

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté de technologie

Département de Génie électrique

N°/Dept.Electrique/2025



Domaine : Science et Technologie

Filière : Automatique

Option : Automatique et systèmes

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention Du diplôme de Master Académique

Par :

SAFER Aymen Zakarya

BENTOUMI Mohammed

Intitulé

Amélioration des performances du système de chauffage en utilisant un contrôleur PID fractionnaire

Soutenu publiquement en juin 2025 devant le jury composé de :

Roubache Toufik	Prof./Univ. de M'sila	Président
Khatir KHETTAB	Prof./Univ. de M'sila	Encadreur
Boukhalfa Abdelouahab	Prof./Univ. de M'sila	Examineur

Année universitaire 2024/2025

Dédicaces

Je souhaite dédier ce mémoire

À mes parents bien-aimés,

À mes chers frères et sœurs

À toute ma famille

À chacun qui me connaît, que ce soit de près ou de loin

AYMEN

Dédicaces

À mes parents bien-aimés,

À mes frère et sœur, pour leur présence et leur affection.

À toute ma famille,

MOHAMED

Remerciement

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de master.

Mes sincères remerciements à mon directeur de mémoire **Khatir KHETTAB**, pour leur encadrement de qualité et leur soutien précieux.

Je remercie également les membres du jury **Roubache Toufik** et **Boukhalfa Abdelouahab**, d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je tiens à remercier vivement toute personne qui m'a aidé de près ou de loin à accomplir ce travail.

Résumé :

Le présent manuscrit s'intéresse à l'étude et à l'amélioration des performances d'un système de chauffage, à l'aide d'un régulateur PID classique et d'un régulateur PID d'ordre fractionnaire (FOPID). En s'appuyant sur une modélisation mathématique du système sous forme fractionnaire, l'objectif principal a été de comparer l'impact des deux types de régulateurs sur la réponse dynamique du procédé. Les différentes simulations menées sous MATLAB ont permis d'évaluer les performances des deux approches en termes de rapidité, de dépassement et d'erreur en régime permanent. Les résultats ont montré que la commande PID fractionnaire permet une meilleure précision, une réponse plus stable et une adaptabilité accrue face aux caractéristiques thermiques complexes du four, en comparaison avec la commande PID classique. Ainsi, l'utilisation d'un contrôleur FOPID dans un système de régulation thermique se révèle être une alternative pertinente et efficace aux solutions classiques.

Mots clés : systèmes fractionnaire, régulation PID, précision, stabilité, performance.

ملخص :

تهتم هذه المذكرة بدراسة وتحسين أداء نظام تسخين حراري، وذلك من خلال مقارنة بين المتحكم PID التقليدي والمتحكم PID الكسري (FOPID) بالاعتماد على نمذجة رياضية للنظام بشكل كسري، تم التركيز على تقييم تأثير نوعي المتحكمات على الاستجابة الديناميكية للعملية. وقد مكّنت المحاكاة المنجزة على بيئة MATLAB من تحليل الأداء من حيث السرعة، والتجاوز، والخطأ في النظام المستقر. أظهرت النتائج أن المتحكم الكسري يوفّر دقة أعلى واستجابة أكثر استقراراً، بالإضافة إلى مرونة أفضل في التعامل مع الخصائص الحرارية المعقدة للفرن، مقارنة بالمتحكم الكلاسيكي. وعليه، فإن استخدام متحكم PID كسري في نظام التحكم الحراري يُعد بديلاً فعالاً ومناسباً للحلول التقليدية.

الكلمات المفتاحية: التحكم في PID ، الأنظمة الجزئية، الدقة، الاستقرار، الأداء

Abstract

This manuscript focuses on the study and performance enhancement system using a conventional PID controller and a fractional-order PID (FOPID) controller. Based on the fractional mathematical modeling of the system, the main objective was to compare the impact of both controllers on the dynamic response of the process. The simulations carried out in the MATLAB environment allowed for a

thorough evaluation of the two approaches in terms of rise time, overshoot, and steady-state error. The results demonstrated that the fractional-order PID controller provides higher precision, improved stability, and better adaptability to the complex thermal characteristics of the furnace compared to the classical PID controller. Therefore, the use of a FOPID controller in thermal regulation systems proves to be an effective and promising alternative to traditional control solutions.

Keywords : fractional systems, PID regulation, accuracy, stability, performance.

Sommaire

Introduction générale.....	1
CHAPITRE I : Les Systèmes d'ordre fractionnaire : Théories et concepts.....	5
I-1 Introduction.....	5
I-2 Historique	5
I-3 Pourquoi un ordre fractionnaire ?.....	5
I-4 Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire.....	6
I-5 Domaines d'application des systèmes fractionnaires.....	6
I.6 Calcul fractionnaire.....	7
I.6.1 Définitions fondamentales.....	8
I.6.1.1 Définition de Grunwald-Letnikov	8
I.6.1.2 Définition de Riemann-Liouville	9
I.6.1.3 Définition de Caputo	10
I.6.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	10
I.6.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	10
I.6.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire.....	10
I.6.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire.....	11
I.7 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	12
I.7.1 Approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire.....	12
I.7.1.1 méthode d'Oustaloup	12
I.7.1.2 Méthode de Charef	13
I.7.1.3 Méthode de Matsuda	16
I.7.1.3 Méthode de Carlson	16
I.7.2 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire	17
I.7.2.1 Approximation Par calcul de l'expression analytique de la sortie du système..	17
I.7.2.2 Approximation du modèle non entier par un modèle rationnel discret.....	17
I.7.3 Présence de systèmes d'ordre fractionnaires	18
Conclusion.....	18
CHAPITRE II : Le contrôleur PID : Approche fractionnaire.....	19
II.1 Introduction.....	19
II.2 Performances des systèmes réglés.....	19
II.2.1 Rapidité	20
II.2.2 Précision.....	20
II.2.1 Stabilité.....	20

II .3 Le correcteur	21
II .4 Le but de la correction	21
II .5 Le régulateur PID	21
II .5.1 Forme Standard du Régulateur PID.....	22
II .5.2 Effet des Paramètres PID.....	23
II .6 Ajustement des paramètres de Contrôleur PID	24
II .7 Correcteur Fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$	24
II .7.1 Définition.....	24
II .7.2 Configuration du Correcteur Fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$	25
II .7.3 Avantages des Régulateurs FOPID	26
II .7.4 Applications.....	26
II .7.5 Méthodes de Conception	26
II .7.6 Fonctionnement des Correcteurs d'Ordre Fractionnaire	27
II .8 Conclusion	28
CHAPITRE III : L'utilisation d'un contrôleur PID fractionnaire pour l'amélioration des performances d'un système de chauffage : Simulation et résultats	29
III .1 Introduction.....	29
III .2 Présentation du système de chauffage thermique	29
III .2.1 Caractéristiques thermiques essentielles.....	29
III .2.2 Vers une modélisation fractionnaire : chauffage de type Podlubny.....	30
III .2.3 Analyse détaillée du chauffage de type Podlubny.....	30
III .3 Commande PID d'ordre fractionnaire d'un chauffage	31
III .3.1 Détermination des paramètres PID par la méthode de Ziegler-Nichols.....	31
III .3.1.1 Etude des performances des PID et FAPID	35
III .3.1.2 Étude de l'impact de l'ordre μ sur la dynamique de la réponse	36
III .3.1.3 Étude de l'impact de l'ordre λ sur la dynamique de la réponse	37
III .3.1 Système fractionnaire	38
III .4 Conclusion	40
Conclusion générale.....	41

Table des figures

Figure II.1 : Performances d'un système de commande.....	20
Figure II.2 : Stabilité du système.....	20
Figure II.3 : système de commande à retour unitaire classique.....	21
Figure II.4 : Asservissement par un régulateur PID.....	22
Figure II.5 : Système de commande à retour unitaire cas d'un PID fractionnaire...	24
Figure II.6 : Structure interne du $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire	25
Figure II.7 : $PI^\lambda D^\mu$: (a) Ordre entier, (b) Ordre fractionnaire.....	27
Figure III.3.1 : Réponse du système en BO et une tangente au point d'inflexion	32
Figure III.3.1.1 Sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID.....	32
Figure III.3.2 : comparaison entre PID classique et FOPID.....	33
Figure III.3.3 : comparaison entre PID classique et FOPID Cas 1.....	33
Figure III.3.4 : comparaison entre PID classique et FOPID Cas 2.....	34
Figure III.3.5 : comparaison entre PID classique et FOPID Cas 3.....	34
Figure III.3.6 : comparaison entre PID classique et FOPID Cas 4.....	35
Figure III.3.1.2 : comparaison de la réponse pour différentes valeurs de μ	36
Figure III.3.1.3 : comparaison de la réponse pour différentes valeurs de λ	38
Figure III.3.2 Sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID entier.....	39
Figure III.3.2 Sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID fractionnaire...	39

Liste des tableaux

Tableau III.3.1.1 : Les performances de four de chauffage en utilisant les contrôleurs PID et FOPID	35
Tableau III.3.1.2 : Les performances de four de chauffage en utilisant différentes valeurs de μ	37
Tableau III.3.1.2 : Les performances de four de chauffage en utilisant différentes valeurs de λ	38
Tableau III.3.1.1 : Les performances de système fractionnaire en utilisant les contrôleurs PID et FOPID.....	40

INTRODUCTION GÉNÉRALE

0.1 INTRODUCTION :

La commande des systèmes industriels est une discipline essentielle dans le monde de l'ingénierie. Elle a pour but de réguler le comportement des systèmes dynamiques afin d'atteindre des objectifs précis comme la stabilité, la précision et la robustesse.

Dans de nombreux secteurs industriels, on retrouve des processus dynamiques et complexes, que ce soit dans la production manufacturière ou dans la régulation des processus chimiques et biologiques. Savoir contrôler ces systèmes de manière efficace est crucial pour garantir leur bon fonctionnement, optimiser leur efficacité opérationnelle et assurer la qualité des produits.

- **La stabilité** : On considère qu'un système est stable lorsque ses sorties restent dans des limites raisonnables et contrôlées face à des perturbations. Ainsi, la stabilité est un objectif clé dans le contrôle des systèmes industriels, car elle permet d'éviter des comportements indésirables comme l'instabilité et les oscillations.

- **Précision** : La précision d'un système fait référence à sa capacité à atteindre et à maintenir les valeurs souhaitées de ses sorties. Dans de nombreuses applications industrielles, avoir une précision élevée est essentiel pour assurer la qualité des produits et réduire les pertes de production.

- **Robustesse** : La robustesse d'un système désigne sa capacité à maintenir ses performances même lorsque les paramètres changent ou qu'il fait face à des perturbations extérieures. Dans le monde industriel, les systèmes doivent souvent composer avec des conditions fluctuantes et des imprévus, ce qui rend la conception de contrôleurs robustes cruciale pour garantir un fonctionnement fiable.

- **Utilisation d'une commande PID fractionnaire :**

- Permet une gestion améliorée des erreurs statiques et dynamiques.
- Offre une meilleure adaptation aux divers systèmes entiers et fractionnaires.

Bien que des progrès aient été réalisés dans le domaine de la commande des systèmes industriels, il reste encore plusieurs défis à relever concernant l'application des différentes techniques de commande traditionnelles:

- **Complexité** : Les systèmes industriels d'aujourd'hui sont souvent très complexes, non linéaires et multidimensionnels, ce qui rend leur modélisation et leur contrôle avec des méthodes traditionnelles assez délicats.

- **Variabilité et Incertitude** : Les paramètres des systèmes industriels peuvent changer au fil du temps et être soumis à des incertitudes, ce qui rend la conception de contrôleurs robustes, capables de garantir les performances du système, assez complexe.

- **Temps de Réponse et Dynamique Rapide** : Certaines opérations industrielles nécessitent des temps de réponse rapides et une dynamique précise, ce qui peut être un véritable défi à réaliser avec des contrôleurs traditionnels.

0.2 OBJECTIFS :

Le principal objectif de ce mémoire est d'approfondir la compréhension théorique et pratique des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire, et de démontrer l'efficacité de la commande PID fractionnaire dans l'amélioration des performances des procédés industriels. La méthodologie adoptée repose sur une combinaison d'analyse théorique rigoureuse et de modélisation numérique via MATLAB/Simulink, afin d'évaluer l'impact de ce type de commande sur des critères tels que la rapidité, la précision et la stabilité. Ce travail vise également à explorer les applications potentielles de la commande fractionnaire dans le domaine industriel et à contribuer à l'enrichissement des connaissances dans ce champ en plein essor.

