :

$$\frac{1}{2B} \int_0^L M^2 \psi^2 \, dx + \frac{c}{2} \int_0^L \psi'^2 \, dx - \frac{c_1}{2} \int_0^L \psi' \psi'''' \, dx + c \int_0^L \psi \psi'' \, dx - c_1 \int_0^L \psi \psi'''' \, dx = \text{Minimum} = 0 \quad (3.12.b)$$

En intégrant par parties, on obtient aisément :

$$\int_0^L \psi' \psi''' dx = \psi' \psi'' \Big|_0^L - \int_0^L \psi''^2 dx$$

$$\int_0^L \psi \psi'''' dx = \psi \psi''' \Big|_0^L - \psi' \psi'' \Big|_0^L + \int_0^L \psi''^2 dx$$

$$\int_0^L \psi \psi'' dx = \psi \psi' \Big|_0^L - \int_0^L \psi'^2 dx$$

Les termes aux limites s'annulent pour des raisons déjà exposées et (3.12.b) prend ainsi la forme quadratique suivante :

$$\frac{1}{2B} \int_0^L M^2 \psi^2 dx - \frac{c}{2} \int_0^L \psi'^2 dx - \frac{c_1}{2} \int_0^L \psi''^2 dx = \text{Minimum} = 0 \quad (3.13)$$

L'ensemble des deuxièmes et troisièmes intégrales du premier membre de (3.13) est équivalent à :

$$- \frac{1}{2} \int_0^L (c\psi') \psi' dx + \frac{1}{2} \int_0^L (c_1\psi''') \psi' dx$$

C'est-à-dire à $-\frac{1}{2} \int_0^L M_t \psi' dx$, qui n'est autre que l'énergie de torsion. On constate ainsi qu'en déversement sous l'action de charges appliquées le long de l'axe et quand il n'y a pas d'énergie dissipée dans les appuis, il y a équirépartition entre l'énergie de torsion et celle de flexion latérale.

On peut envisager de procéder aux intégrations par parties de manière quelque peu différente à l'aide de :

$$\int_0^L \psi'^2 dx = \psi \psi' \Big|_0^L - \int_0^L \psi \psi'' dx$$

$$\int_0^L \psi' \psi''' dx = \psi \psi''' \Big|_0^L - \int_0^L \psi \psi'''' dx$$

De sorte que (3.12.b) s'écrit aussi :

$$\frac{1}{2B} \int_0^L M^2 \psi^2 dx = \frac{c}{2} \int_0^L \psi \psi'' dx - \frac{c_1}{2} \int_0^L \psi \psi'''' dx = 0 \quad (3.12.c)$$

Cette expression étant valable quel que soit ψ , il faut donc que l'on ait :

$$\psi'''' - \frac{c}{c_1} \psi'' - \frac{M^2}{BC_1} \psi = 0 \quad (3.14)$$

Qui n'est rien d'autre que l'équation différentielle régissant le déversement d'une poutre chargée au niveau de son axe. Sa solution fournit $\psi(x)$.

A priori le déplacement généralisé (x) est inconnu. On peut donc se contenter de choisir un déplacement cinématiquement admissible, de l'introduire dans (3.13.) et d'en tirer une valeur M_{cr} . Qui représentera une valeur erronée par excès, en vertu du principe de RAYLEIGH, du moment critique de déversement. Connaissant celui-ci, on peut calculer la valeur de la charge critique de déversement.

2.2.3.4. Effet du niveau d'application des charges

Dans de nombreux cas, la poutre reçoit les charges par des éléments porteurs secondaires qui reposent sur elle ; les charges agissent alors au niveau de la semelle supérieure. A l'inverse, les poutres de monorails par exemple sont souvent chargées au niveau de la semelle inférieure. On se trouve alors dans des conditions différentes de celle admise jusqu'à présent, quant au niveau du point d'application des charges.

Désignons par a la distance entre le centre de cisaillement de la poutre et le point d'application des charges ; on la mesure positive vers le haut et négative vers le bas. Sous l'effet de charges agissant dans le sens de la gravité, Il est clair que si $a > 0$, la charge critique de déversement est diminuée, et, inversement, elle sera augmentée si $a < 0$; pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que lorsque la section tend à tourner, la force engendre un moment de torsion qui accentue le mouvement si $a > 0$ et, au contraire, tend à redresser la poutre si $a < 0$.

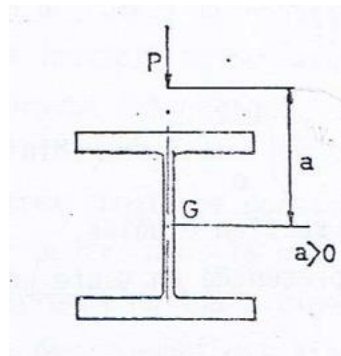


Figure 1.7 : Effet du niveau d'application des charges

En désignant par ψ_0 l'angle de rotation de la section où agit la charge P , il est aisé de voir que le déplacement vertical du point d'application de la charge, engendré par la rotation de la section médiane lors du déversement, est donné par :

$$a (1 - \cos \psi_0) = a \frac{\psi_0^2}{2}$$

De sorte que le travail additionnel effectué par la force P vaut :

$$\frac{1}{2} P a \psi_0^2$$

(3.15)

Pour une charge répartie, on aurait de manière analogue, un travail additionnel valant :

$$\frac{1}{2} \int_0^L p a \psi^2 dx \quad (3.16)$$

Ces termes (3.15) et (3.16) sont éventuellement à ajouter au premier membre de l'équation de l'énergie (3.13).

