



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Problème de valeurs propres pour le Laplacien et le p-Laplacien

Présentée par :

DEBIH Ibtissem

Soutenu publiquement le : 27/6/2019.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r SENGOUA Abdelmohsine*

M.C.A, Université de M'sila

Encadreur : *M^r BOUGHERARA Brahim*

M.C.B, Université de M'sila

Examineur : *M^r MOKHTARI Abdellhak*

M.C.B, Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, Mon Dieu qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Un grand merci à mon encadreur : **Dr. Bougherara Brahim** pour son encadrement sa patience, sa disponibilité et ses précieuses remarques.

Mes vifs remerciements vont aussi à tous les membres du département de Mathématiques de l'université Mohamed Boudiaf de M'sila, les enseignant ainsi que tous mes camarades et amis.

Je remercie les membres de jury "Dr. SENGOUA. A et Dr. MOKHTARI. A", pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Enfin, je remercie profondément mes parents pour leurs encouragements et leur grand soutien.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mon chère père

Kamal

A ma chère mère.

BOUCHERB Bariza

A mes chers frères.

Akram. Rabeh. Younes

A ma chère soeur "Fayrouz" et sa fille Chahd.

A ma chère grand-mère.

A toute ma famille.

Notation

\mathbb{R}^N	Espace euclidien de dimension N , N un nombre naturel non nul
Ω	Domaine borné et régulier de \mathbb{R}^N
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^N$
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$ E $	Mesure de Lebesgue d'un ensemble E
Δu	Laplacien de u défini par $\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
$\Delta_p u$	p -Laplacien de u défini par $\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(\nabla u ^{p-2} \nabla u)$
λ_1	Première valeur propre sur Ω
$C(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$
$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ (ou $C^\alpha(\overline{\Omega})$)	Ensemble des fonctions de $C(\overline{\Omega})$ α -Hölderiennes, avec $0 < \alpha < 1$ c'est à dire, $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid \exists C > 0, \forall x, y \in \overline{\Omega}, u(x) - u(y) \leq C x - y ^\alpha\}$
$C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions $C^1(\overline{\Omega})$ α -Hölderiennes, avec $0 < \alpha < 1$ c'est à dire, $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \forall i \in \{1, \dots, N\}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\}$
$D(\Omega)$	Ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans Ω
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev standard sur Ω d'exposant p
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour la norme $\ \cdot\ _{W^{1,p}(\Omega)}$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$\ u\ _{W^{1,p}(\Omega)}$	Norme de u sur $W^{1,p}(\Omega)$ définie par $\ u\ _{W^{1,p}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\ u\ _{L^p(\Omega)} + \ \nabla u\ _{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$
$\ u\ _{W_0^{1,p}(\Omega)}$	Norme de u sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ définie par $\ u\ _{W_0^{1,p}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \ \nabla u\ _{L^p(\Omega)}$, équivalente à $\ u\ _{W^{1,p}(\Omega)}$
$p.p.$	presque partout.
\rightarrow	Convergence forte
\rightharpoonup	Convergence faible
$X \hookrightarrow Y$	L'injection canonique de X dans Y est continue.
$X \hookrightarrow_c Y$	L'injection canonique de X dans Y est compacte
$Df(u)$	La différentielle de f au point u au sens de Fréchet
$D_G f(u)$	La différentielle de f au point u au sens de Gâteaux
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ouvert Ω fortement inclus dans Ω , c'est-à-dire $\overline{\Omega'}$ compact et $\overline{\Omega'} \subset \Omega$

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires et outils de base	3
1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$	3
1.2 Rappels sur les espaces de Sobolev	5
1.3 Les espaces de Hölder	8
1.4 Régularité des solutions faibles	9
1.5 Quelques définitions et inégalités utiles	11
1.6 Théorème de Lax-milgram	13
1.7 Opérateurs compacts, décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts	14
2 Valeurs propres du Laplacien	16
2.1 Existence de la première valeur propre	16
2.2 Existence d'une suite des valeurs propres	20
2.3 Régularité des fonctions propres	24
2.4 Propriétés de la première valeur propre	25
2.4.1 Positivité	25
2.4.2 Simplicité	27
2.4.3 Isolation	28
3 Première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien	29
3.1 Existence de la première valeur propre	29
3.2 Régularité des fonctions propres	36

3.3	Propriétés de la première valeur propre	40
3.3.1	Simplicité	40
3.3.2	Positivité	44
3.3.3	Isolation	48
Conclusion Générale		51
Bibliographie		53

Introduction générale

Le p-Laplacien est un opérateur elliptique quasi-linéaire qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que l'écoulement des fluides non Newtoniens, les systèmes de réaction-diffusion, l'élasticité non-linéaire, extraction de pétrole... etc. A titre d'exemple dans les années 70 M. C. Pélissier modélise l'écoulement des glaciers de montagne par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le p-Laplacien.

Cet opérateur sous forme divergence est défini par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

Il est dégénéré lorsque $p \neq 2$ et équivalent à l'opérateur de Laplace usuel lorsque $p = 2$.

Il apparaît dans de nombreux contextes, citons par exemple

- le problème aux valeurs propres non-linéaire

$$\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$$

- les équations paraboliques de type

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta_p u \text{ où } v = v(x, t)$$

- les équations de poisson

$$\Delta_p u = f(x)$$

L'objectif de ce travail est d'étudier la première valeur propre de l'opérateur Laplacien et le p-Laplacien, plus précisément, on étudie les deux problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u & = & \lambda u \text{ dans } \Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{lll} -\Delta_p u & = & \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda |u|^{p-2} u \text{ dans } \Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $1 < p < \infty$.

L'essentiel de notre travail est consacré à l'étude de la première valeur propre de ces opérateurs, qui est le minimum de le quotient de Rayleight :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx}$$

ainsi qu'à la fonction propre associée qui sont d'une grande utilité dans la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires. Notre travail est organisé de la manière suivante

Dans un première partie, nous commençons par rappeler quelques notions et résultats sur (les espace de Lebesgue, les espaces de Sobolev, la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts, ...etc).

Dans la deuxième partie, nous étudions l'existence et les différentes propriétés de la première valeur propre de l'opérateur Laplacien, nous montrons que la fonction propre appartient à $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, ainsi que l'existence d'une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini en utilisant la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts.

Dans la troisième partie, nous étudions l'existence et les différentes propriétés de la première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien. On montrone aussi que la fonction propre appartient à $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

PRÉLIMINAIRES ET OUTILS DE BASE

Ce premier chapitre a pour objet la présentation des notions et des résultats d'analyse fonctionnelle utilisés dans les chapitres suivants comme (espace de Lebesgue, théorèmes d'injection de Sobolev, Opérateurs compacts, ...). Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue dx .

1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \int |f|^p dx < \infty \right\}$$

On définit la norme suivante

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}$$

On définit la norme suivante

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}$$

Théorème 1.1. On a les propriétés suivantes

- L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.
- L^p est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.
- L^p est réflexif pour tout $1 < p < \infty$.

Notation. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p i. e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemme 1.1. (Inégalité de **Hölder**). Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1$ et

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Lorsque $p = 2$, on a $p' = 2$ donc l'inégalité de Hölder se réduit alors à l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

Remarque 1.1. Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivante

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u v \, dx$$

Quelques critères de convergence

Lemme 1.2. (Lemme de Fatou). Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que

- pour chaque n , $f_n(x) \geq 0$ p.p. sur Ω
- $\sup_n \int_{\Omega} f_n(x) \, dx < \infty$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \, dx.$$

Théorème 1.2. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .
- il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω alors, $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0, \quad \int_{\Omega} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \, dx.$$

Théorème 1.3. (Réciproque du théorème de Lebesgue). Soient $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite extraire $(f_{n_k})_k$ tel que :

- $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω

- $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ pour tout k et p.p. sur Ω .

Théorème 1.4. (Egorov). On suppose que $|\Omega| < \infty$, soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de Ω dans \mathbb{R} telle que

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p. sur } \Omega \text{ (avec } |f(x)| < \infty \text{ p.p.)}$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset \Omega \text{ mesurable tel que}$$

$$|A^c| < \varepsilon \text{ et } f_n \rightarrow f \text{ uniformément sur } A$$

où $|A^c|$ désigne la mesure de Lebesgue de complémentaire de l'ensemble A .

1.2 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans cette section, on fait un bref rappel sur les espaces de Sobolev. Pour une présentation plus détaillée de ces espaces, on réfère l'ouvrage de H. Brezis [3] ou R. A. Adams [12]. Soit p un réel avec $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support compact dans Ω

Définition 1.2. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de u au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^p(\Omega)$ est dans $W^{1,p}(\Omega)$ s'il existe N fonctions $v_1, \dots, v_N \in L^p(\Omega)$ tels que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i \in 1, 2, \dots, N$$

On note $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Pour $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivante

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.3. Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach Séparable, il est de plus réflexif pour tout réel p vérifiant $1 < p < \infty$

Notation. On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.5. (*Inégalité de Poincaré*)

Soit p un réel avec $1 \leq p < \infty$, et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N alors

$$\exists C > 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

De plus, L'application $u \rightarrow \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à celle induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.6. L'espace $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})$ est uniformément convexe.

Lemme 1.3. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors u^+ , u^- , $|u|$ sont dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ où

$$u^+ = \max \{u(x), 0\}, \quad u^- = \max \{-u(x), 0\} \text{ et on a}$$

$$\begin{aligned} \nabla u^+ &= \begin{cases} \nabla u & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases} \\ \nabla u^- &= \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0 \\ -\nabla u & \text{si } u < 0 \end{cases} \\ \nabla |u| &= \begin{cases} \nabla u & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ -\nabla u & \text{si } u < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 1.4. Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N , pour $m \geq 0$, on note par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev définie par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \text{ telle que } |\alpha| \leq m, 1 \leq p < \infty\}$$

ou

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u, \quad |\alpha| = \sum_i \alpha_i.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme suivante

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.5. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , pour $p = 2$ on note $W^{m,2}(\Omega)$ par l'espace $H^m(\Omega)$ définie par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \text{ telle que } |\alpha| \leq m\}$$

est munit de produit scalaire suivante

$$\begin{aligned} \forall u, v \in H^m(\Omega), \quad (u, v)_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \end{aligned}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorèmes d'injection de Sobolev

Enonçons les Théorèmes "d'injection" continue, et compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^N .

Définition 1.6. On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si :

- X est un sous-espace de Y .
- $\exists C > 0$ telle que pour tout $u \in X$

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X.$$

Définition 1.7. On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow_c Y$ si

- X s'injecte de façon continue dans Y .
- De toute suite faiblement convergente dans X on peut extraire une sous suite converge fortement dans Y .