0.2 LE PLAN DE TRAVAIL :

- Le premier chapitre se concentre sur la définition du calcul et des opérateurs fractionnaires. On y décrira les caractéristiques essentielles ainsi que la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires et des intégrales. En outre, différentes méthodologies d'approximation des opérateurs seront présentées, accompagnées d'un examen approfondi des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire.

- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des régulateurs PID d'ordre entier et des régulateurs $PI^{\lambda}D^{\mu}$ d'ordre fractionnaire. Dans un premier temps, les définitions, structures et caractéristiques de ces deux types de régulateurs sont présentées. Ensuite, différentes approches permettant de déterminer les paramètres de ces régulateurs sont abordées, notamment les méthodes analytiques classiques comme Ziegler-Nichols ainsi que des considérations spécifiques au réglage des régulateurs fractionnaires.

- Le troisième chapitre présente une série de simulations comparatives entre le régulateur PID classique et le régulateur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$. L'objectif est d'évaluer leurs performances respectives à travers différents critères tels que le temps de réponse, le dépassement et l'erreur en régime permanent.

Chapitre I :

Les Systèmes d'ordre fractionnaire : Théories et concepts

I.1. Introduction

Les systèmes d'ordre fractionnaire suscitent un grand intérêt dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie, souvent décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Leur représentation dans le domaine fréquentiel nécessite l'utilisation de fonctions de transfert irrationnelles, ce qui a jusqu'à présent limité les études à leur sujet. En raison de l'absence de solutions analytiques précises, on recourt largement à des techniques numériques et d'approximation pour les analyser, les résoudre et les mettre en œuvre.

Dans ce chapitre, nous allons définir le calcul fractionnaire et les opérateurs d'ordre fractionnaire, mettre en lumière certaines de leurs caractéristiques principales, et examiner la transformation de Laplace des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. Nous aborderons également quelques méthodes d'approximation pour les opérateurs et transferts d'ordre fractionnaire.

I.2. Historique

Le développement des systèmes fractionnaires a commencé au XIXe siècle avec des mathématiciens comme Liouville et Riemann. Au cours du XXe siècle, la possibilité de leur utilisation dans plusieurs domaines scientifiques et technologiques a été découverte, ce qui a catalysé d'importants travaux théoriques. Dans les années 1970 et 1980, ont été marquées par des progrès significatifs dans la compréhension des équations différentielles fractionnaires grâce aux contributions de chercheurs tels que Caputo, Oldham et Bender. Depuis les années 1990, les progrès technologiques ont encouragé l'adoption généralisée de ces systèmes, tandis que de nouvelles techniques numériques et analytiques ont été développées pour améliorer leur applicabilité pratique [1].

I.3. Pourquoi un ordre fractionnaire ?

La montée en popularité des commandes partielles dans les systèmes dynamiques s'explique par plusieurs raisons importantes. D'abord, ces commandes permettent une modélisation plus précise de phénomènes complexes, dépassant les limites des équations

différentielles classiques, ce qui enrichit notre compréhension des systèmes naturels et artificiels. En outre, l'utilisation d'ordres fractionnaires nous aide à représenter efficacement des phénomènes non locaux, comme le comportement de la mémoire à long terme et les interactions à grande échelle. De plus, les séquences fractionnaires offrent une flexibilité accrue dans leur conception, rendant plus facile l'ajustement des paramètres pour bien décrire chaque système spécifique. Enfin, les équations fractionnaires se révèlent particulièrement utiles pour modéliser les effets dissipatifs et non linéaires que l'on observe dans de nombreux systèmes réels, ce qui élargit leur utilisation dans divers domaines scientifiques et techniques.

I.4. Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire

La représentation des systèmes à dynamique fractionnaire dans le domaine fréquentiel conduit à l'apparition de fonctions de transfert irrationnelles, ce qui se traduit, dans le domaine temporel, par des équations différentielles d'un niveau de complexité élevé. En raison de l'absence de méthodes analytiques universellement adaptées, l'étude théorique et la mise en œuvre pratique de ces systèmes sont restées, jusqu'à récemment, relativement limitées. Dans ce contexte, le recours à des approximations par des fonctions rationnelles constitue une étape essentielle pour faciliter l'analyse, la conception et la simulation des systèmes à ordre fractionnaire.

La modélisation fractionnaire permet de décrire les phénomènes physiques observés dans des dispositifs régis par des équations aux dérivées partielles. Cette approche repose sur le calcul fractionnaire initié par Leibniz et Euler dès le XVIIe siècle, redevenant un sujet de recherche majeur au XXe siècle. Actuellement, cette méthode est largement employée pour modéliser des équipements électriques, analyser les impacts des catastrophes naturelles, concevoir des systèmes de contrôle et étudier des phénomènes complexes dans divers domaines comme la biologie et les sciences humaines [2].

I.5. Domaines d'application des systèmes fractionnaires

Les systèmes fractionnaires ont des domaines d'application diversifiés, notamment dans :

- En automatique, Bode a été précurseur en introduisant l'utilisation d'une fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme d'un intégrateur d'ordre fractionnaire. Plus tard, en 1999, Podlubny a proposé une généralisation du contrôleur PID classique adaptée à des

systèmes d'ordre fractionnaire [3] [4] [5].

- Dans le domaine de l'électricité, Schmidt et Drumheller ont établi, en 1971, à partir de données expérimentales, que le courant circulant à travers un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension appliquée à ses bornes. Ils ont ainsi identifié une impédance, nommée "Fractor" ou condensateur fractionnaire, prenant la forme d'une puissance de $1/2$ de la variable de Laplace [6].

- En mécanique des milieux continus, certains matériaux comme les polymères (gommes, caoutchouc) présentent un comportement viscoélastique qui peut être modélisé à l'aide d'équations différentielles d'ordre fractionnaire [7].

- Dans le domaine thermique, l'identification des systèmes de diffusion de chaleur a montré que l'équation de la chaleur peut être adéquatement modélisée en utilisant une dérivée d'ordre $1/2$ [7].

- Le traitement d'image, en utilisant des dérivées d'ordre fractionnaire, a été exploré par Matieu. D'autres domaines tels que la géophysique, la biomédecine et l'optique ont également présenté des applications des dérivées fractionnaires [8] [9].

I.6. Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire, en tant que branche de la théorie du calcul, étend le concept de dérivée ou d'intégrale d'une fonction aux ordres non entiers [10]. L'utilisation du calcul fractionnaire a connu une augmentation rapide dans divers domaines, en grande partie en raison de sa capacité à fournir une description plus précise des phénomènes du monde réel par rapport aux approches traditionnelles [11].

L'illustration mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine des fréquences génère des fonctions irrationnelles qui, lors de la conversion dans le domaine temporel, produisent des équations différentielles difficiles à gérer. En raison de l'absence de techniques mathématiques établies, les systèmes dynamiques fractionnaires n'ont jusqu'à présent reçu qu'une attention limitée, tant sur le plan théorique que pratique. Pour faciliter l'analyse, la synthèse et la simulation de ces systèmes, l'utilisation de fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère très importante. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles [11].

L'opérateur fondamental généralisé qui inclut la différenciation et l'intégration est donnée comme suit :

$${}_a D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q} & , R(q) > 0 \\ 1 & , R(q) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-q} & , R(q) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

D'où : a et t sont les limites de l'opération et q l'ordre de l'opération.

q avec une valeur négative indique une intégration tandis que q avec une valeur positive indique une différenciation. La théorie de la dérivée d'ordre fractionnaire a été développée principalement au 19ème siècle. Il y a plusieurs définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire. Deux définitions importantes et largement appliquées sont la définition de Grunwald-Letnikov est peut-être la meilleure connu pour sa plus grande aptitude à la réalisation d'algorithmes de contrôle discrets [12].

I.6.1 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques concernant l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire.

Les résultats que l'on obtient avec ces définitions ne sont pas toujours les mêmes, mais ils restent équivalents pour un grand nombre de fonctions.

I-6-1-1 Définition de Grunwald-Letnikov

La définition de Grunwald-Letnikov est exprimée comme suit [12] :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh - jh) \quad (\text{I.2})$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients.

$$w_j^{(\alpha)} = \binom{\alpha}{j} = \frac{(\alpha+1)}{(j+1)(\alpha-j+1)} \quad (\text{I.3})$$

Avec $w_0^{(\alpha)} = \binom{\alpha}{0} = 1$ sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1 - z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{(\alpha)} z^j \quad (\text{I.4})$$

La définition de **Grunwald-Letnikov (G L)** de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \lim h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh - jh) \quad (\text{I.5})$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients $w_j^{(-\alpha)}$ avec $w_j^{(\alpha)} \binom{-\alpha}{j} = 1$, sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1 - z)^{-\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\alpha}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{(-\alpha)} z^j \quad (I.6)$$

I-6-1-2 Définition de Riemann-Liouville :

Définition 1 :

Soit \mathbb{C} et \mathbb{R} les anneaux des nombres complexes et réels respectivement, $\mathcal{R}(\cdot)$ symbolise la partie réelle du nombre complexe.

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$.

L'intégral d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est défini par [13] :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d(\xi) \quad (I.7)$$

Avec $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est la fonction gamma d'Euler.

Définition 2 :

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$. La dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction f borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{RL}^0 D_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.8)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n-1) < \alpha < n$.

Remarque : pour simplifier l'écriture on notera dans la suite I^{α} pour I_0^{α} et D^{α}

pour D_0^{α}

I-6-1-3 Définition de Caputo :

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie:

$${}^0_c D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (\text{I.9})$$

Où le nombre entier n est tel que $(n-1) < \alpha < n$ et $f^{(n)}(\tau)$ la dérivée d'ordre entier de la fonction $f(\tau)$

I.6.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire:

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [14,12] :

- 1- Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .
- 2- pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne la même résultat que la différentiation classique d'ordre entier.
- 3- pour $\alpha = 0$ l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(z) = f(z)$.
- 4- la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérateurs linéaires :

$$D^\alpha (af(z) + bg(z)) = aD^\alpha f(z) + bD^\alpha g(z) \quad (\text{I.10})$$

- 5- la loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z) \quad (\text{I.11})$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$.

I.6.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire :**I.6.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire :**

Nous commencerons par étudier la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, définie pour un ordre α strictement positif. définie par l'équation (I.7), qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$ [14] :

$$I^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = t^{\alpha-1} * f(t) \quad (\text{I.12})$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est :

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} \quad (\text{I.13})$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution:

$$\mathcal{L}\{f(t) * d(t)\} = F(S)*G(S) \quad (\text{I.14})$$

On obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville et celle de Gründwald-Leitnikov [14] :

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (\text{I.15})$$

I-6-3-2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire :

Dans ce qui suit, nous mentionnons la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée [12].

A. Définition de Riemann-Liouville :

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t_0} \quad (\text{I.16})$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, bien connue pour les cas où $(n-1) < \alpha < n$, présente un grand intérêt théorique. Toutefois, son utilisation pratique reste limitée en raison de l'absence d'une interprétation physique claire des valeurs initiales lorsque $t = 0$. Cette difficulté rend son application moins adaptée dans les systèmes réels, notamment lorsqu'il s'agit de modéliser des phénomènes physiques avec précision.

B. Définition de Caputo :

$$C. \mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f(0) \quad (\text{I.17})$$

$$(n-1) < \alpha < n$$

Remarque :

La définition de Caputo a un atout majeur par rapport à celle de Riemann-Liouville : elle permet d'intégrer des conditions initiales classiques qui sont faciles à comprendre, comme :

$y(0) = y_0, y'(0) = y_1$, etc. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante a une limite (qui est égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante ne présente pas de limite à $t = 0$. Si l'on considère $t = -\infty$ comme le point de départ (la limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville, il n'y a qu'une seule exception. Cependant, pour les processus transitoires, il est difficile d'accepter de fixer le point de départ à $-\infty$; dans ce contexte, la définition de Caputo semble être la plus appropriée à comparer aux autres. [15]

D. Définition de Gründwald-Leitnikov :

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha f(s) \quad (\text{I.18})$$

I-7 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire:

Il existe de nombreuses techniques pour approcher les systèmes d'ordre non entier, et elles sont bien documentées dans la littérature. On peut les classer en deux grandes catégories : les méthodes du domaine fréquentiel, qui incluent les approximations analogiques, et les méthodes du domaine temporel, qui se concentrent sur les approximations numériques.

