

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF-M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et discrètes

Par

REBAII Adel

THÈME

Problème de NAVIER-STOKES incompressible

Soutenu publiquement le : 19/09/ 2020

Devant le jury composé de :

- 1)Mr.NADIR Mostefa Prof. Univ de M'sila Président**
- 2)Mr.GASMI Abdelkader Prof. Univ de M'sila Encadreur**
- 3)Mr.GAGUI Bachir MA/A. Univ de M'sila Examineur**

Dirigé par :

Mr. Gasmi Abdelkader

Année: 2019/2020

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à :
Dieu tout puissant, pour la volonté, et la santé et la patience qu'il
nous donnait durant toutes ces années d'études afin que nous
puissions en arriver là.

Comme nous tenons à remercier notre

Encadreur :Mr. ***GASMI Abdelkader***:

Merci à tous les enseignants et les étudiants

De département mathématique

Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont

Met à notre disposition pour réaliser ce travail.

Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation

Du présent mémoire

Merci

Résumé :

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations non linéaires décrivant le mouvement des fluides newtoniens. Par exemple, le mouvement de l'air, les courants océaniques et l'infiltration d'eau sont déterminés par des tuyaux. Ces équations tirent leur nom des physiciens du XIXe siècle Claude Navier et George Gabriel Stokes.

Ces équations résultent de l'application de la deuxième loi de Newton au mouvement du fluide, en supposant que la contrainte du fluide est la somme de la diffusion de viscosité (proportionnelle au changement de vitesse) plus la pression.

Les équations de Navier-Stokes sont parmi les équations physiques les plus importantes car elles décrivent un grand nombre de phénomènes avec des applications dans de nombreux domaines de recherche et d'application. Elles peuvent être utilisées dans la modélisation météorologique, l'écoulement de fluide dans les égouts et les canalisations, l'écoulement de gaz autour des objets volants et le mouvement des étoiles dans la galaxie.

Les équations de Navier-Stokes sont également considérées comme mathématiquement importantes en raison de leurs larges applications, car à ce jour, elles n'ont pas réussi à démontrer l'existence d'une solution permanente aux équations de Navier-Stokes dans l'espace tridimensionnel, ou l'absence de fin ou d'interruption dans la solution si elle n'existe pas. Là où ce groupe de problèmes s'appelle les problèmes d'existence et d'écoulement de Navier-Stokes, et c'est l'un des problèmes du XXIe siècle mis en avant par le Clay Institute of Mathematics et lui a offert un prix d'un million de dollars.

Et récemment, un mathématicien de la République du Kazakhstan, le scientifique Mukhtar Bay Autelpaev a annoncé qu'il était parvenu à une "solution forte" aux équations de Navier-Stokes, et a publié la solution dans le magazine (Mathematics). [1] Le docteur en mathématiques et physique Baqit Bey Kushanov a déclaré que "la reconnaissance de la solution peut nécessiter six mois ou un an", expliquant que les scientifiques étudieront et discuteront de la solution avant de confirmer sa validité, soulignant que les scientifiques kazakhs ont recherché la solution et l'ont jugée correcte. Obtenir une reconnaissance comme solution aux équations de Navier-Stokes.

Summary:

Table des matières

Introduction	2
1 Etablissement des équations de Navier-Stokes incompressibles	3
1.1 Les différentes descriptions pour un écoulement d'un fluide	4
1.1.1 Description Lagrangienne	4
1.1.2 Description Eulérienne	5
1.2 Quantités conservées et tenseurs	5
1.2.1 Conservation de la masse (équation de continuité)	5
1.2.2 Tenseur des contraintes	7
1.2.3 Tenseur de déformation	10
1.3 Principe fondamental de la dynamique	12
1.3.1 Dans le cas général	12
1.3.2 Equations de Navier-Stokes incompressibles	14
1.4 Problèmes physiques : équations différentielles et aux dérivées partielles . . .	15
1.4.1 Mécanique des fluide	15
2 Etude théorique des équations de Navier-Stokes incompressibles	18
2.1 Reformulation des équations	18
2.1.1 Formulation variationnelle	18
2.1.2 Application de la transformée de Fourier	21
2.2 Introduction de nouveaux ensembles	33
2.2.1 Rappel sur les relations coordonnées sphériques/cartésiennes	33
2.2.2 Introduction de l'ensemble D	34

2.2.3	Similitude	38
2.2.4	Introduction de l'ensemble A	38
2.2.5	Introduction du noyau K	39
2.3	Etude du noyau K	39
2.4	Problèmes physiques : formulations faibles et variationnelles	50
2.4.1	Mécanique des fluides	50
	Conclusion générale	53
	Bibliographie	54

Introduction

équations font partie importantes de la physique. l'existence et l'unicité de dans le cas des fluides incompressibles été démontrée. La complexité de ces équations est particulièrement due à l'existence d'un terme convectif qui rend ces équations non linéaires. Actuellement, il n'existe pas de solution analytique. Les progrès réalisés dans le domaine informatique permettent aujourd'hui leurs résolutions approchées en des temps de cacceptables.

comprendre leur complexité, puis d'étudier cette publication scientifique en démontrant les résultats. Des simulations numériques ont été réalisées à partir du livre mais aussi à partir du processus de branchement obtenu.

L'explication des principes de bases de la mécanique des fluides [1] ouvre notre document, pour conclure sur l'établissement des équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse d'incompressibilité du fluide. Notre étude nécessite la mise en place d'outils mathématiques adaptés (espaces de Sobolev, transformées de Fourier [8] [2]...). Ainsi, nous travaillons dans un premier temps sur les équations de la chaleur nous permettant d'énoncer des propositions et théorèmes cruciaux pour la suite. Nous commençons alors notre étude sur la publication scientifique. Nous analysons le passage de notre équation dans l'espace de Fourier puis nous introduisons le noyau Markovien générant le processus de branchement. Nous réalisons alors une étude des processus probabilistes [6] [7] dans l'objectif de mieux comprendre leur fonctionnement ainsi que des simulations de cascades stochastiques. Nous débouchons alors

sur l'existence et l'unicité de solutions pour nos équations en ce qui concernent une certaine classe de fonctions. Dans la dernière partie, nous simulons les équations de Navier Stokes en 2D par la méthode des différences finies [4] [3].

Ce travail a été effectué à l'issue de notre second semestre en Master 1 Mathématiques Appliquées, Statistiques à l'Université Lille 1. Notre volonté était de réaliser un travail pluridisciplinaire grâce à la différence de nos parcours (Calcul Scientifique / Statistiques).

Chapitre 1

Etablissement des équations de Navier-Stokes incompressibles

Les équations de Navier-Stokes incompressibles décrivent l'écoulement d'un fluide, d'une certaine densité volumique ρ , et d'une certaine viscosité

v , dans un domaine V . pour établir ces équations, on s'intéresse à un élément infinitésimal de fluide, de volume dV . Nous avons deux choix pour décrire le mouvement de cet élément :

- Soit on suit le mouvement de chaque particules au cours du temps. On fixe alors le référentiel sur la particule (description dite Lagrangienne)
- Soit on fixe un référentiel en un point (position et temps donné), et on considère le champs des vitesses à cet instant sur V . (description dite Eulérienne)

1.1 Les différentes descriptions pour un écoulement d'un fluide

1.1.1 Description Lagrangienne

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées .

Soient $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$ le vecteur position d'une particule donnée et S_0 est sa position initiale au temps initial t_0 . En coordonnées cartésiennes : $\vec{S} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ qui s'écrit aussi:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

Où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées initiales et x, y, z les coordonnées au temps t de la particule.

La vitesse $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ en \vec{S}_0 peut être calculée par:

$$u_x = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}, \quad u_y = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}, \quad u_z = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}$$

Les avantages de la représentation lagrangienne sont :

- La trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée.
- La conservation de la masse est satisfaite.

1.1.2 Description Eulérienne

Elle consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide. La représentation mathématique de la méthode eulérienne s'écrit pour la vitesse $u(\vec{S}, t)$ où $u = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ et $\vec{S} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

Par ailleurs les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} u_x = u_x(x_0, y_0, z_0, t) \\ u_y = u_y(x_0, y_0, z_0, t) \\ u_z = u_z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

1.2 Quantités conservées et tenseurs

1.2.1 Conservation de la masse (équation de continuité)

On utilise la description eulérienne pour caractériser notre fluide. On cherche $u(t, x) \in R^3$ les champs de vitesse de notre fluide. Au cours du temps, la masse totale du fluide ne varie pas.

On rappelle que cette masse correspond, en notant m la masse totale du fluide, à :

$$m = \int_V \rho dV$$

En d'autres termes, on a que :

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Cette dernière équation permet d'exprimer l'équation dite de continuité, qui exprime la conservation de la masse du système.

Proposition 1.2.1 (*Conservation de la masse*).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

De plus, on fait l'hypothèse que notre fluide est incompressible. En d'autres termes, ρ ne varie pas au cours du temps, ni en espace. Cela implique que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\nabla \rho = 0$.