2.2.4. Exemples d'application

2.2.4.1 Poutre à section rectangulaire posée sur deux appuis d'extrémité à fourches et chargée en son milieu d'une force concentrée P, appliquée au centre de gravité

Dans ce cas, le moment de flexion s'exprime par :

$$M = \frac{P}{2} x \quad (0 \leq x \leq \frac{L}{2})$$

Et par symétrie, il suffit de calculer les intégrales pour une moitié de poutre, de sorte que (3.13) s'écrit :

$$\frac{\rho^2}{8B} \int_0^{\frac{L}{2}} \psi^2 x^2 dx - \frac{c}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} \psi'^2 dx = \text{Minimum} = 0$$

Car $C_1 = 0$ pour le type de section étudiée.

La rotation ψ peut être représentée en toute généralité par une série de FOURIER de sinus.

$$\psi = \sum a_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (i = 1, 3, 5, \dots)$$

Qui satisfait les conditions d'extrémités $\psi = 0$ et $\psi'' = 0$ en $x = 0$ et $x = L$. En se bornant au premier terme de la série, on a :

$$\frac{\rho^2}{8B} \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx - \frac{c}{2} \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^{\frac{L}{2}} \cos^2 \frac{\pi x}{L} dx = 0$$

D'où on tire, tous calculs faits :

$$P_{cr} = \frac{17,2 \sqrt{BC}}{L^2}$$

Cette solution est approchée puisqu'on a introduit une forme approchée pour ψ . En vertu du principe de RAYLEIGH, la valeur obtenue doit être supérieure à la valeur exacte celle-ci, obtenue en intégrant l'équation différentielle du problème à l'aide des fonctions de BESSEL, est en effet trouvée égale à :

$$P_{cr}^{exact} = \frac{16,93 \sqrt{BC}}{L^2} \quad (3.17)$$

L'erreur commise est donc de 1,5 %. Si on avait conservé deux termes dans le Développement de ψ et si on déterminait le rapport des amplitudes a_3 / a_1 , de manière à

minimiser la valeur de P_{cr} , on trouverait une valeur erronée par excès de 0,1 seulement. La méthode énergétique fournit donc ici aussi d'excellents résultats.

CHAPITRE III
LA THÉORIE DE FLAMBEMENT
D'EULER

3.1. Introduction :

Tous les éléments de structure longs et minces ont un comportement similaire en compression. Lorsque la charge de compression augmente lentement, on atteint une valeur pour laquelle l'élément mince, au lieu de simplement se raccourcir, s'infléchit, et d'ordinaire se rompt.

Cette valeur limite est appelée : charge critique de flambement.

Dans le cas du flambage, les formules établies tiennent compte des déformations qui ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme communément admis, de même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déplacements.

Le phénomène d'instabilité transversale sous un effort de compression porte le nom de flambement.

Les formules de flambage sont utilisées avec prudence, c'est-à-dire en prenant un coefficient de sécurité très grand. Les pièces soumises au flambage doivent impérativement être droite et ne doivent pas avoir subi des déformations précédemment.

[5]

3.2. Définition du flambement :

Le flambage est un phénomène physique relevant des principes de la résistance des matériaux. Lorsqu'une structure est compressée dans le sens de la longueur, elle a tendance à fléchir perpendiculairement à l'axe de la force appliquée, en raison d'un phénomène d'instabilité élastique. [6]

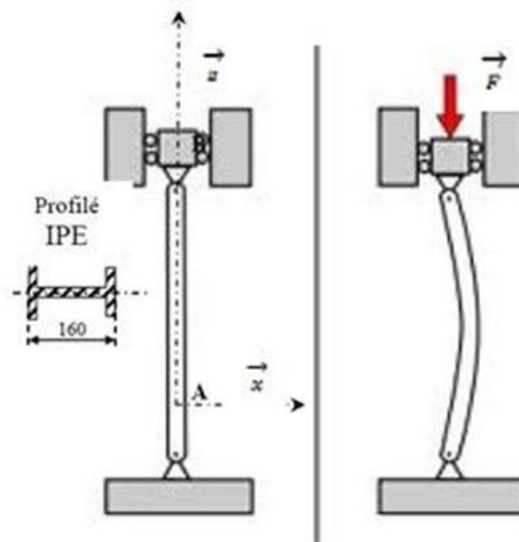


Figure 1.1 : Le flambement

3.3. Notion de la stabilité :

Pour un corps élastique, tout comme pour un corps rigide, on peut parler de stabilité ou d'instabilité des positions d'équilibre.

Un système est stable si et seulement si, écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir.

Le phénomène de perte de stabilité pour les corps élastiques peut-être observé sur toute une série d'exemple. Le cas le plus simple est la perte de stabilité d'une tige comprimée de manière axiale [7]

Le phénomène d'instabilité transversale sous un effort de compression porte le nom de flambement.

3.4. Etude du cas fondamental du flambement

3.4.1. Etude théorique du flambement

Le flambement peut être évité si la force de compression applique au poteau est inférieure à un seuil critique appelé : charge critique d'Euler :

Ce seuil, à ne pas dépasser pour éviter effondrement du poteau, dépend de quelques paramètres :

- De la nature du matériau ;
- Des caractéristiques géométriques de la poutre ;
- Des conditions d'appuis imposés [8]

3.4.2. Notion de charge critique de flambement pour une colonne bi articulée

L'effort limite à partir duquel se manifeste les grandes déformations allant jusqu'à l'instabilité est appelé effort critique de flambement, noté P_c .

