

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Licence

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par:

Derradj Zohra

Sujet:

**Sur les formes trilineaires alternées
(où trivecteurs)**

Dirigé par: prof.Midoune Nourdine

Promotion: 2012/2013

Remerciements

Nous remercions tout d'abord le bon dieu de nous avoir donné la santé et la volonté pour arriver à ce niveau d'étude et le courage pour réaliser ce travail

Nos vifs remerciements les plus chaleureux vont à notre enseignant
Mr. Midoune Nourdine et le responsable de département de Mathématique .

Nos vifs remerciements vont à: A nos parents pour leur amour

Ainsi à toutes les personnes que nous ont aidées à réunir la documentation nécessaire pour la réalisation de ce mini projet de fin étude: Mr .Ladjlate .

Nos vifs remerciements à tous les enseignants de Faculté Mathématique et Informatique .

Et en fin à tous ceux qui nous ont aidées de près ou de loin pour la réalisation de ce mini projet.

Table des matières

Introduction	2
1 Définitions et propriétés de base	3
1.1 Modules sur un anneau	3
1.1.1 Définition des modules sur un anneau	3
1.1.2 Exemples de module	4
1.2 Sous-modules, sous-espaces vectoriels	6
1.3 Module à droite et modules à gauche	7
1.4 Le produit tensoriel	8
1.4.1 Définition de produit tensoriel	8
1.4.2 Propriété de base	12
1.5 Le produit extérieur	13
1.5.1 Définition et propriété de base	13
2 Formes trilinéaires alternées	18
2.1 Formes alternées	18
2.1.1 Définition des formes alternées	18
2.1.2 Le Pfaffien	21
2.2 Multivecteurs	22
2.2.1 L'action gauche	22
2.2.2 Commutant	25
2.3 Algèbre extérieure et groupes d'automorphismes	25
2.3.1 Généralités	25

2.3.2	Parties stables	32
3	Classifications des trivecteurs en dimension inférieure à 6	36
3.1	Classification en dimension inférieure à 6	36
3.2	Classification des trivecteurs en dimension 6	38
3.2.1	Commutant d'un trivecteur de rang inférieure ou égale à 6	38
	Résumé	43
	Bibliographie	44

Introduction

L'une des applications de la théorie des groupes est liée au problème de classification.

La classification des trivecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^3 E$. Comme $\Lambda^3 E^* \simeq (\Lambda^3 E)^*$, on parle indifféremment des formes trilinéaires alternées et des trivecteurs.

Dans ce mémoire, on étudier les formes trilinéaires alternées (trivecteurs), nous donnons aussi des exemples pour tout les cas possibles.

Le mémoire est composé de trois chapitres, le premier chapitre contient des définitions et propriétés de base (module sur un anneau, le produit tensoriel et le produit extérieur).

Le deuxième chapitre contient les formes trilinéaires alternées (forme alternée, multivecteurs, algèbre extérieure et groupes d'automorphismes ...).

Le troisième chapitre contient la classification des trivecteurs en dimension inférieure à 6 (classification en dimension inférieure à 6, classification des trivecteurs en dimension 6).

Chapitre 1

Définitions et propriétés de base

1.1 Modules sur un anneau

La notion des modules sur un anneau K ne sont valables que moyennant certaines hypothèses concernant l'anneau K : par exemple, la théorie de la «dimension» suppose que K est un corps.

Par contre, les résultats les plus simples sont valables pour tout anneau K ; ce sont ces résultats qu'on trouvera dans ce chapitre.

1.1.1 Définition des modules sur un anneau

Soit K un anneau, on appelle module à gauche sur l'anneau K , ou encore K module à gauche l'objet formé par un ensemble M , une loi de composition sur M , noté $(x, y) \mapsto x + y$, et une application de l'ensemble $K \times M$ dans M , notée $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, ces données étant assujetties à vérifier les deux conditions que voici :

(M_1) : l'ensemble M muni de la loi de composition $(x, y) \rightarrow x + y$ est un groupe commutatif.

(M_2) : on a les relations $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $1x = x$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, quels que soient $x, y \in M$ et $\lambda, \mu \in K$.

Dans la théorie des modules l'anneau K est fixé une fois pour toutes, et s'appelle généralement l'anneau de base, les éléments des K - modules s'appellent au contraire des vecteurs.

Lorsque l'anneau K est un corps, on dit espace vectoriel à gauche sur K au lieu de K -module module à gauche, en particulier un espace vectoriel sur le corps R des nombres réels s'appelle un espace vectoriel réel, et un espace vectoriel sur le corps C des nombres complexes un espace vectoriel complexe, ces deux notions sont de loin les plus importantes en Analyse et en Physique; par contre les espaces vectoriels sur des corps arbitraires, et les modules sur l'anneau Z ou sur un « anneau de polynômes » jouent dans beaucoup de branches des Mathématiques un rôle beaucoup plus important que les espaces vectoriels réels ou complexes, mais même en Physique théorique on utilise des modules sur des anneaux qui ne sont pas des corps, et ne sont pas commutatifs (représentations linéaires du groupe de Lorentz, spineurs, etc....) bien que les physiciens n'utilisent pas encore le langage de la théorie des modules.

Notons enfin qu'on définit la notion de K -module à droite comme suit, on appelle ainsi l'objet formé par un groupe additif M et par une application, notée $(x, \lambda) \rightarrow x\lambda$, de $M \times K$ dans M , qui vérifie les conditions exprimées par les identités suivantes :

$$(x\lambda)\mu = x(\lambda\mu), x1 = x; x(\lambda + \mu) = x\lambda + x\mu; (x + y)\lambda = x\lambda + y\lambda.$$

On peut montrer facilement que les K -modules à droite ne sont autres que les modules à gauche sur un anneau déduit de K par un procédé très simple (et du reste identique à K si K est commutatif, de sorte que la distinction entre les deux notions n'a d'intérêt que pour les anneaux non commutatifs), il nous arrivera d'utiliser tantôt le langage des modules à gauche, tantôt celui des modules à droite; il va de soi qu'on peut passer de l'un à l'autre par des traductions triviales.

Nous allons maintenant donner quelques exemples importants de modules et d'espaces vectoriels.

1.1.2 Exemples de module

Exemple 1.1.1 Pour tout anneau K et tout entier $n \geq 1$, on peut considérer l'ensemble $K^n = K \times \dots \times K$ (n facteurs) comme un K -module à gauche, en posant, par définition,

$$\begin{aligned} (\xi_1, \dots, \xi_n) + (\eta_1, \dots, \eta_n) &= (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n) \\ \lambda(\xi_1, \dots, \xi_n) &= (\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n); \end{aligned}$$

Le fait que l'axiome (M_1) est on vérifie facilement, en utilisant les axiomes des anneaux, les identités figurant dans l'axiome (M_2) des modules, par la suite, quand nous parlerons de K^n comme d'un K -module à gauche, ce sera toujours du module ci-dessus qu'il s'agira, pour $n = 1$ la construction précédente permet de regarder K lui-même comme un K -module à gauche (ce qui montre que les « scalaires » sont aussi des « vecteurs » ...), on peut naturellement regarder aussi K^n comme un K -module à droite; il suffit pour cela de définir l'addition dans K^n comme ci-dessus, et de poser :

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot \lambda = (\xi_1 \lambda, \dots, \xi_n \lambda)$$

C'est le K -module à droite K^n qui intervient naturellement dans la théorie des équations linéaires comme on le verra (mais il est clair, encore une fois, que la distinction est sans intérêt si K est commutatif !).