Proposition 1.2.2 (*Conservation de la masse et incompressibilité*):

$$\operatorname{div}(u) = 0$$

Preuve. La conservation de la masse et l'hypothèse d'incompressibilité permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \rho &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) &= 0\end{aligned}$$

Cette dernière formule peut se réécrire différemment :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \nabla \rho \cdot u &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(u) + \nabla \rho \cdot u &= 0\end{aligned}$$

On obtient par l'incompressibilité que :

$$\rho \operatorname{div}(u) = 0$$

or ρ n'est pas nul. Cela donne :

$$\operatorname{div}(u) = 0$$

1.2.2 Tenseur des contraintes

Maintenant, nous allons étudier les forces qui s'appliquent à chaque élément infinitésimal de fluide. Ces forces sont dû aux mouvements des autres particules fluides aux alentours. On recherche alors à exprimer la contrainte qui s'applique sur notre particule fluide ; contrainte générée par les particules aux alentours, plus particulièrement aux mouvements relatifs des particules. On note $\sum n$ la contrainte exercée sur une surface de normale n , à la position (x, y, z) sur notre surface S , avec $\sum n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Cette contrainte correspond à une force sur une unité de surface (*Newton/m²*). Autrement dit, pour obtenir une valeur scalaire de l'intensité de cette contrainte en un point de la surface (le flux), on écrit :

$$\Theta(x; y; z) = \int_S \sum_n (x; y; z) \cdot n dS$$

Pour obtenir la force engendrée par la contrainte, on écrit donc :

$$F(x; y; z) = \int_S \sum_n (x; y; z) dS$$

Nous allons maintenant construire ce tenseur. Pour cela, on prend un cube infinitésimal de fluide, et on regarde 3 contraintes s'exerçant sur les faces du cube. On numérote les faces de notre cube infinitésimal par les indices $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ (le signe -correspond à la face opposée ex: -1 est opposé à 1 etc..). Prenons une surface du cube arbitraire, d'aire dS , par exemple d'indice 1. Sans perte de généralité, on suppose que cette surface est dans le plan engendré par les vecteurs e_2 et e_3 de la base canonique de \mathbb{R}^3 . Dans ce cas de figure, la normale à cette surface est le vecteur e_1 . On peut décomposer \sum_{e_1} en :

$$\sum_{e_1} (x; y; z) = \sum_{e_1}^1 (x; y; z) e_1 + \sum_{e_1}^2 (x; y; z) e_2 + \sum_{e_1}^3 (x; y; z) e_3$$

La composante $\sum_{e_1}^1$ correspond donc à la composante normale de la force, et les deux autres aux composantes tangentielles. On attribue la composante normale à la pression exercée par la particule voisine, et la composante tangentielle à la force de viscosité. En effet, cette dernière résulte du frottement avec une particule voisine.

Pour les autres faces -2,2 et -3,3 on obtient :

$$\sum_{e_2} (x; y; z) = \sum_{e_2}^1 (x; y; z) e_1 + \sum_{e_2}^2 (x; y; z) e_2 + \sum_{e_2}^3 (x; y; z) e_3$$

Avec dans ce cas, la composante $\sum_{e_2}^2$ désignant la composante normale.

$$\sum_{e_3} (x; y; z) = \sum_{e_3}^1 (x; y; z) e_1 + \sum_{e_3}^2 (x; y; z) e_2 + \sum_{e_3}^3 (x; y; z) e_3$$

Théorème 1.2.1 Avec dans ce cas, la composante $\sum_{e_3}^3$ désignant la composante normale.

Théorème 1.2.2 (Cauchy). Pour une surface S de normale n quelconque, on peut écrire son tenseur de contrainte comme combinaison linéaire des tenseurs \sum_{e_1} , \sum_{e_2} et \sum_{e_3}

Avec une écriture matrice/vecteur, cela donne, pour toute surface orienté par un vecteur normal n :

$$\sum_n = \sum \cdot n = \begin{pmatrix} \sum_{e_1}^1 & \sum_{e_1}^2 & \sum_{e_1}^3 \\ \sum_{e_2}^1 & \sum_{e_2}^2 & \sum_{e_2}^3 \\ \sum_{e_3}^1 & \sum_{e_3}^2 & \sum_{e_3}^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

Avec \cdot le produit matrice/vecteur.

On peut alléger la notation en notant par σ_{ii} les composantes normales et par τ_{ij} les composantes

tangentielles. Ainsi :

$$\sum_n = \sum \cdot n = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Un tenseur d'ordre 2 peut se décomposer en une somme d'un tenseur de trace nulle et d'un tenseur sphérique. On applique ce théorème à notre tenseur \sum . Choisissons $\alpha \in R$ et posons:

$$\begin{aligned} \sum &= \alpha I + T \\ \text{avec} \quad : \quad T &= \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma'_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma'_{33} \end{pmatrix} \\ \text{Tr}(T) &= 0 \iff \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = 0 \end{aligned}$$

On peut obtenir la valeur de α . En effet, on a que :

$$\begin{aligned} \sum \cdot n &= \alpha I \cdot n + T \cdot n \\ \sigma_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 &= (\alpha + \sigma'_{11})n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ \iff \tau_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 &= \tau_{21}n_1 + (\alpha + \sigma'_{22})n_2 + \tau_{23}n_3 \\ \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + (\alpha + \sigma'_{33})n_3 \\ \sigma_{11} &= (\alpha + \sigma'_{11}) \\ \iff \sigma_{22} &= (\alpha + \sigma'_{22}) \\ \sigma_{33} &= (\alpha + \sigma'_{33}) \end{aligned}$$

On a donc que :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\alpha + \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33}$$

Or par hypothèse, $\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = 0$ Ainsi,

$$\alpha = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}Tr(\Sigma)$$

On écrit pour terminer que :

$$dF = \Sigma \cdot n dS = \frac{1}{3}Tr(\Sigma)n + T \cdot n$$

Physiquement, α correspond à l'opposé de la pression règnant dans le fluide. Soit $p(t, x, y, z)$ cette pression. On obtient :

$$\frac{dF}{dS} = \Sigma \cdot n = -pn + T \cdot n$$

1.2.3 Tenseur de déformation

Au cours de son mouvement, la particule fluide va se retrouver déformée. Elle va subir des rotations, des élongations et des translations. Pour représenter ces déformations, prenons comme précédemment un volume élémentaire de fluide. Le centre de cette particule est en $(x, y, z) \in V$. La déformation se traduit en une différence de vitesse relative entre ce centre et les faces du cube. Par exemple, la différence de vitesse entre la face de normale e_1 et le centre s'écrit : $\frac{\partial u}{\partial x} dx + O(dx) = (\frac{\partial u_1}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x} e_3) dx + O(dx)$

$$u(x + dx, y, z) - u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + O(dx) = (\frac{\partial u_1}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x} e_3) dx + O(dx)$$

De la même manière pour les autres directions :

$$\begin{aligned} u(x, y + dy, z) - u(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial y} dy + O(dy) = (\frac{\partial u_1}{\partial y} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial y} e_3) dy + O(dy) \\ u(x, y, z + dz) - u(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial z} dz + O(dz) = (\frac{\partial u_1}{\partial z} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z} e_3) dz + O(dz) \end{aligned}$$

On utilise de nouveau un tenseur pour représenter cela. On nomme ce tenseur D . Matriciellement, cela donne : $u(x + dx, y + dy, z + dz)$

$$\begin{aligned} u(x + dx, y + dy, z + dz) &= u(x, y, z) + D \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &= u(x, y, z) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce tenseur G représente géométriquement les transformations affines subies par notre volume infinitésimal. Or, on sait qu'une homothétie de rapport α selon e_1 , β selon e_2 , γ selon e_3 par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Et une rotation par une matrice antisymétrique. On va donc décomposer notre tenseur en un tenseur symétrique noté E et un tenseur antisymétrique noté A . De ce fait, E représente l'élongation / la contraction de notre élément, et la matrice A les rotations. La

seule solution est d'écrire :

$$D = E + A$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

On appelle alors E le tenseur des taux de déformations pures, et A le tenseur des taux de rotations pures.

1.3 Principe fondamental de la dynamique

1.3.1 Dans le cas général

Le principe fondamental de la dynamique donne, pour un élément fluide donné, de masse dm , de volume dV , de vitesse $u(t,x,y,z)$:

$$dm \frac{Du}{Dt} = \sum dF_{ext}$$

Avec dF_{ext} les forces extérieures qui agissent sur la particule de fluide. De plus, on a que $dm = \rho dV$, on écrit donc :

$$\rho \frac{Du}{Dt} dV = \sum dF_{ext} \quad (1.1)$$

Nous connaissons les forces extérieures en jeu à l'aide de notre tenseur de contrainte. Il y a 3 contraintes pour les 3 directions de notre volume infinitésimal de fluide : $\sum e_1$ $\sum e_2$ et $\sum e_3$ ce qui nous donne comme 3 forces :

$$\begin{aligned} dF_1 &= \sum \cdot e_1 dS_1 \\ dF_2 &= \sum \cdot e_2 dS_2 \\ dF_3 &= \sum \cdot e_3 dS_3 \end{aligned}$$

Avec dS_i la surface des faces $-i$ et i . On remarque que ce sont des forces surfaciques et non volumiques. On obtient en intégrant (1.1) et en ajoutant ces forces :

$$\int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV = \int_{S_1} \sum \cdot e_1 dS_1 + \int_{S_2} \sum \cdot e_2 dS_2 + \int_{S_3} \sum \cdot e_3 dS_3 \quad (1.2)$$

Théorème 1.3.1 (Green-Ostrogradski). Soit $F(x, y, z) \in R$, un champs vectoriel sur un volume V . Alors on a que :

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \int_{\partial V} F \cdot ndS$$

Le théorème précédent va nous permettre de réécrire (1.2). En effet :

$$\int_{S_1} \sum \cdot e_1 dS_1 + \int_{S_2} \sum \cdot e_2 dS_2 + \int_{S_3} \sum \cdot e_3 dS_3 = \int_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \sum (e_1 + e_2 + e_3) dS$$

Dans ce cas, on a que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \partial V$, et donc par Green-Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV &= \int_V \nabla \cdot \sum dV \\ &= \int_V -\nabla p + \nabla \cdot T dV \end{aligned}$$

On obtient donc la relation locale :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nabla \cdot T$$

Bien entendu, on peut adjoindre au principe fondamental de la dynamique une force extérieure $f \in R^3$, et on a :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

On appelle cette dernière équation l'équation fondamentale de la dynamique des fluides.