L'étude du flambement est due à EULER. La théorie d'EULER est fondée :

- sur une poutre droite, bi-articulée à ses extrémités ;
- soumis à un effort normal de compression centré P (suivant Gx) [7]

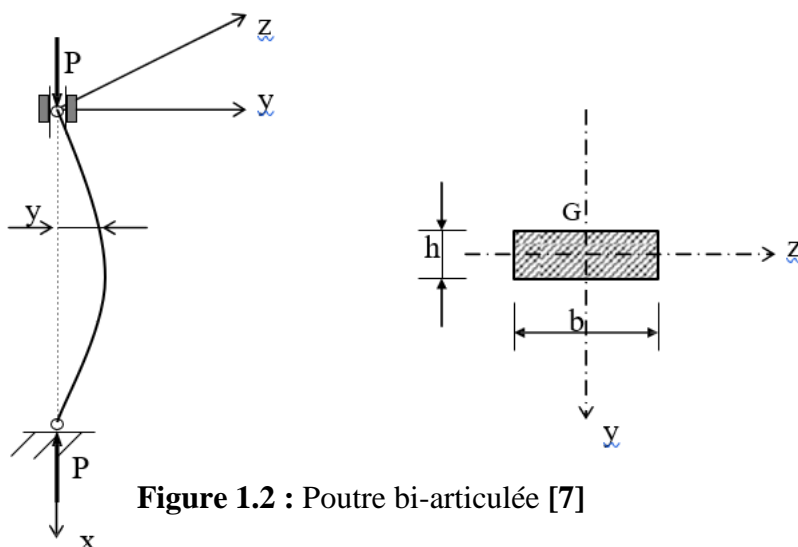


Figure 1.2 : Poutre bi-articulée [7]

Lorsque P croît, à partir de zéro, l'état d'équilibre rectiligne initial évolue vers un état curviligne fléchi.

D'après la loi fondamentale de la flexion (ou l'équation de l'élastique) on a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E.I}$$

Or $M = -P.y$

Donc $EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + P.y = 0$

$$\Rightarrow y'' + \frac{P}{EI} \cdot y = 0$$

En posant : $\omega = \sqrt{\frac{P}{EI}}$,

On obtient : $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre, dont la solution générale peut être établie de la façon suivante :

Est de la forme :

- l'équation caractéristique : $\rightarrow r = \alpha \pm i\beta$ avec $\alpha = 0$

D'où $y(x) = A \cdot \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$

La résolution de cette équation s'opère grâce aux conditions aux limites (conditions d'appuis) :

- Pour $x = 0$, $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$;
- Pour $x = l_0$, $y(l_0) = 0 \Rightarrow B \cdot \sin \omega l_0 = 0$

Deux cas sont alors possibles :

- Si $\sin(\omega l_0) \neq 0 \rightarrow B = 0$ et $y(x) = 0, \forall x$ (la colonne est rectiligne dans ce cas) ;
- Si $\sin(\omega l_0) = 0 \rightarrow \omega l_0 = k\pi$

Soit $\omega = \frac{k\pi}{l_0} = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ d'où $P = \frac{k^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l_0^2}$

POUR $k = 0 \rightarrow P = 0$: la poutre est rectiligne

Pour que la poutre reste fléchie, il faut que k soit au moins égal à 1, ce qui conduit à la valeur minimale de P qui vaut :

$$P = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l_0^2} \quad (1)$$

Dans le cas de la poutre bi-articulée étudiée ($l_f=l_0$)

Et I_{Gz} le moment quadratique le plus faible (ce n'est pas toujours le cas)

3.4.3. Les autres cas qui se déduisent du cas fondamental

3.4.3.1. Colonne encastrée à sa base libre de l'autre

$$V = A \cdot \sin kx$$

La seconde condition : $V = 0$ pour $x = L$

$$A \cdot \sin KL = 0 \quad A \neq 0 \Rightarrow \sin KL = 0$$

La solution trigonométrique $\sin KL = 0 \Rightarrow KL = N\pi$

$$\Rightarrow K = N \cdot \frac{\pi}{L} \text{ or } k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{\frac{P}{EI}} = N \cdot \frac{\pi}{L} \quad \text{Ou } \frac{P}{EI} = N^2 \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = N^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

La plus petite valeur est obtenue pour $N = 1$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Les cas de flambement qui se déduisent de cas fondamental

a) Cas de la colonne encastrée à sa base

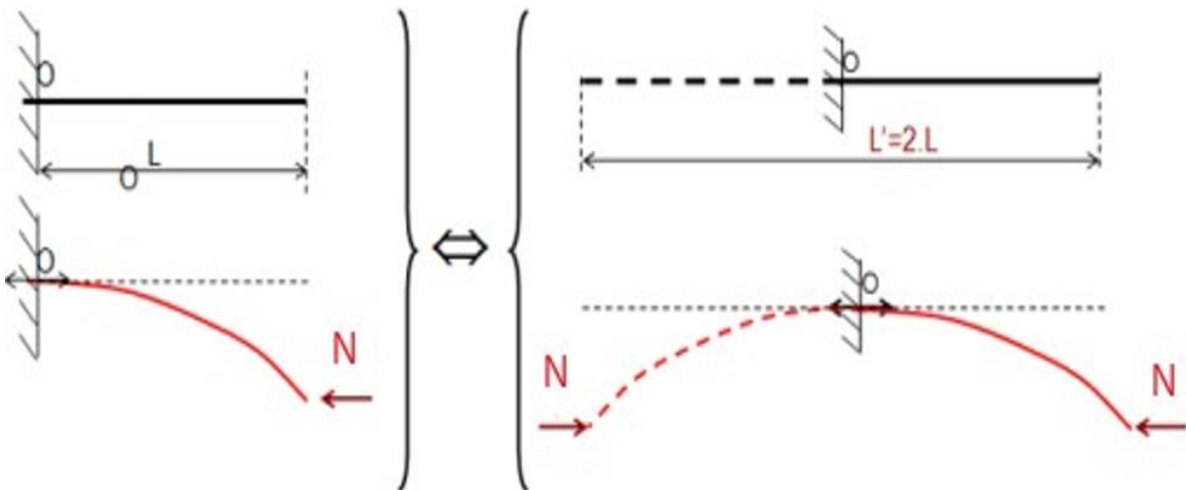


Figure 1.3 : Poutre encastrée-libre

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}, \text{ La tangente en } o \text{ est verticale}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}, \text{ Donc } L_f = 2L_0$$