Théorème 1.7. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N de classe C^1 , avec $\partial\Omega$ borné, soit $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\text{Si } 1 \leq p < N \quad \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad \text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

$$\text{Si } p = N \quad \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$$

$$\text{Si } p > N \quad \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

De plus, si $p > N$ alors on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} C |x - y|^\alpha \quad p.p. \quad x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et C dépend seulement de Ω , et N . En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Théorème 1.8. (Rellich-Kondrachov) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . On a

$$\text{Si } p < N \quad \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[\quad \text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

$$\text{Si } p = N \quad \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$$

$$\text{Si } p > N \quad \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c C(\overline{\Omega})$$

Concernant la relation entre les espace de Sobolev et l'espace de Hölder, on a le résultat suivant

Théorème 1.9. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N avec des frontière Lipschitzienne, on a

$$W^{k,p} \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{pour tout } k > \frac{N}{p} \quad \text{où, } 0 \leq \alpha < \min \left\{ k - \frac{N}{p}, 1 \right\}$$

1.3 Les espaces de Hölder

Définition 1.8. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , et $0 \leq \alpha < 1$, on dit qu'une fonction u est höldérienne d'exposant α au voisinage de $x_0 \in \Omega$ si

$$\exists \delta, M > 0 \quad \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta), \quad |u(x) - u(x_0)| \leq M |x - x_0|^\alpha$$

On désigne par $C^{k,\alpha}(\Omega)$ les fonctions de classe $C^k(\Omega)$ telles que les dérivées d'ordre k sont höldériennes d'exposant α au voisinage de tout point $x_0 \in \Omega$.

- Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue, on écrit

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

- La semi norme d'ordre α de la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}$$

- la norme d'ordre α de la fonction f est

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + [f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

1.4 Régularité des solutions faibles

Théorème 1.10. Soit Ω un ouvert de classe C^2 avec $\partial\Omega$ borné. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$ où C est une constante qui dépend seulement de Ω .

De plus, si Ω est de classe C^{m+2} et si $f \in H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$, alors

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \text{avec} \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)}$$

en particulier si $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Enfin si Ω est de classe C^∞ et si $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$

(voir [3] théorème IX.25)

Théorème 1.11. Soit Ω un domaine de classe $C^{1,\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$, si $f \in L^\infty(\Omega)$. Alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

De plus si $f \in C(\bar{\Omega})$, alors u de classe $C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

(voir [2] théorème 8.34)

Définition 1.9. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $1 < p < \infty$. Considérons l'équation elliptique dégénérée

$$-\Delta_p u(x) = f(x, u(x)) \quad \text{sur } \Omega, \tag{1.1}$$

où $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

Définition 1.10. Une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est dite solution faible de (1.1) si

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (1.2)$$

Théorème 1.12. Soit $u \in L^{\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution de (1.2).

Si $f \in L^{\infty}(\Omega)$, alors u est dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour $0 \leq \alpha < 1$.

(voir [10] théorème 1)

Théorème 1.13. (Principe de maximum fort pour le Laplacien)

On suppose que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, où Ω est un ouvert bornée est connexe.

- si

$$-\Delta u \leq 0 \text{ dans } \Omega$$

et u atteint son maximum en un point à l'intérieur de Ω , alors u est une constante sur $\overline{\Omega}$.

- si

$$-\Delta u \geq 0 \text{ dans } \Omega$$

et u atteint son minimum en un point à l'intérieur de Ω , alors u est une constante sur $\overline{\Omega}$

(voir [6] théorème 4)

Remarque 1.2. Ce résultat est valable pour des opérateurs plus générale que Laplacien. On peut remplacer Δu par l'opérateur

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} + c(x) u$$

les coefficients a^{ij} , b^i , c sont continues sur Ω et les a_{ij} satisfont par ailleurs la condition d'ellipticité

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) y_i y_j \geq \alpha |y|^2$$

pour tout $x \in \Omega$ et pour un certain $\alpha > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, aussi $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, N$).

Définition 1.11. On dit que $u \in C^1(\Omega)$ satisfait

$$-\Delta_p u \leq f(u), \quad (\geq f(u))$$

Si $\forall \varphi \in D(\Omega)$, $\varphi > 0$ on a

$$\int_{\Omega} -\Delta_p u \varphi dx \leq \int_{\Omega} f(u) \varphi, \quad \left(\geq \int_{\Omega} f(u) \varphi \right)$$

Théorème 1.14. (*Principe de maximum fort pour le p -Laplacien*)

On suppose que $u \in C^1(\Omega)$, on suppose aussi que Ω est un domain de \mathbb{R}^N

- Si

$$-\Delta_p u \geq \lambda_1 |u|^{p-2} u \text{ dans } \Omega, \quad u \geq 0 \text{ et } 1 < p < +\infty$$

et si $u(x_0) = 0$ pour certains $x_0 \in \Omega$, alors $u \equiv 0$ sur Ω .

(voir [11] théorème 3)

1.5 Quelques définitions et inégalités utile

Différentiabilité

Définition 1.12. (Différentiabilité au sens de Fréchet). Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $u \in \Omega$, on dit que f est différentiable au sens de Fréchet au point u , s'il existe une application linéaire continue de E vers \mathbb{R} notée $Df(u)$, telle que

$$f(v) - f(u) = \langle Df(u), v - u \rangle + o(v - u).$$

Définition 1.13. (Différentiabilité au sens de Gâteaux). Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $u \in \Omega$, on dit que f est différentiable au sens de Gâteaux (ou G-différentiable) au point u , s'il existe une application linéaire continue de E vers \mathbb{R} notée $D_G f(u)$, telle que pour tout $v \in E$ on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = \langle D_G f(u), v \rangle$$

Proposition 1.1. Si f est différentiable au sens de Fréchet, alors f est différentiable au sens de Gateaux et $D_G f(u) = Df(u)$.

La réciproque est fause, mais on a le résultat qui suivant

Proposition 1.2. Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est G-différentiable sur Ω telle que l'application $u \mapsto D_G f(u)$ est continue. Alors f est différentiable au sens de Fréchet et sa différentielle coïncide avec $D_G f(u)$.

Quelques inégalités utile

Proposition 1.3.

- Si $p \in [2, \infty[$ alors :

$$| |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y | \leq C|x - y| (|x| + |y|)^{p-2} \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^N \quad (1.3)$$

avec C indépendant de x et y ;

- Si $p \in]1, 2]$, alors :

$$| |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y | \leq C|x - y|^{p-1} \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^N \quad (1.4)$$

avec C indépendant de x et y .

voir ([5]) **lemme 1**

Proposition 1.4.

- Pour tout $p > 1$ et $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^N$ tel que $w_1 \neq w_2$, on a

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p |w_1|^{p-2} w_1 \cdot (w_2 - w_1). \quad (1.5)$$

- Si $p \geq 2$ alors

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p |w_1|^{p-2} w_1 \cdot (w_2 - w_1) + \frac{|w_2 - w_1|^p}{2^{p-1} - 1} \quad (1.6)$$

pour tout w_1, w_2 dans \mathbb{R}^N .

- Si $1 < p < 2$ alors

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p |w_1|^{p-2} w_1 \cdot (w_2 - w_1) + C(p) \frac{|w_2 - w_1|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}} \quad (1.7)$$

Pour tout w_1, w_2 dans \mathbb{R}^N . ($C(p)$ est une constante positive qui dépend seulement de p)

voir ([9]) **lemme 4.2**

Lemme 1.4. Si $1 \leq p < \infty$ et $a \geq 0, b \geq 0$, alors

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \quad (1.8)$$

voir ([12]) **lemme 2.24**

Convergence faible

Définition 1.14. Soit E un espace de Banach, soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que u_n converge faiblement vers u dans E , et on note $u_n \rightharpoonup u$ si

$$\langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall f \in E'$$

Proposition 1.5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On a

- Si $u_n \rightarrow u$ dans E , alors $u_n \rightharpoonup u$ dans E
- Si $u_n \rightharpoonup u$ dans E , si de plus E est **uniformement convexe**, alors u_n est bornée et on a

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|.$$

1.6 Théorème de Lax-milgram

Problème variationnelle abstrait

Soit E un espace de Hilbert, réel muni de produit scalaire (\cdot, \cdot) , et de la norme associée $\|\cdot\|_E$.

Soit a une forme bilinéaire sur $E \times E$, et soit f une forme linéaire sur E .

Définition 1.15. On dit que la forme bilinéaire a est continue si il existe une constante $M > 0$, telle que pour tout $u, v \in E$ on a

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_E \|v\|_E$$

Définition 1.16. On dit que la forme bilinéaire a est symétrique si, pour tout $u, v \in E$ on a

$$a(u, v) = a(v, u)$$

Définition 1.17. On dit que la forme bilinéaire a est coercive sur E si, il existe une $\beta > 0$ telle que pour tout $u \in E$ on a

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_E^2$$

Théorème 1.15. (de Lax-Milgram)

Soit E un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive et L une forme linéaire continue sur E . Alors le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in E \text{ telle que} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in E \end{array} \right.$$

admet une solution unique.

Théorème 1.16. (Formule de Green)

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) ds \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}), \forall v \in C^1(\overline{\Omega}). \quad (1.9)$$

où $d\eta$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$, et $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u \cdot \eta$, η la normale extérieure unitaire de Ω .

1.7 Opérateurs compacts, décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts

Opérateurs compacts

Soient E et F deux espaces de Banach

Définition 1.18. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est **compact** si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte, on note que

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$$

On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F , on pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

$\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposition 1.6. Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $T \in \mathcal{L}(E, F)$

On dit que T est un compact si et seulement si de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on peut extraire une sous suite telle que $(T(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \rightarrow +\infty$.

Opérateurs adjoints

Théorème 1.17. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe un seul opérateur $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant

$$\forall (f, g) \in E \times F, \langle T(f), g \rangle_F = \langle f, T^*(g) \rangle_E$$

L'opérateur T^* est appelé **opérateur adjoint** de T , et on a

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(F, E)}.$$

Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.19. Soit E un espace de Hilbert, On dit que $T \in \mathcal{L}(E)$ est un **opérateurs auto-adjoints** si $T = T^*$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle T(x), y \rangle_E = \langle x, T(y) \rangle_E.$$

Théorème 1.18. On suppose que E est séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact.

Alors E admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T .

(voir [3] théorème VI. 11)

VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN

Dans ce chapitre on va étudier le problème aux valeurs propres faisant intervenir l'opérateur Laplacien

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Nous étudions les différentes propriétés de la première valeur propre (simplicité, isolation, ...), nous montrons qu'il est possible de construire une suite de valeurs propres positives tendant vers l'infini.

Définition 2.1. Une solution faible du problème (2.1) est une fonction non nulle $u \in H_0^1(\Omega)$, telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} u v \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.2)$$

2.1 Existence de la première valeur propre

Définition 2.2. On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur Laplacien, si le problème (2.1) admet une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ non-nulle

La fonction u est appelée fonction propre. On dit aussi que (u, λ) est une solution propre de (2.2)

Remarque 2.1. Si on remplace v par $u \in H_0^1(\Omega)$ dans (2.2) on obtient λ comme le quotient fonctionnel suivant

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |u|^2 \, dx} \quad (2.3)$$

Ce quotient est appelé le quotient de **Rayleigh**.

Définition 2.3. La première valeur propre de l'opérateur Laplacien notée λ_1 est définie par

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |u|^2 \, dx} \quad (2.4)$$

et la fonction u associé à cette valeur propre s'appelle première fonction propre.