1.3.2 Equations de Navier-Stokes incompressibles

On rappelle que dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles, on a la conservation de la masse qui donne :

$$\operatorname{div}(u) = 0$$

De plus, on fait l'hypothèse que notre fluide est un fluide Newtonien, c'est à dire que les contraintes subies par les particules fluides sont proportionnelles aux déformations pures. Mathématiquement et physiquement, cela s'écrit :

$$\exists v \in \mathbb{R} \mid T = 2vE$$

Le scalaire v s'appelle la viscosité dynamique du fluide. On peut transformer l'équation fondamentale de la dynamique des fluides grâce à cette condition. Par le calcul, on a que :

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{2} \nabla (\operatorname{div}(u)) + \Delta u$$

Or, $\operatorname{div}(u) = 0$, on a que :

$$\nabla \cdot T = 2\nu \nabla \cdot E = \nu \Delta u$$

Les équations de Navier-Stokes incompressibles sont donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u + f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

1.4 Problèmes physiques : équations différentielles et aux dérivées partielles

1.4.1 Mécanique des fluides

La mécanique des fluides est l'une des deux composantes de la mécanique des milieux continus ; l'autre composante étant la mécanique des solides qui sera traitée un peu plus loin.

Equation de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (visqueux) dans l'approximation des milieux continus. Elles modélisent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Nous considérons l'équation de Navier-Stokes sous la forme:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) - \eta \Delta u - \left(\zeta + \frac{2}{3} \eta \right) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) = \rho f - \nabla p \quad (1.1)$$

où :

- u est la vitesse du fluide ;
- p est la pression dans le fluide ;

- ρ est la masse volumique du fluide ;
- η est la viscosité dynamique en cisaillement du fluide ;
- ζ est la viscosité dynamique en compression du fluide ;
- f est une force massique s'exerçant dans le fluide (par exemple : pesanteur.)

Si de plus le fluide est incompressible (bonne approximation pour les liquides), alors $\operatorname{div} u = 0$ et l'équation se simplifie:

$$\rho u + p(u \cdot \nabla) u - \eta \Delta u = \rho f - \nabla p \quad (1.2)$$

Equation de Stokes

Il s'agit d'un cas particulier de l'équation de Navier-Stokes (termes inertiels absents ou négligés). Lorsqu'un fluide visqueux s'écoule lentement en un lieu étroit ou autour d'un petit objet, les effets visqueux dominent sur les effets inertiels. Son écoulement est alors appelé écoulement de Stokes. On parle aussi d'écoulement à faible nombre de Reynolds (le nombre de Reynolds mesure le poids relatif des termes visqueux et inertiels dans l'équation de Navier-Stokes). Ce nombre de Reynolds est alors beaucoup plus petit que 1. L'équation de Stokes, qui décrit l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible en régime permanent et à faible nombre de Reynolds, s'écrit dans :

$$-\eta \Delta u + \nabla p = \rho f$$

On rappelle que si de plus le fluide est incompressible, alors on a également $\operatorname{div} u = 0$ dans . Contrairement à l'équation de Navier-Stokes, l'équation de Stokes est linéaire. Les écoulements solutions de cette équation possèdent par conséquent des propriétés bien particulières :

unicité : pour des conditions aux limites données (valeur de la vitesse au niveau des parois et/ou à l'infini), il existe un et un seul écoulement vérifiant l'équation de Stokes ;additivité : les solutions de l'équation de Stokes vérifient le principe de superposition : si u_1 et u_2 sont solutions, alors toute combinaison linéaire $1u_1 + C 2u_2$ le sera aussi (ceci n'est pas incompatible avec la propriété d'unicité : seul l'écoulement vérifiant les bonnes conditions aux limites sera observé); réversibilité : si un champ de vitesse u est solution de l'équation, alors u l'est aussi, à condition de changer le signe des gradients de pression, ainsi que des vitesses aux parois et à l'infini ;cette propriété est contraire à l'intuition, fondée sur notre expérience des écoulements macroscopiques : la réversibilité des écoulements à bas nombre de Reynolds a ainsi poussé les êtres vivants de très petite taille à développer des moyens de propulsion originaux.paradoxe de Stokes : il faut prendre garde au fait que les solutions mathématiques de l'équation de Stokes, dans un cas donné ou dans certaines régions du domaine de solution, peuvent être physiquement fausses. Ceci est dû au « paradoxe de Stokes » à savoir que les conditions physiques permettant de ramener l'équation de Navier-Stokes à l'équation de Stokes ne sont pas nécessairement réalisées dans tout le domaine de solution, à priori. On aboutit alors à des solutions présentant des comportements potentiellement aberrants dans certaines limites.C'est le cas par exemple « à l'infini » où souvent le terme inertiel finit par l'emporter sur le terme visqueux, sans qu'on puisse le préjuger à priori.

Chapitre 2

Etude théorique des équations de Navier-Stokes incompressibles

Après avoir fait l'étude des équations de la chaleur et en particulier la résolution en passant par la formulation variationnelle, on va dans ce chapitre effectuer la même démarche pour réussir à obtenir la forme d'équation voulue pour y associer les processus probabilistes.

2.1 Reformulation des équations

2.1.1 Formulation variationnelle

On cherche à obtenir la formulation faible de l'E.D.P suivante :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - u \cdot \nabla u - \nabla p + f \quad \forall (t; x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^3 \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array} \right.$$

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

Définition 2.1.1

$$\begin{aligned} V &= \left\{ g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)^3, \operatorname{div} g = 0 \right\} \\ H &= \operatorname{adh}_{L^2(\mathbb{R}^3)^3}(V) \\ V &= \operatorname{adh}_{H^1(\mathbb{R}^3)^3}(V) \end{aligned}$$

On note u_i , la i -ième composante de u . Dans un premier temps, on suppose que $u \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)^3)$.

Définition 2.1.2 V, H, V sont des espaces de Hilbert, munis du produit scalaire suivant. $\forall f, g \in V \cup H \cup V$

$$\langle f; g \rangle = \sum_{i=1}^3 \int f^i \bar{g}^i$$

On utilise cette notation pour l'utilisation de ce produit scalaire à des fonctions à valeurs complexes.

Définition 2.1.3 Soit $(f, g) \in (C^3)^2$, on définit le produit scalaire par:

$$\langle f; g \rangle = \sum_{i=1}^3 \int f_i \bar{g}_i$$

Définition 2.1.4 (Convention de sommation d'Einstein). La convention de Einstein permet de simplifier les notations. On a :

$$u_i v^i = \sum_{i=1}^3 u_i v^i$$

Proposition 2.1.1 (Formulation variationnelle) .Soit u solution de (3.1), alors u est solution de l'équation :

$$\langle u_t, g \rangle = \langle u_0, g \rangle + \int_0^t \nu \langle u_s, \Delta g \rangle + \langle u_s, u_s \nabla g \rangle + \langle f_s, g \rangle ds \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall g \in \mathbf{V}$$

Preuve. On décompose notre équation (3.1) en trois sous équations. Pour tout $l \in \{1, 2, 3\}$:

$$\frac{\partial u^l}{\partial t} = \nu \Delta u^l - (u \cdot \nabla u)^l - (\nabla p)^l + f^l$$

Soit $g \in V$, indépendante du temps. On multiplie par g , puis on intègre sur \mathbb{R}^3 :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u^l}{\partial t} g^l = \int_{\mathbb{R}^3} \nu \Delta u^l g^l - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u)^l g^l - \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla p)^l g^l + \int_{\mathbb{R}^3} f^l g^l$$

Avec les hypothèses sur u et g , on applique la dérivée faible sur chacun des termes à droite de l'égalité contenant un opérateur dérivé :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u^l}{\partial t} g^l = \int_{\mathbb{R}^3} \nu u^l \Delta g^l + \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u)^l g^l + \int_{\mathbb{R}^3} f^l g^l$$

Théorème 2.1.1 (Formule de Green). Soit u une fonction à valeurs scalaires, et v une fonction à valeurs vectorielles sur le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ et $n(x)$ sa normale extérieure.

On a:

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}(v(x)) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot v(x) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot nu(x) d\sigma$$

A partir de ce théorème, on peut montrer que le terme $\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla p)^l g^l$ s'annule. p étant une fonction scalaire, g étant une fonction à continue à valeurs compactes, elle s'annule sur les bords. On a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla p)^l g^l &= \int_{\mathbb{R}^3} p^l \operatorname{div} g^l \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le terme de droite étant nul car $\operatorname{div} g = 0$.

Regardons un peu plus en détail $u \cdot \nabla u$. On a par définition:

$$(u \cdot \nabla u)^l = \sum_{i=1}^3 u_i \left(\frac{\partial u^l}{\partial x_i} \right)$$

On applique la formule de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u)^l g^l dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 u_i \left(\frac{\partial u^l}{\partial x_i} \right) g^l dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 u_i u^l \left(\frac{\partial g^l}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u^l \cdot u^l \nabla g^l dx \end{aligned}$$

On applique la proposition ((??)) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_t^l g = \int_{\mathbb{R}^3} u_0^l g + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} v u_s^l \cdot \Delta g^l + u_s^l \cdot u_s^l \cdot \nabla g^l + f_s^l g^l dx ds \quad \forall t \in [0, T]$$

En utilisant la définition du produit scalaire, on obtient le résultat.

