République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par

Charef Ben alia

Sujet

Les espaces Asymétriques Normés

Date de soutenance : 18 Juin 2018

Devant le jury :

Dr. Mezrag Lahcène	Prof.	Université de M'sila	Président
Dr. Dahia Elhadj	M.C.A.	Université de M'sila	Rapporteur
Mr. Nassim Ferahtia	M.A.A.	Université de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

إهـــــــداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى الأبوين الكريمين

إلى جميع أساتذتي وكل من علمني

إلى إخوتي وزملائي وأصدقائي وكل من ساهم في نجاز هذا العمل

شارف بن علية

Remerciements

Nous remercions ALLAH le tout puissant pour la force et la patience qu’il nous a donné pour mener à bience travail.

Nous témoignons toute notre gratitude à Monsieur Mezrag Lahcène, Prof à l’Université de M'sila d’accepter de présider ce jury.

Nous exprimons notre vive reconnaissance à Monsieur Nasim Frahtia, Maître Assistant à l’Université de M'sila pour avoir accepté d’examiner ce mémoire.

Nous avons uneattention toute particulière pour Monsieur Dahia Elhadj, Maître de Conférences à l’Université de M'sila pour nous avoir encadrés, pour sa disponibilité etson soutien durant la réalisation de ce travail de recherche.

Nous adressonségalement nos vifs remerciements et nos meilleures pensées à tous nosProfesseurs du Département.

Enfin, que toute notre famille, nosamis, noscollègueset toute personne ayant participé de près ou de loin àla réalisation de cetravail, trouve ici l’expression de notre profonde gratitude.

Table des matières

0.1 Introduction

La théorie des espaces asymétriques normés est développée en 2013 dans le livre de Ştefan Cobzaş "*Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*" qui contient de manière presque encyclopédique tout ce qui était connu au ce sujet.

L'objectif de notre mémoire est mettez en évidence quelques-uns des résultats de la théorie des espaces asymétriques normés.
Notre travail se divise en trois chapitres. Le chapitre 1 on étudie quelques propriétés topologiques d'un espace asymétrique normé, quelques exemples des asymétrique normes.
Dans le deuxième chapitre, on donne une étude générale sur les espaces asymétriques normés.
Le troisième chapitre représente la notion de continuité des opérateurs linéaires continus entre des espaces asymétriques normés.

Chapitre 1

Topologie des espaces asymétriques normés

1.1 Espaces quasi-métriques et espaces asymétrique normés

Espaces quasi-métriques

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble arbitraire non vide, une quasi-semimétrique sur X est une application $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y, z \in X$ on a*
i) $\rho(x, x) = 0$.
ii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
Du plus si ρ satisfait la propriété suivante

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y, \tag{1.1}$$

alors ρ est appelé quasi-métrique.

Un espace quasi-métrique est un ensemble arbitraire non vide X muni d'une quasi-métrique ρ.
Il est clair que toute métrique est une quasi-métrique.

Définition 1.1.2 *Soit (X, ρ) un espace quasi-semimétrique.*
1) Le conjugue de ρ est la quasi-semimétrique $\overline{\rho}$ définie par

$$\overline{\rho}(x, y) = \rho(y, x), \quad \textit{pour tout } x, y \in X. \tag{1.2}$$

2) La quasi-semimétrique associe de ρ est l'application $\rho^s : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\rho^s(x, y) = max\left\{\rho(x, y), \overline{\rho}(x, y)\right\}.$$

Example 1.1.3 *L'application $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\begin{cases} \rho(x, y) = y - x \ \textit{si } x \leq y \\ \rho(x, y) = 1 \ \textit{si } x > y, \end{cases}$$

est une quasi-métrique sur $\mathbb{R}$, en effet pour tout x, y et $z \in \mathbb{R}$ on a

i) $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$ si et seulement si $y - x = 0$ si et seulement si $x = y$

ii) On a les cas suivantes

1) Si $x \leq y$ et $y \leq z$. Donc on a

$$\rho(x,y) = y - x \leq z - x = \rho(x,z) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

2) Si $x \leq y$ et $x \leq z$ et $z < y$. Alors

$$\rho(x,y) = y - x = z - x + y - z = \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

3) Si $x \leq y$ et $z < x$. Alors

$$\rho(x,y) = y - x \leq y - z = \rho(z,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

4) Si $y < x$ et $x \leq z$. Alors

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = \rho(x,z) + 1$$

5) Si $y < x$ et $y \leq z$ et $z < x$. Donc on a

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = 1 + \rho(z,y)$$

6) Si $y < x$ et $z < y$. Alors

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = 1 + \rho(z,y)$$

Dans la suite on donne une condition pour que ρ^s est une métrique.

Proposition 1.1.4 *Soit (X, ρ) un espace quasi-semimétrique. Alors, le quasi-semimétrique ρ^s associe de ρ, est une métrique si et seulement si ρ est une quasi-métrique.*

Démonstration. *Supposons que ρ est une quasi-métrique sur X. Soit x, y et $z \in X$.*

i) $\rho^s(x,y) = 0$ si et seulement si

$$\max\left\{\rho(x,y), \bar{\rho}(x,y)\right\} = \max\left\{\rho(x,y), \rho(y,x)\right\} = 0$$

si et seulement si

$$\rho(x,y) = \rho\,(y,x) = 0$$

et ceci équivalent à $x = y$.

ii) On a

$$\begin{aligned}\rho^s\,(x,y) &= \max\left\{\rho(x,y), \bar{\rho}\,(x,y)\right\} \\ &= \max\left\{\rho\,(y,x)\,, \bar{\rho}\,(y,x)\right\} = \rho^s\,(y,x)\end{aligned}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}\rho^s\,(x,y) &= \max\left\{\rho(x,y), \bar{\rho}\,(x,y)\right\} \\ &\leq \max\left\{\rho(x,z) + \rho\,(z,y)\,, \bar{\rho}(x,z) + \bar{\rho}\,(z,y)\right\} \\ &\leq \max\left\{\rho(x,z), \bar{\rho}(x,z)\right\} + \max\left\{\rho\,(z,y)\,, \bar{\rho}\,(z,y)\right\} \\ &= \rho^s\,(x,z) + \rho^s\,(z,y)\,,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\rho^s\,(x,y) \leq \rho^s\,(x,z) + \rho^s\,(z,y)\,.$$

Donc, ρ^s est une métrique sur X.