I.7.1. Approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire :

La recherche d'approximations d'ordre entier pour des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire revêt une importance considérable, notamment dans le contexte de la simulation numérique et de l'implémentation des correcteurs. En effet, il est souvent nécessaire de remplacer ces fonctions fractionnaires par des modèles équivalents d'ordre entier, capables de reproduire un comportement similaire tout en étant plus simples à manipuler et à intégrer dans les outils de simulation. Il convient cependant de souligner que ces approximations restent imparfaites, et que leur précision dépend fortement de la méthode employée ainsi que de la plage fréquentielle ciblée.

I.7.1.1.méthode d'Oustaloup

L'approximation d'Oustaloup d'un opérateur dérivateur généralisé, couvrant l'ensemble du spectre fréquentiel, repose sur une distribution récursive d'une infinité de pôles et de zéros réels négatifs, garantissant ainsi un comportement à phase minimale [10]. Pour une implémentation pratique avec un nombre limité de pôles et de zéros, il est nécessaire de restreindre cette approximation à une bande fréquentielle spécifique, déterminée selon les besoins de l'application [3].

On peut approximer l'opérateurs α , $\alpha \in R^+$, dans une plage de fréquences $[w_0, w_n]$ par une fonction rationnelle : [4] [16]

$$\hat{G}(s) = C \prod_k^N = -N \frac{1+s/z_K}{1+s/\omega'_k} \quad (I.19)$$

En utilisant toutes les expressions de synthèse suivantes :

$$W'_0 = \alpha^{0.5} \cdot w_u; w_0 = \alpha^{0.5} w_u; \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha \cdot \eta > 1;$$

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \eta > 1; \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0; N = \frac{\log(w_n/w_0)}{\log(\alpha \cdot \eta)}; \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \cdot \eta)};$$

Avec w_u le gain fréquentiel unité .

Soit $w_\mu = \sqrt{wb \cdot wh}$, wb , wh sont la haute et basse fréquence respectivement.

I.7.1.2 Méthode de Charef :

Pour appliquer des modèles d'ordre fractionnaire aux schémas de commande présentés dans cette étude, nous allons utiliser la méthode dite "fonction de singularité", développée par Charef et ses collègues [17]. Cette méthode, détaillée dans la présente section, permet l'approximation des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire en fonction de leur nature (premier ou second ordre), avec une stratégie adaptée à chaque cas.

- **Système du premier ordre fractionnaire**

$$G(S) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\beta} \quad (I.20)$$

La fonction (I. 30) peut être réécrite de la façon suivante [14]

$$G(S) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z+i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.21)$$

Le total des singularités peut être déterminé en se basant sur la bande de fréquences du système, où $(N + 1)$ représente le nombre total. On peut simplifier l'équation (I.21) à un nombre fini N , ce qui nous permet d'obtenir l'approximation suivante :

$$G(S) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\beta} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.22})$$

On peut identifier les pôles et les zéros de l'équation des singularités de la manière suivante :

$$P_i = (ab)^i P_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.23})$$

$$P_i = (ab)^i a P_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (\text{I.24})$$

Avec :

$$P_0 = P_t 10^{\frac{\epsilon p}{20\beta}} \quad (\text{I.25})$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\beta)}} \quad (\text{I.26})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\beta}} \quad (\text{I.27})$$

$$\beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.28})$$

En sachant que ϵp représente l'erreur tolérée en dB , on observe une pente de -20β dB/dec. Cette pente est approximée par des segments de droite en zig-zag, avec des pentes individuelles de -20 dB/dec et 0 dB/dec.

• Système du deuxième ordre fractionnaire

Pour un système de deuxième ordre décrit par l'équation suivante:

$$G(S) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi \frac{s}{w_n} + 1\right)^\beta} \quad (\text{I.29})$$

Avec $0 < \beta < 1$ un réel positif, on peut distinguer deux cas :

- **1^{er} Cas** : $0 < \beta < 0.5$

La fonction (I.29) peut être exprimée comme suit :

$$G_e(S) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \left(\frac{s}{w_{n+1}}\right)^\eta}{\frac{s^2}{w_n^2} + 2a \frac{s}{w_n} + 1} \quad (\text{I.30})$$

Avec, $\alpha = \eta^\beta$ et $\eta = 1 - 2\beta$, ce qui peut aussi être approximé par la fonction,

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right)} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.31})$$

Les singularités (pôles P_i et zéros Z_i) sont données par les formules suivantes :

$$P_i = (ab)^{i-1} z_1 i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.32})$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_1 i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.33})$$

Avec,

$$z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.34})$$

$$\alpha = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}} \quad (\text{I.35})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10}} \quad (\text{I.36})$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.37})$$

Sachant que ϵp est l'erreur tolérée en dB .

Le calcul de l'ordre d'approximation consiste à définir la bande de fréquences de travail, définie par w_{max} , comme suit : $P_{n-1} < w_{max} < P_n$, ce qui donne la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entière de} \left[\frac{\log\left(\frac{w_{max}}{P_1}\right)}{\log ab} + 1 \right] + 1 \quad (\text{I.38})$$

Il est possible de représenter $G_e(s)$ comme une fonction paramétrique d'ordre $N+2$:

$$G_e(s) = \frac{b m_0 s^N + b m_1 s^{N-1} + \dots + b m_N}{s^{N+2} + a m_1 s^{N+1} + \dots + a m_N} \quad (\text{I.39})$$

Les coefficients a_{m_i} et b_{m_i} sont calculés à partir des singularités P_i et Z_i ainsi que α et w_n

- 2^{eme} Cas : $0.5 < \beta < 1$

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_{n+1}}\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right)\left(\frac{s}{w_{n+1}}\right)} \quad (\text{I.40})$$

Où $\alpha = \xi^\beta$ et $\beta = 1 - 2\beta$, qui a été élaborée comme précédemment en utilisant les valeurs spécifiques suivantes:

$$P_i = (ab)^{i-1} P_1 i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.41})$$

$$z_i = (ab)^{i-1} a P_1 i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.42})$$

Avec

$$z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.43})$$

$$\alpha = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}} \quad (\text{I.44})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10}} \eta \quad (\text{I.45})$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.46})$$

I.7.1.3. Méthode de Matsuda :

La méthode que nous proposons repose sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire $G(s) = s^\alpha$ à l'aide d'une fonction rationnelle $\hat{G}(s)$, en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Pour cela, nous calculons le gain en utilisant M fréquences réparties sur une bande de fréquence $[w_0, w_m]$ où l'approximation est réalisée. Pour un ensemble de points choisis ω_i avec $i=0,1,2,\dots,M$, l'approximation se présente sous la forme suivante [14]:

$$G_{(s)} = a_0 + \frac{s-\omega_0}{a_1} \frac{s-\omega_1}{a_2} \frac{s-\omega_2}{a_3} = \left[a_0 \frac{s-\omega_{i-1}}{a_i} \right]_{i=1}^M \quad (\text{I.47})$$

Ou

$$a_{i=f(\omega_i); f_0(w)} = G_{(s); f_{i+1}(s)} \frac{s-\omega_1}{f_{i(s)} - a_i} \quad (\text{I.48})$$

Le modèle d'approximation est créé en substituant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation

I.7.1.4. Méthode de Carlson :

La méthode suggérée par Carlson, qui s'inspire du processus classique de Newton pour l'approximation itérative de la racine d'ordre μ , peut être vue comme faisant partie de ce groupe [15]. Cette approche repose sur l'hypothèse suivante :

$$H(s)^\mu - G(s) = 0 \quad (\text{I.49})$$

$$H(s) = (G(s))^\mu \quad (\text{I.50})$$

En définissant $q = \frac{1}{\mu}$. $m = \frac{q}{2}$ à chaque itération, partant de la valeur initiale $H_0(s) = 1$ fonction rationnelle approximée peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G,s}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G,s} \quad (\text{I.51})$$

I.7.2. Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire

Les approximations numériques des systèmes d'ordre fractionnaire sont souvent indispensables, car il est souvent difficile, voire impossible, d'obtenir des solutions exactes de ces systèmes de manière analytique.

I.7.2.1. Approximation Par calcul de l'expression analytique de la sortie du système

Dans le cadre de l'approximation, on peut utiliser le calcul de l'expression analytique pour la sortie d'un système d'ordre fractionnaire. Cette méthode s'appuie sur la représentation modale du système, qui est définie par la fonction suivante [14] :

$$H(s) = \sum_{i=1}^L \frac{A_i}{s^n - \lambda_i} \quad (\text{I.52})$$

Où $l = 1, 2, \dots$ représente la multiplicité de la valeur propre λ_l .

La sortie du système est alors donnée par la formule :

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{A_i}{s^n - \lambda_i} \right\} * u(t) = h_1(t) * u(t) \quad (\text{I.53})$$

L'expression analytique de la sortie peut être assez compliquée, car elle implique le calcul d'une intégrale complexe. En plus, sa précision repose sur le calcul du produit de convolution entre l'entrée et $h(t)_l$

I.7.2.2. Approximation du modèle non entier par un modèle rationnel discret

Le principe de cette méthode consiste à remplacer les dérivées non entières par leurs équivalents discrets, notés $w(z - 1)$. Cette substitution nous permet d'obtenir la fonction de transfert discrète suivante [18] :

$$H(Z) = \frac{b_1(W(Z^{-1}))^{nb_1} + \dots + b_j(W(Z^{-1}))^{nb_j}}{(W(Z^{-1}))^{na_1} + \dots + a_l(W(Z^{-1}))^{nl}} \quad (\text{I.54})$$

Où Z^{-1} peut être calculé de différentes manières, notamment :

-Méthode d'Euler :

$$S^n = \left(\frac{1}{T} (1 - Z^{-1}) \right)^n = \frac{1}{T^n} \left(1 - nZ^{-1} + \frac{n(n-1)}{2} Z^{-2} + \dots \right) \quad (\text{I.55})$$

-Méthode de Tustin :

$$S^n = \left(\frac{2}{T} \frac{(1 - Z^{-1})^n}{1 + Z^{-1}} \right)^n = \left(\frac{2}{T} \right)^n \left(1 - 2nZ^{-1} + 2 - nZ^{-2} + \dots \right) \quad (\text{I.56})$$

-Méthode de Simpson :

$$S^n = \left(\frac{3}{T} \frac{(1-Z^{-1})^n}{1+4Z^{-1}} \right)^n = \left(\frac{3}{T} \right)^n (1 - 4nZ^{-1} + 2n - nZ^{-2} + \dots) \quad (\text{I.57})$$

-Méthode d'Al Alaoui :

$$S^n = \left(\frac{8}{7T} \frac{(1-Z^{-1})^n}{\frac{1+Z^{-1}}{7}} \right)^n = \left(\frac{8}{7T} \right)^n \left(1 - \frac{8}{7}nZ^{-1} - \frac{24}{49}n - \frac{32}{49}n^2Z^{-2} + \dots \right)^n \quad (\text{I.58})$$

L'un des inconvénients de ces méthodes, c'est qu'elles ne permettent pas d'obtenir des modèles complets d'ordre élevé, ce qui complique la simulation en temps réel.

I.7.3 Présence de systèmes d'ordre fractionnaires

L'identification des systèmes à ordre fractionnaire est un domaine de recherche passionnant qui a pris de l'ampleur depuis les années 1990. L'idée ici est de créer un modèle mathématique d'un système physique en se basant sur des données expérimentales et des connaissances antérieures. Beaucoup de systèmes physiques montrent une dynamique non entière, ce qui signifie que leur comportement dans le temps est décrit par des équations différentielles à ordre fractionnaire. Du coup, utiliser des modèles entiers ne permet pas de les identifier de manière efficace.

Cette question a suscité un grand intérêt parmi les scientifiques. Cependant, l'identification des systèmes à ordre fractionnaire apporte son lot de défis, car il ne s'agit pas seulement d'estimer les paramètres du modèle, mais aussi de déterminer leurs ordres fractionnaires. Pour surmonter ces obstacles, de nombreuses méthodes temporelles et fréquentielles ont été développées et proposées dans la littérature scientifique, afin de garantir une identification précise des systèmes à ordre fractionnaire.