3.4.3.2. Poutre bi-encasté

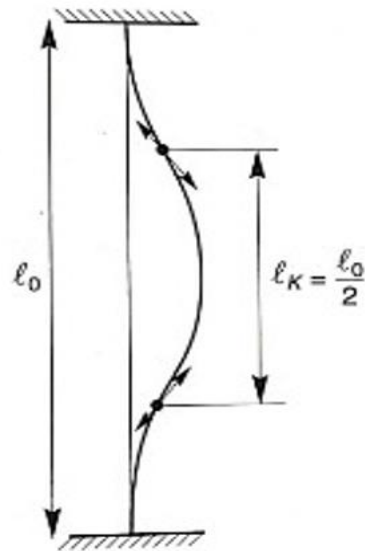


Figure 1.4 : Poutre bi-encastée

Le flambement de la poutre bi-encastée est similaire au flambement simultané des tronçons AB et CD et de l'autre côté du tronçon BC.

Les tronçons AB et CD se comportent en flambement comme une poutre encastée libre et le tronçon BC comme une poutre bi-articulée.

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L'^2} = \frac{\pi^2 EI}{L''^2} \Rightarrow L''^2 = 4L'^2$$

$$\Rightarrow L'' = 2L' \Rightarrow \text{et } L = 2L' + L''$$

$$L = 2L' + 2L'$$

$$\Rightarrow L' = \frac{L}{4} \text{ et } L'' = 2 \frac{L}{4} = \frac{L}{2} = 0,5L$$

$$L'' = 0,5L$$

3.4.3.3. Poutre encastrée articulée

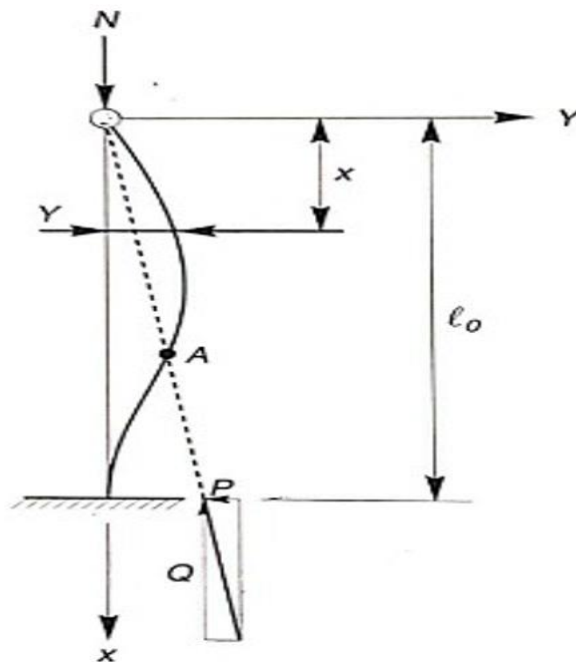


Figure 1.5 : Poutre encastrée-articulée

$EIy'' = -M(x) = -PV + Q(L - x)$ par intégration on obtient :

$$y = A. \sin kx + B. \cos kx + \frac{Q}{P}(L-x)$$

Condition d'appuis

$$V(x=0) = 0 \Rightarrow B + \frac{QL}{P} = 0$$

$$V(x=L) = 0 \Rightarrow A. \sin KL + B \cos KL + 0 = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(x=0) = 0 \Rightarrow AK \cos Kx - BK \sin Kx - \frac{Q}{P}$$

$$\Rightarrow A - B.0 - \frac{Q}{P} = 0 \Rightarrow A = \frac{Q}{P}$$

$$4.4444410$$

$$20.2 = \pi^2 \cdot x$$

$$x = \frac{20.2}{\pi^2} = 2.0466879$$

$$= \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2.0466879}$$

$$\frac{20.2EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(xL)^2} \Rightarrow \frac{20.2}{L^2} = \frac{\pi^2}{x^2 L^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{20.2} = 0.698995 \approx 0.7$$

3.4.4. Notion de longueur de flambement

Pour une colonne bi-articulée

$$P_{cr} = k \cdot \frac{EI}{L^2} \text{ on } \frac{\pi^2 EI}{(L_f)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{L^2} = \frac{\pi^2}{(L_f)^2} \text{ on } k = \pi^2 \frac{L^2}{(L_f)^2}$$

$$\Rightarrow L_f^2 = \frac{\pi^2 L^2}{K}$$

$$\Rightarrow L_f = L \sqrt{\frac{\pi^2}{k}} \Rightarrow \frac{L_f}{L} = \sqrt{\frac{\pi^2}{k}} \Rightarrow \left(\frac{L_f}{L}\right)^2 = \frac{\pi^2}{K}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\pi^2}{\left(\frac{L_f}{L}\right)^2} = \pi^2 \left(\frac{L}{L_f}\right)^2$$

Pour une poutre encastrée libre on à $L_f = 2L$

$$\text{Car } P_{cr} = \frac{KEI}{L^2} = P_{cr2} = \frac{\pi^2 EI}{(L_f)^2}$$

$$K \frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 \frac{\pi^2}{K}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 \pi^2} K$$

$$\frac{1}{L^2} = 0$$

$$\text{En posant } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_f)^2} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(L_f)^2 A}$$

$$\text{Sir } i \text{ le rayon de giration } i = \sqrt{\frac{I}{A}} \Rightarrow i^2 = \frac{I}{A}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_f)^2} i^2 = \pi^2 E \left(\frac{i}{L_f}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_f}{i}\right)^2}$$

$$\text{On pose } \lambda = \frac{L_f}{i} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\text{Unité de } i = \sqrt{\frac{I}{A}} \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{L_f}{i} \text{ sans dimension}$$

CHAPITRE IV

***CORRECTION À APPORTER À
LA THÉORIE D'EULER POUR
TENIR COMPTE DES GRANDS
DÉPLACEMENTS***

4.1. Correction à apporter à la théorie d'EULER pour tenir compte des grands déplacements

Si les déplacements sans grands.