Inversement, supposons que ρ^s est une métrique sur X. Soit $x, y \in X$ avec $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$. Alors

$$\rho^s\,(x,y) = \max\left\{\rho(x,y), \rho\,(y,x)\right\} = 0.$$

Ce qui implique que $x = y$. Donc, ρ est une quasi-métrique sur X. ∎

Définition 1.1.5 ***(Les boules)*** *Soit (X,ρ) un espace quasi-métrique, $x_0 \in X$ et $r > 0$*
1) La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,\rho}\,(x_0,r)$, et la boule fermée de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,\rho}\,[x_0,r]$, de (X,ρ) sont définit, réspectivement par

$$B_{X,\rho}\,(x_0,r) = \{x \in X : \rho(x_0,x) < r\} \quad \text{et} \quad B_{X,\rho}\,[x_0,r] = \{x \in X : \rho(x_0,x) \leq r\}\,.$$

2) La boule unité ouvert noté $B'_{X,\rho}$ et la boule unité fermé noté $B_{X,\rho}$ de (X,ρ) sont définit réspectivement par

$$B'_{X,\rho} = B_{X,\rho}(0,1) \quad et \quad B_{X,\rho} = B_{X,\rho}[0,1].$$

3) La sphère de centre x_0 et de rayon r noté $S_{X,\rho}(x_0,r)$ et la sphère unité noté $S_{X,\rho}$ de (X,ρ) sont définit réspectivement par

$$S_{X,\rho}(x_0,r) = \{x \in X : \rho(x_0,x) = r\} \quad et \quad S_{X,\rho} = S_{X,\rho}(0,1).$$

Convergence d'une suite dans un espace quasi-métrique

Définition 1.1.6 *Soit (X,ρ) un espace quasi-métrique et $(x_n)_n$ une suite dans X, on dit que $(x_n)_n$ est convergente vers x et on écrit $x_n \xrightarrow{\rho} x$ si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \rho(x,x_n) = 0.$$

Dans ce cas on dit que $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers x.

Proposition 1.1.7 *Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace quasi-métrique (X,ρ). Alors on a*

1) Si $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers x et $\bar{\rho}$-convergente vers y, alors $\rho(x,y) = 0$.

2) Si $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers x et $\rho(y,x) = 0$, alors $(x_n)_n$ est aussi ρ-convergente vers y.

Démonstration. 1) Par l'inégalité

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et comme

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \rho(x,x_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \rho(x_n,y) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \bar{\rho}(y,x_n) = 0,$$

on obtient $\rho(x,y)=0$.

2) Par l'inégalité

$$\rho(y,x_n) \leq \rho(y,x) + \rho(x,x_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

on obtient

$$\rho(y,x_n) \leq \rho(x,x_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Et ceci implique que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \rho(y,x_n) \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \rho(x,x_n) = 0,$$

alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \rho(y,x_n) = 0$. Donc, $(x_n)_n$ est ρ-convergente vers y. ■

Espaces asymétrique normés

Définition 1.1.8 *Soit X un espace vectoriel réel $\mathbb{R}$, une asymétrique semi norme sur X est une fonction $q : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a*

i) $q(\lambda x) = \lambda q(x)$.

ii) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$.

Du plus si q satisfait la propriété suivante

$$q(x) = q(-x) = 0 \implies x = 0,$$

alors on dit que q est une asymétrique norme sur X.

Un espace asymétrique normé est un espace vectoriel réel X muni d'une asymétrique norme q.

Définition 1.1.9 *Soit (X,q) un espace asymétrique normé.*

1) L'asymétrique semi-norme $\overline{q}$ conjugué de q est défini par

$$\overline{q}(x) = q(-x), \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

2) La semi-norme q^s associe de q est définie sur X par

$$q^s(x) = \max\{q(x), \overline{q}(x)\} \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

Remarque 1.1.10 *Il est claire que q^s est une norme sur X si q est une asymétrique norme sur X. En effet si q est une asymétrique norme sur X, alors pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a*

i)

$$\begin{aligned} q^s(x) = 0 &\iff \max\left\{q(x), \bar{q}(x)\right\} = \max\{q(x), q(-x)\} = 0 \\ &\iff q(x) = q(-x) = 0 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

ii) On a deux cas, 1) si $\lambda \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} q^s(\lambda x) &= \max\{q(\lambda x), \overline{q}(\lambda x)\} \\ &= \lambda \max\{q(x), \overline{q}(x)\} \\ &= |\lambda|\, q^s(x) \end{aligned}$$

2) Si $\lambda < 0$, on a

$$\begin{aligned} q^s(\lambda x) &= \max\{q(\lambda x), \overline{q}(\lambda x)\} \\ &= \max\{q((-\lambda)(-x)), \overline{q}((-\lambda)(-x))\} \\ &= -\lambda \max\{q(-x), \overline{q}(-x)\} \\ &= |\lambda|\, q^s(x) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} q^s(x+y) &= \max\{q(x+y), \overline{q}(x+y)\} \\ &\leq \max\{q(x)+q(y), \overline{q}(x)+\overline{q}(y)\} \\ &\leq \max\{q(x), \overline{q}(x)\} + \max\{q(y), \overline{q}(y)\} \\ &= q^s(x) + q^s(y). \end{aligned}$$

Example 1.1.11 *On considère sur* $\mathbb{R}$ *l'asymétrique norme* u *défini par*

$$u(x) = x^{+} = \max\{x, 0\}.$$

Alors, pour $x \in \mathbb{R}$ *on a* $\overline{u}(x) = x^{-} = \max\{-x, 0\}$ *et* $u^{s}(x) = \max\{x^{-}, x^{+}\} = |x|$.
En effet pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}_{+}$ *on a*

i)

$$\begin{aligned} u(x) = u(-x) = 0 &\iff \max\{x, 0\} = \max\{-x, 0\} = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

ii)

$$u(\lambda x) = \max\{\lambda x, 0\} = \lambda \max\{x, 0\} = \lambda u(x)$$

iii)

$$\begin{aligned} u(x+y) &= \max\{x+y, 0\} \\ &\leq \max\{x, 0\} + \max\{y, 0\} \\ &= u(x) + u(y). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.12 *Toute asymétrique norme* q *sur un espace vectoriel réel* X *induite une quasi-métrique* ρ_q *sur* X *donnée par la formule*

$$\rho_q(x, y) = q(y - x), \quad \text{pour tout } x, y \in X. \tag{1.3}$$

C'est-à-dire tout espace asymétrique normé est un espace quasi-métrique. En effet soit (X, q) *un espace asymétrique normé, donc pour* x, y *et* $z \in X$ *on a*

i)

$$\begin{aligned} \rho_q(x, y) = \rho_q(y, x) = 0 &\iff q(y - x) = q(-(y - x)) = 0 \\ &\iff y - x = 0 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\rho_q(x,y) &= q(y-z+z-x)\\ &\leq q(z-x)+q(y-z)\\ &= \rho_q(x,z)+\rho_q(z,y).\end{aligned}$$

Donc, ρ_q est une quasi métrique sur X.