2.1.2 Application de la transformée de Fourier

Dans cette partie on va à partir de la formulation variationnelle obtenir une nouvelle forme de l'équation. C'est à cette nouvelle forme que l'on associera par la suite un processus de branchement. Avant toute chose, on définit les opérations suivantes:

Définition 2.1.5 Soit $w_1(\xi), w_2(\xi)$ deux applications de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dans C^3 . L'opérateur \circ est défini par:

$$w_1 \circ w_2 (\xi) = -\frac{i}{\pi^3} \int (w_1(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) w_2(\xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2}$$

Où: $q, q' \in C^3$, $q \cdot q' = \sum_{i=1}^3 q_i \bar{q}'_i$; $e_\xi = \xi/|\xi|$ et:

$$p(\xi)q = q - e_\xi(w \cdot e_\xi), \quad q \in C^3$$

A partir de notre formulation variationnelle, on cherche à obtenir une équation équivalente en utilisant la transformée de Fourier. On s'appuie pour cela sur la proposition suivante:

Proposition 2.1.2 *Soit $f \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)^3)$, alors on peut choisir $f_s(\xi)$ mesurable telle que:*

$$\int_0^T \int (1 + |\xi^2|)^{-1} |f_s(\xi)|^2 d\xi ds < \infty$$

$$f_s(\xi) \cdot \xi = 0, \quad f_s(-\xi) = \overline{f_s(\xi)}, \quad 0 \leq s \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

Preuve. Soit f dans les hypothèses de la proposition. Alors, on a :

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} < +\infty \iff \int_{\mathbb{R}^3} (f_s + \nabla f_s) dx < +\infty$$

Par passage avec la transformée de Fourier, on obtient que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\widehat{f}_s + \widehat{\nabla f}_s) d\xi < +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\widehat{f}_s - i\xi \widehat{f}_s) d\xi < +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1 - i\xi) \widehat{f}_s d\xi < +\infty$$

De ce fait, par passage à la norme, on a que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2) \widehat{f}_s d\xi < +\infty$$

Proposition 2.1.3 Soit $u \in L^1(0, T; V)$ on peut trouver une fonction $\hat{u}_s(\xi)$ continue telle que:

$$\int_0^T \int (1 + |\xi|^2) |\hat{u}_s(\xi)|^2 d\xi ds < \infty$$

$$\hat{u}_s(\xi) \cdot \xi = 0, \quad \hat{u}_s(-\xi) = \overline{\hat{u}_s(\xi)}, \quad 0 \leq s \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

Proposition 2.1.4 Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors,

$$\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$$

et \widehat{f} et \widehat{g} appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^n)$

Proposition 2.1.5 Soit $u \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)^3)$, alors

$$\int_0^t \langle \widehat{u}_s, \widehat{u}_s \widehat{\nabla g} \rangle ds = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \int \widehat{u}_s^l(\xi) \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') (-i\xi'_k \widehat{g}^l(\xi')) d\xi d\xi' ds \quad \forall g \in V$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \widehat{u}_s \widehat{\nabla g}(\xi) &= \sum_{k=1}^3 u_s^k \cdot \widehat{\nabla g^k}(\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k * \widehat{\nabla g^k}(\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') \widehat{\nabla g^k}(\xi') d\xi' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') (i\xi'_k g^k(\xi')) d\xi' \end{aligned}$$

La dernière égalité étant du au fait que (voir partie équation de la chaleur pour la démonstration) :

$$\widehat{\nabla g^k}(\xi') = i\xi'_k g^k(\xi')$$

En développant le produit scalaire, on peut continuer par:

$$\begin{aligned}
 \langle \widehat{u}_s, \widehat{u}_s \widehat{\nabla} g \rangle &= \sum_{l=1}^3 \int \widehat{u}_s^l \overline{\widehat{u}_s \widehat{\nabla} g}^l d\xi \\
 &= \sum_{l=1}^3 \int \widehat{u}_s^l \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \overline{\int \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k (\xi - \xi') \left(i \xi'_k \widehat{g}^k (\xi') \right) d\xi'} d\xi \\
 &= \sum_{l=1}^3 \int \widehat{u}_s^l \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{k=1}^3 \overline{\widehat{u}_s^k} (\xi - \xi') \left(\overline{i \xi'_k \widehat{g}^k (\xi')} \right) d\xi' d\xi \\
 &= \sum_{l=1}^3 \int \widehat{u}_s^l \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{k=1}^3 \overline{\widehat{u}_s^k} (\xi - \xi') \left(-i \xi'_k \overline{\widehat{g}^k} (\xi') \right) d\xi' d\xi
 \end{aligned}$$

Si on enlève les conventions d'Einstein (définition (cse)), on obtient ce que l'on cherche.

Les propositions précédentes permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.1.6 *Soit u solution de la formulation faible du problème. Alors u est solution de l'équation :*

$$\begin{aligned}
 \langle \widehat{u}_t, \widehat{g} \rangle &= \langle \widehat{u}_0, \widehat{g} \rangle + \int_0^t -\nu \langle |\xi|^2 \widehat{u}_s, \widehat{g} \rangle + \langle \widehat{f}_s, \widehat{g} \rangle ds + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \int \widehat{u}_s^l (\xi) \overline{\widehat{u}_s^k} (\xi - \xi') \left(-i \xi'_k \overline{\widehat{g}^l} (\xi') \right) d\xi d\xi' ds, \\
 \forall g &\in V
 \end{aligned}$$

Regardons un peu plus en détail l'équation obtenue, particulièrement les différents éléments présents sous l'intégrale. Le changement effectué sur le premier membre a déjà été effectué dans le cas de l'équation de la chaleur fait précédemment:

$$\nu \langle \widehat{u}_s, \widehat{\nabla} g \rangle = \nu \langle \widehat{u}_s, -|\xi|^2 \widehat{g} \rangle = \nu \langle -|\xi|^2 \widehat{u}_s, \widehat{g} \rangle$$

Preuve. Le cas de $\langle \widehat{u}_s, \widehat{u}_s \widehat{\nabla} g \rangle$ est traité dans la proposition précédente. La proposition suivante donne une forme allégée de l'élément de droite de la proposition 5.

Proposition 2.1.7

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \int \widehat{u}_s^l(\xi) \overline{\widehat{u}_s^k}(\xi - \xi') \left(-i\xi'_k \overline{\widehat{g}^l}(\xi') \right) d\xi d\xi' ds = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle ds$$

Preuve. Partons de l'élément de droite pour prouver cette égalité. Dans un premier temps par soucis d'écriture (convention de Einstein), on écrit:

$$-\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle ds = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \left\langle \sum_{k=1}^3 \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \right\rangle ds$$

Pour éviter de conserver la somme dans la suite des calculs, on gardera la convention d'Einstein. En utilisant les propriétés de la proposition (3.3) : $\widehat{u}_s(-\xi) = \overline{\widehat{u}_s}(\xi)$. Et à partir de la définition du produit de convolution et du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle ds &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k \int \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') \widehat{u}_s(\xi') d\xi', \widehat{g} \rangle ds \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int \left(\xi_k \int \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') \widehat{u}_s(\xi') d\xi' \right)^l \widehat{g}(\xi) d\xi ds \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int \left(\xi_k \int \overline{\widehat{u}_s^k}(\xi' - \xi) \widehat{u}_s(\xi') d\xi' \right)^l \widehat{g}(\xi) d\xi ds \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int \int \xi_k \overline{\widehat{u}_s^k}(\xi' - \xi) \widehat{u}_s^l(\xi') \widehat{g}(\xi)^l d\xi' d\xi ds \end{aligned}$$

Par soucis d'écriture, on peut inverser ξ et ξ' (meilleure compréhension du résultat).

Détail: Ici on change uniquement de notation.

$$\begin{aligned} -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int \int \xi_k \overline{\widehat{u}_s^k}(\xi' - \xi) \widehat{u}_s^l(\xi') \widehat{g}(\xi)^l d\xi' d\xi ds &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int \int \xi'_k \overline{\widehat{u}_s^k}(\xi - \xi') \widehat{u}_s^l(\xi') \widehat{g}(\xi)^l d\xi' d\xi ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \int \widehat{u}_s^l(\xi) \overline{\widehat{u}_s^k}(\xi - \xi') \left(-i\xi'_k \overline{\widehat{g}^l}(\xi') \right) d\xi d\xi' ds \end{aligned}$$

On obtient bien ce qu'il fallait montrer.

On a obtenu une forme plus allégée. On définit maintenant plusieurs nouvelles égalités:

Définition 2.1.6 On définit $\chi_t(\xi)$ tel que $t \in [0, T]$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, continue en t et mesurable en ξ :

$$\chi_t(\xi) = \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi|^2 \widehat{u}_t(\xi)$$

Les propriétés suivantes sont liées aux propriétés sur \widehat{u}_t

$$\chi_t(\xi) \cdot \xi = 0 ; \quad \chi_t(-\xi) = \overline{\chi_t(\xi)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

Proposition 2.1.8

$$-\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \langle \chi_s \circ \chi_s, \widehat{g} \rangle ds$$

Preuve. Par définition, on a:

$$\chi_s \circ \chi_s(\xi) = -\frac{i}{\pi^3} \int (\chi_s(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) \chi_s(\xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2}$$

Lemme 2.1.1

$$p(\xi) \chi_s(\xi - \xi_1) = \chi_s(\xi - \xi_1)$$

Preuve. Par définition, on sait que:

$$p(\xi) \chi_s(\xi - \xi_1) = \chi_s(\xi - \xi_1) - e_\xi (\chi_s(\xi - \xi_1) \cdot e_\xi)$$

On sait que: $\widehat{u}_s = (\xi) \cdot \xi = 0$. On a donc:

$$\chi_s(\xi - \xi_1) \cdot e_\xi = \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi - \xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} = 0$$

On développe en utilisant la définition de χ_s .

$$\begin{aligned}\chi_s(\xi_1) \cdot e_\xi &= \chi_s(\xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \\ &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \\ &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{|\xi_1|^2}{|\xi|} \widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_s(\xi_1) \cdot e_\xi \cdot \chi_s(\xi - \xi_1) &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi_1|^2 \left(\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right) \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi - \xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) \\ &= \frac{\pi^3}{2 \cdot \nu^2} |\xi|^2 |\xi - \xi_1|^2 \frac{1}{|\xi|} (\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi) \cdot \widehat{u}_s(\xi - \xi_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_s \circ \chi_s(\xi) &= -\frac{i}{\pi^3} \int (\chi_s(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) \chi_s(\xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2} \\ &= -\frac{i}{2\nu^2} \int (\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi) \cdot \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) d\xi_1\end{aligned}$$