Exemple 1.1.2 Soient K un anneau, M un K -module à gauche (par exemple K lui-même), et X un ensemble quelconque, désignons par E l'ensemble de toutes les applications $f : X \rightarrow M$; on va en faire un K -module à gauche, pour cela on doit définir la somme $f + g$ de deux applications de X dans M , ce sera la fonction $f(x) + g(x)$, dont la valeur en chaque $x \in X$ s'obtient en additionnant (dans M) les valeurs de f et g en x ; on doit aussi définir le produit λf d'un scalaire $\lambda \in K$ et d'une f de X dans M , ce sera la fonction $\lambda f(x)$, dont la valeur en chaque $x \in X$ s'obtient en multipliant par λ la valeur de f en x , on notera que si $M = K$ et si l'on prend $X = \{1, 2, \dots, n\}$, une application f de X dans M n'est autre qu'une suite $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ d'éléments de K à savoir $\xi_1 = f(1), \dots, \xi_n = f(n)$; on retrouve alors le module K^n de l'exemple 1.1.1.

Exemple 1.1.3 Montrons que tout groupe commutatif G peut être regardé comme un $\mathbb{Z}$ -module à gauche, pour cela, on écrit G additivement, ce qui permet déjà de définir la somme de deux éléments de G et l'axiome (M_1) est alors trivialement vérifié, il reste à définir le produit nx d'un $n \in \mathbb{Z}$ et d'un $x \in G$, i.e, en posant

$$nx = \begin{cases} x + \dots + x (n \text{ facteurs}) & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ (-n)(-x) & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

L'axiome (M_2) se réduit alors aux règles de calcul établies, si le groupe G était écrit multiplicativement, il faudrait bien entendu définir la « somme » de deux éléments x et y de G comme étant xy , et le « produit » d'un $x \in G$ par un entier rationnel n comme étant x^n ; il n'y a aucune différence avec ce qui précède, si ce n'est dans les notations adoptées. Enfin on peut facilement vérifier que tout Z -module s'obtient, par le procédé ci-dessus, à partir d'un groupe additif. Cet exemple montre que la théorie des modules contient, entre autres, celle des groupes commutatifs, ce qui n'est pas le cas de la théorie des espaces vectoriels (et encore moins si possible de celle des espaces vectoriels réels).

Exemple 1.1.4 Prenons $K = R$ et formons l'ensemble M de toutes les applications (fonctions réelles d'une variable réelle) qui sont continues partout, on démontre en Analyse que si f et g sont deux telles fonctions, la fonction $f + g$ est elle aussi partout continue, donc appartient à M ; et que si $f \in M$, alors $\lambda f \in M$ pour tout scalaire $\lambda \in R$ (les fonctions $f + g$ et λf sont définies comme dans l'exemple 2 ci-dessus), il est immédiat de voir que le triplet formé par l'ensemble M , l'application $(f, g) \mapsto f + g$ de $M \times M$ dans M , et l'application $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ de $R \times M$ dans M , est un espace vectoriel réel.

Cet exemple (qui est à l'origine de l'introduction des espaces vectoriels en Analyse) est susceptible de nombreuses variantes ; au lieu d'imposer aux fonctions f considérées d'être partout continues, on peut exiger qu'elles soient continues en un point donné, ou dérivables en un point donné, ou qu'elles admettent partout une dérivée seconde continue, etc ...

1.2 Sous-modules, sous-espaces vectoriels

Soit M un module à gauche sur un anneau K , on appelle sous-module de M toute partie M' de M vérifiant les deux conditions que voici :

- (i): M' est un sous-groupe du groupe additif M .
- (ii) : les relations $x \in M'$ et $\lambda \in K$ impliquent $\lambda x \in M'$.

Pour vérifier qu'une partie M' de M est un sous-module, on doit vérifier que M' est non vide (pratiquement on vérifie que $0 \in M'$), et que l'on a $\lambda x + \mu y \in M'$ quels que soient $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in M'$, cette condition est évidemment nécessaire, inversement, supposons la

vérifiée ; faisant $\mu = 0$ on obtient déjà la condition (ii) ci-dessus ; pour obtenir la condition (i), il suffit de faire $\lambda = 1$, $\mu = -1$, et de remarquer que dans un module on a, $-x = (-1)x$ pour tout $x \in M$

(en effet : $(-1)x + x = (-1)x + (+1)x = (-1 + 1)x = 0x = 0$).

Un module M possède toujours au moins deux sous-modules, à savoir M lui-même, et l'ensemble réduit au seul vecteur 0 , soit M' un sous-module d'un module M ; la condition (i) ci-dessus permet déjà de regarder M' comme un groupe additif ; la condition (ii) permet en outre de définir une application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $K \times M'$ dans M' , et les identités qui figurent dans l'axiome (M_2) des modules, étant vérifiées dans M , le sont a fortiori dans M' , par suite ; on peut regarder tout sous-module M' de M comme un K -module à gauche, lorsque K est un corps, on dit sous-espace vectoriel au lieu de sous-module.

Exemple 1.2.1 Soit K un anneau et regardons-le (Exemple 1) comme un K -module à gauche ; ses sous-modules sont donc les parties I de K qui sont non vides et telles que l'on ait $ux + vy \in I$ quels que soient $u, v \in K$ et $x, y \in I$ ce sont donc les idéaux à gauche de K .

1.3 Module à droite et modules à gauche

Soit K un anneau, nous allons construire un nouvel anneau qu'on appelle l'opposé de K , et qu'on désigne par la notation K^o ; comme on le montrera ensuite, les modules à droite sur K ne sont autres que le module à gauche sur K^o .

Pour construire K^o , on doit se donner un ensemble, et deux lois de composition sur cet ensemble, une «addition» et une «multiplication» par définition, l'ensemble K^o sera l'ensemble K (les anneaux K et K^o ont donc les mêmes éléments), et l'addition sur K^o sera l'addition sur K (la somme $x + y$ de deux éléments de K a donc la même valeur, qu'on la calcule dans l'anneau K ou dans l'anneau K^o), par contre, la multiplication dans K^o , au lieu d'être la multiplication $(x, y) \mapsto xy$ donnée sur K , sera l'application $(x, y) \mapsto yx$ autrement dit, si l'on désigne par xy le produit de deux éléments dans l'anneau K , et par $x * y$ leur produit dans l'anneau K^o , on a la relation $x * y = yx$ il est facile de voir

que l'ensemble $K^o (= K!)$ muni des deux opérations qu'on vient de définir, est un anneau; par exemple la formule $(x + y) * z = x * z + y * z$ se ramène évidemment à la relation $z(x + y) = zx + zy$ dans l'anneau K il va de soit que, si K est un anneau commutatif, l'anneau K^o est identique à l'anneau K , la construction de K^o n'a donc d'intérêt que dans le cas non commutatif, soit M un module à droite sur l'anneau K , définissons une application $(\lambda, x) \mapsto \lambda * x$ de $K^o \times M$ dans M en posant $\lambda * x = x\lambda$ pour tout $x \in M$ et tout $\lambda \in K$ alors le groupe additif M , muni de l'application qu'on vient de construire, est un module à gauche sur l'anneau K^o opposé à K , on a en effet:

$$\lambda * (x + y) = (x + y)\lambda = x\lambda + y\lambda = \lambda * x + \lambda * y,$$

$$(\lambda + \mu) * x = x(\lambda + \mu) = x\lambda + x\mu = \lambda * x + \mu * x,$$

$$\lambda * (\mu * x) = (\mu * x)\lambda = (x\mu)\lambda = x(\mu\lambda) = (\mu\lambda) * x = (\lambda * \mu) * x,$$

et enfin $I * x = xI = I$ ce qui établit le résultat annoncé.