Définition 1.1.13 *Soit (X,q) un espace asymétrique normé, $x_0 \in X$ et $r > 0$.*

1) La boule ouvert de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,q}(x_0,r)$ et laboule fermé de centre x_0 et de rayon r, noté $B_{X,q}[x_0,r]$ de X sont définit (réspectivement) par

$$B_{X,q}(x_0,r) = \{x \in X : q(x-x_0) < r\}$$

(réspectivement

$$B_{X,q}[x_0,r] = \{x \in X : q(x-x_0) \leq r\}\ ).$$

2) La boule unité ouvert noté $B'_{X,q}$ et la boule unité fermé noté $B_{X,q}$ de X sont définit (réspectivement) par

$$B'_{X,q} = B_{X,q}(0,1)$$

(réspectivement

$$B_{X,q} = B_{X,q}[0,1]\ ).$$

3) La sphère de centre x_0 et de rayon r noté $S_{X,q}(x_0,r)$ et la sphère unité noté $S_{X,q}$ de X sont définits (réspectivement) par

$$S_{X,q}(x_0,r) = \{x \in X : q(x-x_0) = r\}$$

(réspectivement

$$S_{X,q} = S_{X,q}(0,1)).$$

Convergence d'une suite dans un espace asymétrique normé

Définition 1.1.14 *Soit* (X, q) *un espace asymétrique normé et soit* $(x_n)_n$ *une suite dans* X*, on dit que* $(x_n)_n$ *est convergent vers* x *si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} q(x_n - x) = 0.$$

Dans ce cas on dit que $(x_n)_n$ *est q-convergente vers* x*.*

Remarque 1.1.15 *Soit* u *l'asymétrique morme définie dans l'exemple 1.1.11. Alors dans l'espace asymétrique normé* $(\mathbb{R}, u)$*, la suite* $\alpha_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ *est u-convergente vers* 1 *et* $\bar{u}$*-convergent vers* -1*. Mais n'est pas convergente dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*, En effet on a*

$$u(\alpha_n - 1) = \max\{(-1)^n - 1, 0\} = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

ce qui implique que

$$u(\alpha_n - 1) \longrightarrow 0, \quad \text{pour } n \longrightarrow \infty.$$

Alors, $\alpha_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ *est* u *- convergente vers* 1 *et on a*

$$\overline{u}(\alpha_n + 1) = \max\{-(-1)^n - 1, 0\} = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

ce qui implique que

$$\overline{u}(\alpha_n + 1) \longrightarrow 0, \quad \text{pour } n \longrightarrow \infty.$$

Alors, $\alpha_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ *est* $\overline{u}$*-convergent vers* -1*.*

1.2 Les propriétés topologique d'un espace asymétrique normé

Définition 1.2.1 ***(voisinage d'un point)*** *Soit* (X, ρ) *un espace quasi-métrique. On dira que* V *est un voisinage du point* $x_0 \in X$ *et on écrit* $V \in \vartheta_\rho(x_0)$ *s'il existe* $r > 0$ *tel que* $B_{X,\rho}(x_0, r) \subset V$*.*

Dans ce cas la topologie τ_ρ *noté aussi* $\tau(\rho)$ *généré par* ρ *sur* X *est définit à partire de* *la famille $\vartheta_\rho(x_0)$. Noton aussi que $V \in \vartheta_\rho(x_0)$ si et seulement s'il existe $r' > 0$ avec $B_{X,\rho}[x_0, r'] \subset V$.*

Définition 1.2.2 ***(ouvert et fermé)*** *Soit (X,ρ) un espace quasi-métrique.*
1) Un sous ensemble $S \subset X$ est dit ouvert dans (X,ρ), et on écrit S est τ_ρ-ouvert, si pour tout $x_0 \in S$, il existe $r > 0$ tel que $B_{X,\rho}(x_0, r) \subseteq S$.
2) Un sous ensemble $S \subset X$ est dit fermé si S^c est ouvert.

Définition 1.2.3 *Soit (X,τ) un espace topologique.*
1) On dit que (X,τ) est régulier si pour tout $x \in X$ et pour chaque sous-ensemble fermé S de X avec $x \in S$, il existe deux ouverts U et V de X telle que $U \cap V = \phi$, $x \in U$, et $S \subset V$.
2) On dit que (X,τ) est normal si pour tout deux fermés S_1 et S_2 de X avec $S_1 \cap S_2 = \phi$, il existe deux ouverts et disjoints G_1 et G_2 de X telle que $S_1 \subset G_1$ et $S_2 \subset G_2$.

Proposition 1.2.4 *Soit (X,ρ) un espace quasi-semimétrique, $x_0 \in X$ et $r > 0$. Alors la boule ouverte $B_{X,\rho}(x_0, r)$ est τ_ρ-ouvert et la boule fermée $B_{X,\rho}[x_0, r]$ est $\tau_{\bar{\rho}}$-fermé, mais $B_{X,\rho}[x_0, r]$ n'est pas τ_ρ-fermé en général. De plus, on a les inclusions suivantes*

$$B_{X,\rho^s}(x_0, r) \subset B_{X,\rho}(x_0, r) \quad \text{et} \quad B_{X,\rho^s}(x_0, r) \subset B_{X,\bar{\rho}}(x_0, r) \tag{1.4}$$

avec même inclusions pour les boules fermés.

Démonstration. On montre seulement que $B_{X,\rho}(x_0, r)$ est τ_ρ-ouvert et $B_{X,\rho}[x_0, r]$ est $\tau_{\bar{\rho}}$-fermé. Les inclusions de (1.4) sont évidents. Soit $x \in B_{X,\rho}(x_0, r)$, on pose $r' = r - \rho(x_0, x)$, donc pour $y \in B_{X,\rho}(x, r')$ on a

$$\begin{aligned} \rho(x_0, y) &\leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) \\ &\leq \rho(x_0, x) + r' \\ &= r, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$B_{X,\rho}(x,r') \subset B_{X,\rho}(x_0,r).$$

Donc, la boule $B_{X,\rho}(x_0,r)$ est τ_ρ-ouvert.