Conclusion

En conclusion, ce chapitre nous a permis d'explorer les bases du calcul fractionnaire. Nous avons présenté des définitions mathématiques des opérateurs fractionnaires, tout en soulignant leurs propriétés et leurs transformations de Laplace. En outre, nous avons analysé deux types de méthodes pour estimer la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire : les approches fréquentielles et les méthodes numériques.

Chapitre II :

Le contrôleur PID : Approche fractionnaire

II.1. Introduction :

La commande PID (Proportionnelle–Intégrale–Dérivée) représente une stratégie de régulation très répandue dans le domaine des systèmes de contrôle industriels, en raison de sa simplicité de mise en œuvre et de son efficacité éprouvée dans une grande variété d'applications. Le régulateur PID classique agit en corrigeant la sortie du système en fonction de l'erreur entre la valeur mesurée et la consigne, à l'aide d'une combinaison des actions proportionnelle, intégrale et dérivée. Toutefois, malgré sa robustesse et sa large adoption, le PID conventionnel peut rencontrer des limitations, notamment lorsqu'il s'agit de systèmes présentant des dynamiques complexes ou des comportements non linéaires.

Pour remédier à ces contraintes, la commande PID fractionnaire a été développée. Cette approche consiste à généraliser la structure du PID traditionnel en y intégrant des opérateurs fractionnaires, tels que des dérivées et intégrales d'ordre non entier. Le contrôleur ainsi obtenu, connu sous l'acronyme FOPID, offre une flexibilité accrue et une meilleure capacité d'adaptation aux systèmes avec effets de mémoire ou à comportement complexe. Le FOPID permet ainsi d'optimiser les performances du système en améliorant des aspects essentiels tels que la rapidité, la précision et la stabilité, tout en conservant les avantages fondamentaux de la régulation PID.

Dans ce chapitre, nous présenterons les notions de base de la régulation, en mettant en lumière les critères de performance d'un système réglé. Une attention particulière sera portée aux différences entre les approches PID classique et fractionnaire, ainsi qu'à leurs implications pratiques en matière de contrôle.

II.2 Performances des systèmes réglés : [20]

Les performances des systèmes réglés, comme spécifié dans le cahier des charges, sont illustrées par la figure suivante (II.1) :

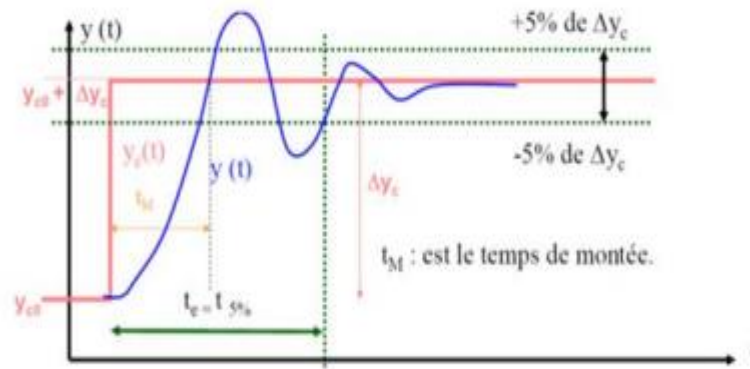


Figure II.1: Performances d'un système de commande

II.2.1 Rapidité :

La rapidité quantifie le temps de réponse du système. Elle correspond au temps de réaction de la sortie par rapport à la consigne. Le temps mis par la réponse pour ne plus dépasser 5% de la valeur finale. Ce temps est retenu comme critère de rapidité 5%. [20]

II.2.2 Précision :

La précision quantifie l'erreur lorsque l'équilibre est atteint, Avec l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ de même nature. Autrement, un système est précis si la sortie suit la consigne en toutes circonstances avec un écart inférieur à la valeur définie dans un cahier des charges. [20]

II.2.3 Stabilité :

On dit qu'un système est stable lorsque celui-ci tend à revenir à son état d'équilibre pour une consigne constante, la sortie doit être constante [20]

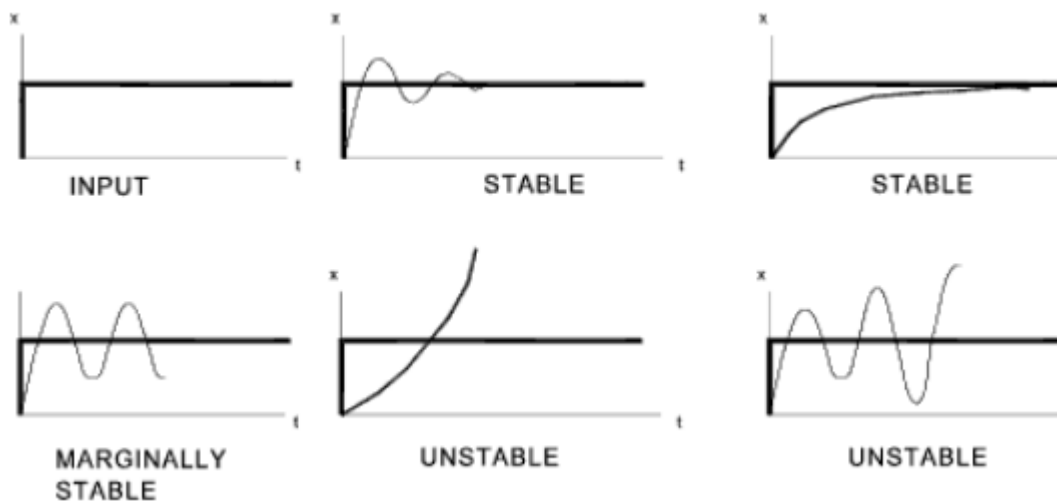


Figure II.2. Stabilité du système.

II.3. Le correcteur :

Le correcteur représente la partie « intelligente » de l'asservissement. Bien le choisir est essentiel pour garantir de bonnes performances. Facile à ajuster, il peut également être doté d'une adaptation automatique de ses paramètres en fonction de la plage de fonctionnement du procédé, notamment lorsque celle-ci évolue lentement. [21]

II.4 Le but de la correction :

Le but de la correction est de doter l'asservissement des qualités attendues, par le calcul et l'implantation du correcteur nécessaire. Les opérateurs essentiels du correcteur sont réalisables à partir d'amplificateurs à courant continu et d'éléments résistances/capacités. La réalisation numérique peut se transposer aisément à partir d'un schéma analogique, en conservant la même organisation fonctionnelle et en associant un intégrateur numérique à chaque intégrateur électronique[23, 24]

II.5 Le régulateur PID:

Le régulateur PID, souvent désigné comme correcteur PID (proportionnel, intégrateur, dérivateur), est un système de contrôle essentiel dans les procédés industriels. Il se compose d'un comparateur qui mesure l'écart (ou erreur) entre la valeur mesurée et la consigne, ainsi que d'un correcteur dont l'algorithme calcule l'action nécessaire pour faire évoluer le système conformément aux spécifications du cahier des charges. Ce régulateur permet ainsi de réaliser un asservissement en boucle fermée, assurant stabilité et précision dans la régulation du procédé. Comme illustré dans la figure II.3

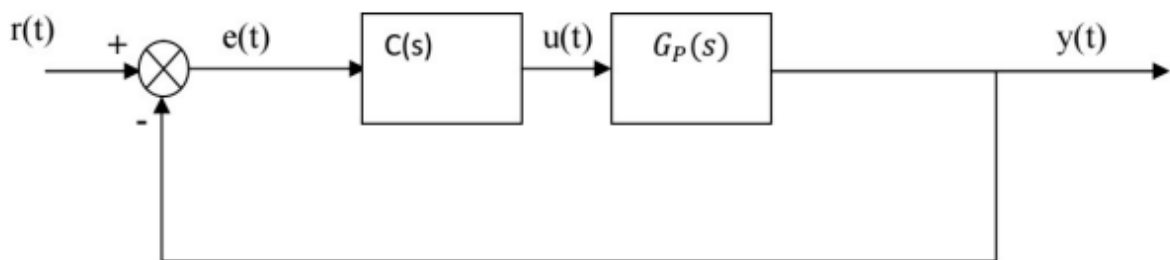


Figure II.3 système de commande à retour unitaire classique

Avec :

$u(t)$: Le Signal de commande

$e(t)$: L'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$

$Y(t)$: La grandeur à commander

$C(s)$: L'équation de transfert du correcteur

$Gp(s)$: est l'équation de transfert de système

La figure suivante présente un exemple d'asservissement par un régulateur PID :

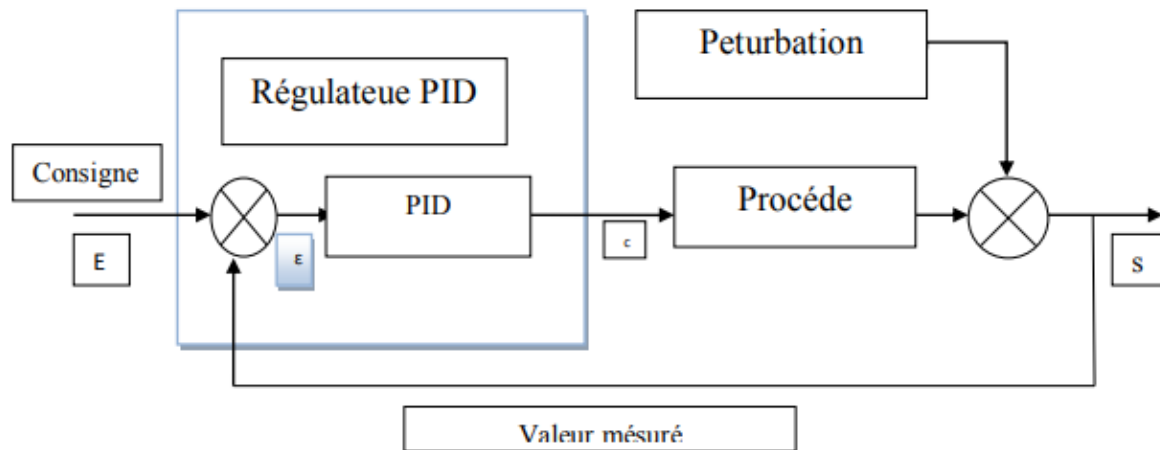


Figure II.4 : Asservissement par un régulateur PID

S: signal de mesure, E: consigne (valeur entrée ou signal), et ε : signal d'écart (ou d'erreur $e(t)$) sont exprimés dans la même unité. Le signal C élaboré par le régulateur est le signal de commande.

L'équation suivante décrit le fonctionnement du correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique :

$$u(t) = k_p(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt}) \quad (\text{II.1})$$

La fonction de transfert du PID peut être exprimée en application de la transformée de Laplace à l'expression (II.1), et comme conditions initiales nulles.

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right) \quad (\text{II.2})$$

II.5.1 Forme Standard du Régulateur PID :

Un régulateur PID standard est défini par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + K_D s \quad (\text{II.3})$$

où K_p est le gain proportionnel, K_i est le gain intégral, et K_d est le gain dérivé .

Composants du PID :

Chaque composant du régulateur PID joue un rôle spécifique et complémentaire :

Proportionnel (P) : génère une action proportionnelle à l'erreur actuelle. Il améliore la réactivité du système, mais peut engendrer une erreur de régime permanent.

Intégral (I) : accumule l'erreur dans le temps, ce qui permet de corriger l'erreur de régime permanent. Un mauvais réglage peut toutefois entraîner des oscillations.

Dérivé (D) : réagit à la variation de l'erreur dans le temps. Il anticipe les changements, réduit les oscillations et contribue à améliorer la stabilité du système.

II.5.2 Effet des Paramètres PID :

Les paramètres K_p , K_i , et K_d influencent différemment le comportement du système :

Proportionnel (P) : Le gain proportionnel augmente la réactivité du système.

- Avantage : réponse rapide aux changements.
- Inconvénient : peut introduire une erreur de régime permanent ; une valeur trop élevée peut générer des oscillations.

Intégral (I) : Le gain intégral élimine l'erreur de régime permanent.

- Avantage : corrige les biais persistants.
- Inconvénient : peut causer des oscillations et de l'instabilité si mal réglé.

Dérivé (D) : Le gain dérivé améliore la stabilité du système.