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donné par le théorème suivant

Théorème 2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et régulier. Alors λ_1 définie par (2.4) existe et strictement positive, de plus il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ telle que*

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}$$

La fonction u peut être choisie positive, et satisfait l'équation (2.2), u appelée la première fonction propre.

Démonstration. Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, posons

$$F(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad K(u) = \int_{\Omega} |u|^2 dx$$

et on définit la fonctionnelle $L : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L(u) = \frac{F(u)}{K(u)}$$

alors

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} L(u).$$

D'après l'inégalité de Poincaré

$$\exists C > 0 : \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par conséquent $\lambda_1 \geq \frac{1}{C} > 0$.

Soit $(u_k)_{k \geq 1}$ est une suite minimisante de $H_0^1(\Omega)$ c'est-à-dire

$$\frac{\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2} \rightarrow \lambda_1, \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

On peut normaliser $(u_k)_{k \geq 1}$ en posant $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ pour tout k , alors

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx \rightarrow \lambda_1$$

D'où u_k est borné dans $H_0^1(\Omega)$.

On a $|u_k|$ est aussi une suite minimisante de L car

$$\int_{\Omega} |\nabla |u_k||^2 dx = \int_{\Omega^+} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{\Omega^-} |\nabla u_k|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx \rightarrow \lambda_1$$

où

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u_k(x) \geq 0\}$$

et

$$\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u_k(x) < 0\}$$

Alors on peut supposer que $u_k(x) \geq 0$ p.p sur Ω

Par l'injection

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega)$$

on déduit que pour une sous suite encore noté $(u_k)_k$

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{dans } H_0^1(\Omega) \\ u_k \rightarrow u & \text{dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

En particulier $K(u) = 1$ et $u(x) \geq 0$ p.p. sur Ω . Donc par la proposition (1.5) on a

$$L(u) = F(u) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf F(u_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F(u_k) = \lambda_1.$$

D'autre part

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

Par conséquent $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^2 dx = \lambda_1$. Ainsi $\exists u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ et $L(u) = \lambda_1$.

On montre que $L : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $u \in H_0^1(\Omega)$. c'est-à-dire

$$L(u+v) = L(u) + DL(u).v + o(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On a

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F(u) + 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &= F(u) + 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle + o(v) \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} K(u+v) &= K(u) + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= K(u) + 2 \langle u, v \rangle + o(v) \end{aligned}$$

car $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ donc $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C^2 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = o(v)$

$$K(u+v) = K(u) \left[1 + \frac{2}{K(u)} \langle u, v \rangle + o(v) \right]$$

On pose

$$h = \frac{2}{K(u)} \langle u, v \rangle + o(v)$$

donc

$$K(u+v) = K(u)(1+h)$$

avec $h \rightarrow 0$ quand $v \rightarrow 0$ donc $o(h) = o(v)$ d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{K(u+v)} &= \frac{1}{K(u)(1+h)} = \frac{1}{K(u)} (1 - h + o(h)) \\ &= \frac{1}{K(u)} - \frac{2}{K(u)^2} \langle u, v \rangle + o(v) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} L(u+v) &= \frac{F(u+v)}{K(u+v)} = (F(u) + 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle + o(v)) \times \left(\frac{1}{K(u)} - \frac{2}{K(u)^2} \langle u, v \rangle + o(v) \right) \\ &= \frac{F(u)}{K(u)} + \frac{2}{K(u)} \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \frac{2F(u)}{K(u)^2} \langle u, v \rangle + o(v) \end{aligned}$$

Donc $L(u)$ est différentiable en u et

$$DL(u).v = \frac{2}{K(u)} [\langle \nabla u, \nabla v \rangle - L(u) \langle u, v \rangle]$$

Comme u est un point minimum de L donc $DL(u) = 0$ et par conséquent

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = L(u) \langle u, v \rangle = \lambda_1 \langle u, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega)$$

D'où

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \lambda_1 \int_{\Omega} u v \, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \quad \blacksquare$$

2.2 Existence d'une suite des valeurs propres

Théorème 2.2. *Il existe une base Hilbertienne $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de réels avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \rightarrow \infty$ tels que $\phi_n \in H_0^1(\Omega)$ et*

$$\begin{cases} -\Delta \phi_n &= \lambda_n \phi_n & \text{sur } \Omega \\ \phi_n &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

Démonstration.

- Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{sur } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

On multipliant (2.6) par $v \in H_0^1(\Omega)$ puis on intégrant sur Ω et utilisant la **formule de Green** (1.9) On arrive à la formule variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.7)$$

- On montre que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ du problème (2.7). Avec $T = -\Delta^{-1}$ l'opérateur $f \mapsto u$ définie de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Pour cela on vérifie aisément les hypothèses du Théorème (1.15).

On pose $E = H_0^1(\Omega)$, et

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$a(u, v)$ est continue car

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla v| \, dx \\ &\leq \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \cdot \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} = \| u \|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \| v \|_{H_0^1(\Omega)} \quad (\text{par Cauchy Schwarz}) \end{aligned}$$

$a(u, v)$ est coercive car

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{C}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \quad (\text{par l'inégalité de Poincaré}) \\
 &\geq \frac{1}{2} \min(1, C) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

$L(u)$ est continue car

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

il est clair que $a(u, v)$ est une forme bilinéaire symétrique.

Donc D'après le Théorème de Lax-Milgram il existe une unique solution $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ de problème (2.7).

- Vérifions que T est linéaire, continue, compact et autoadjoint.
- Montrons que l'opérateur T est linéaire i.e.

$$T(f + g) = Tf + Tg \text{ et } T(\alpha f) = \alpha T(f), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

Pour cela on pose $T(f + g) = w$, $Tf = u$, $Tg = v$. il vient

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} -\Delta w = f + g & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta(u + v) = f + g & \text{dans } \Omega \\ u + v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

D'après l'unicité de la solution on a $w = u + v$, par conséquent

$$T(f + g) = Tf + Tg$$

il reste a monter que $T(\alpha f) = \alpha T(f)$ pour cela on pose $T(\alpha f) = w$, $u = \alpha T(f)$ il vient

$$\begin{cases} -\Delta w &= \alpha f & \text{dans } \Omega \\ w &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u &= \alpha f & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

D'après l'unicité da la solution on a $w = u$, par conséquent

$$T(\alpha f) = \alpha T(f)$$

D'où l'opérateur T est linéaire.

- Montrons que l'opérateur T est cotinue, pour cela on appliquant la formule (2.7) pour $\varphi = u$, on trouve.

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f \cdot u dx$$

On applique l'inégalité de Cauchy Shwartz on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2}$$

Donc d'après l'inégalité de poincaré on a

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Ce qui implique

$$\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2}$$

Cela prouve donc que l'application T est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans L^2 est compacte on en déduit que T est un opérateur compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

- Montrons que T est autoadjoint i.e.

$$\int_{\Omega} (Tf) g dx = \int_{\Omega} f (Tg) dx \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

En multipliant (2.8) par v et (2.9) par u et en utilisant (1.9) on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} u g dx \quad (2.10)$$

D'où T est autoadjoint, donc d'après le théorème (1.18), il existe donc une base Hilbertienne $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ constituée des fonctions propres de T associés à des valeurs propres $(\mu_n)_{n \geq 1}$ i.e. $T\phi_n = \mu_n \phi_n$. On a donc $\phi_n \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_n \nabla v \, dx = \frac{1}{\mu_n} \int_{\Omega} \phi_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit ϕ_n est une solution faible de (2.5) avec $\lambda_n = \mu_n^{-1}$.

De plus on a

$$\|\phi_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \langle \phi_n, \phi_m \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m \neq n \quad (2.11)$$

- On montre que $\lambda_n \rightarrow +\infty$, par absurde, supposons qu'il existe une sous suite $\lambda_{n_k} \rightarrow c$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$.

donc ϕ_{n_k} est bornée dans \mathbb{R} . puisque $\|\phi_{n_k}\|_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_{n_k}$ par (2.3) et (2.11).

donc par l'injection

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega)$$

on déduit que pour une sous suite encore noté $(u_k)_k$

$$\begin{cases} \phi_{n_k} \rightharpoonup \phi & \text{dans } H_0^1(\Omega), \quad k \rightarrow +\infty \\ \phi_{n_k} \rightarrow \phi & \text{dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

En particulier ϕ_{n_k} est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \|\phi_{n_p} - \phi_{n_q}\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad \text{pour tout } p, q \in \mathbb{N} \text{ assez grand.} \quad (2.12)$$

Mais on a par (2.11), ϕ_{n_p} et ϕ_{n_q} sont orthogonale dans $L^2(\Omega)$, alors

$$\|\phi_{n_p} - \phi_{n_q}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\phi_{n_p}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_{n_q}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 > \varepsilon.$$

donc contradiction avec (2.12), (pour $\varepsilon < 1$) par conséquent

$$\lambda_n \rightarrow +\infty$$

- Soit ϕ_n une fonction propre associé à la valeur propre λ_n . Alors

$$\lambda_n \int_{\Omega} \phi_n^2 \, dx = - \int_{\Omega} (\Delta \phi_n) \phi_n \, dx$$

par (1.9) on a

$$-\int_{\Omega} (\Delta \phi_n) \phi_n \, dx = \int_{\Omega} |\nabla \phi_n|^2 \, dx$$

Donc

$$\lambda_n \int_{\Omega} \phi_n^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla \phi_n|^2 \, dx \geq 0. \quad (2.13)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_n|^2 \, dx > 0.$$

Nous prouvons cette affirmation comme suit.

Supposons que $\int_{\Omega} |\nabla \phi_n|^2 \, dx = 0$, alors $|\nabla \phi_n| = 0$ se qui implique que ϕ_n est constante sur Ω . Mais on a $\phi_n = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc si ϕ_n est constant sur Ω et $\phi_n = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\phi_n \equiv 0$. Cependant, la fonction nulle n'est pas une fonction propre, donc

$$\lambda_n \int_{\Omega} \phi_n^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla \phi_n|^2 \, dx > 0$$

ce qui implique $\lambda_n > 0$ ■

2.3 Régularité des fonctions propres

Théorème 2.3. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N avec Ω de classe C^1 , et $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^+$ est une solution propre de (2.1), alors $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Démonstration. On a $u \in H_0^1(\Omega)$ d'où $\lambda u \in H_0^1(\Omega)$. Donc d'après le théorème (1.10), on a $u \in H^3(\Omega)$, et par récurrence on obtient $u \in H^k(\Omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

D'après le théorème (1.9), on déduit que

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$$

d'où

$$u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Donc d'après le théorème (1.11) on déduit que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

2.4 Propriétés de la première valeur propre

2.4.1 Positivité

Théorème 2.4. *Toute fonction propre u associée à la première valeur propre λ_1 est de signe constant sur Ω (c'est-à-dire $u > 0$ ou bien $u < 0$ sur Ω).*

Démonstration. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une fonction propre associée à la valeur propre λ_1 . D'après le lemme (1.3) on a $u^\pm \in H_0^1(\Omega)$ et par définition de λ_1 on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 dx \geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u^+|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx \geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u^-|^2 dx \quad (2.14)$$

Or on a également

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u^+|^2 dx + \lambda_1 \int_{\Omega} |u^-|^2 dx.$$

Ainsi les inégalités dans (2.14) sont nécessairement des égalités i.e.