L'équation de l'élastique ne se limite pas à :

$$\chi = \frac{1}{P} = \pm \frac{d^2v}{dx^2}$$

Il faut prendre l'expression entière de l'élastique

Si une courbe est définie par sa fonction $v = f(x)$

$$\text{Sa courbure vaut } \chi = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{En pratique } \frac{dv}{dx} = \text{tg}\varphi = \frac{1}{1000}$$

Et le terme $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ peut donc être négligé

$$\chi = \pm \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\text{Si ce n'est pas le cas } \Rightarrow \chi = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \chi = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{v''}{\left[1 + v'^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI}$$

$$\chi = -\frac{v''}{\left[1 + v'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Et } \chi = \frac{M}{EI}$$

$$\Rightarrow \chi - \frac{pv}{EI} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-v''}{\left[1 + v'^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{pv}{EI} = 0$$

Or $M = Pv$

$$\text{Ou } \chi - \frac{pv}{EI} = 0$$

$$\frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{Pv}{EI} = 0 \quad (2)$$

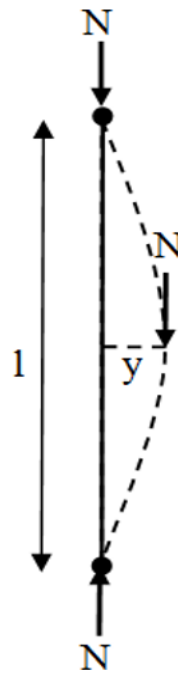


Figure 1.1 : Flambement d'un poteau bi articulée

L'intégration exacte de cette équation peut se fait par les équations elliptiques

Pour le cas fondamental de la pièce appuyée à se 2 extrémités.

La charge critique vaut : $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow$ théorie D'EULER

Si v est petit $\Rightarrow (v')^2$ au dénominateur de (1) est négligeons devant l'unité et on retombe sur l'équation de l'élastique $\chi = -v'' = -\frac{d^2v}{dx^2}$

D'où la formule de VONMISES.

$$F = \frac{L\sqrt{f}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}} - 1} \left[1 - \frac{1}{F} \left(\frac{P}{P_{cr}} - 1 \right) \right] P \text{ un } P > P_{cr}$$

4.2. Travaux de la commission européenne N°8 ou courbes européennes de flambement

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_f)^2} \quad \text{Si on introduit :}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \Rightarrow i^2 = \frac{I}{A} \Rightarrow I = i^2 A$$

$$\text{Et l'élancement } \lambda = \frac{L_f}{i}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{L_f}{i}\right)^2$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E i^2 A}{(L_f)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{L_f}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{cr} \text{ Est une fonction } \frac{k}{x^2}$$

$$\text{Où } P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

Si on fait un chargement de variable

$$\bar{P} = \frac{P_{cr}}{P_P} \quad P_P = \sigma_e \cdot A \Rightarrow \bar{P} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2 \sigma_e \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \sigma_e}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda E} \quad \text{ai } \lambda = \frac{L_f}{i}$$

$$i^2 = \frac{I}{A}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_f)^2} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_f)^2 \cdot A} = \sigma_e = \frac{\pi^2 E i^2}{(L_f)^2}$$

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\frac{L_f^2}{i^2}} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_f}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda e^2}$$

$$\Rightarrow \lambda e^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_e} \Rightarrow \lambda e = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$

$$\bar{P} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda E} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \lambda_e$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \bar{\lambda}^2 \pi^2 \frac{E}{\sigma_e}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{\bar{\lambda}^2 \pi^2 E} \cdot \sigma_e = \frac{A \sigma_e}{\bar{\lambda}^2}$$

$$P_{cr} = \frac{A \sigma_e}{\bar{N}^2} \Rightarrow \text{On divise les 2 membres pour } P_p = N_p = A \sigma_e$$

$$\frac{P_{cr}}{P_p} = \frac{A \cdot \sigma_e}{\bar{\lambda} \cdot A \sigma_e} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

$$\frac{P_{cr}}{P_p} = \bar{N} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

$$\frac{P_{cr}}{P_p} \text{ Ne peut excéder } 1$$

$$\lambda_e = ?$$

$$\text{Pau Fe 360 : } F = 20500 \frac{KN}{cm^2}$$

$$\sigma_e = 25.5 \frac{KN}{cm^2} = \frac{25,5 \times 10^3}{10^2} = 255 \text{ N / mm}^2$$

$$\Rightarrow \lambda_e = \pi \sqrt{\frac{20500}{25.5}} = 89.07$$

$$\text{Pau } F_e 510 \quad E = 20500$$

$$\sigma_e = 38.5 \Rightarrow \lambda_e = \pi \sqrt{\frac{20500}{38.5}}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

$$\bar{N} \leq 1$$

$$\bar{N} \bar{\lambda}^2 = 1$$

4.3. Courbes européennes de flambement

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

(1)

Due LEONHARD EULER s'inspirant sur la théorie de l'élastique

$$\chi = \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

Est la solution de l'équation différentiel à l'état déformé flambé :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N}{EI} y = 0$$

(3)

4.4. Introduction des imperfections géométriques et structurales ou la formulation d'Ayrton Perry.

La solution d'EULER ne tiens pas compte des imperfections portant inévitable des colonnes réelles ; LUCIEN NAVIER (1785-1836) montre que la formule d'EULER Fournit une borne supérieure de la charge limite des colonnes réelles.