- Avantage : réduit les oscillations et améliore la stabilité.
- Inconvénient : sensible au bruit de mesure, ce qui peut entraîner des réponses erratiques. [22]

Avantages & inconvénients du PID :

- **Avantages du PID :**

- Régulation flexible a trois paramètres différents
- Précision et rapidité
- Ne nécessite pas une modélisation dynamique du processus.
- Fiabilité

- **Inconvénients du PID :**

- Nécessité d'implémenter les bons paramètres.
- La méthode de calcul peut prendre du temps.
- Trois paramètres au lieu de cinq Peut être pas insuffisamment

II.6 Ajustement des paramètres de Contrôleur PID:

Régler un régulateur PID consiste à ajuster ses trois paramètres fondamentaux (le gain proportionnel, le gain intégral et le gain dérivé) afin d'obtenir une réponse optimale du système en termes de précision, de rapidité, de stabilité et de robustesse. Pour ce faire, plusieurs méthodes de réglage sont disponibles, basées notamment sur les spécifications temporelles du système.

- Méthode Ziegler–Nichols.
- Méthode de Chien-Hrones-Reswick.
- Méthode de Cohen-Coon.
- Méthode de Halman.

II.7. Correcteur Fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$:

II.7.1.Définition :

Le contrôleur PID est largement utilisé dans l'industrie en raison de sa simplicité de mise en œuvre. Toutefois, ses performances peuvent être affectées par des délais importants ou des variations des paramètres du procédé. Pour surmonter ces limitations, des techniques avancées telles que le retour d'état ou le modèle interne sont souvent adoptées. Afin d'améliorer encore davantage les performances, Podlubny (1999) a introduit le contrôleur PID fractionnaire ($PI^\lambda D^\mu$), qui généralise le PID classique en remplaçant l'intégrateur et le dérivateur par des opérateurs fractionnaires d'ordre réel λ et μ .

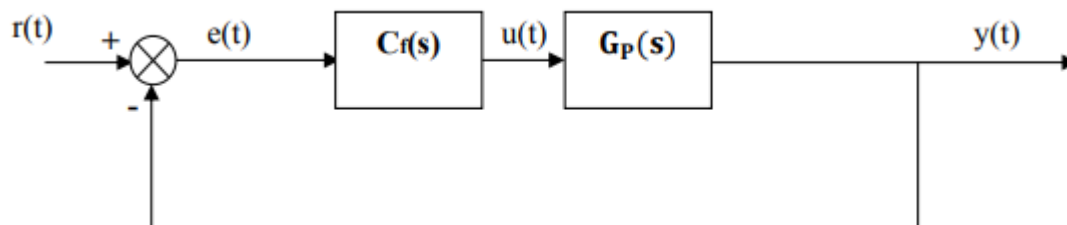


Figure II.5. Système de commande à retour unitaire (cas d'un PID fractionnaire)

Sachant que :

- $u(t)$: le signal de commande.
- $e(t)$:l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$: .
- $y(t)$: la grandeur à commander.
- $C_f(s)$:la fonction de transfert du correcteur fractionnaire.
- $G_p(s)$: est la fonction de transfert de système.

II.7.2. Configuration du Correcteur Fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ [25]

Les régulateurs FOPID représentent une évolution significative du concept de régulateur PID traditionnel en incorporant des dérivées et des intégrales d'ordre fractionnaire. Cette extension permet une adaptation plus précise aux comportements dynamiques des systèmes, offrant ainsi des performances améliorées dans une variété d'applications de contrôle.

La représentation la plus commune du correcteur PID fractionnaire est formulée comme suit :

$$u_c(t) = k_p(e(t) + \frac{1}{T_i} D^\lambda(e(t)) + T_d D^\mu(e(t))) \quad (\text{II.4})$$

Où :

k_p : représente la constante proportionnelle.

T_i : est la constante d'intégration.

T_d : indique la constante de différenciation.

λ : représente l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration tel que $0 < \lambda < 1$

μ : est l'ordre fractionnaire de l'action de différenciation tel que $0 < \mu < 1$

La fonction de transfert de ce correcteur peut être exprimé par l'application de la transformé de Laplace à l'expression (II.3) avec les conditions de départ nulles :

$$C(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s^\lambda} + T_d s^\mu) \quad (\text{II.5})$$

Une expression alternative, préférée pour sa facilité de calcul analytique, est présentée sous forme parallèle :

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (\text{II.6})$$

La figure II.7.2. illustre clairement la structure interne en parallèle du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, où des connexions parallèles sont établies entre les composantes proportionnelles, intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire.

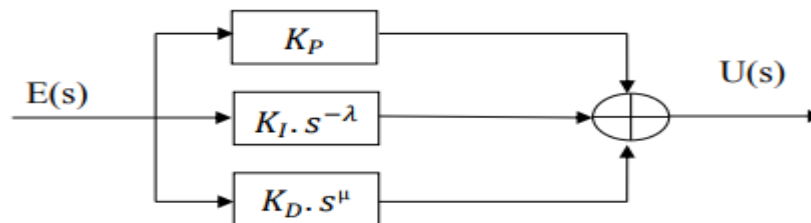


Figure II.6. : Structure interne du $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

L'illustration met en lumière que le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire est une généralisation du correcteur PID classique, ce qui élargit son champ d'application d'un simple point à un plan

entier. Cette extension apporte une flexibilité supplémentaire dans la conception des systèmes de commande PID.

II.7.3 Avantages des Régulateurs FOPID :

Les régulateurs FOPID présentent plusieurs atouts par rapport aux régulateurs PID classiques :

- Ajustement précis : La possibilité de modifier les ordres fractionnaires permet une adaptation plus fine aux comportements dynamiques complexes des systèmes.
- Élimination des effets indésirables : Les termes intégral et dérivé d'ordre fractionnaire aident à atténuer des problèmes comme les retards et les oscillations excessives.
- Robustesse : En général, les régulateurs FOPID sont plus robustes face aux variations de paramètres et aux perturbations que leurs homologues PID traditionnels [26].

II.7.4 Applications :

Les régulateurs fractionnaires de type FOPID sont aujourd'hui utilisés dans de nombreux domaines d'application, notamment :

- le contrôle des procédés industriels,
- la régulation des systèmes mécaniques et électriques,
- le pilotage des véhicules autonomes,
- ainsi que le contrôle des systèmes robotiques.

Leur principal atout réside dans leur capacité à s'adapter avec finesse aux comportements dynamiques, souvent complexes et non linéaires, des systèmes. Cette flexibilité en fait une solution pertinente pour répondre aux exigences croissantes des systèmes modernes.

II.7.5 Méthodes de Conception :

La conception des régulateurs FOPID implique généralement de déterminer les ordres fractionnaires et d'ajuster les gains. Pour y parvenir, on peut utiliser des techniques d'identification de système, d'optimisation des gains, ainsi que des méthodes de réglage spécifiques aux régulateurs FOPID.

En résumé, les régulateurs FOPID sont une extension puissante et flexible du concept traditionnel de régulateur PID. Leur capacité à s'adapter avec précision aux comportements dynamiques des systèmes en fait un outil précieux pour une multitude d'applications de contrôle. Bien que leur conception et leur mise en œuvre nécessitent une compréhension approfondie des caractéristiques du système et des techniques d'optimisation avancées, les

avantages potentiels en termes de performances et de robustesse en font un choix séduisant pour de nombreuses applications industrielles [27].

II.7.6 Fonctionnement des Correcteurs d'Ordre Fractionnaire:

Le fonctionnement des correcteurs repose sur la comparaison d'un signal de retour provenant de l'installation de traitement avec un point de consigne ou un signal de référence $u(t)$. Cela génère un signal d'erreur, noté $e(t)$, qui est ensuite appliqué à l'algorithme PID. Selon les calculs réalisés par les termes proportionnel, intégral et dérivé de l'algorithme, on ajoute deux paramètres supplémentaires, λ et μ , qui déterminent respectivement l'ordre d'intégration et de dérivation. En jouant sur ces paramètres, on peut obtenir différentes configurations de correcteurs d'ordre fractionnaire[5] .

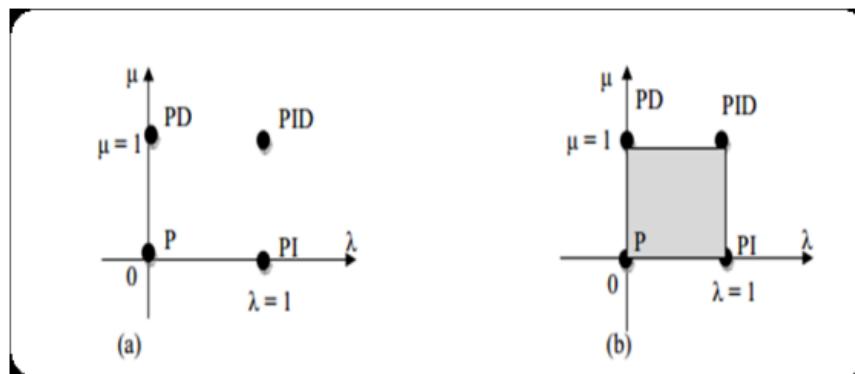


Figure II.7. : $PI^\lambda D^\mu$: (a) Ordre entier, (b) Ordre fractionnaire

Les cas suivants peuvent être identifiés en référence à la figure :

- Quand $\lambda=0$ et $\mu=0$, le correcteur correspond au cas classique du correcteur P.
- Si $\lambda=1$ et $\mu=0$, cela donne un correcteur PI classique.
- Quand $\lambda=0$ et $\mu=1$, on a un correcteur PD classique.
- Avec $\lambda=1$ et $\mu=1$, le correcteur est le classique PID.
- Pour $0<\lambda<1$ et $\mu=1$, on obtient un correcteur de type PI fractionnaire.
- Lorsque $\lambda=0$ et $0<\mu<1$, il s'agit d'un correcteur PD fractionnaire.
- Enfin, lorsque $0<\lambda<1$ et $0<\mu<1$, nous avons un correcteur PID fractionnaire.

Ces constatations montrent que les correcteurs classiques sont en réalité des cas spécifiques des correcteurs d'ordre fractionnaire.

II.8. Conclusion :

Ce chapitre a fourni une compréhension approfondie des principes fondamentaux de la régulation, en mettant en lumière les performances des systèmes réglés en termes de rapidité, précision et stabilité. Nous avons exploré les concepts clés de la commande PID classique et fractionnaire, soulignant les avantages et les limitations de chacune. En particulier, nous avons démontré comment la commande PID fractionnaire offre une flexibilité accrue pour les systèmes complexes. Ce sujet technique a été traité de manière détaillée et approfondie, offrant une perspective fascinante sur les enjeux de la régulation des systèmes.

Chapitre III

L'utilisation d'un contrôleur PID fractionnaire pour l'amélioration des performances d'un système de chauffage : Simulation et résultats

III.1. Introduction :

Aujourd'hui, la plupart des appareils dans les installations industrielles et domestiques doivent être maintenus à des valeurs physiques précises, même si des variations externes ou internes peuvent influencer ces valeurs. Par exemple, la température d'un four, le niveau d'eau dans un réservoir, ainsi que la vitesse et la position des moteurs, sont des éléments qui varient naturellement. Il est donc essentiel de s'attaquer à ces défis en utilisant des mesures appropriées pour le processus concerné.

Dans le domaine du contrôle des systèmes dynamiques, la commande PID est essentielle pour garantir des performances optimales. Ce chapitre se penche sur l'étude et la comparaison entre la commande PID d'ordre entier et celle d'ordre fractionnaire, mettant en avant les avantages et les améliorations que chacune de ces approches peut offrir.

III.2. Présentation du système de chauffage thermique :

Un système de chauffage, c'est un processus industriel qui a pour but d'augmenter la température d'un environnement ou d'un matériau en utilisant une source d'énergie thermique. On retrouve ce type de procédé dans de nombreux domaines, comme les fours industriels, la cuisson, le traitement thermique des métaux, et même dans nos systèmes de chauffage à la maison.

III.2.1 Caractéristiques thermiques essentielles :

D'après l'étude de Christophy Fady (2016), un environnement thermique peut être décrit à l'aide de deux paramètres physiques clés :

- **La diffusivité thermique (α)** : elle mesure la rapidité avec laquelle la chaleur se propage à travers un matériau.
- **L'effusivité thermique (η)** : elle indique la capacité d'un matériau à échanger de la chaleur avec son environnement.

Ces deux concepts sont cruciaux pour saisir le comportement thermique d'un four. On observe un certain retard dans le chauffage et une réponse lente, caractéristiques des systèmes ayant une forte inertie thermique.