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u^+|^2 dx$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u^-|^2 dx$$

Cela implique en particulier en reprenant la preuve de théorème 2.1 que u^+ et u^- sont des fonctions propres associées à la valeur propre λ_1 , et donc

$$\begin{cases} -\Delta u^\pm &= \lambda_1 u^\pm \geq 0 \\ u^\pm &= 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{dans } \Omega \\ \text{sur } \partial\Omega \end{matrix} \quad (2.15)$$

où

$$u^+(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) > 0 \\ 0 & \text{si } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

et

$$u^-(x) = \begin{cases} -u(x) & \text{si } u(x) < 0 \\ 0 & \text{si } u(x) \geq 0 \end{cases}$$

D'après le théorème (2.3), on a $u^\pm \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

On a $u^+ \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$ donc on distingue deux cas

1. $u^+ > 0, \forall x \in \Omega$, alors

$$u > 0, \forall x \in \Omega$$

2. Si $\exists x_0 \in \Omega$, telle que $u^+(x_0) = 0$, alors

$$u^+(x_0) = 0 = \inf_{\Omega} u^+.$$

D'après le principe de maximum fort (théorème 1.13)

$$u^+(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

d'où

$$u(x) \leq 0 \quad \text{sur } \Omega \tag{2.16}$$

alors

$$\text{Si } \exists x_0 \in \Omega \text{ telle que } u^-(x_0) = 0$$

donc

$$u^-(x_0) = 0 = \inf_{\Omega} u^-.$$

D'après le principe de maximum fort

$$u^-(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

d'où

$$u(x) \geq 0 \quad \text{sur } \Omega \tag{2.17}$$

D'après (2.16) et (2.17) on a $u \equiv 0$ sur Ω , c'est une contradiction car la fonction propre n'est pas nulle.

par conséquent

$$\forall x \in \Omega : u^+(x) > 0 \text{ i.e } \Omega \text{ cela donne } u > 0 \text{ sur } \Omega$$

Ou

$$\forall x \in \Omega : u^-(x) > 0 \text{ sur } \Omega \text{ i.e } u < 0 \text{ sur } \Omega \quad \blacksquare$$

Proposition 2.1. λ_1 est la seule valeur propre associée à une fonction propre strictement positive.

Démonstration. Si $w \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre strictement positive, associée à la valeur propre λ , et $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre associée à la valeur propre λ_1 , donc par le théorème (3.5) on peut choisir $\phi_1 > 0$.

On a

$$\lambda \int_{\Omega} w \phi_1 \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta w) \phi_1 \, dx = \int_{\Omega} \nabla w \nabla \phi_1 \, dx = \int_{\Omega} w (-\Delta \phi_1) \, dx = \lambda_1 \int_{\Omega} w \phi_1 \, dx.$$

ce qui implique

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} w \phi_1 \, dx = 0$$

D'où $\lambda = \lambda_1$ puisque

$$\int_{\Omega} w \phi_1 \, dx \neq 0 \text{ car } w \phi_1 > 0$$

par hypothèse $\phi_1 > 0$.

2.4.2 Simplicité

Théorème 2.5. *La première valeur propre λ_1 est simple, i.e. si u et v sont deux fonctions propres associées à λ_1 alors u et v sont proportionnels.*

Démonstration. Soient u, v deux fonctions propres associées à λ_1 , d'après le théorème (2.4) u, v sont des signes constants sur Ω et aussi pour uv .

D'où

$$uv > 0 \text{ ou bien } uv < 0 \text{ sur } \Omega$$

dans tous les deux cas $\int_{\Omega} uv \, dx \neq 0$ car $\int_{\Omega} |uv| \, dx > 0$

D'autre part, si u et v ne sont pas proportionnels alors

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, \alpha u + \beta v \neq 0$$

On a $w = \alpha u + \beta v$ est une fonction propre associée à λ_1 donc $\int_{\Omega} uv \, dx \neq 0$

Mais

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} uw \, dx &= \int_{\Omega} u(\alpha u + \beta v) \, dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} u^2 \, dx + \beta \int_{\Omega} uw \, dx \\ &= 0. \text{ Si } \beta = -\alpha \frac{\int_{\Omega} u^2 \, dx}{\int_{\Omega} uv \, dx}\end{aligned}$$

Contradiction, donc u, v sont proportionnels.

2.4.3 Isolation

Théorème 2.6. *La première valeur propre λ_1 est isolée dans l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur Laplacien*

Démonstration Pour la preuve, on l'a fait dans le cas générale avec l'opérateur p-Laplacien. Voir théorème (3.7) ci-dessous.

PREMIÈRE VALEUR PROPRE DE L'OPÉRATEUR P-LAPLACIEN

Dans ce chapitre on va étudier le problème aux valeurs propres faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et l'opérateur p-Laplacien $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ défini sur l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$, avec p et p' deux réels, $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Nous étudions les différentes propriétés de la première valeur propre (simplicité, isolation, ...).

Définition 3.1. Une solution faible du problème (3.1) est une fonction non nulle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, telle que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v \, dx \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.2)$$

3.1 Existence de la première valeur propre

Définition 3.2. On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur p-Laplacien, si le problème (3.1) admet une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ non-nulle

La fonction u est appelée fonction propre. On dit aussi que (u, λ) est une solution propre de (3.2)

Remarque 3.1. Remarquons que si on remplace v par $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dans (3.2) on obtient λ comme le quotient fonctionnel suivant

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx}{\int_{\Omega} |u|^p \, dx} \quad (3.3)$$

Ce quotient est appelé le quotient de **Rayleigh**.

Définition 3.3. La première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien notée λ_1 est définie par

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx} \quad (3.4)$$

et la fonction u associé à cette valeur propre s'appelle première fonction propre.

Maintenant, on va discuter la question d'existence de la première valeur propre et sa fonction propre associée. D'après la définition de λ_1 , il s'agit d'étudier les fonctionnelles suivants :

$$\begin{aligned} I : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J : L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx \end{aligned}$$

avec Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , et $p \in]1, +\infty[$

On commence par la proposition suivante

Proposition 3.1. La fonctionnelle I est différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\langle DI(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = p \langle -\Delta_p u, v \rangle$$

Démonstration. On montre que I est G-différentiable c'est-à-dire

$$\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \langle D_G I(u), v \rangle.$$

On sait que l'application $x \mapsto |x|^p$, $x \in \mathbb{R}^N$, $p > 1$ est différentiable, sa différentielle est donné par $p|x|^{p-2}x$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ (en acceptant que $p|x|^{p-2}x = 0$ pour $x = 0$), d'ou elle est G-différentiable et on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|x + ty|^p - |x|^p}{t} = p|x|^{p-2}x \cdot y$$

Par conséquent $\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \text{ p.p. sur } \Omega \quad (3.5)$$

D'autre part, on pose pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(t) = |x + ty|^p$, φ est différentiable et

$$\varphi'(t) = p|x + ty|^{p-2}(x + ty).y$$

On applique le **théorème des accroissements finis**

$\exists \theta$ entre 0 et t ($0 < |\theta| < |t|$) telle que

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \varphi'(\theta)$$

d'où

$$\frac{|x + ty|^p - |x|^p}{t} = p|x + \theta y|^{p-2} \cdot (x + \theta y).y$$

Par conséquent

$$\frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p|\nabla u(x) + \theta\nabla v(x)|^{p-2}(\nabla u(x) + \theta\nabla v(x)).\nabla v$$

Supposons que $|t| < 1$, d'où $|\theta| < 1$, alors on a

$$\left| \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} \right| \leq p|\nabla u + \theta\nabla v|^{p-1}|\nabla v| \leq C(|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| + |\nabla v|^p) \text{ par (1.8)}$$

On a $|\nabla u|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ et $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$

D'après l'inégalité de Hölder on a $|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega)$

D'où $h = |\nabla u|^{p-1}|\nabla v| + |\nabla v|^p \in L^1(\Omega)$

donc

$$\left| \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} \right| \leq p|\nabla u + \theta\nabla v|^{p-1}|\nabla v| \leq Ch \in L^1(\Omega) \quad (3.6)$$

D'après (3.5) et (3.6) et grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue (1.2), on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} dx = p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Donc

$$\langle D_G I(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle -p\Delta_p u, v \rangle.$$

Pour déduire que I est Gâteaux différentiable, on montre que $D_G I \in W_0^{-1,p'}$

On a la définition de la norme dans l'espace dual suivante :

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \| -p\Delta_p u \|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1} |\langle -p\Delta_p u, v \rangle|.$$

Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} |\langle -p\Delta_p u, v \rangle| &= \left| p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} |\nabla u| \cdot |\nabla v| \, dx \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} |\langle -p\Delta_p u, v \rangle| &\leq p \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-1)p'} \, dx \right]^{\frac{1}{p'}} \times \left[\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= p \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p}{p'}} \cdot \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \quad (\text{car } u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \end{aligned}$$

Enfin I est Gâteaux différentiable

Nous allons maintenant montrer que $D_G I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$ est continue pour conclure la différentiabilité. A cet effet nous considérons une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_k \longrightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$

1. Pour $p \in [2, +\infty[$ et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ nous avons

$$\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle = p \int_{\Omega} (|\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla v \, dx$$

et

$$\begin{aligned} |\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle| &= \left| p \int_{\Omega} (|\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq p \int_{\Omega} |\nabla u_k|^{p-2} |\nabla u_k - \nabla u| \cdot |\nabla v| \, dx \end{aligned}$$

Par l'inégalité (1.3) on a

$$|\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle| \leq C \int_{\Omega} |\nabla u_k - \nabla u| (|\nabla u_k| + |\nabla u|)^{p-2} \cdot |\nabla v| \, dx$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} |\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle| &\leq C \left[\int_{\Omega} |\nabla u_k - \nabla u|^{p'} (|\nabla u_k| + |\nabla u|)^{p'(p-2)} \, dx \right]^{\frac{1}{p'}} \cdot \left[\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left[\int_{\Omega} |\nabla u_k - \nabla u|^{\frac{p}{p-1}} (|\nabla u_k| + |\nabla u|)^{\frac{p}{p-1}(p-2)} \, dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

On pose $q = p - 1$, $q' = \frac{p-1}{p-2}$ donc $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} |\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle| &\leq C \left[\int_{\Omega} |\nabla u_k - \nabla u|^{\frac{p}{p-1}(p-1)} dx \right]^{\left(\frac{1}{p-1}\right)\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \times \left[\int_{\Omega} (|\nabla u_k| + |\nabla u|)^{(p-2)\frac{p}{p-1}\frac{p-1}{p-2}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}\left(\frac{p-2}{p-1}\right)} \cdot \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq C \left[\int_{\Omega} |\nabla u_k - \nabla u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_{\Omega} (|\nabla u_k| + |\nabla u|)^p dx \right]^{\frac{p-2}{p}} \\ &\quad \times \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle| &\leq K \|u_k - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot \left(\|u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{p-2}{p}} \\ &\quad \times \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ par (1.8)} \end{aligned}$$