1.4 Le produit tensoriel

Nous abordons maintenant les applications multilinéaires et les théorèmes principaux concernant leur structure, il existe un module universel représentant les applications multilinéaires, appelé le produit tensoriel, il tire son nom de l'usage en géométrie différentielle, où il est appliqué aux espaces tangents et cotangents d'une variété, le produit tensoriel peut être conçu comme permettant « étendre la base », autrement dit, de passer d'un module sur un anneau à un module sur une algèbre sur cet anneau, cette « extension » peut aussi impliquer une réduction modulo un idéal, car la chose essentielle est la donnée d'un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ permettant de passer d'un module sur A à un module sur B , l'homomorphisme f peut être une injection ou une projection canonique, avec

$B = A/J$ pour un idéal J , ou un composé des deux.

1.4.1 Définition de produit tensoriel

Soit R un anneau commutatif, si $E_1, \dots, E_n, F$ sont des modules, nous noterons $L^n(E_1, \dots, E_n; F)$, le module des applications n-linéaires $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$.

Rappelons qu'une application multilinéaire est une application qui est linéaire (R -linéaire, plus précisément) en chaque variable les mots linéaires et homomorphisme sont ici interchangeables sauf mention contraire, les modules, les homomorphismes, les applications linéaires et multilinéaires se rapportent à l'anneau R , on peut considérer les applications multilinéaires d'un ensemble fixé de modules $E_1, \dots, E_n$ comme des objets d'une catégorie en effet, si les applications :

$$f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F \quad \text{et}$$

$$g : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow G$$

sont multilinéaires, on définit un morphisme $f \rightarrow g$ comme un homomorphisme

$h : F \rightarrow G$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & f \nearrow & F \\ E_1 \times \dots \times E_n & & \downarrow h \\ & g \searrow & G \end{array}$$

Un objet universel de cette catégorie est appelé un produit tensoriel des $E_1, \dots, E_n$ (sur R), nous allons maintenant prouver que les produits tensoriels existent et en construire un de manière naturelle par les principes généraux, on sait déjà qu'un produit tensoriel est déterminé de manière unique, à unique isomorphisme près, soit M le module libre engendré par l'ensemble de tous les n -uplets $(x_1, \dots, x_n) (x_i \in E_i)$, donc engendré par l'ensemble $E_1 \times \dots \times E_n$, soit N le sous-module engendré par tous les éléments de type

$$\begin{aligned} & (x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n), \\ & (x_1, \dots, ax_i, \dots, x_n) - a(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

pour tous $x_i \in E_i$, $x'_i \in E_i$ et $a \in R$, en composant l'injection canonique

$E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow M$, de l'ensemble générateur dans le module engendré, avec la projection canonique $M \rightarrow M/N$ sur le module quotient, on obtient une application :

$$\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow M/N$$

nous affirmons que φ est multilinéaire et est un produit tensoriel, que φ soit multilinéaire est évident, par sa construction même, soit :

$$f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow G$$

une application multilinéaire. Par la définition du module libre engendré par $E_1 \times \dots \times E_n$ il existe une application linéaire $M \rightarrow G$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & F \\ E_1 \times \dots \times E_n & & \downarrow \\ & f \searrow & G \end{array}$$

comme f est multilinéaire, l'application $M \rightarrow G$ induite s'annule sur N , par la propriété universelle des modules quotients, f se factorise ainsi par M/N et on obtient un homomorphisme

$$f_* : M/N \rightarrow G$$

qui rend commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi \nearrow & M/N \\ E_1 \times \dots \times E_n & & \downarrow f_* \\ & f \searrow & G \end{array}$$

comme l'image de φ engendre M/N , l'application induit f_* est déterminée de façon unique, la preuve est ainsi complète, le module M/N sera noté $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ ou aussi

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i.$$

Nous avons ainsi construit un produit tensoriel spécifique dans la classe d'isomorphisme des produits tensoriels et nous l'appellerons le produit tensoriel des $E_1, \dots, E_n$, pour $x_i \in E_i$, on pose:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n = x_1 \otimes_R \dots \otimes_R x_n$$

on a, pour tout i et pour tous $x_i, x'_i \in E_i, a \in R$,

$$x_1 \otimes \dots \otimes ax_i \otimes \dots \otimes x_n = a(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \text{ et}$$

$$x_1 \otimes \dots \otimes (x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n = (x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + (x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n)$$

Dans le cas de deux facteurs, E et F , tout élément de $E \otimes F$ peut s'écrire comme une somme de termes $x \otimes y$, avec $x \in E$ et $y \in F$, car ces termes engendrent $E \otimes F$ et, pour $a \in R$, $a(x \otimes y) = ax \otimes y$.

Proposition 1.4.1 *Soient E et F des modules, il existe un unique isomorphisme $E \otimes F \rightarrow F \otimes E$, tel que $x \otimes y \mapsto y \otimes x$, pour $x \in E$ et $y \in F$.*

Démonstration. L'application $E \times F \rightarrow F \otimes E$ définie par $(x, y) \mapsto y \otimes x$ est bilinéaire et se factorise par le produit tensoriel $E \otimes F$, envoyant $x \otimes y$ sur $y \otimes x$ comme cette dernière application a un inverse (par symétrie), on obtient l'isomorphisme cherché le produit tensoriel a diverses propriétés factorielles, supposons, tout d'abord que

$$f_i : E'_i \rightarrow E_i (i = 1, \dots, n)$$

soit une famille d'applications linéaires, on obtient une application induite sur le produit

$$\Pi f_i : \Pi E'_i \rightarrow \Pi E_i$$

si on compose Πf_i avec l'application canonique dans le produit tensoriel, on obtient une application induite, que l'on peut noter $T(f_1, \dots, f_n)$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} E'_1 \times \dots \times E'_n & \rightarrow & E'_1 \otimes \dots \otimes E'_n \\ \Pi f_i \downarrow & & \downarrow T(f_1, \dots, f_n) \\ E_1 \times \dots \times E_n & \rightarrow & E_1 \otimes \dots \otimes E_n \end{array}$$