De plus, par définition de :

$$\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi = \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s(\xi_1)^k \xi_k$$

Cela donne:

$$\begin{aligned}
 \chi_s \circ \chi_s(\xi) &= -\frac{i}{2\nu^2} \int \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s(\xi_1)^k \xi_k \cdot \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) d\xi \\
 &= -\frac{i}{2\nu^2} \int \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s(\xi_1)^k \xi_k \cdot \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) d\xi_1 \\
 &= -\frac{i}{2\nu^2} \sum_{k=1}^3 \xi_k \left(\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s \right) (\xi)
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \langle \chi_s \circ \chi_s, \widehat{g} \rangle ds &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \left\langle -\frac{i}{2\nu^2} \sum_{k=1}^3 \xi_k \left(\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s \right), \widehat{g} \right\rangle ds \\
 &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{k=1}^3 \langle \xi_k \left(\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s \right), \widehat{g} \rangle ds
 \end{aligned}$$

Proposition 2.1.9

$$\sup_{\xi} \int_0^T ds \int |\chi_s(\xi_1) \cdot e_{\xi}| |\chi_s(\xi - \xi_1)| \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2} < \infty$$

Preuve. Remplaçons par la définition: $\chi_s(\xi) = \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi|^2 \widehat{u}_s(\xi)$.

$$\begin{aligned}
 \sup_{\xi} \int_0^T ds \int \left| \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right| \left| \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi - \xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) \right| \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2} \\
 \leq \sup_{\xi} \int_0^T ds \int \frac{2\pi^3}{\nu^2} |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi| |\widehat{u}_s(\xi - \xi_1)| d\xi_1
 \end{aligned}$$

On utilise par la suite la propriété de u_s suivante: $\widehat{u}_s(-\xi) = \overline{\widehat{u}_s(\xi)}$

$$= \sup_{\xi} \int_0^T ds \int \frac{2\pi^3}{\nu^2} |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi| \left| \overline{\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)} \right| d\xi_1$$

Théorème 2.1.2 (Inégalité de Holder).-Soit S un espace mesuré.-Soient $p, q > 0$ et r vérifiant la relation suivante:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

Soient f et g deux fonctions appartenant respectivement à $L^p(S)$ et $L^q(S)$, on peut alors $fg \in L^r(S)$ et on a:

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

En utilisant cette inégalité, on a alors:

$$\sup_{\xi} \int_0^T ds \int \frac{2\pi^3}{\nu^2} |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi| |\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)| d\xi_1 \leq \frac{2\pi^3}{\nu^2} \sup_{\xi} \int_0^T ds \left(\int |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi|^2 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)|^2 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemme 2.1.2

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)|^2 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Preuve. En effet, posons: $\Pi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3; \xi_1 \mapsto \xi_1 - \xi$ Réalisons un changement de variable, Π est un difféomorphisme de classe C^1 . De plus $\det(Jac(\Pi)) = 1$, on a donc:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)|^2 d\xi_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\Pi(\xi_1))|^2 \det(Jac(\Pi)) d\xi_1 \\ &= \int_{\Pi(\mathbb{R}^3)} |\widehat{u}_s(\xi_1)|^2 d\xi_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1)|^2 d\xi_1 < \infty \end{aligned}$$

On utilise la Proposition (0.4)

Regardons la seconde inégalité:

Lemme 2.1.3

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1 \cdot \xi)|^2 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Preuve. On peut utiliser Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1 \cdot \xi)|^2 d\xi_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} (|\widehat{u}_s \xi_1| |\xi|)^2 d\xi_1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s \xi_1|^2 |\xi|^2 d\xi_1 < \infty \end{aligned}$$

On utilise la Proposition (0.4)

Ces deux lemmes terminent la preuve de la proposition (3.9).

Proposition 2.1.10

$$\chi_s(\xi) = \chi_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 \left[-\chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(s, \xi) \right] ds$$

Preuve. On a:

$$\langle \widehat{u}_t, \widehat{g} \rangle = \langle \widehat{u}_0, \widehat{g} \rangle + \int_0^t -\nu \langle |\xi|^2 \widehat{u}_s, \widehat{g} \rangle + \langle \widehat{f}_s, \widehat{g} \rangle ds + \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \langle \chi_s \circ \chi_s, \widehat{g} \rangle ds$$

Utilisons le théorème suivant:

Théorème 2.1.3 Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $g \in C_c^\infty(\Omega)$ on a:

$$\int_{\Omega} f(x) g(x) dx = 0$$

alors: $f(x) = 0$ presque partout dans Ω .

Dans notre cas, on obtient presque partout:

$$\widehat{u}_t = \widehat{u}_0 + \int_0^t -\nu |\xi|^2 \widehat{u}_s + \widehat{f}_s ds + \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s ds$$

Si on multiplie des deux cotés par: $\frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} |\xi|^2$, on peut introduire les fonctions χ . Regardons de plus près terme par terme:

$$\begin{aligned}\chi_t(\xi) &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} |\xi|^2 \widehat{u}_t \\ \chi_0(\xi) &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} |\xi|^2 \widehat{u}_0 \\ \int_0^t -\nu |\xi|^2 \chi_s(\xi) &= \int_0^t -\nu |\xi|^2 \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} |\xi|^2 \widehat{u}_s ds\end{aligned}$$

Introduisons une nouvelle fonction.

Définition 2.1.7

$$\varphi(s, \xi) = \frac{4}{\nu^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \widehat{f}_s(\xi)$$

$$\varphi(s, \xi) \cdot \xi = 0, \quad \varphi(s, -\xi) = \overline{\varphi(s, \xi)}, \quad 0 \leq s \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

Les propriétés sont vraies par définition de \widehat{f}_s

Cela donne:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} |\xi|^2 \widehat{f}_s(\xi) &= \nu |\xi|^2 \frac{1}{2} \frac{4}{\nu^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \widehat{f}_s(\xi) \\ &= \nu |\xi|^2 \frac{1}{2} \varphi(s, \xi)\end{aligned}$$

Pour le dernier terme:

$$\frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} |\xi|^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s ds = \nu |\xi|^2 \int_0^t \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s ds$$

On obtient ce que l'on cherchait. On a presque partout:

$$\chi_s(\xi) = \chi_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 \left[-\chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(s, \xi) \right] ds$$

La finalité est de montrer la proposition suivante:

Proposition 2.1.11

$$\chi_t(\xi) = e^{-\nu|\xi|^2 t} \chi_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \left[\frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(s, \xi) \right] ds$$

Preuve. Par le principe fondamental de l'analyse, en partant de la proposition précédente.

$$\chi_t'(\xi) = \nu |\xi|^2 \left[-\chi_t(\xi) + \frac{1}{2} \chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(t, \xi) \right]$$

Cela est équivalent à:

$$\chi_t'(\xi) + \nu |\xi|^2 \chi_t(\xi) = \nu |\xi|^2 \left[\frac{1}{2} \chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(t, \xi) \right]$$

On obtient l'équivalence suivante: Soit $z \in [0; T]$:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \chi_t(\xi) \right) = e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \nu |\xi|^2 \left[\frac{1}{2} \chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(t, \xi) \right]$$

On intègre:

$$\int_0^z \frac{d}{dt} \left(e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \chi_t(\xi) \right) dt = \int_0^z \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \left[\frac{1}{2} \chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(t, \xi) \right] dt$$

On obtient en utilisant de nouveau le principe fondamental de l'analyse:

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{d}{dt} \left(e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \chi_t(\xi) \right) dt &= e^{-\nu|\xi|^2(z-z)} \chi_z(\xi) - e^{-\nu|\xi|^2(z-0)} \chi_0(\xi) \\ &= \chi_z(\xi) - e^{-\nu|\xi|^2 z} \chi_0(\xi) \end{aligned}$$

On obtient au final:

$$\chi_z(\xi) = e^{-\nu|\xi|^2(z)}\chi_0(\xi) + \int_0^z \nu|\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \left[\frac{1}{2}\chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2}\varphi(t, \xi) \right] dt$$

Cela équivaut à écrire:

$$\chi_t(\xi) = e^{-\nu|\xi|^2(t)}\chi_0(\xi) + \int_0^t \nu|\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \left[\frac{1}{2}\chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2}\varphi(s, \xi) \right] ds$$

2.2 Introduction de nouveaux ensembles

On vient d'obtenir la formulation variationnelle des équations de Navier Stokes. Pour y associer un processus de branchement, on introduit un noyau de probabilité. L'étude de ce noyau est possible dans des ensembles bien précis. Cette partie y est consacrée.

2.2.1 Rappel sur les relations coordonnées sphériques/cartésiennes

Avant de commencer, on rappelle les relations entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes, celles-ci seront utilisées plus tard. Soit $u(x, y, z)$ notre vecteur en coordonnées cartésiennes, on peut exprimer ces coordonnées en fonctions des coordonnées sphériques par les relations suivantes:

$$x = r \sin(\varphi) \cos(\theta) ; y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) ; z = r \cos(\varphi)$$

où r est la norme, φ la colatitude, θ la longitude deu. On peut illustrer la représentation en coordonnées sphériques par le schéma suivant où u correspondrait au vecteur \overrightarrow{OP}

2.2.2 Introduction de l'ensemble D

Pour pouvoir mieux décrire le noyau K , on a besoin d'introduire de nouveaux ensembles. On utilisera en particulier les coordonnées sphériques pour exprimer les ξ .