III.2.2 Vers une modélisation fractionnaire : chauffage de type Podlubny.

La modélisation traditionnelle basée sur les équations différentielles d'ordre entier montre rapidement ses limites lorsqu'il s'agit de représenter fidèlement le comportement thermique réel d'un système. En effet, ces approches ne permettent pas de prendre en compte les effets de mémoire ni la réponse non locale, caractéristiques des matériaux soumis à des transferts thermiques profonds. Dans ce contexte, les travaux de Podlubny (1999) proposent une alternative pertinente : la modélisation à l'aide de dérivées fractionnaires. Cette approche permet de mieux décrire les phénomènes diffusifs complexes observés dans des milieux thermiques semi-infinis ou multicouches. Un exemple typique de cette modélisation est donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{6484s^{1.0888} + 0.001s^{0.001} + 1.017}$$

Ce modèle reflète avec précision les comportements dynamiques du système, en intégrant à la fois une diffusion thermique non linéaire, des effets d'effusivité, ainsi qu'une mémoire thermique étalée dans le temps. Il confirme ainsi les conclusions de Christophy Fady (2016) sur la nécessité d'adopter des stratégies de commande adaptées à ces dynamiques complexes

III.2.3 Analyse détaillée du chauffage de type Podlubny:

Le chauffage de type Podlubny fait référence à un système thermique modélisé selon les principes des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire, tels que présentés dans les travaux de Igor Podlubny (1999). Contrairement aux modèles classiques à dérivées entières, ce type de chauffage prend en compte les effets de mémoire et de diffusion lente qui caractérisent les matériaux soumis à un transfert de chaleur profond et progressif.

Dans ce modèle, la température ne réagit pas de manière instantanée à l'excitation thermique. Au contraire, la réponse est étalée dans le temps, traduisant une mémoire de l'état thermique antérieur. Ce comportement est représenté mathématiquement à l'aide d'opérateurs fractionnaires tels que $s^{-\alpha}$, où α est un réel non entier.

Le modèle proposé par Podlubny pour un four thermique est :

$$G(s) = \frac{1}{6484s^{1.0888} + 0.001s^{0.001} + 1.017}$$

Cette fonction de transfert illustre parfaitement l'influence combinée :

- d'une dérivée fractionnaire dominante (ordre 1.0888), traduisant la dynamique globale du système,
- d'un terme de très faible ordre (0.001), représentant une composante à mémoire lente ou résiduelle,
- et d'une constante statique, traduisant une résistance thermique équivalente.

Le système de chauffage de type Podlubny se distingue donc par son aptitude à modéliser fidèlement les comportements non idéaux des milieux réels, en particulier lorsqu'il s'agit de conduction thermique dans des structures étendues ou composites. Cette modélisation fractionnaire permet d'obtenir une représentation plus précise de la réponse thermique, ouvrant la voie à une commande plus fine et plus performante à l'aide de régulateurs adaptés comme les FOPID.

La dynamique lente, les retards internes et les effets de mémoire thermique justifient l'utilisation d'un modèle fractionnaire pour un système de chauffage. Cela permet de concevoir des contrôleurs PID fractionnaires (FOPID) mieux adaptés, que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre, dans le cadre d'une amélioration des performances par optimisation.

III.3. Commande PID d'ordre fractionnaire d'un chauffage:

Le four de chauffage que nous avons mis en place sous MATLAB est un système d'ordre fractionnaire, décrit par la fonction de transfert suivante [28] :

$$G(s) = \frac{1}{6484s^{1.0888} + 0.001s^{0.001} + 1.017}$$

III.3.1 Détermination des paramètres PID par la méthode de Ziegler-Nichols (Réponse indicielle):

La figure suivante montre la réponse du système thermique à un échelon unitaire et une tangente a été tracée au point d'inflexion pour déterminer **L** et **T**:

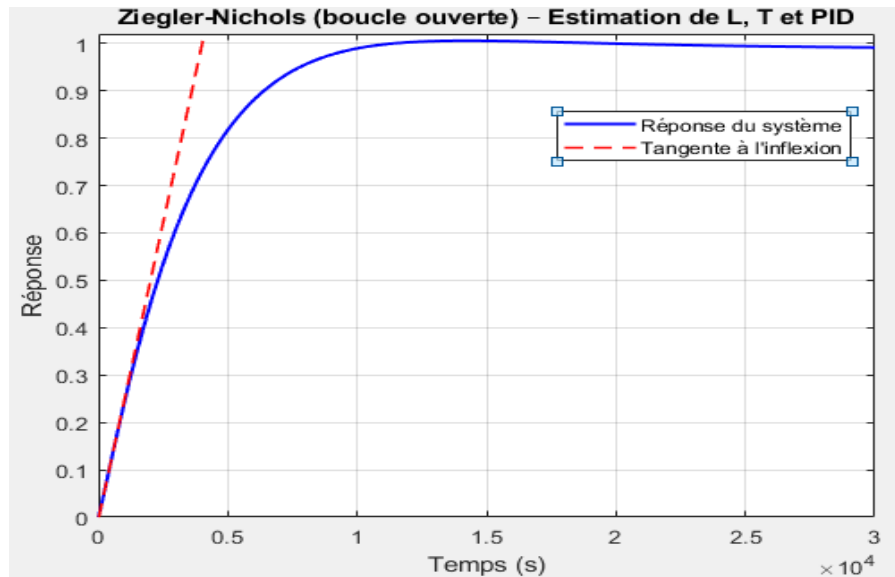


Figure III.3.1: Réponse du système en BO et une tangente au point d'inflexion

Détermination graphique de L et T :

$$L=15.10 \text{ secondes}$$

$$T=3996.65 \text{ secondes}$$

Calcul des paramètres PID selon Ziegler-Nichols : À l'aide des formules classiques pour un régulateur PID, on obtient :

$$K_p = 1.2 \frac{T}{L} \quad , \quad K_i = 2 \frac{L}{T} \quad , \quad K_p = 0.5 L$$

En appliquant les valeurs extraites :

$$K_p = 317.6271 \quad , \quad K_i = 0.1325 \quad , \quad K_p = 7.5497$$

La Figure (IV.7) montre la sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID entier avec les valeurs de paramètres optimisées suivantes :

$$K_p = 317.6271, K_i = 0.1325, K_p = 7.5497$$

$$K_p=317.6271, K_i= 0.1325 , K_p=7.5497$$

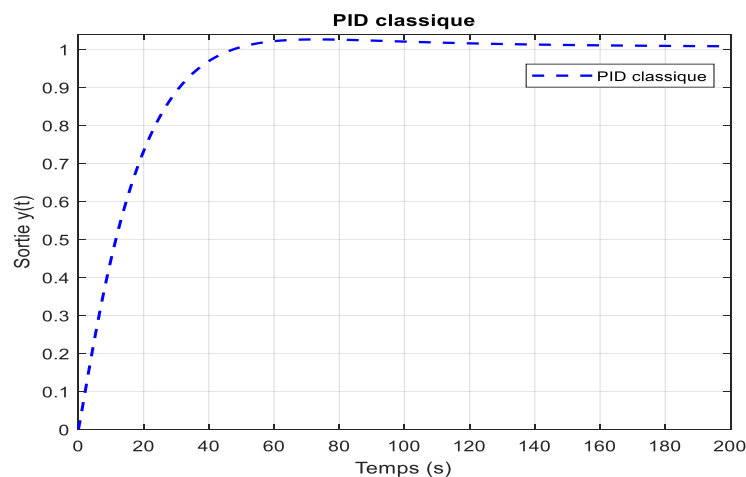
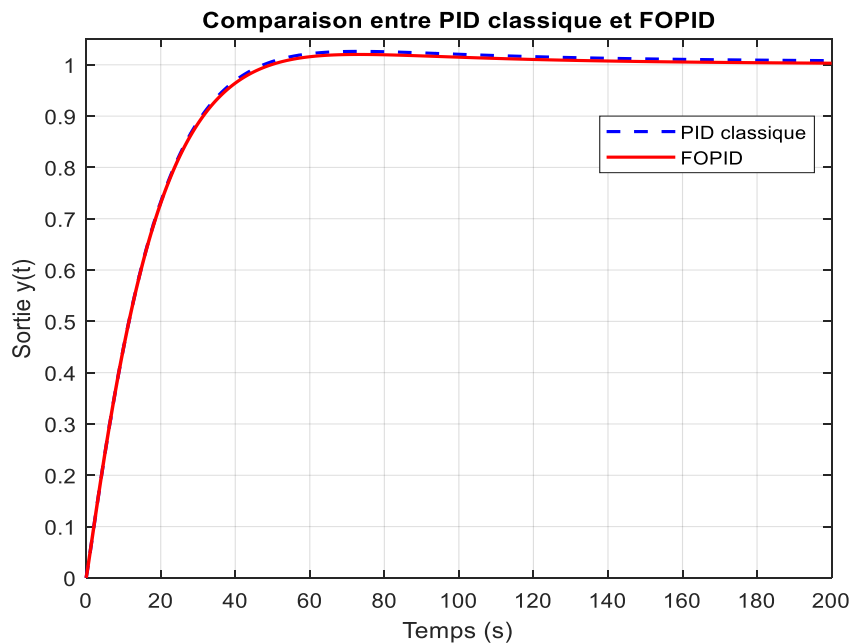


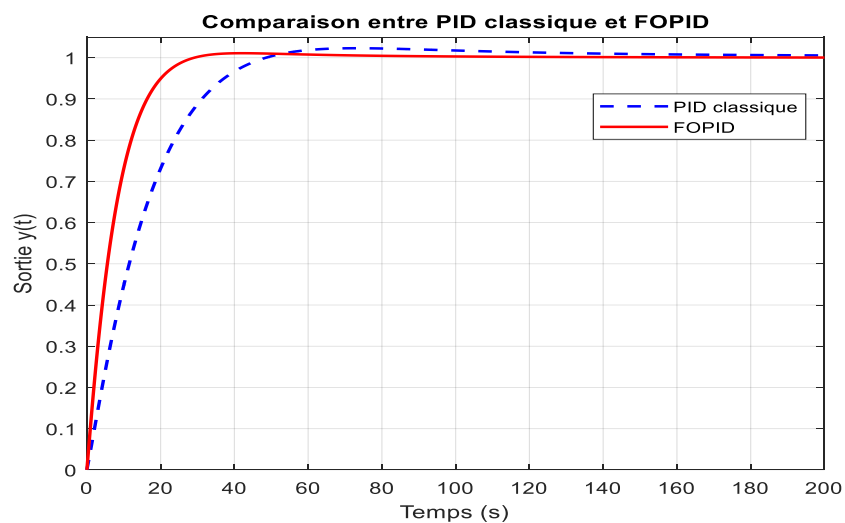
Figure III.3.1.1 Sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID

$$K_p = 317.6271, K_i = 0.1325, K_d = 7.5497, \lambda = 0.11026; \mu = 0.78907$$

**Figure III.3.2:** comparaison entre PID classique et FOPID**Cas 1**

Pid : $K_p = 317.62$; $K_i = 0.062062$; $K_d = 7.5478$;

Fopid : $K_{p_{fopid}} = 449.95$; $K_{i_{fopid}} = 2.3695$; $K_{d_{fopid}} = 300$; $\lambda = 0.065526$; $\mu = 0.10812$;

**Figure III.3.3:** comparaison entre PID classique et FOPID Cas 1

Cas 2 :

Pid : $K_p = 916$; $K_i = 0.58$; $K_d = 462.5$;

Fopid : $K_{p_{fopid}} = 775$; $K_{i_{fopid}} = 470$; $K_{d_{fopid}} = 975$; $\lambda = 0.01$; $\mu = 0.5$;