On vérifie immédiatement que T est factorielle, à savoir que, pour des composées

$$f_i \circ g_i (i = 1, \dots, n)$$

d'applications linéaires, on a

$$T(f_1 \circ g_1, \dots, f_n \circ g_n) = T(f_1, \dots, f_n) \circ T(g_1, \dots, g_n)$$

ainsi que $T(Id, \dots, Id) = Id$, on remarque $T(f_1, \dots, f_n)$ est l'unique application linéaire dont l'image d'un élément

$$x'_1 \otimes \dots \otimes x'_n \in E'_1 \otimes \dots \otimes E'_n$$

est donnée par

$$x'_1 \otimes \dots \otimes x'_n \mapsto f_1(x'_1) \otimes \dots \otimes f_n(x'_n)$$

on peut voir T comme une application

$$\Pi_{i=1}^n(E'_i, E_i) \rightarrow L(\otimes_{i=1}^n E'_i, \otimes_{i=1}^n E_i)$$

et le lecteur vérifiera que cette application est multilinéaire dans le cas de deux facteurs , on a $(f, g) \mapsto T(f, g)$ étant donnés des homomorphismes $f : F' \rightarrow F$ et $g_1, g_2 : E' \rightarrow E$, on a

$$T(f, g_1 + g_2) = T(f, g_1) + T(f, g_2)$$

$$T(f, ag_1) = aT(f, g_1)$$

soient, en particulier, un module fixé F et le foncteur $\tau = \tau_F$ (de la catégorie des modules dans elle-même), tel que $\tau(E) = F \otimes E$ alors τ induit l'application linéaire

$$\tau : L(E', E) \rightarrow L(\tau(E'), \tau(E))$$

pour tout couple de modules E' et E , par la formule $\tau(f) = T(Id, f)$. ■

1.4.2 Propriété de base

La relation la plus fondamentale reliant applications linéaires , application bilinéaires et produit tensoriel , est la suivante : pour trois modules E , F et G ,

$$L(E, L(F, G)) \approx L^2(E, F; G) \approx L(E \otimes F, G)$$

les isomorphismes en question admettent une interprétation naturelle.

(i) $L^2(E, F; G) \rightarrow L(E, L(F, G))$, si $f : E \times F \rightarrow G$ est bilinéaire et si $x \in E$ l'application $f_x : F \rightarrow G$, telle que $f_x(y) = f(x, y)$, est linéaire de plus , l'application $x \mapsto f_x$ est linéaire d'où le résultat.

(ii) $L(E, L(F, G)) \rightarrow L^2(E, F; G)$ soient $\varphi \in L(E, L(F, G))$ et $f_\varphi : E \times F \rightarrow G$ l'application bilinéaire telle que $f_\varphi(x, y) = \varphi(x)(y)$ alors $\varphi \mapsto f_\varphi$ est l'application cherchée, il est clair que les deux homomorphismes précédents sont mutuellement inverses, ce qui prouve le premier isomorphisme de la formule.

(iii) $L^2(E, F; G) \rightarrow L(E \otimes F, G)$ il s'agit de l'application $f \mapsto f_*$ qui à chaque application bilinéaire f assoie l'application linéaire induite sur le produit tensoriel, cette association est injective (car f_* est déterminée de manière unique par f) et aussi surjective, parce que toute application linéaire sur le produit tensoriel composée avec l'application canonique $E \times F \rightarrow E \otimes F$, donne lieu à une application bilinéaire sur $E \times F$.

Proposition 1.4.2 Soit $E = \oplus_{i=1}^n E_i$ une somme directe, il existe isomorphisme

$$F \otimes E \approx \oplus_{i=1}^n (F \otimes E_i).$$

Démonstration. On obtient cet isomorphisme par des considérations générales abstraites, pour F fixé, on considère le foncteur $\tau : X \mapsto F \otimes X$ on a déjà vu que τ est linéaire notons π_i les projections de E sur E_i alors $\pi_i \circ \pi_i = \pi_i$, $\pi_i \circ \pi_j = 0$ si $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^n \pi_i = Id$, on applique le foncteur τ et on voit que (π_i) satisfait aux mêmes relations ; il donne ainsi une décomposition en somme directe de $\tau(E) = F \otimes E$ noter que $(\pi_i) = Id \otimes \pi_i$. ■

1.5 Le produit extérieur

Le produit extérieur a des applications dans toutes les branches des mathématiques, en géométrie différentielle, on considère le produit extérieur maximal de l'espace tangent pour obtenir un fibré canonique sur une variété, des produits extérieurs intermédiaires sont à l'origine des formes différentielles (sections de ces produits sur la variété) dans ce partie, nous allons exposer les fondements algébriques de ces constructions pour une étude concise de l'opération des divers groupes d'automorphismes de formes bilinéaires sur des algèbres tensorielles et extérieures, avec bon nombre d'exemples classiques.

1.5.1 Définition et propriété de base

Considérons la catégorie des modules sur un anneau commutatif R , rappelons qu'une application r -linéaire $f : E^r \rightarrow F$ est dite alternée si $f(x_1, \dots, x_r) = 0$ dès que $x_i = x_j$, pour un couple d'indices $i \neq j$, soit a_r le sous-module du produit tensoriel $T^r(E)$, engendré par tous les éléments de type $x_1 \otimes \dots \otimes x_r$, avec $x_i = x_j$ pour une paire $i \neq j$, on pose

$$\wedge^r(E) = T^r(E)/a_r.$$

On obtient ainsi une application r -linéaire $E^r \rightarrow \wedge^r(E)$ (dite canonique), par la composition

$$E^r \rightarrow T^r(E) \rightarrow T^r(E)/a_r = \wedge^r(E)$$

il est clair que l'application est alternée, de plus, elle est universelle pour les applications r -linéaires alternées sur E , autrement dit, si $f : E^r \rightarrow F$ est une telle application, il existe une unique application linéaire $f_* : \wedge^r(E) \rightarrow F$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \wedge^r(E) \\ E^r & & \downarrow f_* \\ & f \searrow & F \end{array}$$

l'application f_* existe car on peut d'abord trouver une application $T^r(E) \rightarrow F$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & T^r(E) \\ E^r & & \downarrow \\ & f \searrow & F \end{array}$$

cette application s'annule sur a_r , induisant ainsi f_* l'image d'un élément $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$ par l'application canonique dans $\wedge^r(E)$ sera notée $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$, c'est aussi l'image de $x_1 \otimes \dots \otimes x_r$ pour la projection canonique $T^r(E) \rightarrow \wedge^r(E)$ de cette façon, $\wedge^r$ devient un foncteur, de la catégorie des modules dans elle-même soit, en effet, $u : E \rightarrow F$ un homomorphisme, pour $x_1, \dots, x_r \in E$, l'application :

$$(x_1, \dots, x_r) \rightarrow u(x_1) \wedge \dots \wedge u(x_r) \in \wedge^r(F)$$

est r -linéaire alternée, induisant un homomorphisme

$$\wedge^r(u) : \wedge^r(E) \rightarrow \wedge^r(F)$$

il est clair que l'association $u \mapsto \wedge^r(u)$ est factorielle, soit $\wedge(E)$ la somme directe

$$\wedge(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \wedge^r(E)$$

nous allons munir $\wedge(E)$ d'une structure de R -algèbre graduée, appelée algèbre extérieure de E ou algèbre de Grassmann, nous allons d'abord examiner la situation générale, pour des anneaux gradués arbitraires, un idéal a de A est appelé idéal homogène et on peut définir une structure graduée sur A/a , en effet, l'application bilinéaire $A_r \times A_s \rightarrow A_{r+s}$ envoie $a_r \times A_s$ dans a_{r+s} et aussi, $A_r \times a_s$ dans a_{r+s} en utilisant des représentants dans A_r et A_s , on peut définir une application bilinéaire

$$A_r/a_r \times A_s/a_s \rightarrow A_{r+s}/a_{r+s}$$

donc aussi une application bilinéaire

$$A/a \times A/a \rightarrow A/a$$

qui munit A/a d'une structure de R -algèbre, appliquons ces résultats à $T^r(E)$ et aux modules a_r , définis plus haut si, pour $i \neq j$, $x_i = x_j$ dans un produit $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ alors, pour tous $y_1, \dots, y_s \in E$, on voit que :