L'approche inélastique consiste à substituer dans la formule d'EULER. Une nouvelle quantité au module d'élasticité E.

E → Engesser : → E_t

E → considère et Jasinski → E_r intermédiaire entre E et E_t

$$\text{Karmen} \rightarrow E_r = \frac{4E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$

CHAPITRE V
SIMULATION NUMÉRIQUE DU
COMPORTEMENT DES
COLONNES AU FLAMBEMENT

5.1. Introduction

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \text{ On divise par } N_p = \sigma_e A$$

$$\frac{N_{cr}}{N_p} = \bar{N} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2 \sigma_e A} \text{ et } \lambda_e^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_e} \Rightarrow \sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2} \text{ implique}$$

$$\bar{N} = \frac{\pi^2 E \cdot A \lambda_e^2}{\lambda^2 A \pi^2 E} = \frac{\lambda_e^2}{\lambda^2}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_e}\right)^2} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

5.2. Colonne bi-articulé

La première itération débute à 2e6 N

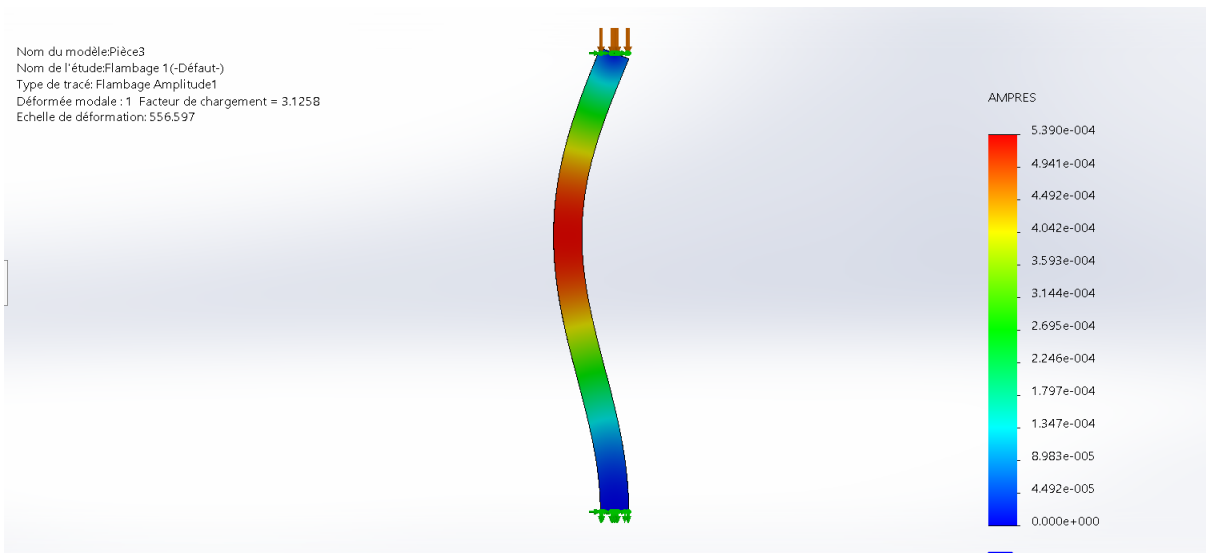


Figure 1.1 : Colonne bi-articulé

$$P_{crEULER} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^5 \times 1363 \times 10^4}{3000^2} = 3138863.19 \text{ N}$$

5.3. Colonne articulé-encastéré

La première itération debute à 5e6 N

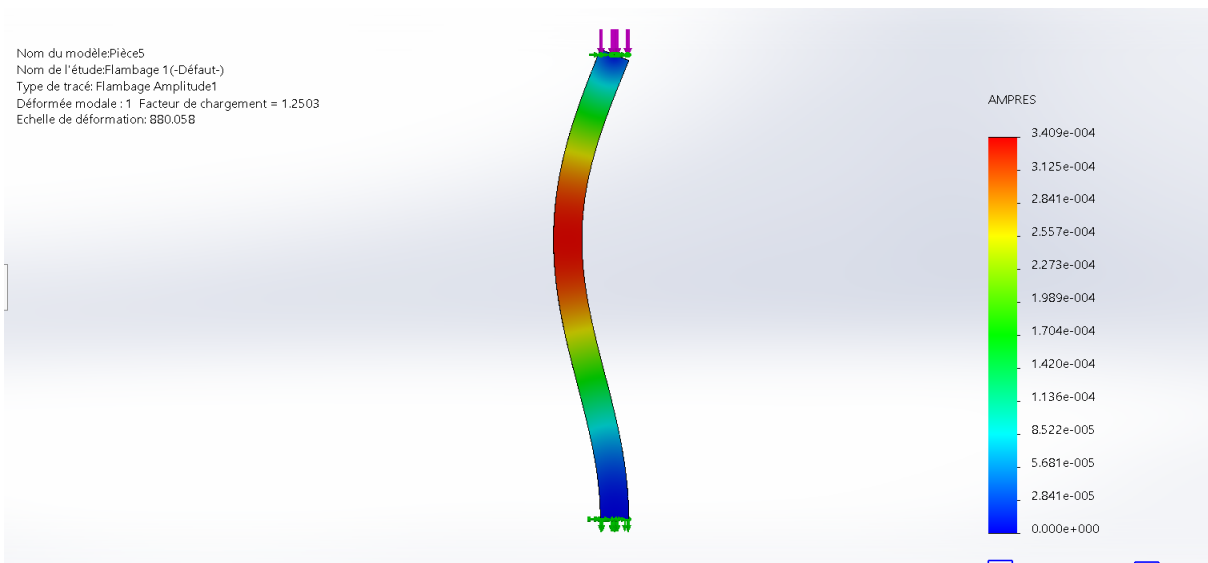


Figure 1.2 : Colonne articulé-encastéré

$$P_{crEULER} = \frac{2.05 \times \pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{2.05 \times \pi^2 \times 2.1 \times 10^5 \times 1363 \times 10^4}{3000^2} = 6434669.53 \text{ N}$$