Comme on a

$$\|D_G I(u_k) - D_G I(u)\|_{W^{-1,p'}} = \sup \left\{ |\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle|, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1 \right\}$$

d'où

$$\|D_G I(u_k) - D_G I(u)\|_{W^{-1,p'}} \leq K \|u_k - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot \left(\|u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{p-2}{p}}$$

On a

$$\|u_k - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$$

Donc

$$\|D_G I(u_k) - D_G I(u)\|_{W^{-1,p'}} \rightarrow 0$$

2. Si $p \in]1, 2]$ et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} |\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle| &= \left| p \int_{\Omega} (|\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla v dx \right| \\ &\leq p \int_{\Omega} | |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k - |\nabla u|^{p-2} \nabla u | \cdot |\nabla v| dx \end{aligned}$$

Par l'inégalité (1.4) et l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} |\langle D_G I(u_k) - D_G I(u), v \rangle| &\leq K \int_{\Omega} |\nabla u_k - \nabla u|^{p-1} \times 1 dx \cdot \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq K \left[\int_{\Omega} |\nabla u_k - \nabla u|^{(p-1)p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \cdot \left[\int_{\Omega} 1^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq k \|u_k - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \cdot \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

On a

$$\| u_k - u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \longrightarrow 0$$

Donc

$$\| D_G I(u_k) - D_G I(u) \|_{W^{-1,p'}} \longrightarrow 0$$

D'où $D_G I$ est continue, par conséquent I est Fréchet différentiable avec $DI = D_G I$. ■

Proposition 3.2. *La fonctionnelle J est différentiable sur $L^p(\Omega)$ et*

$$\langle DJ(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \cdot v \, dx$$

Démonstration. Même procédure ci-dessus.

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donné par le théorème suivant

Théorème 3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et régulier et $1 < p < N$. Alors λ_1 définie par (3.4) existe et strictement positive, de plus il existe une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ telle que*

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx}$$

La fonction u peut être choisie positive, et satisfait l'équation (3.2), u appelée la première fonction propre.

Démonstration. Pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, posons

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx, \quad J(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx$$

et on définit la fonctionnelle $Q : W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$Q(u) = \frac{I(u)}{J(u)}$$

alors

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} Q(u).$$

D'après l'inégalité de Poincaré

$$\exists C > 0 : \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Par conséquent $\lambda_1 \geq \frac{1}{C} > 0$.

Soit $(u_k)_{k \geq 1}$ est une suite minimisante de $W_0^1(\Omega)$ c'est-à-dire

$$\frac{\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u_k\|_{L^p(\Omega)}^p} \rightarrow \lambda_1 \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

On peut normaliser $(u_k)_{k \geq 1}$ en posant $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ pour tout $k \geq 1$ alors

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k|^p dx \rightarrow \lambda_1$$

D'où u_k est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

On a $|u_k|$ est aussi une suite minimisante de Q car

$$\int_{\Omega} |\nabla |u_k||^p dx = \int_{\Omega^+} |\nabla u_k|^p dx + \int_{\Omega^-} |\nabla u_k|^p dx = \int_{\Omega} |\nabla u_k|^p dx \rightarrow \lambda_1$$

où

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u_k(x) \geq 0\}$$

et

$$\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u_k(x) < 0\}$$

Alors on peut supposer que $u_k(x) \geq 0$ p.p. sur Ω .

Par l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$ on déduit que pour une sous suite encore noté $(u_k)_k$

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_k \rightarrow u & \text{dans } L^p(\Omega) \end{cases}$$

En particulier $J(u) = 1$ et $u(x) \geq 0$ p.p. sur Ω . Donc par la proposition (1.5) on a

$$Q(u) = I(u) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} I(u_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} I(u_k) = \lambda_1.$$

D'autre part

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

Par conséquent $\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^p dx = \lambda_1$ Ainsi $\exists u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ et $Q(u) = \lambda_1$.

On montre que $Q(u)$ est différentiable en $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, i.e

$$Q(u+v) = Q(u) + DQ(u).v + o(h), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

D'après les proposition (3.1), et (3.2), on a les fonctionnelles I et J sont différentiables d'où

$$\begin{aligned} Q(u+v) &= \frac{I(u+v)}{J(u+v)} = \frac{I(u) + \langle DI(u), v \rangle + o(v)}{J(u) + \langle DJ(u), v \rangle + o(v)} \\ &= (I(u) + \langle DI(u), v \rangle + o(v)) \times \frac{1}{J(u) \left(1 + \left\langle \frac{DJ(u)}{J(u)}, v \right\rangle + o(v)\right)} \\ &= (I(u) + \langle DI(u), v \rangle + o(v)) \times \left(\frac{1}{J(u)} - \left\langle \frac{DJ(u)}{J(u)^2}, v \right\rangle + o(v) \right) \\ &= Q(u) + \left\langle \frac{DI(u)}{J(u)}, v \right\rangle - \left\langle \frac{I(u)DJ(u)}{J(u)^2}, v \right\rangle + o(v) \end{aligned}$$

Donc $Q(u)$ est différentiable et sa différentiale est

$$\langle DQ(u), v \rangle = \left\langle \frac{DI(u)}{J(u)}, v \right\rangle - Q(u) \left\langle \frac{DJ(u)}{J(u)}, v \right\rangle$$

Donc

$$\langle DQ(u), v \rangle = \frac{1}{J(u)} (\langle DI(u), v \rangle - Q(u) \langle DJ(u), v \rangle).$$

Comme u est un point minimum de Q donc $DQ(u) = 0$ et par conséquent

$$\langle DI(u), v \rangle = Q(u) \langle DJ(u), v \rangle = \lambda_1 \langle DJ(u), v \rangle \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

D'où

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \blacksquare$$

3.2 Régularité des fonctions propres

Dans cette section, on va montrer que la fonction propre de p-Laplacien est dans $C^{1,\alpha}$. On va appliquer le théorème (1.12). Pour cela on montre que la fonction propre u est borné, en appliquant les itération de Moser. On a le résultat suivant

Théorème 3.2. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N avec $\partial\Omega$ de classe C^1 , et $(u, \lambda) \in W_0^{1,p} \times \mathbb{R}^+$ est une solution propre de (3.1) alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Dans cette démonstration nous utilisons la technique d'itération de Moser. Supposons d'abord que $u \geq 0$. Pour $M > 0$ posons

$$v_M(x) = \min \{u(x), M\} = \begin{cases} u(x) & \text{sur } \Omega^+ \\ M & \text{sur } \Omega^- \end{cases} \Rightarrow \nabla v_M = \begin{cases} \nabla u & \text{sur } \Omega^+ \\ 0 & \text{sur } \Omega^- \end{cases}$$

avec

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) \leq M\}$$

et

$$\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u(x) > M\}$$

On a

$$v_M(x) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Soit $k > 0$, choisissons $\varphi = v_M^{kp+1}$, alors $\nabla \varphi = (kp+1) \nabla v_M \cdot v_M^{kp}$ et $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

En utilisant φ comme fonction test dans (3.2) nous obtenons

$$(kp+1) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v_M v_M^{kp} dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v_M^{kp+1} dx \leq \lambda \int_{\Omega} |u|^{(k+1)p} dx$$

On a

$$\begin{aligned} (kp+1) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v_M v_M^{kp} dx &= (kp+1) \left(\int_{\Omega^+} |\nabla v_M|^p \cdot v_M^{kp} dx + \int_{\Omega^-} |\nabla v_M|^p \cdot v_M^{kp} dx \right) \\ &= (kp+1) \int_{\Omega} |\nabla v_M|^p \cdot v_M^{kp} dx \end{aligned}$$

et

$$|\nabla v_M^{k+1}|^p = |(k+1) \nabla v_M \cdot v_M^k|^p = (k+1)^p |\nabla v_M|^p \cdot v_M^{kp}$$

donc

$$\frac{kp+1}{(k+1)^p} \int_{\Omega} |\nabla v_M^{k+1}|^p dx \leq \lambda \int_{\Omega} |u|^{(k+1)p} dx$$

et ensuite

$$\frac{kp+1}{(k+1)^p} \int_{\Omega} (|\nabla v_M^{k+1}|^p + |v_M^{k+1}|^p) dx \leq \left(\lambda + \frac{kp+1}{(k+1)^p} \right) \int_{\Omega} |u|^{(k+1)p} dx$$

ainsi

$$\|v_M^{k+1}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq \left(\frac{\lambda(k+1)^p}{kp+1} + 1 \right) \|u\|_{L^{(k+1)p}}^{(k+1)p}.$$

Mais d'après le théorème d'injection de Sobolev (1.7), il existe une constante $c_1 > 0$ tel que

$$\|v_M^{k+1}\|_{L^{p^*}} \leq c_1 \|v_M^{k+1}\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

ici nous prenons $p^* = \frac{Np}{N-p}$, si $p < N$ et $p^* = 2p$, si $p = N$. Ainsi

$$\begin{aligned} \|v_M\|_{L^{(k+1)p^*}} &= \|v_M^{k+1}\|_{L^{p^*}}^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq c_1^{\frac{1}{k+1}} \left(\lambda \frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1 \right)^{\frac{1}{p(k+1)}} \|u\|_{L^{(k+1)p}} \end{aligned}$$

Nous pouvons trouver une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\left(\lambda \frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1 \right)^{\frac{1}{p\sqrt{(k+1)}}} \leq c_2$$

pour tout $k > 0$. Car, si on pose

$$\begin{aligned} l &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda(k+1)^p}{kp+1} + 1 \right)^{\frac{1}{p\sqrt{kp+1}}} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{1}{p\sqrt{k+1}} \ln \left(\frac{\lambda(k+1)^p}{kp+1} + 1 \right) \right) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\lambda(k+1)^p}{kp+1} + 1 \right) &\approx \ln \left(\frac{\lambda(k+1)^p}{kp+1} \right) \\ &= \ln(k+1)^{p-1} + \ln \left(\frac{\lambda(k+1)}{kp+1} \right) \\ &\approx \ln(k+1)^{p-1} + \alpha \quad (\text{avec } \alpha = \ln \frac{\lambda}{p}) \end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned} l &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{\ln(k+1)^{p-1} + \alpha}{p\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \exp \left(2(p-1) \frac{\ln \sqrt{k+1}}{p\sqrt{k+1}} + \frac{\alpha}{p\sqrt{k+1}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\left(\lambda^{\frac{(k+1)^p}{(kp+1)}} + 1\right)^{\frac{1}{p\sqrt{(k+1)}}}$ est borné

D'où

$$\|v_M\|_{L^{(k+1)p^*}} \leq c_1^{\frac{1}{k+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \|u\|_{L^{(k+1)p}}$$

En faisant tendre $M \rightarrow \infty$, et d'après le lemme (1.2) de Fatou

$$\|u\|_{L^{(k+1)p^*}} \leq c_1^{\frac{1}{k+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \|u\|_{L^{(k+1)p}}. \quad (3.7)$$