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$$

est dans a_{r+s} ; on a aussi un résultat analogue dans l'autre sens, la somme directe $\oplus a_r$ est ainsi un idéal de $T(E)$ et on peut définir une structure de R -algèbre sur $T(E)/a$, le produit sur les éléments homogènes est donné par la formule :

$$((x_1 \wedge \dots \wedge x_r), (y_1 \wedge \dots \wedge y_s)) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s.$$

On utilise le symbole $\wedge$ pour noter aussi le produit dans $\wedge(E)$, ce produit est appelé produit extérieur (ou produit alterné) si $x, y \in E$, alors $x \wedge y = -y \wedge x$, comme on le voit en développant $(x+y) \wedge (x+y) = 0$, nous observons que est un foncteur de la catégorie des modules dans celle des R -algèbres graduées, pour chaque application linéaire $f : E \rightarrow F$ on obtient une application

$$\wedge(f) : \wedge(E) \rightarrow \wedge(F)$$

telle que, pour $x_1, \dots, x_r \in E$,

$$\wedge(f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_r)$$

de plus, $\wedge(f)$ est un homomorphisme de R -algèbres graduées.

Exemple 1.5.1 Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, un volume sur V est défini comme une norme $\|\cdot\|$ sur $\det V$, comme V est de dimension finie, il est équivalent d'assigner un nombre positif à une base donnée de $\det V$, une telle base est de la forme $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de V , pour $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\|ae_1 \wedge \dots \wedge e_n\| = |a|c$$

en analyse, pour un volume comme ci-dessus, on définit une mesure de Haar μ sur V en définissant la mesure d'un ensemble par :

$$\mu(S) = \int_S \|ae_1 \wedge \dots \wedge e_n\| dx_1 \dots dx_n$$

où $x_1, \dots, x_n$, sont les coordonnées dans V par rapport à cette base, que l'expression de droite est indépendante du choix de la base, soit une suite exacte de R -modules libres de rang fini, comme ci-dessus, par rapport au sous-module E' de E , on définit $\wedge_i^n E =$ le sous-module de E engendré par tous les éléments

$$x'_1 \wedge \dots \wedge x'_i \wedge y_{i+1} \wedge \dots \wedge y_n$$

avec $x'_1, \dots, x'_i$ dans E' considéré comme sous-module de E , on a alors une filtration

$$\wedge_i^n E \supset \wedge_{i+1}^n E.$$

Exemple 1.5.2 Soit L un module libre de rang 1 sur R , le module dual

$$L^\vee = \text{Hom}_R(L, R)$$

est également libre, de même rang, pour un entier positif m , on pose

$$L^{\otimes -m} = (L^\vee)^{\otimes m} = \underbrace{L^\vee \otimes \dots \otimes L^\vee}_{m \text{ fois}}$$

on définit ainsi le produit tensoriel d'une ligne avec elle-même par des entiers négatifs. Posons $L^{\otimes 0} = R$ il est facile de vérifier que, pour $p, q \in \mathbb{Z}$ il existe un isomorphisme canonique

$$L^{\otimes p} L^{\otimes q} \approx L^{\otimes (p+q)}$$

en particulier, si $q = -p$, on obtient R à droite, soit maintenant E une suite exacte de modules libres

$$E : 0 \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_m \rightarrow 0$$

le déterminant de cette suite est défini par

$$\det(E) = \otimes \det(E_i)^{\otimes (-1)^i}.$$

Chapitre 2

Formes trilinéaires alternées

2.1 Formes alternées

2.1.1 Définition des formes alternées

Soit E un espace vectoriel sur un corps K sur lequel on n'impose pas de conditions supplémentaires, soit f une forme alternée sur E c'est-à-dire, une application bilinéaire

$$f : E \times E \rightarrow K$$

telle que $f(x, x) = 0$, pour tout $x \in E$, alors $x.y = -y.x$ pour tous $x, y \in E$, comme on peut le voir en substituant $(x + y)$ à x dans $x^2 = 0$, on dit qu'une application trilinéaire

$$f : E \times E \times E \rightarrow K$$

est alternée si l'expression $f(x, y, z)$ est nulle dès que deux des vecteurs x, y, z sont égaux, autrement dit si l'on a

$$f(x, y, y) = f(x, y, x) = f(x, x, z) = 0$$

pour tous $x, y, z \in E$, alors

$$f(x, y, z) = -f(x, z, y), f(x, y, z) = -f(z, y, x), f(x, y, z) = -f(y, x, z)$$

On définit un plan hyperbolique (pour la forme alternée) comme un espace non dégénéré de dimension 2, on sait qu'il existe un élément ω non nul, tel que $\omega^2 = 0$, si P est un

plan hyperbolique et si $\omega \in P$, $\omega \neq 0$, il existe un élément non nul y de P tel que $\omega.y \neq 0$, quitte à diviser y par une constante, on peut supposer que $\omega.y = 1$, on a ainsi $y.\omega = -1$ et la matrice de la forme par rapport à la base (ω, y) est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le couple (ω, y) est appelé base hyperbolique (pour le plan considéré), étant donné un espace bidimensionnel sur K , muni d'une forme bilinéaire, et un couple d'éléments (ω, y) vérifiant $\omega^2 = y^2 = 0$, $\omega.y = 1$, $y.\omega = -1$, on voit que la forme est alternée et que (ω, y) définit un plan hyperbolique.

Étant donnée une forme alternée f sur E , on dit que E (ou f) est hyperbolique si E est somme orthogonale, plans hyperboliques, on dit que E (ou f) est totalement isotrope si $x.y = 0$ pour tous $x, y \in E$.

Théorème 2.1.1 *Soit f une forme alternée sur un espace vectoriel de dimension finie E sur K , alors E est somme orthogonale de son noyau et d'un sous-espace hyperbolique, si f est non dégénérée, alors E est un espace hyperbolique et sa dimension est un nombre pair.*

Démonstration. Un espace complémentaire du noyau étant non dégénéré, nous pouvons nous ramener au cas où E est non dégénéré, soit ω un élément non nul de E , il existe $y \in E$ tel que $\omega.y \neq 0$ et $y \neq 0$, le couple (ω, y) est non dégénéré et définit un plan hyperbolique P , on a ainsi $E = P \oplus P^\perp$, avec $P^\perp$ non dégénéré la démonstration est complétée par récurrence. ■

Corollaire 2.1.1 *Toutes les formes alternées non dégénérées de dimension donnée sur un corps K sont isométriques.*

Démonstration. D'après le théorème 2.1.1, il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de la forme alternée est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

pour la commodité de l'écriture, on réarrange les éléments de la base de la somme orthogonale de plans hyperboliques de manière à obtenir une matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité d'ordre r , la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice alternée (ou antisymétrique) standard . ■