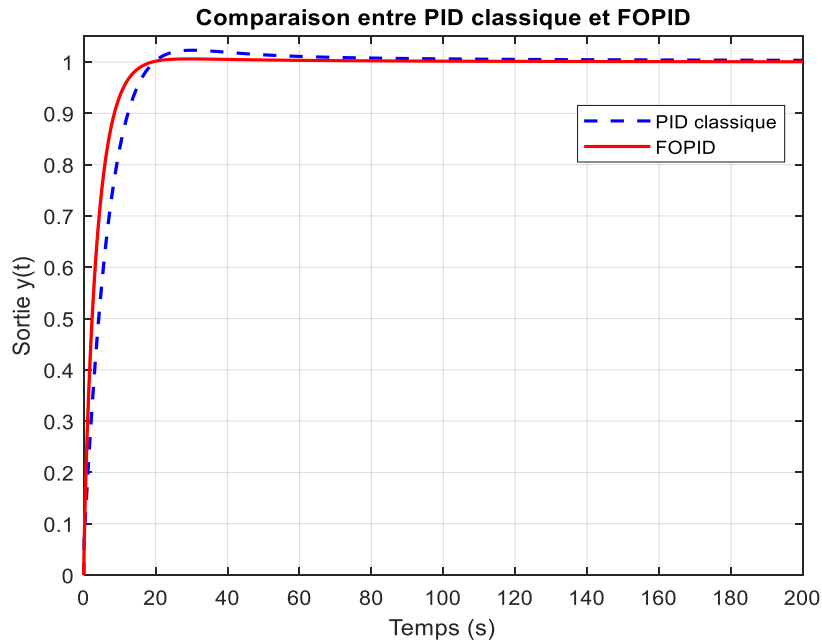


Figure III.3.4: comparaison entre PID classique et FOPID Cas 2

Cas 3 :

Pid : $K_p = 974.38$; $K_i = 38.9$; $K_d = 587.01$;

Fopid : $K_{p_{fopid}} = 959.9$; $K_{i_{fopid}} = 376$; $K_{d_{fopid}} = 981.94$; $\lambda = 0.05$; $\mu = 0.15375$;

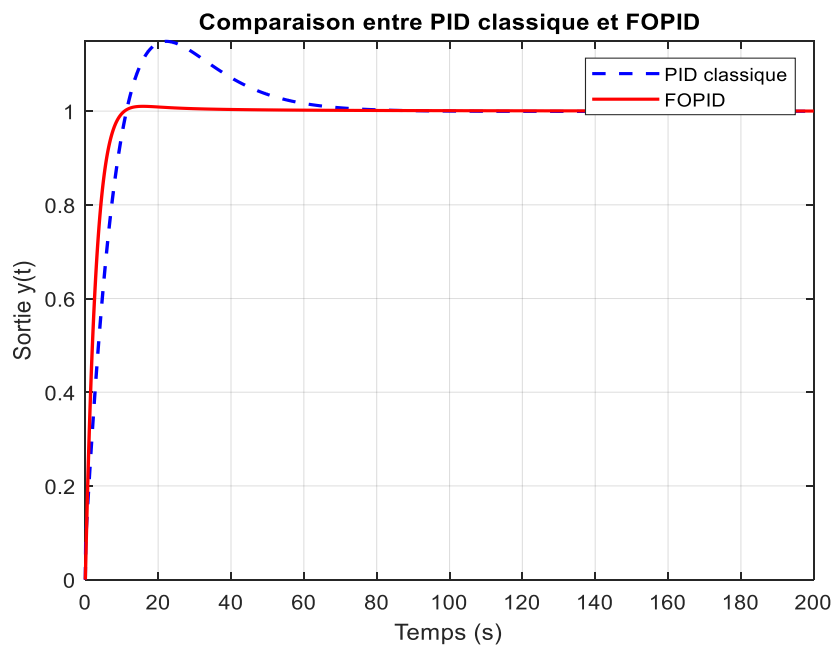


Figure III.3.5: comparaison entre PID classique et FOPID Cas 3

Cas 4 :

Pid : $K_p = 940.336$; $K_i = 2.9172$; $K_d = 610.307$;

Fopid : $K_{pfopid} = 775$; $K_{ifopid} = 469.95$; $K_{dfopid} = 975$; $\lambda = 0.1$; $\mu = 0.11847$;

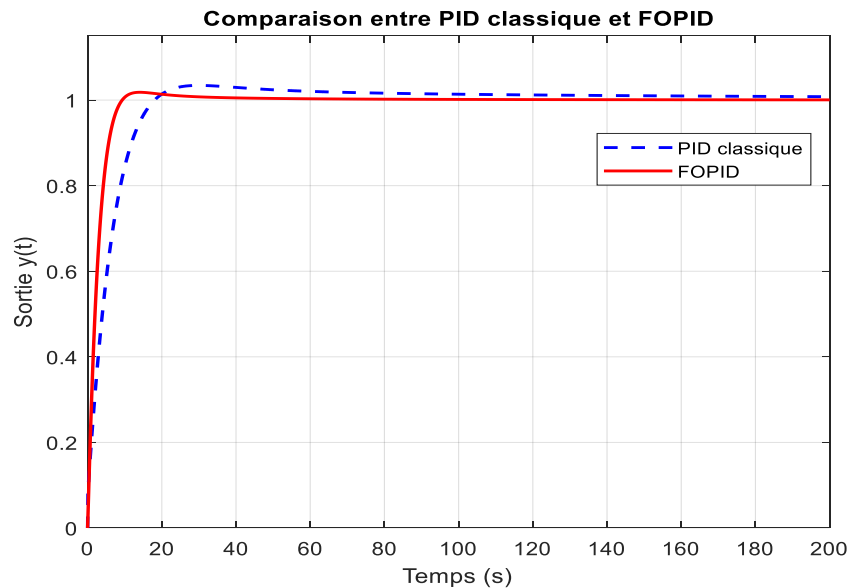


Figure III.3.6: comparaison entre PID classique et FOPID Cas 4

III.3.1.1 Etude des performances des PID et FAPID :

L'évaluation des performances, en ce qui concerne le dépassement, le temps de réponse, le temps de montée et l'erreur absolue moyenne, en utilisant à la fois le contrôleur PID d'ordre fractionnaire et celui d'ordre entier, est présentée dans le tableau ci-dessous :

Tableau III.3.1.1: Les performances de four de chauffage en utilisant les contrôleurs PID et FOPID

Cas	Type	Temps de montée (s)	Temps de réponse (s)	Dépassement (%)	Erreur
1	PID	29.63	44.08	1.74	0.0055
	FOPID	15.43	24.05	1.05	0.0004
2	PID	12.08	17.47	1.95	0.0033
	FOPID	8.29	14.03	0.56	0.0004
3	PID	8.75	57.72	14.93	0.0003
	FOPID	5.55	8.74	1.0	0.0002
4	PID	11.9	42.48	2.61	0.0079
	FOPID	5.35	8.05	1.77	0.0005

- **Commentaires**

À partir des résultats obtenus, il est clair que le contrôleur FOPID surpasse le PID classique dans tous les cas étudiés. Il permet une réponse plus rapide avec un temps de montée et un temps de réponse significativement réduits. De plus, le dépassement est

globalement plus faible, tout comme l'erreur à régime permanent. Cela démontre l'efficacité et la supériorité du contrôleur fractionnaire FOPID, particulièrement pour les systèmes de chauffage à dynamique lente et complexe.

III.3.1.2 Étude de l'impact de l'ordre μ sur la dynamique de la réponse :

Afin d'analyser l'influence de l'ordre μ du terme dérivé dans le contrôleur FOPID, une série de simulations a été réalisée en faisant varier μ dans l'intervalle $[0.1, 0.9]$, tout en gardant les autres paramètres constants. L'objectif est d'étudier l'impact de cette variation sur les performances dynamiques du système, notamment le temps de montée, le temps de réponse, le dépassement et l'erreur à régime permanent.

Les courbes de réponse indicielle ainsi que les performances associées pour chaque valeur de μ sont présentées ci-dessous.

Le contrôleur utilisé est de type FOPID avec les paramètres suivants :

$$K_p = 449.95, K_i = 2.3695, K_d = 300, \lambda = 0.065526 \text{ et } \mu \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}.$$

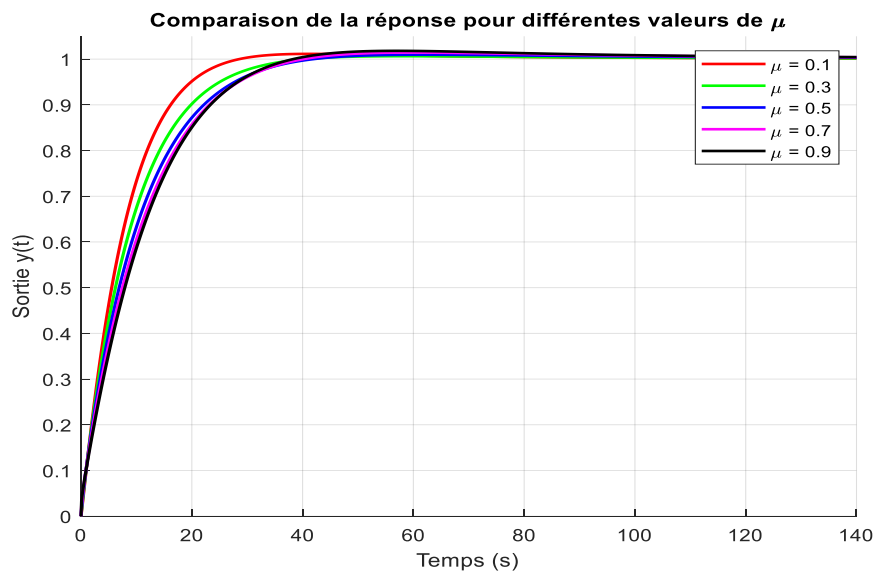


Figure III.3.1.2: comparaison de la réponse pour différentes valeurs de μ

Tableau III.3.1.2: Les performances de four de chauffage en utilisant différentes valeurs de μ

μ	Temps de montée (s)	Temps de réponse (s)	Dépassement (%)	Erreur de régime permanent
0.1	15.32	23.89	1.0	0.0015
0.3	19.06	31.33	0.47	0.0017
0.5	21.52	34.53	0.65	0.0031
0.7	22.57	34.69	1.03	0.0041
0.9	22.77	33.91	1.37	0.0044

- **Commentaires**

À la lumière des résultats obtenus, on constate que les petites valeurs de $\mu=0.1$ permettent d'obtenir une réponse plus rapide avec un temps de montée et de réponse plus court, ainsi qu'une erreur de régime permanent plus faible. Cependant, on note un léger dépassement pour ces valeurs faibles.

En revanche, lorsque μ augmente, la réponse devient plus lente, avec des temps de montée et de réponse plus élevés, ainsi qu'une erreur de régime permanent plus importante. Cela souligne l'importance du choix judicieux de μ pour optimiser les performances dynamiques du système de chauffage.

III.3.1.3 Étude de l'impact de l'ordre λ sur la dynamique de la réponse :

Dans cette section, nous analysons l'effet de la variation du paramètre fractionnaire λ sur les performances d'un système de chauffage contrôlé par un régulateur FOPID. Les autres paramètres du contrôleur sont maintenus constants à savoir : $K_p = 775$, $K_i = 469.95$, $K_d = 975$, $\mu = 0.11847$ et $\lambda \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

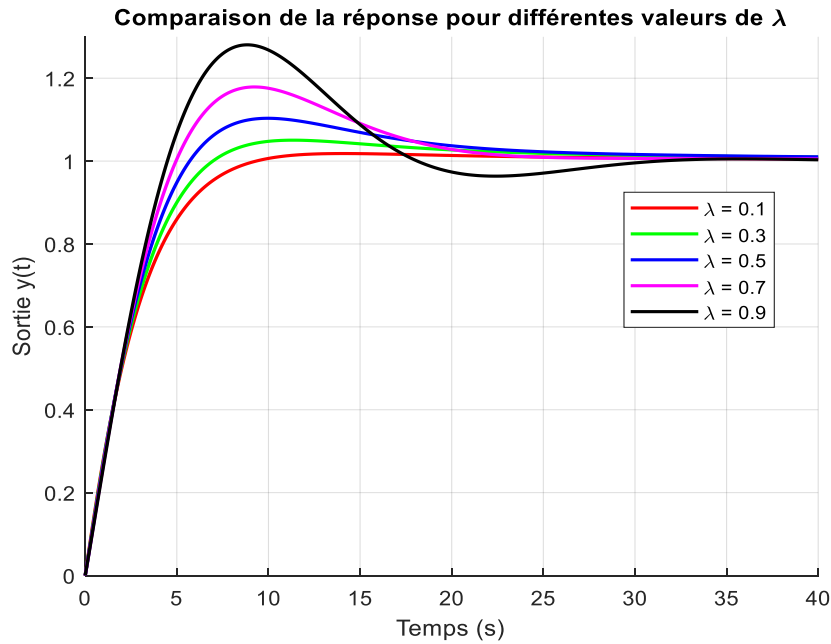


Figure III.3.1.3: comparaison de la réponse pour différentes valeurs de λ

Tableau III.3.1.2: Les performances de four de chauffage en utilisant différentes valeurs de λ

λ	Temps de montée (s)	Temps de réponse (s)	Dépassement (%)	Erreur régime permanent
0.1	5.43	8.28	1.30	0.0051
0.3	4.76	18.84	4.05	0.0096
0.5	4.21	21.70	9.20	0.0103
0.7	3.77	20.42	17.28	0.0052
0.9	3.48	27.32	27.65	0.0032

- **Commentaires**

À travers l'analyse des résultats, on observe que des valeurs faibles de λ offrent une réponse plus équilibrée du système, avec un dépassement limité et une erreur en régime permanent très faible. Cela reflète une meilleure précision et une stabilité accrue du système. En revanche, des valeurs plus élevées de λ permettent d'obtenir une réponse plus rapide (temps de montée réduit), mais au prix d'un dépassement important et d'un temps de stabilisation plus long.