Définition 2.2.1 On définit l'ensemble D par:

$$D = \{(\theta_1, \theta_2, \alpha) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi]; \theta_1 + \theta_2 < \pi\}$$

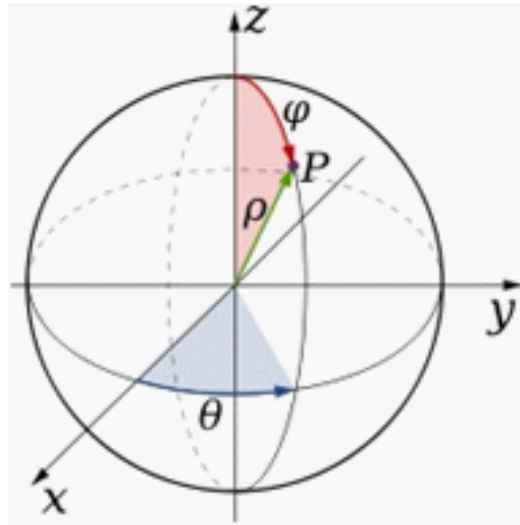


Figure 3.1: On a ici une illustration des coordonnées sphériques. Ici φ est la colatitude, et θ est la longitude

Soit $(\theta_1, \theta_2, \alpha) \in D$, on introduit: $\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)$ et $\xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)$ tels que:

Proposition 2.2.1 $\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)$ et $\xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)$ sont les uniques vecteurs qui vérifient l'égalité suivante:

$$\xi_1 + \xi_2 = e_3$$

Preuve. (Unicité)

On est capable d'exprimer nos vecteurs ξ_1 et ξ_2 de la manière suivante:- Soit $\xi_1(x_1, y_1, z_1)$ notre vecteur en coordonnées cartésiennes, on peut exprimer ces coordonnées en fonctions

des coordonnées sphériques par les relations suivantes:

$$x_1 = r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha) ; y_1 = r_1 \sin(\theta_1) \sin(\alpha) ; z_1 = r_1 \cos(\theta_1)$$

où r_1 est la norme, θ_1 la colatitude, α la longitude de ξ_1 .- Soit $\xi_2(x_2, y_2, z_2)$, on a de même:

$$x_2 = r_2 \sin(\theta_2) \cos(\alpha + \pi [2\pi]) ; y_2 = r_2 \sin(\theta_2) \sin(\alpha + \pi [2\pi]) ; z_2 = r_2 \cos(\theta_2)$$

où r_2 est la norme, θ_2 la colatitude, $\alpha + \pi [2\pi]$ la longitude de ξ_2 .

La longitude de ξ_2 étant égale à la longitude de $\xi_1 + \pi$, le vecteur ξ_2 appartient au plan formé par les vecteurs e_3 et ξ_1 . Soit u le vecteur orthogonal à e_3 de norme 1 et appartenant au plan (e_3, ξ_1) . Travaillons dans le repère orthonormée (e_3, u) . Graphiquement, cela donne:

On a les relations suivantes:

$$\begin{cases} \xi_1 = r_1 \sin(\theta_1) u + r_1 \cos(\theta_1) e_3 \\ \xi_2 = -r_2 \sin(\theta_2) u + r_1 \cos(\theta_2) e_3 \end{cases}$$

En projetant sur u et e_3 on obtient les équations suivantes:

$$\begin{cases} r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \\ r_1 \sin(\theta_1) + r_2 \sin(\theta_2) = 1 \end{cases}$$

On cherche r_1 et r_2 . On veut montrer l'unicité de ces valeurs. On a un système linéaire

de la forme:

$AR = b$ où :

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

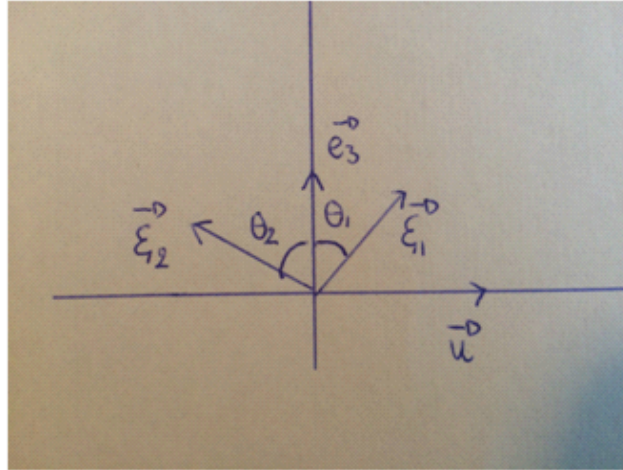


Figure 3.2: Interprétation graphique dans le repère (e_3, u)

Ce système admet une unique solution si $\det A \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det A &= \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ &= \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

On a donc $\det A = 0$ ssi $\theta_1 + \theta_2 = 0$ car par définition de D : $\theta_1 + \theta_2 < \pi$. L'unicité est donc montrée.

Définition 2.2.2 On définit Ψ l'application suivante:

$$\Psi : D \mapsto (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2 ; (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto (\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha))$$

Proposition 2.2.2 est une application bijective de $D \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_3})^2$

Preuve. En effet, elle est injective dû à l'unicité de l'égalité $\xi_1 + \xi_2 = e_3$. (Proposition 1.1) De même, la surjection est donnée par les propriétés du plan, tout couple ξ_1, ξ_2 admet un antécédent.

Définition 2.2.3 *Difféomorphisme* Soit $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D' \subset \mathbb{R}^n$ où D et D' sont des ouverts. La fonction F est appelée un *difféomorphisme* si c'est une bijection de classe C^1 dont la bijection réciproque est aussi de classe C^1 .

Définition 2.2.4 *Théorème d'inversion globale* Si f est une application injective de classe C^1 , définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , si de plus la différentielle $d_a f$ en chaque point $a \in U$ est une bijection linéaire, alors $f(U)$ est ouvert et f est un C^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Lemme 2.2.1 *Montrer que $d_a(f)$ est une bijection linéaire revient à montrer que le déterminant du jacobien $\det(d_a(f))$ est non nul.*

Définition 2.2.5 *On définit Φ l'application suivante:*

$$\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto \xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)$$

Proposition 2.2.3 *Φ est un difféomorphisme*

Preuve. En résolvant le système plus haut, on obtient:

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}; \quad r_2 = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

On a donc la relation suivante:

$$\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha) = \left(\frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \sin(\theta_1) \cos(\alpha); \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \sin(\theta_1) \sin(\alpha); \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \cos(\theta_1) \right)$$

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\sin^2(\theta_2) \cos(\alpha)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\sin^2(\theta_1) \cos(\alpha)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & -\frac{\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin(\alpha)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\alpha)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\alpha)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\alpha)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ -\frac{\cos(\theta_2) \sin(\theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\sin(\theta_1) \cos(\theta_1)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est égale à

$$\det(J(\Phi)) \neq 0$$

D'après le lemme (3.4), cela finit la preuve.

2.2.3 Similitude

Soit $\xi(r, \theta, \varphi)$ avec r sa norme, θ sa colatitude et φ sa longitude. On définit $\forall \xi \neq 0 S_\xi$ la similitude qui envoie par plusieurs applications e_3 dans ξ . On réalise dans un premier temps une rotation sur le plan (e_3, ξ) . Cela est équivalent à faire une rotation de θ dans le plan. Dans un second temps, on utilise une homothétie.

2.2.4 Introduction de l'ensemble A

Définition 2.2.6 On définit l'ensemble A par:

$$A = \{(r, r_1, r_2) \in (0, \infty)^3, r_1 + r_2 > r; r_1 + r > r_2, r_2 + r > r_1\}$$

Remarques:

- A est symétrique par permutation des éléments dans $(0, \infty)^3$. - A décrit le "postulat euclidien" selon lequel : " la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre". Dans un triangle non dégénéré, la longueur de chaque coté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

2.2.5 Introduction du noyau K

Définition 2.2.7 On introduit le noyau K suivant:

$$K_\xi(h) = \int h(\xi_1, \xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) = \frac{1}{\pi^3} \int h(\xi_1, \xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2}$$

avec h positive et mesurable sur $((\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2)$

Si on reprend les notations précédentes:

$$\begin{aligned} w_1 \circ w_2 &= -\frac{i}{\pi^3} \int (w_1(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) w_2(\xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2} \\ &= -i \int (w_1(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) w_2(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) \end{aligned}$$

2.3 Etude du noyau K

Dans cette section, on essaie de déduire des propriétés importantes sur le noyau K qui seront plus tard appliquées aux processus de branchements.

Définition 2.3.1 (Noyau Markovien). Un noyau de Markov sur Ω est la donnée, pour tout $x \in \Omega$, d'une probabilité $K(x, dy)$ sur Ω telle

que

$$\forall A \in B, x \mapsto K(x, A) = \int_A K(x, dy) \quad \text{est mesurable}$$

Pour $f \in L^\infty(\Omega)$, on note $K(f)$ la fonction sur Ω

$$K(f)(x) = \int f(y) K(x, dy)$$

Proposition 2.3.1 K est un noyau markovien.

Proposition 2.3.2 *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $K_\xi(d\xi_1, d\xi_2)$ est l'image de la probabilité $\frac{1}{\pi}1_D d\theta_1 d\theta_2 d\alpha$ par l'application $(S_\xi \otimes S_\xi) \circ \Psi$.*

Preuve.