Corollaire 2.1.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K , muni d'une forme symétrique non dégénérée, notée $\langle, \rangle$, soit Ω une forme alternée non dégénérée sur E , il existe alors une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ et un automorphisme symétrique de E (par rapport à $\langle, \rangle$) tels que, si $x, y \in E$ et $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$, alors*

$$\Omega(x, y) = \langle Ax_1, y_2 \rangle - \langle Ax_2, y_1 \rangle.$$

Démonstration. Considérons une base de E pour laquelle la matrice de Ω est la matrice antisymétrique standard, soit f la forme symétrique non dégénérée sur E définie par

le produit scalaire par rapport à cette base, on a alors une décomposition en somme directe des sous-espaces E_1 et E_2 (correspondant respectivement aux n premières et n dernières coordonnées), telle que

$$\Omega(x, y) = f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1)$$

comme $\langle, \rangle$ est par hypothèse non dégénérée, on peut trouver un automorphisme A ayant les propriétés souhaitées et A est symétrique parce que f est symétrique. ■

2.1.2 Le Pfaffien

Une matrice alternée est une matrice G telle que ${}^tG = -G$, dont les éléments diagonaux sont égaux à 0, c'est la matrice d'une forme alternée, supposons G carrée d'ordre n avec n pair considérons, pour commencer, un corps de caractéristique 0, il existe une matrice C non singulière telle que la matrice tCGC soit:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi $\det(C)^2 \det(G) = 1$ ou 0, selon que le noyau de la forme alternée est trivial ou non, dans tous les cas, on voit que $\det(G)$ est un carré dans le corps de base. Plaçons-nous maintenant dans le cas des entiers $\mathbb{Z}$, soient $t_{ij} (1 \leq i < j \leq n)$, $n(n-1)/2$ éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, tels que $t_{ii} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et $t_{ij} = -t_{ji}$ pour $i > j$, alors la matrice $T = (t_{ij})$ est alternée et $\det(T)$ est ainsi un carré dans le corps $\mathbb{Q}(t)$, obtenu à partir de $\mathbb{Q}$ par adjonction de tous les éléments t_{ij} , cependant, $\det(T)$ est un polynôme de $\mathbb{Z}[t]$, de l'unicité de la décomposition en facteurs dans $\mathbb{Z}[t]$, il s'ensuit que $\det(T)$ est le carré d'un polynôme de $\mathbb{Z}[t]$; on peut donc écrire $\det(T) = P(t)^2$, le polynôme P est unique à un facteur ± 1 près, si nous substituons des valeurs aux t_{ij} telles que la matrice T devienne :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ -I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$$

Nous voyons qu'il existe un unique polynôme P à coefficients entiers prenant la valeur 1 pour cet ensemble spécifique de valeurs de (t) , on appelle P pfaffien d'ordre n et on le note Pf .

Soit R un anneau commutatif, on a un homomorphisme $\mathbb{Z}[t] \rightarrow R[t]$ induit par l'unique homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans R , l'image du pfaffien dans $R[t]$ est un polynôme à coefficients dans R , que nous noterons toujours Pf , si $G = (g_{ij})$ est une matrice alternée à éléments dans R , on note $Pf(G)$ la valeur de $Pf(t)$ quand on substitue ces g_{ij} aux t_{ij} , comme le déterminant commute avec les homomorphismes.

Théorème 2.1.2 *Soient R un anneau commutatif et $G = (g_{ij})$ une matrice alternée, avec $g_{ij} \in R$, on a*

$$\det(G) = (Pf(G))^2$$

de plus, si C est une matrice carrée d'ordre n sur R , alors

$$Pf(CG^tC) = \det(C)Pf(G).$$

Démonstration. Le premier résultat a été démontré plus haut, le second sera établi si on le démontre sur $\mathbb{Z}$, soient $u_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$ des éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, tels que u_{ij}, t_{ij} soient algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, soit U la matrice (u_{ij}) , on a

$$Pf(UT^tU) = \pm \det(U)Pf(T)$$

comme on peut le voir en prenant les carrés des deux membres, prenons des valeurs pour U et T telles que U devienne la matrice unité et T la matrice antisymétrique standard, il en résulte qu'on a le signe $+$ à droite comme on peut substituer une matrice quelconque à U et une matrice alternée à T , le théorème est démontré. ■

2.2 Multivecteurs

2.2.1 L'action gauche

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K , la classification des p -vecteurs est l'étude de l'action gauche du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^p E$ définie par

$$\forall f \in GL(E), \forall \omega \in \Lambda^p E, f.\omega = (\Lambda^p f)(\omega), \Lambda^p f : \Lambda^p E \rightarrow \Lambda^p E$$

définie par

$$\Lambda^P f(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_p)$$

est un endomorphisme de $\Lambda^P E$.

On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \Lambda^P F$; sa dimension est le rang de ω , noté $r(\omega)$, le rang est invariant par l'action du groupe linéaire $GL(E)$ et par extension des scalaires, soit maintenant $\omega \in \Lambda^P E^*$ une forme p-linéaire : R_ω le radical de ω , est l'ensemble des x de E tels que $\omega(x, x_2, \dots, x_p) = 0$ quels que soient $x_2, \dots, x_p$ dans E , si $R_\omega = \{0\}$, on dit que ω est non dégénérée ou de rang maximal.

Un p -vecteur non nul ω est décomposable s'il existe $x_1 \dots x_p$ dans E tel que $\omega = x_1 \dots x_p$, le support de ω est le sous-espace vectoriel engendré par

$$x_1, \dots, x_p : S_\omega = Vect\{x_1, \dots, x_p\}.$$

Rappelons l'action de E^* , dual de E , sur ΛE définie par :

- i) $d_f(1) = 0$
- ii) $d_f|_E = f$
- iii) $d_f(xu) = -x d_f(u) + f(x)u$ pour $x \in E$ et $u \in \Lambda E$.

d_f est une anti dérivation de degré -1 , nulle sur la sous-algèbre $\Lambda(ker f)$, de carré nul et

$$f \rightarrow d_f$$

est une application linéaire, ainsi pour $\omega \in \Lambda^P E$ fixé,

$$f \rightarrow d_f(\omega)$$

est une application linéaire de E^* dans $\Lambda^{P-1} E$ dont le noyau est le sous-espace R_ω de E^* ; son orthogonal R_ω° dans E coïncide avec le support de ω , par dualité, cette anti dérivation correspond à l'évaluation partielle $x \mapsto \omega_x$ où

$$\omega_x(x_2, \dots, x_p) = \omega(x, x_2, \dots, x_p).$$

Si M est un module sur un anneau commutatif A ,

$$\Lambda_0 M = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k} M$$

possède un système de puissances divisées, si M est projectif de type fini de rang $2m$, on obtient une forme polynôme (de degré m) $\gamma_m : \Lambda^2 M^* \rightarrow \Lambda^{2m} M^*$ qui est le pfaffien : si $u \in \Lambda^2 M^*$, u est non dégénérée si et seulement si $\gamma_m(u)$ engendre le A -module $\Lambda^{2m} M^*$, si $u = \sum_{i=1}^{i=r} x_{2i-1} x_{2i}$ où $\{x_1, \dots, x_{2r}, \dots, x_n\}$ est une base de E ,

$$\gamma_k(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} x_{2i_1-1} x_{2i_1} \dots x_{2i_k-1} x_{2i_k}$$

de sorte que $rg(u) = 2k$ équivaut à $\gamma_k(u) \neq 0$ et $\gamma_{k+1}(u) = 0$, les puissances divisées permettent d'étudier les sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 E$, donc les algèbres de lie 2-nilpotentes.