Pour la preuve de $B_{X,\rho}[x_0,r]$ est $\tau_{\bar{\rho}}$-fermé on montre que $(B_{X,\rho}[x_0,r])^c$ est $\tau_{\bar{\rho}}$-ouvert, donc pour $x \in (B_{X,\rho}[x_0,r])^c$ on prendre $r' = \rho(x_0,x) - r$. Alors on a

$$B_{X,\bar{\rho}}(x,r') \cap B_{X,\rho}[x_0,r] = \emptyset,$$

ce qui implique que

$$B_{X,\bar{\rho}}(x,r') \subset (B_{X,\rho}[x_0,r])^c.$$

En effet, si on suppose qu'il existe $y \in B_{X,\bar{\rho}}(x,r') \cap B_{X,\rho}[x_0,r]$, donc on a

$$\bar{\rho}(x,y) < r' \quad \text{et} \quad \rho(x_0,y) \leq r,$$

c'est-à-dire

$$\rho(x_0,x) \leq \rho(x_0,y) + \bar{\rho}(x,y) < r + r' = \rho(x_0,x).$$

Donc, on a une contradiction. ∎

Proposition 1.2.5 *Soit (X,ρ) un espace quasi-semimétrique. Alors la topologie τ_{ρ^s} est plus fine que les topologies τ_ρ et $\tau_{\bar{\rho}}$, c'est-à-dire tout sous-ensemble τ_ρ-ouvert (τ_ρ-fermé) est τ_{ρ^s}-ouvert (τ_{ρ^s}-fermé). Avec même résultats pour la topologie $\tau_{\bar{\rho}}$.*

Démonstration. Soit S un sous-ensemble τ_ρ-ouvert de (X,ρ) et soit $x_0 \in S$, alors il existe $r > 0$ tel que

$$B_{X,\rho^s}(x_0,r) \subset B_{X,\rho}(x_0,r) \subset S.$$

Donc, S est τ_{ρ^s}-ouvert.

Maintenant, soit M un sous-ensemble τ_ρ-fermé de (X,ρ), alors M^c est τ_ρ-ouvert, donc M^c est τ_{ρ^s}-ouvert ce qui implique que M est τ_{ρ^s}-fermé. ∎

Remarque 1.2.6 *La proposition précédente proprement dite*

1) Les applications d'identités de (X, τ_{ρ^s}) *dans* (X, τ_ρ) *et de* (X, τ_{ρ^s}) *dans* $\left(X, \tau_{\overline{\rho}}\right)$ *sont continues.*

2) Une suite $(x_n)_n$ *dans* X *est* τ_{ρ^s}*-convergente vers* $x \in X$ *si et seulement si elle est* τ_ρ*-convergente et* $\tau_{\overline{\rho}}$*-convergent vers* x.

Définition 1.2.7 *Soit* (X, ρ) *un espace quasi-semimétrique, pour un sous-ensemble non vide* A *de* X *et* $x \in X$ *on pose*

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\} \quad et \quad \rho(A, x) = \inf\{\rho(y, x) : y \in A\} \tag{1.5}$$

Il est claire que $\rho(x, A) = \overline{\rho}(A, x)$ et $\rho(A, x) = \overline{\rho}(x, A)$.

Une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite suite minimisante pour $\rho(x, A)$ si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \rho(x, y_n) = \rho(x, A)$ et est dite suite minimisant pour $\rho(A, x)$ si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \rho(y_n, x) = \rho(A, x)$.

Notons que pour $A \neq \emptyset$ les suites minimisantes sont toujours existent.

Proposition 1.2.8 *Soit* (X, ρ) *un espace quasi-semimétrique,* A *un sous-ensemple non vide de* X*. Alors pour tout* $x, y \in X$ *on a les propriétés suivantes*

1) $\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$ *et* $\rho(A, x) \leq \rho(A, y) + \rho(y, x)$

2) $\rho(x, A) = 0$ *si et seulement si* $x \in \overline{A}^{\tau_\rho}$

3) $\rho(A, x) = 0$ *si et seulement si* $x \in \overline{A}^{\tau_{\overline{\rho}}}$

Démonstration. 1) Pour $z \in A$ on a

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

donc

$$\begin{aligned} \rho(x, A) = \inf\{\rho(x, z) : z \in A\} &\leq \rho(x, y) + \inf\{\rho(y, z) : z \in A\} \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, A). \end{aligned}$$

Par la même méthode on trouve la deuxième inégalité de (1)

2) On a

$$\begin{aligned} \rho(x, A) = 0 &\iff \exists (y_n)_n \subset A \text{ tel que} \lim_{n \longrightarrow \infty} \rho(x, y_n) = 0 \\ &\iff x \in \overline{A}^{\tau_\rho}. \end{aligned}$$

De même méthode on montre (3). $\blacksquare$

Définition 1.2.9 *Pour un espace asymétrique semi-normé* (X, q) , *on définit la fonction* $q_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *par la formule*

$$q_0(x) = \inf\{q(y) + q(y - x) : y \in X\}, \ x \in X \tag{1.6}$$

Proposition 1.2.10 *La fonction* q_0 *est une semi-norme (symétrique) sur* X *avec* $q_0 \leq q$. *De plus* q_0 *est la plus grande semi-norme sur* X *majorée par* q

Démonstration. D'aprés 1.6 on a

$$q_0(-x) = \inf\{q(y) + q(y + x) : y \in X\}, \tag{1.7}$$

donc, si on remplace y par $z - x$ dans (1.7), on obtient

$$q_0(-x) = \inf\{q(y) + q(y - x) : y \in X\} = \inf\{q(z) + q(z - x) : z \in X\} = q_0(x).$$

Donc q_0 est symétrique,et pour $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a
1) Si $\lambda = 0$. Donc

$$q_0(\lambda x) = q_0(0) = \inf\{2q(y) : y \in X\} = 0$$

2) Si $\lambda > 0$. Donc

$$\begin{aligned} q_0(\lambda x) = \inf\{q(y) + q(y - \lambda x) : y \in X\} &= \lambda \inf\left\{q\left(\tfrac{1}{\lambda}y\right) + q\left(\tfrac{1}{\lambda}y - x\right) : y \in X\right\} \\ &= \lambda \inf\{q(z) + q(z - x) : z \in X\}, \text{ où } z = \tfrac{1}{\lambda}y \\ &= \lambda q_0(x) \end{aligned}$$

Ceci montre que q_0 est positivement homogène et comme q_0 symétrique, alors q_0 est homogène. Pour l'inégalité triangulaire, pour tout $x, z \in X$ on a

$$\begin{aligned} q_0(x + z) &\leq q(2y) + q(2y - x - z) \\ &\leq q(y) + q(y - x) + q(y) + q(y - z) \end{aligned}$$

on passant au infimum sur tout $y \in X$, on obtient

$$\begin{aligned} q_0(x+z) &\leq \inf\{q(y)+q(y-x) : y \in X\} + \inf\{q(y)+q(y-z) : y \in X\} \\ &= q_0(x) + q_0(z). \end{aligned}$$

Par l'absurde supposons maintenant qu'il existe une semi-norme (symétrique) q_1 sur X telle que $q_1 > q_0$ avec $q_1 \leq q$ i.e.

$$q_0(x) < q_1(x) \leq q(x), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Par la définition de q_0 il existe $y \in X$ tel que $q_0(x) \leq q(y) + q(y-x) < q_1(x)$, donc on a

$$\begin{aligned} q_1(x) = q_1(x+y-y) &\leq q_1(y) + q_1(x-y) \\ &= q_1(y) + q_1(y-x) \\ &\leq q(y) + q(y-x) \\ &< q_1(x). \end{aligned}$$

Alors on a une contradiction. D'où q_0 est la plus grande semi-norme (symétrique) sur X majoré par q.