On peut reformuler l'énoncé de la manière suivante: Soit P la probabilité suivant la loi: $\frac{1}{\pi}1_D d\theta_1 d\theta_2 d\alpha$, on a alors:

$$K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) = p \left(((S_\xi \otimes S_\xi) \circ \Psi)^{-1}(\xi_1, \xi_2) \right)$$

Sans perte de généralité, on peut poser $\xi = e_3$, en effet on comblera cela en appliquant par la suite la similitude S_ξ qui envoie e_3 sur ξ . Soit $r_1 \in (0, \infty)$ le module de ξ_1 et $r_2 \in (0, \infty)$ le module de ξ_2 . Par la proposition 1.1 on a:

$$\xi_1 + \xi_2 = e_3$$

Projetons cette équation sur la droite $\mathbb{R}^3 e_3$. On a vu que pour passer en coordonnées cartésiennes, on a: $z_1 = r_1 \cos(\theta_1)$. Si on regarde les 3e composantes de ξ_1 et ξ_2 en coordonnées cartésiennes, on doit avoir:

$$z_1 + z_2 = 1$$

On obtient bien en passant en coordonnées sphériques:

$$r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2)$$

Projetons maintenant l'équation sur le plan e_1, e_2 . On a dans un premier temps l'équation suivante pour la première composante en passant par les coordonnées cartésiennes. $x_1 = r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha)$. La projection donne:

$$x_1 + x_2 = 0$$

En passant en coordonnées sphériques:

$$r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha) + r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha + \pi) = 0$$

Or $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$. On obtient alors:

$$\cos(\alpha) (r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2)) = 0$$

On a donc deux possibilités:
$$\begin{cases} \cos(\alpha) = 0 \\ r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

C'est impossible d'obtenir en même temps $\sin(\alpha) = 0$ et $\cos(\alpha) = 0$. La seconde équation obtenue

est la suivante:

$$r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0$$

On a donc les deux égalités suivantes:

$$\begin{cases} r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) = 1 \\ r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

Réolvons ce système pour $(\theta_1, \theta_2, \alpha) \in D$. On trouve pour solution:

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} ; \quad r_2 = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Soit g positive et mesurable, sur $((\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2)$. On a:

$$\begin{aligned}
 K_{e_3} &= \int g(\xi_1, \xi_2) K_{e_3}(d\xi_1, d\xi_2) \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int g(\xi_1, e_3 - \xi_1) \frac{|e_3| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |e_3 - \xi_1|^2} \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int g(\xi_1, e_3 - \xi_1) \frac{d\xi_1}{|\xi_1|^2 |e_3 - \xi_1|^2} \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)) \sin(\theta_1) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{|e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)|^2}
 \end{aligned}$$

Pour montrer cette dernière égalité (3.2), on réalise un changement en coordonnées sphériques. Posons l'application suivante:

$$\Pi : (r_1, \theta_1, \alpha) \mapsto (r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha), r_1 \sin(\theta_1) \sin(\alpha), r_1 \cos(\theta_1))$$

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Rappelons le théorème de changement de variables pour des fonctions mesurables. C'est la deuxième partie du théorème qui nous intéresse particulièrement.

Théorème 2.3.1 *Soit U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 . Alors:*

(1) Pour tout $E \subset U$ mesurable, $\varphi(E)$ est mesurable et

$$m(\varphi(E)) = \int_E |J(x)| dx$$

(2) Si $f : V \rightarrow [0, \infty]$ est mesurable, alors

$$\int_{\varphi(U)} |f(y)| dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det Jac(\varphi(x))| dx$$

Ceux sont bien deux ouverts de \mathbb{R}^n . et Π est un difféomorphisme bien connu. De plus g est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto [0, \infty]$. On peut donc appliquer la seconde propriété du théorème du changements de variables.

Calculons le déterminant de la jacobienne de Π

$$\begin{aligned}
 \det Jac(\Pi) &= \begin{vmatrix} \sin(\theta_1) \cos(\alpha) & r_1 \cos(\alpha) \cos(\theta_1) & -r_1 \sin(\theta_1) \sin(\alpha) \\ \sin(\theta_1) \sin(\alpha) & r_1 \sin(\alpha) \cos(\theta_1) & r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha) \\ \cos(\theta_1) & -r_1 \sin(\theta_1) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= r_1^2 \sin(\theta_1)^3 \sin(\alpha) + r_1^2 \cos(\alpha)^2 \cos(\theta_1)^2 \sin(\theta_1) + r_1^2 \sin(\theta_1) \sin(\alpha)^2 \cos(\theta_1)^2 + r_1^2 \sin(\theta_1)^3 \cos(\alpha) \\
 &= r_1^2 \sin(\theta_1) [\sin(\theta_1)^2 \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 \cos(\theta_1)^2 + \sin(\alpha)^2 \cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2 \cos(\alpha)^2] \\
 &= r_1^2 \sin(\theta_1) [\sin(\theta_1)^2 (\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2) + \cos(\theta_1)^2 (\cos(\alpha)^2 + \sin(\theta_1)^2)] \\
 &= r_1^2 \sin(\theta_1) [\sin(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2] \\
 &= r_1^2 \sin(\theta_1)
 \end{aligned}$$

Grâce au théorème de changements de variables, on a:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\pi^3} \int g(\xi_1, e_{3-\xi_1}) \frac{d\xi_1}{|\xi_1|^2 |e_{3-\xi_1}|^2} \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_{3-\xi_1}(r_1, \theta_1, \alpha)) \det Jac(\Pi) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{|\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)|^2 |e_{3-\xi_1}(r_1, \theta_1, \alpha)|^2} \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_{3-\xi_1}(r_1, \theta_1, \alpha)) r_1^2 \sin(\theta_1) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{r_1^2 |e_{3-\xi_1}(r_1, \theta_1, \alpha)|^2} \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_{3-\xi_1}(r_1, \theta_1, \alpha)) \sin(\theta_1) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{|e_{3-\xi_1}(r_1, \theta_1, \alpha)|^2}
 \end{aligned}$$

On obtient bien ce qui été recherché.

Réalisons un nouveau changements de variables. Définissons:

$$\Upsilon : D \mapsto (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi); (\theta_1, \theta_2, \alpha) (r_1, \theta_1, \alpha)$$

Proposition 2.3.3 *L'application Υ est un difféomorphisme.*

Preuve. Υ est une application bijective. Calculons la jacobienne de celle-ci. On rappelle qu'on a les relations suivantes:

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} ; \quad r_2 = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Cela nous donne alors:

$$\begin{aligned} \text{Jac}(\Upsilon) &= \begin{pmatrix} \frac{-\sin(\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} & \frac{\cos(\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(\text{Jac}(\Upsilon)) &= -\frac{\cos(\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)^2} \\ &= \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1+\theta_2)^2} \\ &= \frac{r_2^2}{\sin(\theta_1)} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Cela finit notre preuve.

Appliquons le théorème 3.4 du changement de variables:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^3} \int_{(0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_{3-\xi_1}(r_1, \theta_1, \alpha)) \sin(\theta_1) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{|e_{3-\xi_1}(r_1, \theta_1, \alpha)|^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), e_{3-\xi_1}(\theta_1, \theta_1, \alpha)) \sin(\theta_1) \det(\text{Jac}(\Upsilon)) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\alpha}{|e_{3-\xi_1}(\theta_1, \theta_2, \alpha)|^2} \end{aligned}$$

De plus, par définition, on a: $\xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha) = e_3 - \xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)) \sin(\theta_1) \det(\text{Jac}(\Upsilon)) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\alpha}{|\xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)|^2} \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)) \sin(\theta_1) \det(\text{Jac}(\Upsilon)) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\alpha}{r_2^2} \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)) \sin(\theta_1) \frac{r_2^2}{\sin(\theta_1)} \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\alpha}{r_2^2} \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)) d\theta_1 d\theta_2 d\alpha
 \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a: $\Phi = \Upsilon \circ \Pi$, de plus on rappelle que l'on a:

$$\Psi : D \mapsto (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}); (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto (\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha))$$

On obtient alors finalement:

$$\begin{aligned}
 K_{e_3}(g) &= \int g(\xi_1, \xi_2) K_{e_3}(d\xi_1, d\xi_2) \\
 &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\Psi(\theta_1, \theta_2, \alpha)) d\theta_1 d\theta_2 d\alpha
 \end{aligned}$$

Cela nous montre que $K_{e_3}(d\xi_1, d\xi_2)$ est l'image de la probabilité $\frac{1}{\pi} 1_D d\theta_1 d\theta_2 d\alpha$ par la fonction mesurable Ψ . La deuxième étape est de généraliser les choses par rapport à K_ξ . On avait posé au départ $\xi = e_3$. Pour retourner dans l'ensemble de départ, il faut donc passer par

l'application $:(S_\xi \otimes S_\xi)^{-1}$.

Proposition 2.3.4 *Sous K_ξ , $(|\xi_1|, |\xi_2|)$ suit la loi:*

$$\frac{2}{\pi} 1_A(r, r_1, r_2) \frac{dr_1}{dr_1} \frac{dr_2}{dr_2}$$

Preuve.

Par la suite, on notera $r = |\xi| > 0$. Comme fait précédemment, on suppose sans perte de généralité que $\xi = e_3$. On a donc $r = 1$. Pour tout $(\theta_1, \theta_2, \alpha) \in D$, $(1, r_1, r_2) \in A$. Cela est facilement expliqué par le fait que $\xi_1 + \xi_2 = e_3$. Les 3 vecteurs forment alors un triangle car ils appartiennent au même plan. Comme vu précédemment, r_1 et r_2 ne dépendent pas de α car on a :

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} ; \quad r_2 = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Définition 2.3.2 On définit l'application Υ par :

$$\Upsilon : ((0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)) \mapsto (0, \infty) \times (0, \infty) ; (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto (r_1, r_2 \alpha)$$

avec $(1, r_1, r_2) \in A$.

Proposition 2.3.5 Υ est une bijection

Preuve.

θ_1 et θ_2 sont définies de façon unique par les deux inégalités suivantes. Cela montre l'injectivité. La surjectivité est naturelle avec les propriétés de l'espace.