$$P_{crLOG} 1.2503 \times 5000000 = 6251500 \text{ N}$$

$$P_{crEULER} > P_{crLOG}$$

5.4. Colonne encastré-libre

La première itération debute à 5e5 N

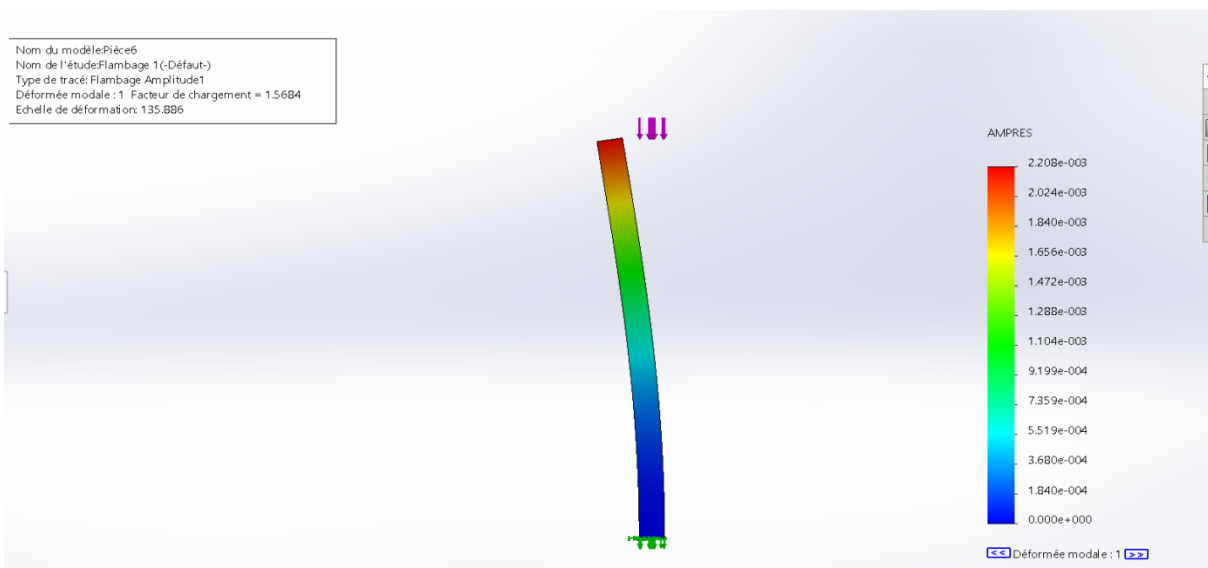


Figure 1.3 : Colonne encastré-libre

$$P_{crEULER} = \frac{\pi^2 EI}{4 \times l_0^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^5 \times 1363 \times 10^4}{4 \times 3000^2} = 784715.80 \text{ N}$$