Eléments scindables

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E ; $\Lambda^P E$ s'identifie à

$$\bigoplus_{k=0}^{k=p} (\Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{P-k} E_2)$$

un élément $\omega \in \Lambda^P E$ est dit scindable s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^{P-1} E_2$ vu comme facteur direct de $\Lambda^P E$, si $\dim E_1 = r$, on dit que ω est r -scindable, la scindabilité est une généralisation de la divisibilité; en effet ω est divisible si et seulement si ω est 1-scindable, propriété qui ne dépend pas du corps de base car c'est équivalent à dire que l'application $E \rightarrow \Lambda^{P+1} E$, $x \mapsto x \omega$, n'est pas injective, notons aussi que ω r -scindable implique $d_r(\omega) = 0$ car $\varpi_{E_i} = 0$.

Soit ω un élément r -scindable et $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de

$$E_1 : \omega = \sum_{i=1}^r e_i u_i$$

où $u_i \in \Lambda^{P-1} E_2$, les u_i sont déterminés de façon unique par la base $e_1, \dots, e_r$ de E_1 car $u_i = d_{e_i^*}(\omega)$ où $e_i^* \in E^*$ est définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ et $e_i^*(E_2) = 0$, alors ω est déterminé par le sous-espace vectoriel F de $\Lambda^{P-1} E_2$ engendré par les u_i ; en effet, si on change de base dans E_1 , et si la nouvelle base f_j est donnée par

$$e_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} f_j$$

$$\omega = \sum_1^r e_i u_i = \sum_{j=1}^r f_j \left(\sum_{i=1}^r a_{ij} u_i \right) = \sum_{j=1}^r f_j v_j$$

les v_j s'obtiennent donc à partir des u_i par le changement de base contragredient de celui qui fait passer de la base $\{f_j\}$ à la base $\{e_i\}$, cela se voit aussi en utilisant l'isomorphisme naturel entre $E_1 \otimes \Lambda^{P-1} E_2$ et $\text{Hom}(E_1^*, \Lambda^{P-1} E_2)$: si φ est l'élément de $\text{Hom}(E_1^*, \Lambda^{P-1} E_2)$ canoniquement associé à ω , F n'est autre que $\varphi(E_1^*)$ pour classifier les éléments r -scindables de rang maximal dans $\Lambda^P E$, il suffit donc d'étudier l'action de $GL(E_2)$ sur la grassmannienne $Gr_r(\Lambda^{P-1} E_2)$ des sous-espaces vectoriels de dimension r de $\Lambda^{P-1} E_2$, c'est ce qui est fait pour $p = 3$ et pour certaines valeurs du couple $(r = \dim E_1, n - r = \dim E_2)$ le cas où $n - r$ est pair est plus simple car on peut y utiliser les puissances divisées sous la forme de pfaffiens. Remarquons qu'un même p -vecteur peut être scindable pour plusieurs valeurs de l'entier r .

2.2.2 Commutant

Un invariant a été introduit par B. Kahn, le commutant de ω : si $\omega \in \Lambda^P E$, on note $C(\omega)$ l'ensemble des endomorphismes

$$f : E \rightarrow E$$

tels que l'application

$$\omega_f : (x_1, \dots, x_p) \rightarrow \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, f x_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

ne dépende pas de i , on la note $\omega_f(x_1, \dots, x_p)$ et c'est clairement une forme p -linéaire alternée.

2.3 Algèbre extérieure et groupes d'automorphismes

2.3.1 Généralités

Algèbre extérieure d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K , dans l'algèbre tensorielle $T^P(E)$, désignons par $D(E^2)$ l'idéal engendré par les carrés des éléments

de E , et définissons l'algèbre extérieure de E comme l'algèbre - quotient graduée,

$$\Lambda^P(E) = T^P(E)/D(E^2).$$

si $a, b \in \Lambda^P(E)$, on note l'opération du produit extérieur par $a \wedge b$.

Dualité dans l'algèbre extérieure

On exprime le dual de $\Lambda^P(E)$ au moyen de E^* , en effet: étant donné p formes linéaires $f_1, f_2, \dots, f_p \in E^*$ et p éléments $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$, formons d'abord la matrice A du type (p, p) qui a pour termes

$$A_{i,j} = f_i(x_j)$$

on sait que tout déterminant est une fonction multilinéaire alternée de ces lignes et de ces colonnes, par suite, étant donnée une liste f de formes linéaires, $|A|$ est une fonction p -linéaire alternée de $x_1, x_2, \dots, x_p$, puisque

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \longmapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$$

est une application universelle de ce type, il existe une application linéaire

$$t(f_1, f_2, \dots, f_p) : \Lambda^P(E) \rightarrow K$$

telle que :

$$[t(f_1, f_2, \dots, f_p)](x_1, x_2, \dots, x_p) = |A|; \quad A_{i,j} = f_i(x_j)$$

chaque $t(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est donc un élément de $[\Lambda^P(E)]^*$, puisque le déterminant $|A|$ est une fonction multilinéaire alternée de ses lignes, l'application

$$(f_1, f_2, \dots, f_p) \longmapsto t(f_1, f_2, \dots, f_p)$$

est alternée et multilinéaire, comme

$$(f_1, f_2, \dots, f_p) \longmapsto f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p \in \Lambda^P(E^*)$$

est universelle, il existe une application linéaire

$$\psi : \Lambda^P(E^*) \rightarrow [\Lambda^P(E)]^*$$

telle que:

$$\psi(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p) = (f_1, f_2, \dots, f_p)$$

c-à-d

$$\psi(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p)(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) = |A| (1)$$

A ayant pour termes $A_{i,j} = f_i(x_j)$ pour $i, j \in p$.

Théorème 2.3.1 *Si E un espace vectoriel de dimension finie n , sur un corps commutatif K alors pour tout entier naturel p l'application linéaire ψ de (1) est un isomorphisme,*

$$\psi : \Lambda^p(E^*) \cong [\Lambda^p(E)]^* (2).$$

Démonstration. Prenons une base $x_1, x_2, \dots, x_p$ de E et la base duale $f_1, f_2, \dots, f_p$ de E^* ; on a donc $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j \in n$, $\Lambda^p(E^*)$ à alors pour base l'ensemble des $f_n = f_{n_1} \wedge \dots \wedge f_{n_p}$, pour toutes les listes strictement croissantes $h : p \mapsto n$, tandis que $\Lambda^p(E)$ à pour base l'ensemble des $x_k = x_{k_1} \wedge \dots \wedge x_{k_p}$ pour toutes les listes strictement croissantes $h : n \rightarrow p$ $[\psi f_n](x_k) = |A|$ A étant la matrice (p, p) qui a pour termes $A_{i,j} = f_{n_i}(x_{k_j})$, étant donné un indice - ligne i de cette matrice, $f_{n_i}(x_{k_j})$, est nul sauf si il y a donc une ligne de A qui s'annule à moins que chaque h_i ne soit pas égal à un k_j , cela ne peut se produire que si les deux listes croissantes sont égales : $k = h$ dans ce cas, A est la matrice unité du type (p, p) , qui a pour déterminant 1, par suite $[\psi f_n](x_k)$ est égal à zéro ou un, suivant que $h \neq k$ ou $h = k$ cela établit que les éléments ψf_n forment une base de $[\Lambda^p(E)]^*$ duale de la base x_k de $\Lambda^p(E)$ autrement dit, ψ transforme une base $\Lambda^p(E^*)$ en une base de $[\Lambda^p(E)]^*$; c'est donc bien un isomorphisme. ■