Lemme 2.3.1 On définit les deux égalités suivantes :

$$\cos(\theta_2) = \frac{1 + r_2^2 - r_1^2}{2r_2} ; \quad \cos(\theta_1) = \frac{1 + r_1^2 - r_2^2}{2r_1}$$

Preuve. Repartons du système suivant :

$$\begin{cases} r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) = 1 \\ r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

Si l'on met au carré chaque égalité on obtient :

$$\begin{cases} r_1^2 \cos^2(\theta_1) + r_2^2 \cos^2(\theta_2) + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = 1 \\ r_1^2 \sin^2(\theta_1) + r_2^2 \sin^2(\theta_2) - 2r_1 r_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

Si on additionne la ligne 1 et la ligne 2, cela donne:

$$\begin{aligned} 1 &= r_1^2 (\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)) + r_2^2 (\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)) + 2r_1r_2 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Notre problème ici devient alors le $\cos(\theta_1 + \theta_2)$. Repartons de l'égalité suivante:

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$r_1^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) = \sin^2(\theta_2)$$

$$r_1^2 (1 - \cos^2(\theta_1 + \theta_2)) = 1 - \cos^2(\theta_2)$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \sqrt{\frac{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)}{r_1^2}} \\ &= \frac{\sqrt{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)}}{r_1} \end{aligned}$$

On peut remplacer dans l'équation obtenue précédemment.

$$\begin{aligned} 1 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \frac{\sqrt{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)}}{r_1} \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_2 \sqrt{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)} \end{aligned}$$

Cela est équivalent à

$$\begin{aligned}\sqrt{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)} &= \frac{1 - r_1^2 - r_2^2}{2r_2} \\ r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2) &= \frac{(1 - r_1^2 - r_2^2)^2}{4r_2^2}\end{aligned}$$

On obtient finalement:

$$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{(1 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_2^2 r_1^2 + 4r_2^2}}{2r_2}$$

Il reste à montrer que: $(1 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_2^2 r_1^2 + 4r_2^2 = (1 + r_2^2 - r_1^2)^2$ On obtient bien l'égalité souhaitée:

$$\cos(\theta_2) = \frac{1 + r_2^2 - r_1^2}{2r_2}$$

Par symétrie, l'autre égalité est vraie.

Continuons la preuve de la proposition, on peut définir l'application suivante:

Définition 2.3.3 On définit Υ' l'application suivante:

$$\Upsilon' : (0, \pi)^2 \mapsto (0, \infty)^2; \quad (\theta_1, \theta_2) \mapsto (r_1, r_2)$$

Proposition 2.3.6 Υ' est un difféomorphisme.

Preuve. C'est une application bijective. On calcule la jacobienne et le déterminant de celle ci:

$$\begin{aligned}J(\Upsilon') &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial r_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial r_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial r_2}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\cos(\theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{\cos(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{-\cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

De plus, le déterminant est égale à:

$$\begin{aligned}
 \det J(\Upsilon') &= \frac{\partial r_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial r_2}{\partial \theta_2} - \frac{\partial r_2}{\partial \theta_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta_2} \\
 &= -\frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \\
 &= -r_1 r_2 \\
 &\neq 0
 \end{aligned}$$

Par le lemme 3.4 cela termine la preuve.

Soit g mesurable et positive sur $(0, \infty)^3$. En utilisant la proposition (1.20) on a:

$$\int g(|\xi_1|, |\xi_2|) K_{e_3}(d\xi_1, d\xi_2) = \frac{1}{\pi^3} \int_D g(r_1, r_2) d\theta_1 d\theta_2 d\alpha$$

Utilisons maintenant le théorème 3.4 du changement de variables. Comme Υ' est un difféomorphisme de classe C^1 . De plus r_1 et r_2 ne dépendent pas de α .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi^3} \int_D g(r_1, r_2) d\theta_1 d\theta_2 d\alpha &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \pi)^2} g(r_1, r_2) d\theta_1 d\theta_2 \int_{(0, 2\pi)} d\alpha \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0, \pi)^2} g(r_1, r_2) d\theta_1 d\theta_2 \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0, \infty)^2} g(r_1, r_2) |\det J(\Upsilon'^{-1}(r_1, r_2))| dr_1 dr_2 \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0, \infty)^2} g(r_1, r_2) \frac{dr_1}{r_1} \frac{dr_2}{r_2}
 \end{aligned}$$

Proposition 2.3.7 *La loi de $|\xi_1|$ ou $|\xi_2|$ sous K_ξ est:*

$$\frac{2}{\pi^2} \log \left| \frac{r+r_1}{r-r_1} \right| \frac{dr_1}{r_1}$$

Preuve. Cherchons la loi de $|\xi_1|$.

On sait dans un premier temps que $r + r_1 > r_2$ et $r_2 > r - r_1$. A partir de la proposition précédente:

$$\begin{aligned} E(g(r_1)) &= \frac{2}{\pi^2} \int_A g(r_1) \frac{dr_1}{r_1} \frac{dr_2}{r_2} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0,\infty)^2} g(r_1) \int_{r-r_1}^{r+r_1} \frac{1}{r_2} dr_2 \frac{dr_1}{r_1} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0,\infty)^2} g(r_1) \log \left| \frac{r+r_1}{r-r_1} \right| \frac{dr_1}{r_1} \end{aligned}$$

Proposition 2.3.8 *Soit h, g deux fonctions positives mesurables sur $(0, \infty)$, $i, j \in \{0, 1\}$. Alors on a l'égalité suivante:*

$$\int \frac{d\xi}{|\xi|^3} h(|\xi|) \int g(|\xi_i|) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) = \int \frac{d\xi}{|\xi|^3} g(|\xi|) \int h(|\xi_j|) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2)$$

2.4 Problèmes physiques : formulations faibles et variationnelles

2.4.1 Mécanique des fluides

Pour la présentation des formulations faibles, nous commencerons par le cas de l'équation de Stokes avant de passer à celui de l'équation de Navier-Stokes (afin de nous permettre d'introduire les notations progressivement).

Équation de Navier-Stokes

Considérons le problème de Navier-Stokes, pour un fluide incompressible, et soumis à des conditions initiales en temps et sur le contour $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \eta \Delta u + \nabla p = \rho f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(., 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

La fonction $g = g(x, t)$ / dans la condition de type Dirichlet sur le bord du domaine doit être à flux nul sur Γ , i.e. on suppose que :

$$\int_{\Gamma} g \cdot n = 0$$

avec n la normale extérieure à Γ . Cette condition est nécessaire pour que le problème de Navier-Stokes admette une solution. Introduisons également les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach B . Pour $q > 1$, on a :

$$L^q(0, T; B) = \left\{ v : [0, T] \rightarrow B; v \text{ est mesurable et } \int_0^T \|v(t)\|_B^q dt < +\infty \right\}$$

Ces espaces sont munis de la norme :

$$\|u\|_{L^q(0, T; B)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_B^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Notons que ces espaces ont été « présentés » au paragraphe précédent sur l'équation de la chaleur. La notation était un peu différente mais il s'agit bien des mêmes espaces. Nous avons voulu profiter de ces exemples pour introduire ces deux notations, différentes mais désignant bien la même chose. Posons $X = H_0^1(\Omega)^n$ et $Y = L_0^2(\Omega)^n$. La formulation variationnelle mixte des équations de Navier-Stokes s'écrit : Soit $f \in$

$L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)^n$. Trouver :

$$u \in W(0, T) = \left\{ v \in L^2(0, T; X), \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; X') \right\}$$

et $p \in L^2(0, T; Y)$, tels que p.p.t $\in (0, T)$, on ait :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), v \rangle_{X', X} + a(u(t), v) + c(u(t), u(t), v) + b(v, p(t)) = (f(t), v) & \forall v \in X \\ b(u(t), q) = 0 & \forall q \in Y \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

où $c : X \times X \times X \mapsto R$ est la forme trilinéaire définie par :

$$c(w, z, v) = \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla) z] \cdot v = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} v_i$$

Cette forme trilinéaire a certaines propriétés, par exemple lorsque l'on permute des termes où lorsque l'on considère que certaines variables sont à divergence nulle... Pour des raisons de stabilité, la forme c est remplacée par le forme \bar{c} définie par :

$$\bar{c} = \frac{1}{2} (c(w, z, v) - c(w, v, z))$$

qui est antisymétrique et possède par conséquent la propriété $c(w, z, z) = 0, \forall w, x, z \in X$. Nous ne rentrons pas plus avant dans la méthode, car il faudrait alors parler dès à présent du schéma numérique associé, ce qui sera fait plus tard

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce travail une méthode d'approximation du problème de Navier-Stokes en utilisant la méthode des éléments finis. Le but est de donner une méthode abstraite de résolution des problèmes non linéaires et de l'appliquer au cas des équations de Navier-Stokes. Il existe plusieurs autres méthodes d'approximation, mais pour les solutions exactes, elles n'existent que dans des cas de figure très particuliers. La méthode que nous avons proposée nous permet de répondre aux critères d'Hadamard, dans le cas stationnaire.

En perspective, il serait intéressant de voir s'il est possible d'appliquer la méthode de contrôlabilité exacte de solutions aux limites, c'est à dire, avoir l'état initial et l'état final auquel nous voulons aboutir, et "contrôler" nos équations pour qu'elles atteignent l'état final désiré.

Bibliographie

- [1] St ephane Chaussement. Statique et dynamique des fluides.
- [2] Thierry Dumont. Modélisation et discrétisation : une petite introduction. 2008.
- [3] Alexandre Ern. Theory and Practice of Finite Elements. 2004.
- [4] Danaila Ionut, Pascal Joly, and Sidi Mahmoud Kaber. Introduction au calcul scientifique par la pratique. 2005.
- [5] Y. Le Jan and A.S. Sznitman. Stochastic cascades and 3-dimensional navier-stokes equations.1997.
- [6] Stéphane CHAUSSEMENT. Mécanique des milieux continus. NUMEPHY, Univ. du Maine, Le mans. URL : http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M03_G01/co/NLP_C_M03_G01_web.html.
- [7] WIKIPÉDIA. Formulation faible. URL : http://fr.wikipedia.org/wiki/Formulation_faible.
- [8] WIKIPÉDIA. Formulation variationnelle. URL : http://fr.wikipedia.org/wiki/Formulation_variationnelle.