$$P_{crLOG} = 1.5684 \times 500000 = 784200 \text{ N}$$

$$P_{crEULER} > P_{crLOG}$$

5.5. Colonne bi-encasté

La première itération débute à $3e6 \text{ N}$

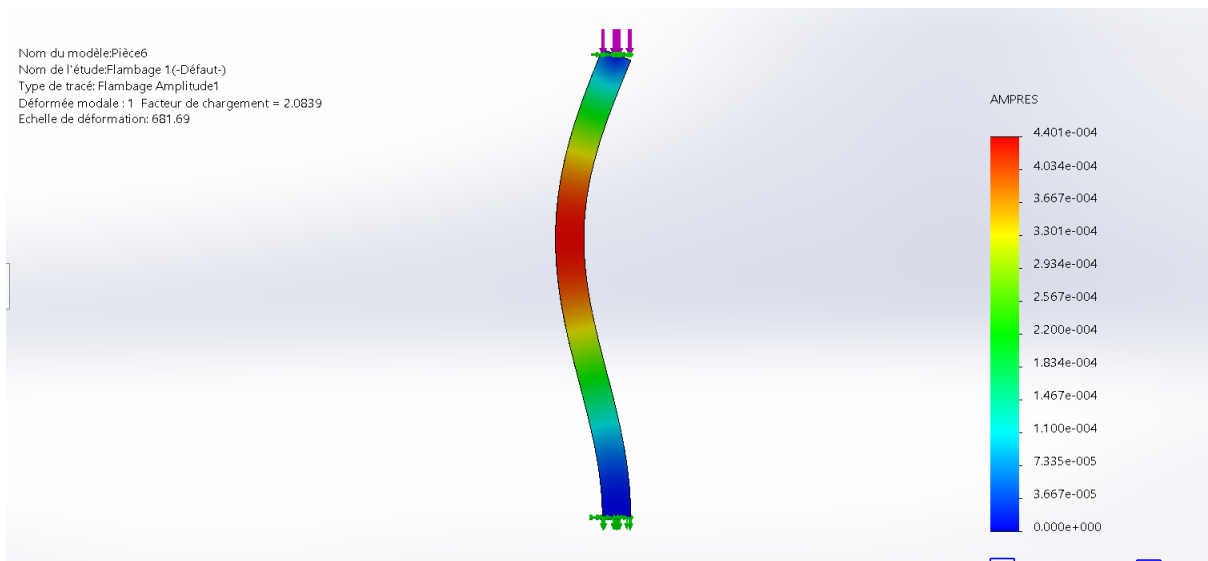


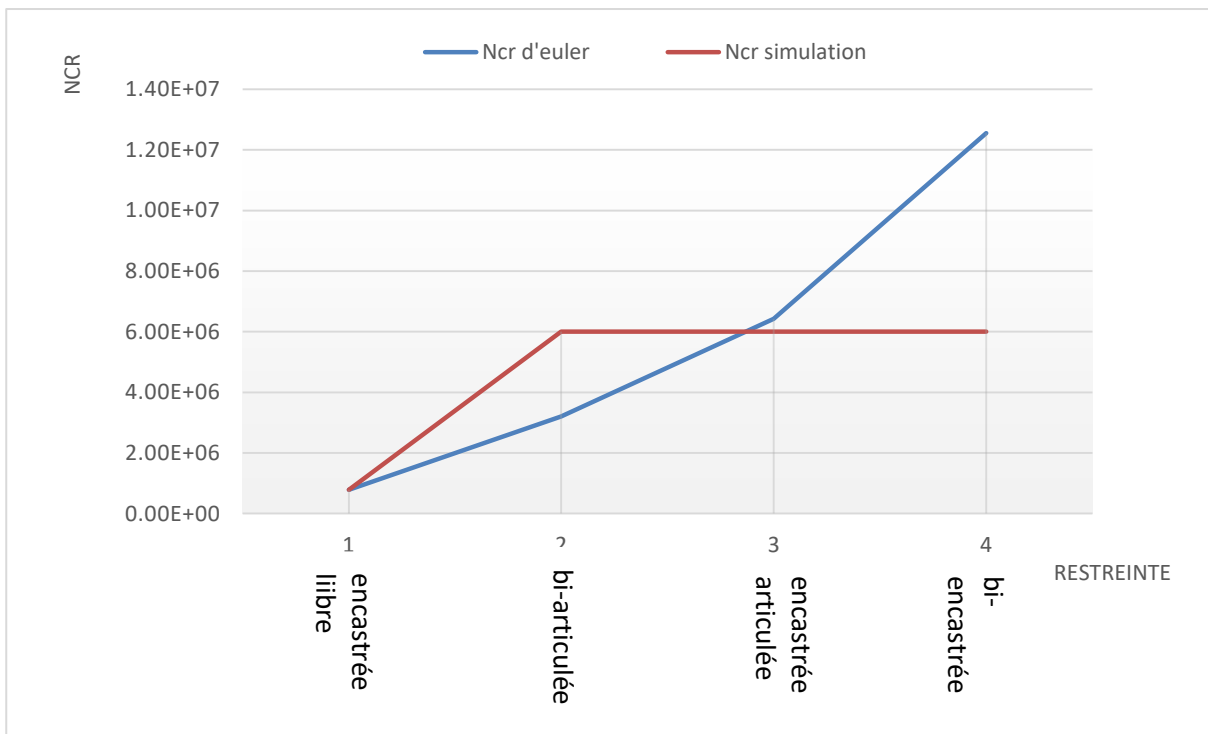
Figure 1.4 : Colonne bi-encasté

$$P_{crEULER} = \frac{4 \times \pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times 2.1 \times 10^5 \times 1363 \times 10^4}{3000^2} = 12555452.75 \text{ N}$$

$$P_{crLOG} = 2.0839 \times 3000000 = 6251700 \text{ N}$$

$$P_{crEULER} > P_{crLOG}$$

Conclusion



En rouge : P_{cr} simulation

En bleu : P_{cr} d'EULER théorique

On croit que :

- 1- Pour la colonne encastree-libre $P_{crSum} \approx P_{crEULER}$
- 2- Pour une colonne bi-articulee est ronflement inferieur à celle P_{cr} obtenue pour simulation ce qui est étonnant $P_{crEULER} < P_{crSum}$

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION

Dans cette étude entreprise dans le cadre de mon PFE il nous a été permis de que les premières investigations dans le domaine de l'instabilité élastique par bifurcation caractérisant le phénomène de flambement sans dû à Leonard Euler dans cette théorie il est supposé que la colonne déformée coïncide avec la colonne non déformée.

Donc la charge critique théorique P_{CR} , d'EULER appareil comme étant la charge à ne pas dépasser et se prémunir par une coefficient de minoration car cette charge critique théorique est obtenue en supposant que la colonne comprimé est dépourvu d'imperfection géométrique et structurelles.

Cela veut dire que la colonne est rectiligne et la charge de compression est appliquée centriquement de flambement d'EULER est une borne supérieure à la charge critique tenant compte des imperfections géométrique et structurelles.

Il nous a été permis également de constater que la charge critique ne dépend que du modules d'élastique E et des caractéristiques géométriques de la colonne :

Ainsi deux colonne la premier en acier spécial et l'autre en acier dans flambement exactement sur la même charge P_{CR} bien que la résistance du matériaux et soit suffisamment soit différent dans les 2 cas.

Nous avons mis la main sur l'effet des restraints aux extrémités.

Nous avons l'intention au départ de faire une corrélation entre la simulation du flambement théorique simulation numérique et les résultats déduits directement d'une étude expérimentale.

Cependant la maîtrise de simulation par SolidWorks des contraintes semi-rigides nous a fait défaut.

Référence bibliographiques

[1] Pont et charpentes métalliques : R. Baus,6, quai Banning, Liège Belgique.

[2] calcul plastique des constructions : ch. Massonnet-M. Save, université de liège Belgique.

[3] Mécanique des matériaux CH Massonnet- S. Cescoto.

[4] Introduction à l'instabilité élastique : R. maquoi, Université de liège- Belgique.

[5] COUR RDM : *Flambement des poutres comprimées (chapitre 9).*

[6] SOURCE INTERNET : <https://www.futura-sciences.com/maison/definitions/maison-flambage-10695/>

[7]. NOTION DE Stabilité : Flambement

[8] Mémoire de magister, étudié par Mr Mohammed DJELIL, 2006