Espaces asymétriques normés séparés ■

Définition 1.2.11 *un espace asymétrique normé* (X, q) *est dit séparé si la topologie* τ_q *générée par* q *est séparé.*

Théorème 1.2.12 *Soit* (X, q) *un espace asymétrique normé, alors les assertions suivantes sont equivalentes*

1) La fonction $\|\cdot\|_q : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *défini par*

$$\|x\|_q = \inf_{x_0 \in X} \{q(x_0) + q(x_0 - x)\}$$

est une norme sur X*.*

2) (X, q) *est un espace asymétrique normé séparé.*

3) $(X, \overline{q})$ *est un espace asymétrique normé séparé.*

Démonstration. 2)$\Longrightarrow$1). Il suffit de prouver que $\|x\|_q = 0$ implique que $x = 0$. Si $\|x\|_q = 0$ alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans X, tel que

$$q(x_n) + q(x_n - x) \leq \frac{1}{n} \quad \text{pourtout } n \in \mathbb{N},$$

alors, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} q(x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} q(x_n - x) = 0$, ce qui signifie que x et 0 sont des limites de la suite $(x_n)_n$. Et comme l'espace (X, q) est séparé alors la limite de chaque suite est unique, donc $x = 0$.

1) $\Longrightarrow$ 2) Soient $x, y \in X$ avec $x \neq y$. Donc comme $\|\cdot\|_q$ est une norme sur X, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|x - y\|_q > \varepsilon$. Donc on considèrer deux voisinages $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ et $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$ de x et y réspectivement pour la topologie τ_q sur X comme suite

$$V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) = \left\{z \in X : q(z - x) < \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \quad \text{et} \quad V_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) = \left\{z \in X : q(z - y) < \tfrac{\varepsilon}{2}\right\},$$

alors $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\|\cdot\|_q}(x)$ et $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\|\cdot\|_q}(y)$, et comme $B_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\|\cdot\|_q}(x)$ et $B_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\|\cdot\|_q}(y)$ sont des ensembles disjoints, donc $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ et $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$ sont aussi disjoints.

L'équivalence entre (2) et (3) est évidente.

■

Chapitre 2

Complétude des espaces asymétriques normés

2.1 Complétude des espaces quasi métriques

Dans un espace métrique (X, d) si $(x_n)_n$ est de Cauchy on dit simplement : $(x_n)_n$ est d-Cauchy.

Définition 2.1.1 *Une suite $(x_n)_n$ dans un espace quasi-métrique (X, ρ) est dite*
1) ρ-Cauchy à gauche (à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in X$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\rho(x, x_n) < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq n_0$$

(réspectivement

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq n_0).$$

2) ρ^s-Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\rho^s(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{pour tout } n, m \geq n_0.$$

3) K-Cauchy à gauche (à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}, \quad n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

(réspectivement

$$\text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}, \quad n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

4) Faiblement K-Cauchy à gauche (à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\rho(x_{n_0}, x_n) < \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0$$

(réspectivement

$$\rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0).$$

Dans la proposition suivante on trouve la relation entre ces notions.

Proposition 2.1.2 *[3]Soient (X,ρ) un espace quasi-semimétrique et $(x_n)_n$ une suite dans X. On a*

$$\begin{gathered}(x_n)_n \text{ est } \rho^s\text{-Cauchy}\\ \Downarrow\\ (x_n)_n \text{ est } K\text{-Cauchy à gauche}\\ \Downarrow\\ (x_n)_n \text{ est faiblement } K\text{-Cauchy à gauche}\\ \Downarrow\\ (x_n)_n \text{ est } \rho\text{-Cauchy à gauche,}\end{gathered}$$

avec mêmes implications si on remplace "gauche" par "droite".

Proposition 2.1.3 *[10]Soit (X,ρ) un espace quasi-semimétrique. Une suite $(x_n)_n$ dans X est de Cauchy à gauche (dans certains sens) par rapport à ρ si et seulement si elle est de cauchy à droite (dans le même sens) par rapport à $\bar{\rho}$.*

Dans la proposition suivant on trouve une caractérisation des suites de Cauchy dans l'espace métrique (X,ρ^s)

Proposition 2.1.4 *[10]Soit (X,ρ) un espace quasi-semimétrique. La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (X,ρ^s) si et seulement si elle est à la fois K-Cauchy à gauche et à droite.*

Dans la suite on donne la relation entre les suite de Chauchy dans (X,ρ) et la convergence de ces suites.

Proposition 2.1.5 *[3]Toute suite ρ-convergente est ρ-Cauchy à gauche et toute suite $\bar{\rho}$-convergente est ρ-cauchy à droite.*

Proposition 2.1.6 *[3]Dans un espace quasi-métrique régulier (X,ρ), si chaque suite convergente $(x_n)_n$ admet une sous-suite K-Cauchy à droite, alors X est métrisable.*

L'espace biBanach.

Définition 2.1.7 *Soit (X,ρ) un espace quasi-semimétrique.*
1) X est dit ρ-complet si toute suite ρ^s-Cauchy dans (X,ρ) est τ_ρ-convergente.
2) X est dit bicomplet si l'espace semimétrique associé (X,ρ^s) est complet, c-à-d si toute suite ρ^s-Cauchy dans (X,ρ) est τ_{ρ^s}-convergente.

Définition 2.1.8 *Un espace vectoriel asymétrique semi-normé (X,q) est dit biBanach s'il est q-complet, c-à-d (X,q^s) est un espace semi-normé complet.*

Example 2.1.9 *L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est un espace biBanch avec l'asymétrique norme u définie par*

$$u(x) = \max\{x,0\} = x^+, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Car $u^s = |\cdot|$ (voir l'Exemple 1.1.11).