En choisissant $k_1 = k$ telle que $(k_1 + 1)p = p^*$, $\left(k_1 = \frac{p^*}{p} - 1 > 0\right)$, alors (3.7) devient

$$\|u\|_{L^{(k_1+1)p^*}} \leq c_1^{\frac{1}{k_1+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_1+1}}} \|u\|_{L^{p^*}}.$$

Ensuite, nous choisissons k_2 telle que $(k_2 + 1)p = (k_1 + 1)p^*$, $\left(k_2 = \left(\frac{p^*}{p}\right)^2 - 1 > k_1 > 0\right)$ puis nous prenons $k_2 = k$ dans (3.7), nous avons

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{(k_2+1)p^*}} &\leq c_1^{\frac{1}{k_2+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_2+1}}} \|u\|_{L^{(k_2+1)p}} = c_1^{\frac{1}{k_2+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_2+1}}} \|u\|_{L^{(k_1+1)p^*}} \\ &\leq c_1^{\frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{k_2+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_1+1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2+1}}} \|u\|_{L^{p^*}} \end{aligned}$$

Par récurrence nous obtenons

$$\|u\|_{L^{(k_n+1)p^*}} \leq c_1^{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n+1}} c_2^{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k_n+1}}} \|u\|_{L^{p^*}}$$

où la suite $(k_n)_n$ est choisie de telle sorte que $(k_n + 1)p = (k_{n-1} + 1)p^*$. Il est facile de voir que $k_n + 1 = \left(\frac{p^*}{p}\right)^n$ par récurrence.

donc

$$\|u\|_{L^{(k_n+1)p^*}} \leq c_1^{\sum_{n \geq 1} \left(\frac{p}{p^*}\right)^n} c_2^{\sum_{n \geq 1} \left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{n}{2}}} \|u\|_{L^{p^*}}$$

$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{p}{p^*}\right)^n$ et $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{n}{2}}$ sont des séries géométrique de raison inférieure à 1, donc elles sont convergentes.

D'où il existe $C > 0$ telle que pour tout $n = 1, 2, \dots$

$$\|u\|_{L^{(k_n+1)p^*}} \leq C \|u\|_{L^{p^*}} \quad (3.8)$$

avec $r_n = (k_n + 1)p^* \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Supposons maintenant que $u \notin L^\infty(\Omega)$, alors il existe une constante K et un ensemble A de mesure non nulle sur Ω tel que $|u(x)| > K$, pour tout $x \in A$. Puis

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u\|_{r_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_A K^{r_n} \right)^{\frac{1}{r_n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} K|A|^{\frac{1}{r_n}} = K.$$

Comme K est quelconque on choisit $K > C \|u\|_{L^{p^*}}$. Ce qui contredit avec (3.8).

Si u une fonction propre de (3.2) change de signe, nous considérons u^+ . d'après le lemme (1.3), $u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Pour tout $M > 0$, $v_M(x) = \min \{u^+(x), M\}$, nous remplaçons encore une fois $\varphi = v_M^{kp+1}$ et nous obtenons

$$(kp+1) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v_M^{kp+1} dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v_M^{kp+1} dx$$

d'où

$$(kp+1) \int_{\Omega} |\nabla u^+|^{p-2} \nabla u^+ \cdot \nabla v_M^{kp+1} dx = \lambda \int_{\Omega} |u^+|^{p-2} u^+ v_M^{kp+1} dx$$

En procédant de la même façon ci-dessus, nous concluons que $u^+ \in L^\infty(\Omega)$. De même nous avons $u^- \in L^\infty(\Omega)$. Par conséquent $u = u^+ - u^-$ est dans $L^\infty(\Omega)$

Théorème 3.3. *Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une fonction propre de (3.2), alors u est dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Démonstration. D'après le théorème (3.2) toute fonction propre u de (3.2) est dans $L^\infty(\Omega)$. Posons $f(x, u(x)) = \lambda |u(x)|^{p-2} u(x)$ sur Ω , alors f aussi dans $L^\infty(\Omega)$. Il résulte du théorème (1.12) que toute fonction propre de (3.2) est dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. ■

3.3 Propriétés de la première valeur propre

3.3.1 Simplicité

Nous montrons dans cette section que la fonction propre associée à la première valeur propre est unique à une constante multiplicative près.

Théorème 3.4. *La première valeur propre λ_1 est simple, i.e. si $u > 0$ et $v > 0$ sont deux fonctions propres associées à λ_1 alors $u = \alpha v$ pour un certain α .*

Démonstration. Posons pour $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $v_\varepsilon = v + \varepsilon$ et

$$\eta_1 = \frac{u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p}{u_\varepsilon^{p-1}} \text{ et } \eta_2 = \frac{v_\varepsilon^p - u_\varepsilon^p}{v_\varepsilon^{p-1}}.$$

Considérons les fonctions η_1 et η_2 comme fonctions test dans

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \eta_i dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \eta_i dx \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

le gradient de η_1 est

$$\begin{aligned} \nabla \eta_1 &= \nabla \left(\frac{u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p}{u_{\varepsilon}^{p-1}} \right) \\ &= \frac{(\nabla u_{\varepsilon}^p - \nabla v_{\varepsilon}^p) u_{\varepsilon}^{p-1} - \nabla u_{\varepsilon}^{p-1} (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p)}{u_{\varepsilon}^{2(p-1)}} \\ &= \frac{p u_{\varepsilon}^{2(p-1)} \nabla u_{\varepsilon} - p \nabla v_{\varepsilon} \cdot v_{\varepsilon}^{p-1} \cdot u_{\varepsilon}^{p-1} - (p-1) \nabla u_{\varepsilon} \cdot u_{\varepsilon}^{2p-2} + (p-1) \nabla u_{\varepsilon} \cdot u_{\varepsilon}^{p-2} \cdot v_{\varepsilon}^p}{u_{\varepsilon}^{2(p-1)}} \\ &= p \nabla u_{\varepsilon} - p \nabla v_{\varepsilon} \cdot \left(\frac{v_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right)^{p-1} - (p-1) \nabla u_{\varepsilon} + (p-1) \nabla u_{\varepsilon} \cdot \left(\frac{v_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right)^p \\ &= \left\{ 1 + (p-1) \left(\frac{v_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right)^p \right\} \nabla u_{\varepsilon} - p \left(\frac{v_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right)^{p-1} \nabla v_{\varepsilon} \end{aligned}$$

et par symétrie, nous obtenons $\nabla \eta_2$ de la même façon. Nous substituons η_1 et η_2 dans l'équation (3.9) et en sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \int_{\Omega} \left[\frac{u^{p-1}}{u_{\varepsilon}^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_{\varepsilon}^{p-1}} \right] (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\left\{ 1 + (p-1) \left(\frac{v_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right)^p \right\} |\nabla u_{\varepsilon}|^p + \left\{ 1 + (p-1) \left(\frac{u_{\varepsilon}}{v_{\varepsilon}} \right)^p \right\} |\nabla v_{\varepsilon}|^p \right] dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[p \left(\frac{v_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right)^{p-1} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla v_{\varepsilon} + p \left(\frac{u_{\varepsilon}}{v_{\varepsilon}} \right)^{p-1} |\nabla v_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla v_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[u_{\varepsilon}^p \frac{|\nabla u_{\varepsilon}|^p}{u_{\varepsilon}^p} + p v_{\varepsilon}^p \frac{|\nabla u_{\varepsilon}|^p}{u_{\varepsilon}^p} - v_{\varepsilon}^p \frac{|\nabla u_{\varepsilon}|^p}{u_{\varepsilon}^p} + v_{\varepsilon}^p \frac{|\nabla v_{\varepsilon}|^p}{v_{\varepsilon}^p} + p u_{\varepsilon}^p \frac{|\nabla v_{\varepsilon}|^p}{v_{\varepsilon}^p} - u_{\varepsilon}^p \frac{|\nabla v_{\varepsilon}|^p}{v_{\varepsilon}^p} \right] dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[p \left(\frac{v_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right) \left(\frac{v_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right)^{p-2} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla v_{\varepsilon} + p \left(\frac{u_{\varepsilon}}{v_{\varepsilon}} \right) \left(\frac{u_{\varepsilon}}{v_{\varepsilon}} \right)^{p-2} |\nabla v_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla v_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla u_{\varepsilon}|^p}{u_{\varepsilon}^p} (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p) - \frac{|\nabla v_{\varepsilon}|^p}{v_{\varepsilon}^p} (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p) + p \frac{|\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2}}{u_{\varepsilon}^{p-2}} \frac{|\nabla u_{\varepsilon}|^2}{u_{\varepsilon}^2} \cdot v_{\varepsilon}^p + p \frac{|\nabla v_{\varepsilon}|^{p-2}}{v_{\varepsilon}^{p-2}} \frac{|\nabla v_{\varepsilon}|^2}{v_{\varepsilon}^2} \cdot u_{\varepsilon}^p \right] dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[p v_{\varepsilon}^p \frac{\nabla u_{\varepsilon}^{p-2}}{u_{\varepsilon}^{p-2}} \cdot \frac{\nabla u_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \cdot \frac{\nabla v_{\varepsilon}}{v_{\varepsilon}} + p u_{\varepsilon}^p \frac{\nabla v_{\varepsilon}^{p-2}}{v_{\varepsilon}^{p-2}} \cdot \frac{\nabla v_{\varepsilon}}{v_{\varepsilon}} \cdot \frac{\nabla u_{\varepsilon}}{u_{\varepsilon}} \right] dx \\ &= \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p) (|\nabla \log u_{\varepsilon}|^p - |\nabla \log v_{\varepsilon}|^p) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} p v_{\varepsilon}^p (|\nabla \log u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla \log u_{\varepsilon} \cdot (\nabla \log v_{\varepsilon} - \nabla \log u_{\varepsilon})) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} p u_{\varepsilon}^p (|\nabla \log v_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla \log v_{\varepsilon} \cdot (\nabla \log u_{\varepsilon} - \nabla \log v_{\varepsilon})) dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

D'après l'inégalité (1.5) le dernier membre est ≥ 0

Maintenant on pose

$$f_\varepsilon = \lambda_1 \left(\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p), \quad 1 < p < +\infty$$

On a f_ε composé des fonctions continues (car $u, v \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ par le théorème(3.3)) donc mesurable.