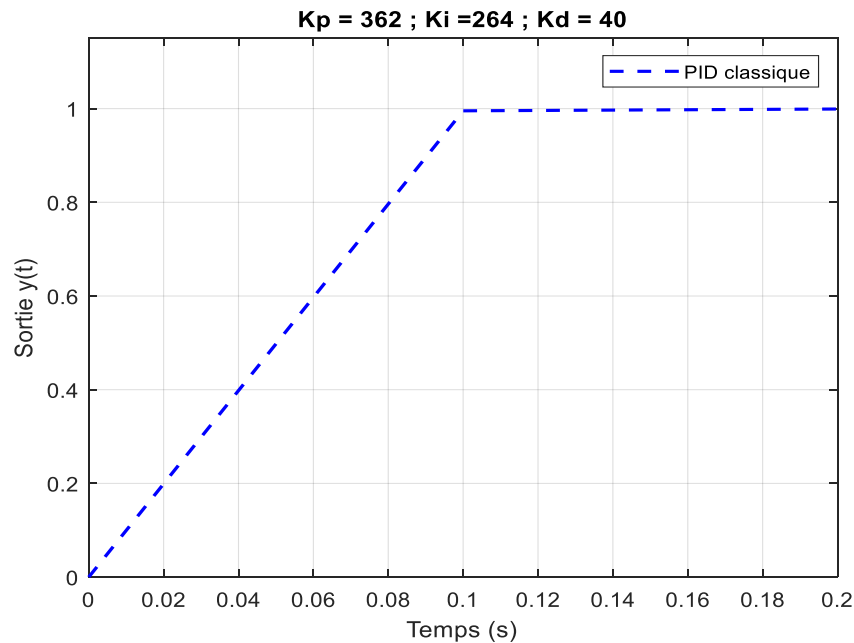
III.3.2 . Système fractionnaire :

Le exemple est un système d'ordre fractionnaire définie par l'équation :

$$G(p) = \frac{5}{p^{1.5} + 3p^{0.2} + 1}$$

La Figure(III.3.2) montre la sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID entier avec les valeurs de paramètres suivantes :

$$K_p = 362 ; K_i = 264 ; K_d = 40;$$



Figure(III.3.2) Sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID entier

La Figure(III.3.3) montre la sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID fractionnaire avec les valeurs de paramètres optimisées suivantes : $k_p=209.95$, $k_i=6.1817$, $k_d=930$, $\lambda=0.60727$, $\mu=0.9$.

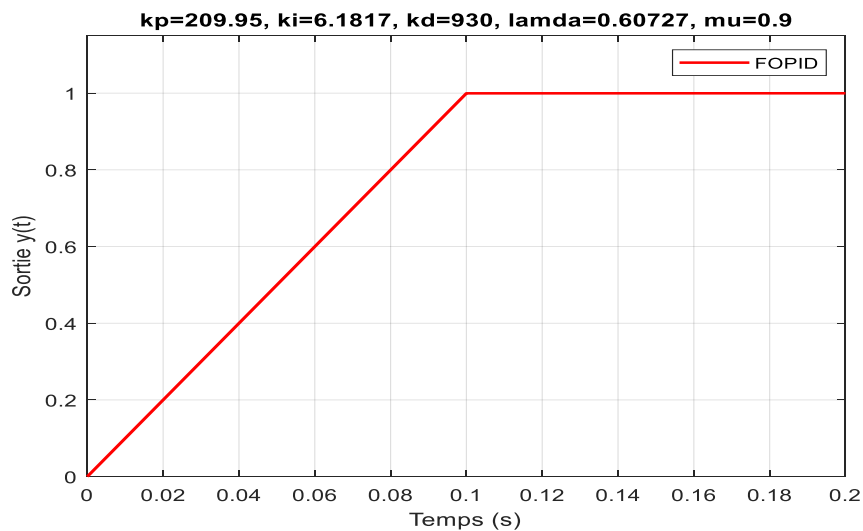


Figure (III.3.2) Sortie du système fractionnaire en utilisant le contrôleur PID fractionnaire.

Tableau III.3.1.1: Les performances de système fractionnaire en utilisant les contrôleurs PID et FOPID

Type	Temps de montée (s)	Temps de réponse (s)	Dépassement (%)	Erreur
PID	0.08	0.10	0	0.0009
FOPID	0.08	0.10	0	0.0003

- **Commentaires :**

En ce qui concerne le système, les performances des deux types de contrôleurs semblent être presque identiques, avec des valeurs très proches pour toutes les mesures.

III.4. Conclusion :

Dans ce dernier chapitre, nous avons introduit la commande PID d'ordre fractionnaire (FOPID) et étudié son application dans un système de chauffage à dynamique lente. L'étude a permis de mettre en évidence les performances améliorées et la précision accrue offertes par cette approche innovante. Nous avons également comparé plusieurs cas entre le contrôleur PID classique et le contrôleur FOPID. Les résultats de simulation ont clairement montré que le contrôleur PID fractionnaire offre de meilleures performances en termes de rapidité, de dépassement minimal et de robustesse, ce qui souligne son efficacité et sa pertinence dans divers contextes industriels complexes.

Nous avons exploré des dérivées fractionnaires permet une meilleure flexibilité dans l'ajustement dynamique du système, en offrant un compromis plus fin entre la rapidité et la stabilité. Cela se traduit par une meilleure capacité à suivre les consignes avec moins d'oscillations et une réponse plus adaptée aux systèmes à comportement non linéaire ou à dynamique lente.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre travail met en lumière l'efficacité et la pertinence de la commande PID d'ordre fractionnaire dans le domaine du contrôle des chauffages. Les résultats des simulations montrent une amélioration notable des performances de régulation, surtout en ce qui concerne la stabilité et la précision. La modélisation des systèmes fractionnaires apparaît comme une approche prometteuse pour mieux appréhender et maîtriser les processus thermiques complexes. Néanmoins, il est essentiel de mener des recherches supplémentaires pour explorer plus en profondeur les limites et les applications pratiques de cette méthode dans d'autres secteurs industriels.

Ce mémoire contribue à enrichir le domaine du contrôle de processus thermiques pour améliorer les performances de régulation des fours

D'après les résultats de la simulation, on peut voir que la commande PID fractionnaire offre un temps de réponse supérieur, un dépassement minimal et une erreur statique réduite par rapport à la commande PID d'ordre entier. Cela s'explique par les excellentes performances des intégrateurs et des dérivateurs de degrés fractionnaires

En fin de compte, la commande PID d'ordres fractionnaires représente une approche innovante et prometteuse pour le contrôle de systèmes complexes. Elle offre des opportunités d'optimisation et de régulation précise, particulièrement adaptées aux environnements dynamiques et changeants. Son adoption peut vraiment booster les performances et la fiabilité des systèmes de contrôle dans divers secteurs industriels et scientifiques.

Ce travail pourrait donner lieu à des études complémentaires dans les directions suivantes :

- Proposer d'autres schémas de la commande adaptative d'ordre fractionnaire.
- Généraliser les résultats obtenus au cas des systèmes multi-variables (MIMO).
- Utiliser algorithmes d'optimisation

- [1] A.Monje,et al. Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications. Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] S.Bouakkaz, T.Ben Djaballah."Réduction de modèles d'un système d'ordre fractionnaire", mémoire de master, Université Mohamed Khider – Biskra-,2022.
- [3] H.W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", Produced by Technical Compstion Co- Boston-Mass, New York (USA), D. Van Nostrand Company- INC, 1945
- [4] A.Oustaloup, "La Commande CRONE : Commande Robuste d'Ordre Non Entier", Edition Hermès Science Publication, Paris (France) ,1991
- [5] I.Podlubny, "Fractional Order Systems and Controllers", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, No. 1, pp. 208-214, 1999.
- [6] T.Kaczorek and K.Rogowski, "Fractional Linear Systems and Electrical Circuits", Springer, Bialystok (Poland), 2014.
- [7]S.Das,"Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls", SpringerVerlag, Berlin (Germany), 2011.
- [8] B.Mathieu, P. Melchior, A.Oustaloup, and Ch. Ceyral,"Fractional Differentiation for Edge Detection", Signal Processing, vol.83,pp 2421-2432, 2003.
- [9] M.Garcia and L.M.CruzOrive, "Fractional Tren of the Variance in Cavalieri Sampling", Image Analysis and Stereology, vol.19 No.2 pp 1-79, 2000.
- [10] F.S. Wang, W.S. Juang, and C.T. Chan, "Optimal tuning of PID controllers for single and cascade control loops", Chemical Engineering Communications, Vol.132, pp.15– 34, 1995
- [11] Oldham K.B., Spanier J. "the Fractional Calculus," Academic Press, New York, 1974
- [12] Y. Bensafia, S. Ladaci, and K. Khettab, "Using a Fractionalized Integrator for Control Performance Enhancement", International Journal of Innovative Computing, Information and Control, Vol. 11, No. 6, pp. 2013-2028, 2015.
- [13] K. Khettab, Y. Bensafia, and S. Ladaci, "Chattering Elimination in Fuzzy Sliding Mode Control of fractional Chaotic Systems Using a Fractional Adaptive Proportional Integral Controller", International Journal of Intelligent Engineering and Systems, Vol.10, No.5, pp. 255-266, 2017.
- [14] Y.Bensafia. « Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception de régulateurs adaptatifs robustes. » Thèse de doctorat, Université du 20 Août 1955

Skikda, Faculté de Technologie, 2016

[15] Ladaci S. "Contribution à la Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire," Thèse de Doctorat, Département d'Electronique, Université Mentouri de Constantine, 2007.

[16] Oustaloup A. "La Dérivation Non Entière," Hermès, Paris, 1995.

[17] Charef A., Sun. H.H., Tsao .Y.Y., Onaral. B. "Fractal system as represented by singularity function," IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 37, No. 9, pp.1465-1470, 1992

[18] T.Ghezli, and Dj.Ben belkacem. "Méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire".Diss. Université Mouloud Mammeri, 2017.

[19] Bequette, B. W. (2003). Process Control: Modeling, Design, and Simulation. Prentice Hall.

[20] Ghania Boukerche, ,,,"Etude et Synthèse d'un Contrôleur PI et Application """, Mémoire de Magister Option: Commande des Systèmes industriels, Université de BADJI MOKHTAR 2017

[21] HADJHAFSI Mohammed et Hadi Kouider, mémoire de fin d'études, Université de M'Sila, juin 2020 ;

[22] R Caponetto, G Dongola, and L Fortuna, Fractional order systems: modeling and control applications: World Scientific, 2010.

[23] D Matignon and B d'Andréa Novel, "Some results on controllability and observability of finitedimensional fractional differential systems," Computational engineering in systems applications, vol. 2, pp. 952-956 1996.

[24] K.B Oldham and J Spanier, The fractional calculus:theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.: Elsevier Science, 1974, vol. 111.

[25] F.ATTOUI, Méthodes d'optimisation pour l'auto-réglage de contrôleur PID d'ordre fractionnaire, Mémoire de master. UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA, 2019

[26] Zhao, Y., & Li, X. (2018). Fractional Order Control Systems. Academic Press.

[27] Chen, G., & Moore, K. (2018). Robust Control for Time-Delay Systems. Springer

[28] Y. Bensafia , A. Idir et K. Khettab," Performances Analysis of Fractional System using The Fractional Order Adaptive PID controller ", International Conference on Electrical Engineering And Control, Applications ICEECA'22 , université de khenechla, Algerie,2022.