Proposition 2.1.10 *Soit $(x_n)_n$ une suite K-Cauchy à gauche dans un espace quasi-semimétrique (X,ρ).*
1) Si $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui est τ_ρ-converge vers x, alors $(x_n)_n$ est τ_ρ-convergente vers x.
2) Si $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui est $\tau_{\bar{\rho}}$-converge vers x, alors $(x_n)_n$ est $\tau_{\bar{\rho}}$-convergente vers x.
3) Si $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui est ρ^s-converge vers x, alors $(x_n)_n$ est ρ^s-convergent vers x.

Démonstration. 1) Supposons que $(x_n)_n$ est K-Cauchy à gauche et il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \rho(x,x_{n_k}) = 0$. Donc pour $\varepsilon > 0$ on choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m,n \in \mathbb{N}$

$$n_0 \le m \le n \Longrightarrow \rho(x_m,x_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_{k_0} \geq n_0$ et

$$\rho(x, x_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } k \geq k_0.$$

Alors pour $n \geq n_{k_0}$ on a

$$\rho\left(x, x_n\right) \leq \rho(x, x_{n_{k_0}}) + \rho(x_{n_{k_0}}, x_n) < \varepsilon.$$

2) Supposons que $(x_n)_n$ est K-Cauchy à gauche et il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \overline{\rho}\left(x, x_{n_k}\right) = 0$. Donc pour $\varepsilon > 0$ soit $k_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\overline{\rho}\left(x, x_{n_k}\right) = \rho\left(x_{n_k}, x\right) < \varepsilon, \quad \text{pour tout } k \geq k_0, \tag{2.1}$$

et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow \rho\left(x_m, x_n\right) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Donc,pour $n \geq n_0$ soit $k \geq k_0$ telle que $n_k > n$. Alors d'aprés 2.1 et 2.2 on a

$$\rho\left(x_n, x\right) \leq \rho\left(x_n, x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k}, x\right) < 2\varepsilon,$$

ceci montre que $(x_n)_n$ est $\tau_{\overline{\rho}}$-convergente vers x.

3) Supposons que $(x_n)_n$ est une suite K-Cauchy à gauche et il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $x_{n_k} \xrightarrow{\rho^s} x$. Alors d'aprés la Remarque 1.2.6 on a $x_{n_k} \xrightarrow{\rho} x$ et $x_{n_k} \xrightarrow{\bar{\rho}} x$ et rar 1) et 2) on obtient $x_n \xrightarrow{\rho} x$ et $x_n \xrightarrow{\bar{\rho}} x$. En fin, encore une fois par la Remarque 1.2.6, on trouve $x_n \xrightarrow{\rho^s} x$. ■

Définition 2.1.11 *une série $\sum\limits_n x_n$ dans un espace asymétrique normé (X, q) est dit convergent s'il existe $x \in X$ tel que $x = \lim\limits_{N \longrightarrow \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$.*
La série $\sum\limits_n x_n$ est dit absolement convergent si $\sum\limits_n q\left(x_n\right) < +\infty$.

Proposition 2.1.12 *soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace quasi-semimétrique (X, ρ), si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho\left(x_n, x_{n+1}\right) < +\infty.$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est K - cauchy à gauche.

Démonstration. pour $\varepsilon > 0$ soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \rho\left(x_{n_0+i}, x_{n_0+i+1}\right) < +\infty,$$

alors pour $n \geq n_0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\rho\left(x_n, x_{n+k}\right) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \rho\left(x_{n+i}, x_{n+i+1}\right) < \varepsilon.$$

■

Le théorème des fermés emboîtés

Définissons le diamétre d'une partie A d'un espace quasi-semimétrique (X, ρ) par

$$diam(A) = \sup\left\{\rho(x, y) : x, y \in A\right\}$$

Théorème 2.1.13 *(Voir [10, Théorème 10]) L'espace quasi-semimétrique (X, ρ) est ρ-complet si et seulement si pour toute suite décroissante de fermés non vides $F_1 \supset F_2 \supset \ldots F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ de (X, ρ) avec $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} diam(F_n) = 0$ on a $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} F_n \neq \phi$, cette intersection est réeduite a un point si ρ est une quasi-métrique.*

Chapitre 3

La continuité dans les espaces asymétriques normés

3.1 Opérateures linéaires continus entre espaces asymétriques normés

On note par $L_a(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaire de l'espace asymétrique normé (X,p) dans l'espace asymétrique normé(Y,q).

Définition 3.1.1 *Soit $T:(X,p)\longrightarrow(Y,q)$ un opérateur linéaire entre deux espaces asymétriques normés. On dira que T est continu s'il est continu par rapport à la topologie τ_p sur X et par rapport à la topologie τ_q sur Y.*
On note par $\mathcal{LC}_{p,q}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de (X,p) dans (Y,q).

Définition 3.1.2 *L'opérateur linéaire $T:(X,p)\longrightarrow(Y,q)$ est dit borné s'il existe une constante $C\geq 0$ telle que*

$$q(T(x))\leq C.p(x) \tag{3.1}$$

pour tout $x\in X$.

Dans le théorème suivant on a un critère très simple, et très utile, de continuité comme le cas des espaces normés.

Théorème 3.1.3 *Soient (X,p) et (Y,q) deux espaces asymétriques normés et $T:X\longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Alors T est continu si et seulement s'il est borné.*

Démonstration. Supposons que T est borné. Soit $x\in X$ et montrons que pour tout $r>0$,

$$T\left(B_{X,p}\left[x,\frac{r}{C}\right]\right)\subset B_{Y,q}\left[T(x),r\right].$$

On a

$$B_{Y,q}\left[T(x),r\right]=\left\{y\in Y:q(y-T(x)\leq r\right\},$$

et

$$T\left(B_{X,p}\left[x,\frac{r}{C}\right]\right)=\left\{T(z):z\in X,\ p(z-x)\leq\frac{r}{C}\right\}.$$

Si $y = T(z) \in T\left(B_{X,p}\left[x, \frac{r}{C}\right]\right)$, on a

$$q\left(y - T(x)\right) = q\left(T(z) - T(x)\right) = q\left(T(z - x)\right) \leq Cp(z - x) \leq C\frac{r}{C} = r.$$

Ce qui montre que $y \in B_{Y,q}\left[T(x), r\right]$.

Inversement, supposons que T est continu (donc continu en 0), alors il existe $r > 0$ tel que

$$T\left(B_{X,p}\left[0, r\right]\right) \subset B_{Y,q}\left[0, 1\right]$$

Or on a

$$q\left(T(x)\right) \leq 1 \quad \text{pour tout } x \in X \text{ avec } p(x) \leq r. \tag{3.2}$$

Si $p(x) \neq 0$ on pose

$$z = r\frac{x}{p(x)} \in X.$$

On a $p(z) = r$ alors $q\left(T(z)\right) \leq 1$. Cela signifier que $q\left(T(x)\right) \leq r^{-1}p\left(x\right)$.