De plus

$$f_\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ p.p. quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon| &= \lambda_1 \left| \left(\frac{u}{u_\varepsilon} \right)^{p-1} - \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} \right| \times |(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)| \\ &\leq \lambda_1 \left[\left(\frac{u}{u_\varepsilon} \right)^{p-1} + \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} \right] (u_\varepsilon^p + v_\varepsilon^p) \\ &\leq \lambda_1 (1^{p-1} + 1^{p-1}) (u_\varepsilon^p + v_\varepsilon^p) \\ &\leq 2\lambda_1 [(1+u)^p + (1+v)^p] \end{aligned}$$

En utilisant 1.8 on obtient

$$|f_\varepsilon| \leq \lambda_1 (2^{p+1} + 2^p(u^p + v^p)) \in L^1(\Omega) \text{ (car } u, v \in L^\infty(\Omega))$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lambda_1 \int_\Omega \left(\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) dx = \lambda_1 \int_\Omega \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) dx = 0 \quad (3.11)$$

Si $p \geq 2$, nous appliquons l'estimation (1.6) pour $w_1 = \nabla \log u_\varepsilon, w_2 = \nabla \log v_\varepsilon$ et multiplier par $(u_\varepsilon v_\varepsilon)^p$ puis diviser sur $(u_\varepsilon)^p$ on obtient

$$-v_\varepsilon^p (|\nabla \log u_\varepsilon|^p - |\nabla \log v_\varepsilon|^p) \geq p v_\varepsilon^p |\nabla \log u_\varepsilon|^{p-2} \nabla \log u_\varepsilon \cdot (\nabla \log v_\varepsilon - \nabla \log u_\varepsilon) + \frac{1}{u_\varepsilon^p} \times \frac{|u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon - v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon|^p}{2^{p-1} - 1} \quad (3.12)$$

Nous appliquons encore l'estimation (1.6) pour $w_1 = \nabla \log v_\varepsilon, w_2 = \nabla \log u_\varepsilon$ et multiplier par $(u_\varepsilon v_\varepsilon)^p$ puis divises sur $(v_\varepsilon)^p$ on obtient

$$u_\varepsilon^p (|\nabla \log u_\varepsilon|^p - |\nabla \log v_\varepsilon|^p) \geq p u_\varepsilon^p |\nabla \log v_\varepsilon|^{p-2} \nabla \log v_\varepsilon \cdot (\nabla \log u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon) + \frac{1}{v_\varepsilon^p} \times \frac{|v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^p}{2^{p-1} - 1} \quad (3.13)$$

En sommant (3.12) et (3.13) on obtient

$$\begin{aligned}
(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)(|\nabla \log u_\varepsilon|^p - |\nabla \log v_\varepsilon|^p) &\geq p v_\varepsilon^p |\nabla \log u_\varepsilon|^{p-2} \nabla \log u_\varepsilon \cdot (\nabla \log v_\varepsilon - \nabla \log u_\varepsilon) \\
&\quad + p u_\varepsilon^p |\nabla \log v_\varepsilon|^{p-2} \nabla \log v_\varepsilon \cdot (\nabla \log u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon) \quad (3.14) \\
&\quad + \left(\frac{1}{v_\varepsilon^p} + \frac{1}{u_\varepsilon^p} \right) \frac{|v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^2}{2^{p-1} - 1}
\end{aligned}$$

Substituons (3.14) dans (3.10) on obtient

$$0 \leq \frac{1}{2^{p-1} - 1} \int_\Omega \left(\frac{1}{v_\varepsilon^p} + \frac{1}{u_\varepsilon^p} \right) |v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^2 dx \leq \lambda_1 \int_\Omega \left(\frac{u_\varepsilon^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v_\varepsilon^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) dx.$$

En utilisant (3.11) et le lemme de Fatou (1.2) quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, nous concluons que $v \nabla u = u \nabla v$ sur Ω . Par suite $u = \alpha v$ pour une certaine constante α .

Si $1 < p < 2$ nous utilisons l'estimation (1.7) pour $w_1 = \nabla \log u_\varepsilon$, $w_2 = \nabla \log v_\varepsilon$ et multiplier par v_ε^p on obtient

$$\begin{aligned}
-v_\varepsilon^p (|\nabla \log u_\varepsilon|^p - |\nabla \log v_\varepsilon|^p) &\geq p v_\varepsilon^p |\nabla \log u_\varepsilon|^{p-2} \nabla \log u_\varepsilon \cdot (\nabla \log v_\varepsilon - \nabla \log u_\varepsilon) \\
&\quad + \frac{C(p)}{u_\varepsilon^p} \times \frac{|v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Nous appliquons encore l'estimation (1.7) pour $w_1 = \nabla \log v_\varepsilon$, $w_2 = \nabla \log u_\varepsilon$ et multiplier par u_ε^p on obtient

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon^p (|\nabla \log u_\varepsilon|^p - |\nabla \log v_\varepsilon|^p) &\geq p u_\varepsilon^p |\nabla \log v_\varepsilon|^{p-2} \nabla \log v_\varepsilon \cdot (\nabla \log u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon) \\
&\quad + \frac{C(p)}{v_\varepsilon^p} \times \frac{|v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

En sommant (3.15) et (3.16) on obtient

$$\begin{aligned}
(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)(|\nabla \log u_\varepsilon|^p - |\nabla \log v_\varepsilon|^p) &\geq p v_\varepsilon^p (|\nabla \log u_\varepsilon|^{p-2} \nabla \log u_\varepsilon \cdot (\nabla \log v_\varepsilon - \nabla \log u_\varepsilon) \\
&\quad + p u_\varepsilon^p (|\nabla \log v_\varepsilon|^{p-2} \nabla \log v_\varepsilon \cdot (\nabla \log u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon)) \quad (3.17) \\
&\quad + C(p) \left(\frac{1}{v_\varepsilon^p} + \frac{1}{u_\varepsilon^p} \right) \frac{|v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}}
\end{aligned}$$

Substituons (3.17) dans (3.10) on obtient

$$0 \leq c(p) \int_\Omega \left(\frac{1}{v_\varepsilon^p} + \frac{1}{u_\varepsilon^p} \right) \frac{|v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}} dx \leq \lambda_1 \int_\Omega \left(\frac{u_\varepsilon^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v_\varepsilon^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) dx.$$

En utilisant (3.11) et le lemme de Fatou quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, nous arrivons de nouveau à la dépendance souhaitée $u = \alpha v$ pour une certaine constante α .

3.3.2 Positivité

Théorème 3.5. *Toute fonction propre u associée à la première valeur propre λ_1 est de signe constant sur Ω (c-à-dire $u > 0$ ou bien $u < 0$ sur Ω).*

Démonstration. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ une fonction propre associée à la valeur propre λ_1 . D'après le lemme (1.3) on a $u^\pm \in w_0^{1,p}(\Omega)$ et par définition de λ_1 on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p dx \geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u^+|^p dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\nabla u^-|^p dx \geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u^-|^p dx \quad (3.18)$$

Or on a également

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p dx + \int_{\Omega} |\nabla u^-|^p dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^p dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u^+|^p dx + \lambda_1 \int_{\Omega} |u^-|^p dx.$$

Ainsi les inégalités dans (3.18) sont nécessairement des égalités i.e

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u^+|^p dx$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^p dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u^-|^p dx$$

Cela implique en particulier en reprenant la preuve de théorème (3.1) que u^+ et u^- sont des fonctions propres associées à la valeur propre λ_1 , et donc

$$\begin{cases} -\Delta_p u^\pm &= \lambda_1 |u^\pm|^{p-2} u^\pm & \text{dans } \Omega \\ u^\pm &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.19)$$

D'après le théorème (3.3), on a $u^\pm \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

On a $u^+ \geq 0$ sur $\bar{\Omega}$ donc on distingue deux cas

1. $u^+ > 0$, $\forall x \in \Omega$, alors

$$u > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

2. Si $\exists x_0 \in \Omega$, telle que $u^+(x_0) = 0$,

Donc d'après le principe de maximum fort (théorème 1.14)

$$u^+(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

d'où

$$u(x) \leq 0 \text{ dans } \Omega \quad (3.20)$$

alors

$$\text{Si } \exists x_0 \in \Omega \text{ telle que } u^-(x_0) = 0$$

Donc d'après le principe de maximum fort

$$u^-(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

d'où

$$u(x) \geq 0 \text{ dans } \Omega \quad (3.21)$$

D'après (3.20) et (3.21) on a $u \equiv 0$ sur Ω c'est une contradiction car la fonction propre n'est pas nulle.

par conséquent

$$\forall x \in \Omega : u^+(x) > 0 \text{ sur } \Omega \text{ i.e } u > 0 \text{ sur } \Omega$$

Ou

$$\forall x \in \Omega u^-(x) > 0 \text{ sur } \Omega \text{ i.e } u < 0 \text{ sur } \Omega \quad \blacksquare$$

Théorème 3.6. Si w est une fonction propre correspondant à la valeur propre λ , $\lambda > 0$, $\lambda \neq \lambda_1$, alors w change de signe sur Ω i.e. $w^+ \neq 0$, $w^- \neq 0$ et

$$|\Omega^-| \geq (\lambda C^p)^{-\beta} = c > 0 \quad (3.22)$$

où $\Omega^- = \{x \in \Omega \mid w(x) < 0\}$, $\beta = 2$ si $p \geq N$, $\beta = \frac{N}{p}$ si $1 < p < N$ et λ_1 la première valeur propre de p -Laplacien sur Ω . et c est une constante ne dépend pas de w .

Démonstration. On a par définition $\lambda_1 \leq \lambda$. Soit u, w deux fonctions propres correspondant à λ_1 et λ respectivement. On suppose que w ne change pas de signe, alors on peut supposer que $w > 0$ on fait des calculs similaires à ceux effectués dans la preuve de théorème (3.4), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \left[\lambda_1 \left(\frac{u}{u_{\varepsilon}} \right)^{p-1} - \lambda \left(\frac{w}{w_{\varepsilon}} \right)^{p-1} \right] (u_{\varepsilon}^p - w_{\varepsilon}^p) dx \geq 0$$

par passage à la limite quand $\varepsilon^+ \rightarrow 0$ on a

$$\lim_{\varepsilon^+ \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[\lambda_1 \left(\frac{u}{u_{\varepsilon}} \right)^{p-1} - \lambda \left(\frac{w}{w_{\varepsilon}} \right)^{p-1} \right] (u_{\varepsilon}^p - w_{\varepsilon}^p) dx \leq 0 \quad (3.23)$$

on pose

$$f_{\varepsilon} = \lambda_1 \left(\frac{u^{p-1}}{u_{\varepsilon}^{p-1}} - \lambda \frac{w^{p-1}}{w_{\varepsilon}^{p-1}} \right) (u_{\varepsilon}^p - w_{\varepsilon}^p), \quad 1 < p < +\infty$$

On a f_{ε} composé des fonctions continues (car $u, w \in C^{1,\alpha}(\Omega)$) donc mesurable.