Si $p(x) = 0$, alors $p(nx) = np(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a d'apès (3.2),

$$q\left(T(x)\right) = \frac{1}{n}q\left(T(nx)\right) \leq \frac{1}{n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, en trouve $q\left(T(x)\right) = 0$. Ce qui montre que T est borné avec la constante $C = r^{-1}$. ■

3.2 Asymétrique norme sur $\mathcal{LC}\left(X, Y\right)$

Soient (X, p) et (Y, q) deux espaces asymétriques normés. Pour tout $T \in \mathcal{LC}\left(X, Y\right)$ on pose $\|T\|_{p,q}$ la plus petite constante C apparaissant dans la Définition 3.1.2, c-à-d

$$\|T\|_{p,q} = \inf\left\{C \geq 0 : q(T(x)) \leq Cp(x),\ \forall x \in X\right\}. \tag{3.3}$$

Dans ce cas on a

$$q(T(x)) \leq \|T\|_{p,q}\, p(x), \quad \text{pour tout } x \in X. \tag{3.4}$$

On a donc $\|T\|_{p,q} < \infty$.

La proposition suivante est alors évidente

Proposition 3.2.1 *Soit* $T \in \mathcal{LC}(X,Y)$ *un opérateur linéaire continue entre deux espaces asymétriques normés* (X,p) *et* (Y,q). *Alors*

$$\|T\|_{p,q} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{q(T(x))}{p(x)}. \tag{3.5}$$

On a aussi

$$\|T\|_{p,q} = \sup\{q(T(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} \tag{3.6}$$

Proposition 3.2.2 *[3]L'application* $T \longmapsto \|T\|_{p,q}$ *est une asymétrique norme sur* $\mathcal{LC}(X,Y)$.

Example 3.2.3 *1) Soit* $(C_0[0,1], p)$ *l'espace asymétrique semi-normé défini par*

$$C_0[0,1] = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\} \quad et \quad p(f) = \max f([0,1]).$$

Soient $(\mathbb{R}, u)$ *l'espace biBanach défini dans l'Exemple 2.1.9 et l'application linéaire*

$$\varphi : (C_0[0,1], p) \longrightarrow (\mathbb{R}, u), \quad \varphi(f) = f(1).$$

Alors φ *est continue mais* $-\varphi$ *n'est pas continue. En effet, pour tout* $f \in C_0[0,1]$,

$$\varphi(f) = f(1) \leq \max f([0,1]) = p(f),$$

d'où φ *est borné. Maintenant on prend la suite* $(f_n)_n \subset C[0,1]$ *défini par* $f_n(t) = 1 - nt$. *Il s'ensuit que*

$$p(f_n) = 1 \quad et \quad -\varphi(f_n) = -f_n(1) = n - 1$$

alors, $-\varphi$ *est n'est pas borné sur la boule unité de* $(C_0[0,1], p)$, *donc il n'est pas continue.* *2) L'application identique* $id_{\mathbb{R}}$ *de* $(\mathbb{R}, u)$ *dans lui même est continue mais* $-id_{\mathbb{R}}$ *n'est pas continue. En effet pour tout* $x < 0$, *on a* $u(-id_{\mathbb{R}}(x)) = -x$ *et alors*

$$\begin{aligned} \|-id_{\mathbb{R}}\|_{u,u} &= \sup\{u(-x) : x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 1\} \\ &= \sup\{-x : x \in \mathbb{R}, x \leq 1\} = \infty. \end{aligned}$$

On note par $\mathcal{LC}^s(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de (X,p^s) dans (Y,q^s).

Proposition 3.2.4 *Soient (X,p) et (Y,q) deux espaces asymétriques normés. Alors tout application linéaire continue de (X,p) dans (Y,q) est aussi continue de $(X,\overline{p})$ dans $(Y,\overline{q})$. Par conséquent $\mathcal{LC}(X,Y) \subseteq \mathcal{LC}^s(X,Y)$.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{LC}(X,Y)$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$p(T(x)) \leq Cq(x), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Ainsi

$$\overline{q}(T(x)) = q(-T(x)) = q(T(-x)) \leq Cp(-x) = C\overline{p}(x)$$

Donc T est continue de $(X,\overline{p})$ dans $(Y,\overline{q})$.
D'autre part pour tout $x \in X$,

$$q^s(T(x)) = \max\{q(T(x)), \overline{q}(T(x)),\} \leq Cp^s(x),$$

par conséquent T est continue de (X,p^s) dans (Y,q^s) et on conclure que $\mathcal{LC}(X,Y) \subseteq \mathcal{LC}^s(X,Y)$. ■

Remarque 3.2.5 *D'après l'Exemple 3.2.3, l'ensenble $\mathcal{LC}(X,Y)$ n'est pas un espace vectoriel. Mais on a la proposition suivante.*

Proposition 3.2.6 *L'ensenble $\mathcal{LC}(X,Y)$ est une cône convex dans $L_a(X,Y)$, c-à-d, pour tout $T,S \in \mathcal{LC}(X,Y)$ et tout $\lambda > 0$ on a $\lambda T \in \mathcal{LC}(X,Y)$ et $S+T \in \mathcal{LC}(X,Y)$.*

L'isomorphe des espaces asymétriques normés

Définition 3.2.7 *Deux espaces asymétriques normés (X,p) et (Y,q) sont dit isomorphe s'il existe une bijection linéaire $T:(X,p) \longrightarrow (Y,q)$ et deux constantes $C_0, C_1 > 0$ telles que*

$$C_0 p(x) \leq q(T(x)) \leq C_1 p(x) \quad \textit{pourtout } x \in X$$

Théorème 3.2.8 *[3]Un espace asymétrique normé* (X, q) *est isomorphe à un espace normé* $(X, \|\cdot\|_X)$ *s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$q(x) \leq C \|x\|_X, \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

3.3 L'espace duale d'un espace asymétrique normé

Dans la suite, u désigne l'asymétrique norme définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \max\{x, 0\}$
Pour tout espace asymétrique normé (X, q) on définie

$$X^{s*} = \{f : (X, q^s) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) : f \text{ est linéaire et continue}\}.$$

Et

$$X^{*} = \{f : (X, q) \longrightarrow (\mathbb{R}, u) : f \text{ est linéaire et continue}\}.$$

Alors X^{s*} est un espace véctoriel.
Par la Proposition 3.2.6, X^* est un cône convex de X^{s*}.
Pour tout $f \in X^{s*}$ on pose

$$q^*(f) = \sup_{q(x) \leq 1} u(f(x)) = \sup\{\max\{f(x), 0\} : q(x) \leq 1\}.$$

La restriction de q^* sur X^* est une asymétrique norme sur X^* (voir [5, Page 64]).
Notons que (X^{s*}, q^*) est un espace biBanach et que le cône convex (X^*, q^*) est aussi biBanach (voir [5, Théorème 6.1]).

Définition 3.3.1 *Soit* (X, q) *un espace asymétrique normé. Le couple* (X^*, q^*) *est appelé l'espace dual de* (X, q)*.*

Il est intéressant d'observer que nous avons effectivement

$$q^*(f) = \sup\{f(x) : q(x) \leq 1\}, \quad \text{pour tout } f \in X^{s*}.$$

Dans 2) de l'exemple 3.2.3 on donne un espace asymétrique normé de dimension finie tel que X^* n'est pas un espace véctoriel en général.
Dans [5] on trouve un exemple d'un espace asymétrique normé (X, q) de dimension infinie pour lequel X^* n'est pas un espace véctoriel.

Example 3.3.2 *[5, Page 64]Considérons l'espace asymétrique normé $\left(\ell_2, q_2^+\right)$ où ℓ_2 est l'espace de Hilbert défini par*

$$\ell_2 = \left\{ (\lambda_i)_{i=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 < \infty \right\}$$

et q_2^+ est une asymétrique norme sur ℓ_2 défini par

$$q_2^+ \left((\lambda_i)_{i=1}^{+\infty} \right) = \| u(\lambda_i) \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\max(\lambda_i, 0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors le dual de ℓ_2 est défini par

$$\ell_2^* = \left\{ (\mu_i)_{i=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R} : \mu_i \geq 0, \left\| (\mu_i)_{i=1}^{+\infty} \right\|_2 < \infty \right\}.$$

Et

$$\left(q_2^+\right)^* \left((\mu_i)_{i=1}^{+\infty} \right) = \left\| (\mu_i)_{i=1}^{+\infty} \right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $(\mu_i)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2^*$.

Dans la proposition suivante on donne une représentation du (X^*, q^*), dual asymétrique de (X, q), et sa boule-unité B_{X^*,q^*}, c'est-à-dire

$$B_{X^*,q^*} = \{ f \in X^* : q^*(f) \leq 1 \}$$

Proposition 3.3.3 *Soit (X, q) un espace asymétrique normé. Alors*

$$B_{X^*,q^*} = \{ f \in X^{s*} : q^*(f) \leq 1 \} \quad \text{et} \quad X^* = \{ f \in X^{s*} : q^*(f) < \infty \}.$$

Démonstration. Soit $f \in B_{X^*,q^*}$. Alors $q^*(f) \leq 1$ et $f \in X^{s*}$ car $X^* \subset X^{s*}$.
Maintenant, soit $f \in X^{s*}$ tels que $q^*(f) \leq 1$. Nous voulons montrer que $f(x) \leq q(x)$ pour tous $x \in X$. En effet, pour $x \in X$ fixé, nous distinguerons deux cas.
Cas 1) si $q(x) = 0$.
Supposons que $f(x) > 0$. On choisit $r > 0$ tel que $rf(x) > 1$. Si on prend $y = rx$ on obtient $q(y) = 0$. Puisque $q^*(f) \leq 1$, il s'ensuit que $f(y) \leq 1$. Cependant $f(y) = rf(x) > 1$, ceci une contradiction. Donc $f(x) \leq 0$.
Cas 2) si $q(x) > 0$.
Alors, on obtient

$$\frac{1}{q(x)} f(x) = f\left(\frac{x}{q(x)}\right) \leq q^*(f) \leq 1.$$

Et alors $f(x) \leq q(x)$.
D'après le Théorème 3.1.3, on a $f \in X^*$, donc $f \in B_{X^*,q^*}$.
Maintenant Soit $f \in X^{s*}$ tel que $q^*(f) < \infty$. Alors la fonction $g = \frac{f}{q^*(f)}$ est dans X^{s*} et $q^*(g) = 1$. Donc $g \in B_{X^*,q^*}$ et on conclure que $f \in X^*$. ■

Bibliographie

[1] E. Alemany and S. Romaguera, *On half-completion and bicompletion of quasi-metric spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 37(4) (1996), 749–756.

[2] S. Bodjanová, *Some basic notions of mathematical analysis in oriented metric spaces*, Math. Slovaca 31(3) (1981), 277–289.

[3] Ştefan Cobzaş, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Springer Basel Heidelberg New York Dordrecht London, 2013.

[4] J. Collins and J. Zimmer, *An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem*, Topology Appl. 154(11) (2007), 2312–2322.

[5] L. M. García Raffi, *Asymmetric Normed and the Dual Complexity Spaces*, Ph.D. thesis, Universidad politécnica de Valencia, Valencia (Spain), 2003.

[6] L. M. García Raffi, S. Romaguera and E. A. Sánchez Pérez, *The bicompletion of an asymmetric normed linear space.* Acta Math. Hungar. 97 (2002), 183-191.

[7] L. M. García Raffi, S. Romaguera and E. A. Sánchez Pérez, *Extensions of asymmetric norms to Linear Spaces.* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 33 (2001), 113-125.

[8] J.C. Kelly, *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc. 13 (1963), 71–89.

[9] A.C.G. Mennucci, *On asymmetric distances*, preprint, 2nd version 2007 available at http ://cvgmt.sns.it/people/mennucci

[10] I.L. Reilly, P.V. Subrahmanyam, M.K. Vamanamurthy, Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces,Monatsh. Math. 93 (1982), 127–140.

ملخص :

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مبسطة للفضاءات تحت تناظرية ناظمية, حيث قمنا باءعطاء الاساسيات حول هذا الموضوع بالاضافة الى دراسة بعض الخصائص الطوبولوجية لهذه الفضاءات, التقارب ولاستمرارية في هذه الفضاءات كما قمنا باءبراز العلاقة بين هذه الفضاءات والفضاءات الناظمية.

Résumé:

Dans ce mémoire nous avons simplifié l'étude des espaces, asymétrique normé, où nous avons étudié les propriétés topologiques de ces espaces, la convergence et la continuité dans ces espaces et nous avons mis en évidence la relation entre ces espaces et les espaces normés.

Abstract:

In this memory, we have simplified the study of normed asymmetric spaces, where we have studied the topological properties of these spaces, convergence and continuity in these spaces and we have highlighted the relation between these spaces and the normed spaces.