De plus

$$f_{\varepsilon} \rightarrow (\lambda_1 - \lambda)(u^p - w^p) \text{ p.p. quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} |f_{\varepsilon}| &= \left| \lambda_1 \left(\frac{u}{u_{\varepsilon}} \right)^{p-1} - \lambda \left(\frac{v}{v_{\varepsilon}} \right)^{p-1} \right| \times |(u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p)| \\ &\leq \left[\lambda_1 \left(\frac{u}{u_{\varepsilon}} \right)^{p-1} + \lambda \left(\frac{v}{v_{\varepsilon}} \right)^{p-1} \right] (u_{\varepsilon}^p + v_{\varepsilon}^p) \\ &\leq (\lambda_1 \times 1^{p-1} + \lambda \times 1^{p-1}) (u_{\varepsilon}^p + v_{\varepsilon}^p) \\ &\leq (\lambda_1 + \lambda) \cdot [(1 + u)^p + (1 + v)^p] \end{aligned}$$

En utilisant 1.8 on obtient

$$|f_{\varepsilon}| \leq (\lambda_1 + \lambda) (2^p + 2^{p-1}(u^p + v^p)) \in L^1(\Omega) \text{ (car par le théorème (3.2) on a } u, v \in L^{\infty}(\Omega))$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \left(\lambda_1 \frac{u^{p-1}}{u_{\varepsilon}^{p-1}} - \lambda \frac{v^{p-1}}{v_{\varepsilon}^{p-1}} \right) (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p) dx &= \int_{\Omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\lambda_1 \frac{u^{p-1}}{u_{\varepsilon}^{p-1}} - \lambda \frac{v^{p-1}}{v_{\varepsilon}^{p-1}} \right) (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p) dx \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} (u^p - w^p) dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

d'où

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} (u^p - w^p) dx \geq 0$$

Si $\lambda > \lambda_1$, et puisque w peut être remplacé par kw pour chaque $k > 0$, avec $\|u\|_{L^p} = 1$, on obtient

$$\int_{\Omega} (u^p - k^p w^p) dx \leq 0$$

Par passage à la limite quand $k \rightarrow 0$ on a

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u^p - kw^p) dx \leq 0$$

on pose

$$g_k = (u^p - kw^p) dx$$

On a g_k composé des fonctions continues (car $u, w \in C^{1,\alpha}(\Omega)$) donc mesurable.

De plus

$$g_k \rightarrow u^p \text{ p.p. quand } k \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} |g_k| &= |u^p - k^p w^p| \\ &\leq u^p + k^p w^p \\ &\leq u^p + w^p \in L^1(\Omega) \text{ (car par le théorème (3.2) on a } u, w \in L^\infty(\Omega)) \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u^p - kw^p) dx = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow 0} (u^p - kw^p) dx = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p = 1 \geq 0. \text{ (Contradiction)}$$

Par conséquent, w change de signe sur Ω .

De plus si on prend w comme fonction test dans (3.2) satisfaite par w nous obtenons

$$\|\nabla w^-\|_{L^p}^p = \lambda \int_{\Omega} (w^-)^p dx \leq \lambda \| (w^-)^p \|_{L^\alpha} |\Omega^-|^{\frac{1}{\beta}}$$

avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ maintenant considérons deux cas

(a) $p \geq N$. On a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha p}$, (car $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q, \forall q \geq p$), donc.

$$\|(w^-)^p\|_{L^\alpha} = \|w^-\|_{L^{\alpha p}}^p \leq C^p \|\nabla w^-\|_{L^p}^p, \quad \alpha > 1$$

Ainsi, si on prend $\alpha = \beta = 2$, alors

$$\|(w^-)^p\|_{L^\alpha} = \|w^-\|_{L^{\alpha p}}^p \leq C^p \|\nabla w^-\|_{L^p}^p \leq C^p \lambda \| (w^-)^p \|_{L^\alpha} |\Omega^-|^{\frac{1}{\beta}}$$

D'où

$$|\Omega^-| \geq (\lambda C^p)^{-2} \tag{3.25}$$

(b) $1 < p < N$. On a $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$ pour $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

On prend $\alpha = \frac{N}{N-p}, \beta = \frac{N}{p}, (\| (w^-)^p \|_{L^\alpha} = \| w^- \|_{L^{p^*}}^p, \text{ avec } p^* = \frac{Np}{N-p})$.

donc par l'injection de Sobolev on a

$$\| (w^-)^p \|_{L^\alpha} = \| w^- \|_{L^{p^*}}^p \leq C^p \| \nabla w^- \|_{L^p}^p$$

D'où

$$|\Omega^-| \geq (\lambda C^p)^{-\frac{N}{p}} \quad (3.26)$$

3.3.3 Isolation

Théorème 3.7. *La première valeur propre λ_1 est isolée dans l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur p -Laplacien*

Démonstration. Supposons que λ_1 n'est pas isolée. Alors il existe une suite $\lambda_k \rightarrow \lambda_1$ quand $k \rightarrow +\infty$, $\lambda_k \neq \lambda_1$ avec $\int_{\Omega} |u_k|^p dx = 1$, alors

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k|^p dx = \lambda_k \int_{\Omega} |u_k|^p dx = \lambda_k \rightarrow \lambda_1$$

D'où u_k est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc par l'injection

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$$

on déduit que pour une sous suite encore noté $(u_k)_k$

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_k \rightarrow u & \text{dans } L^p(\Omega) \end{cases}$$

Donc par la proposition (1.5) on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^p dx = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda_1$$

D'autre part

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^p dx = \lambda_1$$

D'où u est une fonction propre associée à λ_1 donc par le théorème (3.5) on a $u > 0$ ou $u < 0$ sur Ω

Supposons que $u > 0$, comme $u_k \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ alors d'après le théorème (1.3) il existe une sous suite notée encore u_k telle que

$$u_k \rightarrow u \text{ .p.p sur } \Omega$$

D'après le théorème d'Egorov (1.4) on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \subset \Omega$$

telle que

$$|B^c| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|u_k - u\|_{L^\infty(B)} \rightarrow 0$$

On pose

$$\Omega_\eta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \eta\} \mid \Omega_\eta^c \mid \rightarrow 0, \text{ quand } \eta \rightarrow 0.$$

Donc on choisit $\eta > 0$ telle que $|\Omega_\eta^c| < \frac{\varepsilon}{2}$

On pose

$$A = B \cap \Omega_\eta \subset \Omega$$

donc

$$A^c = B^c \cup \Omega_\eta^c \Rightarrow |A^c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Comme $A \subset \Omega_\eta \subset \Omega$ alors $\bar{A} \subset \Omega$

On a $u > 0$ sur \bar{A} compact, et d'après le théorème (3.3) on a $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ alors l'infimum de u est atteint i.e

$$\exists x^* \in A : u(x) \geq \inf_{\bar{A}} u = u(x^*) > 0.$$

alors $u(x) \geq \beta > 0, \forall x \in A$

D'où pour k assez grand

$$\sup_A |u_k - u| \leq \frac{\beta}{2}$$

D'où

$$u - \frac{\beta}{2} < u_k < u + \frac{\beta}{2}, \forall x \in A$$

D'où

$$u_k > u - \frac{\beta}{2} > \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} > 0$$

Donc $u_k > 0$ sur A , pour k assez grand.

D'où

$$\Omega_k^- = \{x \in \Omega | u_k < 0\} \subset A^c \Rightarrow |\Omega_k^-| \leq |A^c| \leq \varepsilon. \quad (3.27)$$

Mais $\lambda_k \neq \lambda_1, \forall x \in A$, donc par le théorème (3.6) u_k change de signe sur A , alors d'après (3.22) on a $|\Omega_k^-| \geq c$, et comme ε est arbitraire on peut choisir $\varepsilon < \frac{c}{2}$.

Donc contradiction avec (3.27), par conséquent λ_1 est isolée. ■

Conclusion générale

L'objet de ce travail a été l'étude de quelques équation aux dérivées partielles faisant intervenir l'opérateur Laplacien est le p -Laplacien

Nous avons abordé le problème typique aux valeurs propres pour Laplacien est le p -Laplacien, et plus précisément l'une de ses solutions qui est la première valeur propre et sa fonction propre associée qui admet plusieurs propriétés que les autres solutions ne possèdent pas.

Néanmoins, plusieurs questions restent ouvertes concernant le spectre de L'opérateur P -Laplacien dont la description complète n'a pas été faite.

En guise de perspectives, nous envisageons d'explorer :

- la première valeur propre de l'opérateur p -Laplacien avec poids.
- l'alternative de Fredholm pour le p -Laplacien.
- la théorie spectrale des opérateurs non linéaires.

Bibliographie

- [1] B. Kawohl, P. Lindqvist. Positive eigenfunctions for the p-Laplace operator. Revisited, Analysis 19, 331-366, 2001.
- [2] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [3] H. Brézis. Analyse fonctionnelle :Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.
- [4] I. Peral. Multiplicity of Solutions for the p-Laplacien, International Center For Theoretical Physics Trieste, 9 May 1997.
- [5] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin. Variational and Topological Methods for Dirichlet Problems with p-Laplacian. Portugaliae Mathematica, Vol. 58 (3, 2001).
- [6] L. C. EVANS. Partial differential equations. American Mathematical Society, Providence RI, 2010.
- [7] O. Kavian. Introduction à La Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques. Springer-Verlag, 1993.
- [8] P. Lindqvist. A nonlinear eigenvalue problem. Norwegian University of Science and Technology N-7491, Trondheim, Norway.
- [9] P. Lindqvist. On the Equation $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$. Proc. AMS 109, 157-164, May 1990.
- [10] P. Tolksdorf. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. J. Differential Equations 51, 126-150, 1984.
- [11] P. Pucci, J. Serrin, A note on the strong maximum principle for elliptic differential inequalities, J. Math. Pures Appl. 79, 57-71 , 2000.

- [12] R. A. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة القيمة الذاتية الأولى للمؤثرين لابلاس و p-لابلاس بتعبير أدق درسنا المسألتين التاليتين

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda |u|^{p-2} u \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

حيث Ω هو ميدان محدود و مفتوح في \mathbb{R}^N و $1 < p < \infty$.

أظهرنا وجود القيمة الذاتية الأولى و بينا أنها موجبة تماما , عادية و معزولة و الدالة الذاتية تنتمي إلى $C^{1,\alpha}$, أظهرنا أيضا أن λ_1 هي القيمة الذاتية الوحيدة المرتبطة بدالة ذاتية موجبة تماما .

كلمات مفتاحية: لابلاس , p-لابلاس , مسائل من النوع القطع الناقص خطية و لا خطية , المؤثرات المتراسة و القيم الذاتية .

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié la première valeur propre de l'opérateur Laplacien et le p-Laplacien, plus précisément, on étudié les deux problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda |u|^{p-2} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $1 < p < \infty$. Nous avons montré l'existence de la première valeur propre et montré qu'il est strictement positive, isolé et simple et la fonction propre appartient à $C^{1,\alpha}$. Nous avons montrer aussi que λ_1 est la seule valeur propre associée à une fonctions propre strictement positive.

Mots-Clés : Laplacien, p-Laplacien, Problèmes elliptiques linéaire et non linéaire, Opérateurs compacts et valeurs propres.

Abstract

In this memoir, we studied the first eigenvalue of the Laplacian operator and the p-Laplacian, more precisely, we studied the two following problems

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda |u|^{p-2} u = 0 \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Where Ω is a open bounded domain and $1 < p < \infty$. We have shown the existence of th first eigenvalue and shown that it is strictly positive, isolated and the eigenfunction belong to $C^{1,\alpha}$. We also show that λ_1 is the only eigenvalue associated with a strictly positive eigenfunction.

Keywords : Laplacian, p-Laplacian, Linear and non linear elliptic problems, Compact operators and eigenvalues.