Proposition 2.3.1 *Pour tout espace vectoriel E sur A , toute forme linéaire $t : \Lambda^p(E) \rightarrow K$ détermine une forme p -linéaire alternée $h : E^p \rightarrow K$ par l'intermédiaire de*

$$h(x_1, x_2, \dots, x_p) = t(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

l'application $t \rightarrow h$ est un isomorphisme

$$[\Lambda^p(E)]^* \cong ALT_p(E).$$

Puissance divisée

Théorème 2.3.2 *Un système de puissances divisées existe dans l'idéal $\bigoplus_{k \geq 1} \Lambda^{2k} E$ l'algèbre extérieure E .*

Ce résultat est bien connu dans le cas des corps, il admet une généralisation au cas d'un anneau quelconque et d'un module non nécessairement libre sous la forme suivante: soit M un A -module, ΛM son algèbre extérieure; de puissances divisées existent dans l'idéal (la sous - algèbre commutative des éléments de l'algèbre paire de l'algèbre extérieur de E)

$$\bigoplus_{k \geq 1} \Lambda^{2k} E$$

si M est projectif de type fini de rang $2m$, on obtient une forme polynôme (de degré m)

$$Y_m : \Lambda^2 M^* \rightarrow \Lambda^2 M^*$$

qui est le pfaffien, si $u \in \Lambda^2 M^*$, u est non dégénérée si et seulement si $Y_m(u)$ engendre, le A -module $\Lambda^{2m} M^*$, si

$$u = \sum_{i=1}^r x_{2i-1} x_{2i}$$

où $\{x_1, \dots, x_{2r}, \dots, x_n\}$ est une base de E

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} x_{2i_1-1} x_{2i_1} \dots x_{2i_k-1} x_{2i_k}$$

de sorte que $rg(u) = 2k$, équivaut à

$$y_k(u) \neq 0, \quad y_{k+1}(u) = 0.$$

Remarque 2.3.1 *Si A est une Q - algèbre commutative, les puissances divisées sont définies par :*

$$\gamma_k(u) = \frac{u^k}{k!}$$

Remarque 2.3.2 *Du fait de l'isomorphisme*

$$\Lambda^P E^* \approx \Lambda^P(E)^*$$

on emploiera le langage des formes alternées ou des p - vecteurs l'étude est consacrée au cas $p = 3$ et $n = 8$, sur un corps algébriquement clos, c'est-à-dire l'action de $GL_8(K)$ sur $\Lambda^3 E$.

Vecteur décomposable

Un p -vecteur non nul ω est décomposable s'il existe $x_1, x_2, \dots, x_p$ dans E tel que

$$\omega = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$$

le support de ω est le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \dots, x_p$, donc

$$S_\omega = \langle x_1, x_2, \dots, x_p \rangle$$

dans ce cas $d_0(\omega) = \dim S_\omega = p$. Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables.

Lemme 2.3.1 *Etant donnée qu'il existe un isomorphisme entre $\Lambda^3 K^4$ et $\Lambda^1 K^4$, il y a pas de trivecteurs de rang 4.*

Preuve. Mettons, d'abord en évidence l'isomorphisme entre $\Lambda^3 K^4$ et $\Lambda^1 K^4$, soient une base de $\Lambda^1 K^4$ donnée par $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, et une autre de $\Lambda^3 K^4$ donnée par

$$\{\omega_1 = e_1 e_2 e_3, \omega_2 = e_2 e_3 e_4, \omega_3 = e_1 e_3 e_4, \omega_4 = e_1 e_2 e_4\}$$

et considérons f définie par : $f : \Lambda^1 K^4 \rightarrow \Lambda^3 K^4$

$$x = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i \mapsto f(x) = f\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \omega_i$$

f tel qu'elle est définie, est linéaire bijective et donc c'est un isomorphisme, montrons qu'il n'y a pas de trivecteurs de rang 4, du fait de l'isomorphisme f tout

élément de $\Lambda^3 K^4$ s'écrit sous la forme $\omega = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \omega_i$, soit ω non nul, et étudions son rang :

- si $\omega = \alpha_i \omega_i$, $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 4$, donc $rg(\omega) = rg(\omega_i) = 3$.
- si $\omega = \alpha_i \omega_i + \alpha_j \omega_j$, $i \neq j$, $i, j \in 1, 4$, comme $\dim(S_{\omega_i} \cap S_{\omega_j}) = 2 \quad \forall i \neq j$, $i, j \in 1, 4$.

Donc l'écriture de ω se ramène à un trivecteur décomposable donc $rg(\omega) = 3$, si

$$\omega = \alpha_i \omega_i + \alpha_j \omega_j + \alpha_k \omega_k$$

avec $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_j \neq 0$, $\alpha_k \neq 0$, $i \neq j \neq k$, $i, j, k \in 1, 4$, on envisage quatre cas possibles dans l'étude du rang de chaque trivecteur est identique, traitons par exemple, le cas où

$$\omega = \alpha_1 e_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_2 e_3 e_4 + \alpha_3 e_1 e_3 e_4$$

avec $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 3$, on peut écrire ,

$$\omega = e_3(\alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_4 e_2 + \alpha_3 e_4 e_1)$$

soit $u = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_4 e_2 + \alpha_3 e_4 e_1$, comme

$$\gamma_2(u) = \frac{U^k}{2!} = 0 \Rightarrow rg u = 2$$

$e_3 \notin S_u$ d'où $rg(\omega) = 3$.

-Si $\omega = \alpha_1 e_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_2 e_3 e_4 + \alpha_3 e_1 e_3 e_4 + \alpha_4 e_1 e_2 e_4$, avec $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 4$,

$$\omega = e_2 e_3(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) - e_1 e_4(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)$$

$$\omega = \alpha_4^{-1}(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2) e_3(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) - \alpha_1^{-1}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) e_4(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)$$

$$\omega = (\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)(\alpha_4^{-1} e_3 + \alpha_1^{-1} e_4)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4).$$

On en déduit que $rg(\omega) = 3$ car les vecteurs qui le composent, sont linéairement indépendants, alors dans tout les cas $rg(\omega) = 3$, ainsi il n'y a pas de trivecteurs de rang 4.

■

Groupe d'automorphismes

Le groupe des automorphismes de ω , $Aut(\omega)$ est le stabilisateur de ω dans l'action de $GL(E)$ c'est à dire le sous-groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E , qui laissent invariant:

$$Aut(\omega) = \{f/f \in GL(E) \text{ et } \wedge^p f(\omega) = \omega\} = \{f/f \in GL(E) \text{ et } f.\omega = \omega\}.$$

l'orbite de ω par $GL(E)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes à gauche

$$GL(E)/Aut(\omega)$$

Invariant numérique $d_1(\omega)$

On associe à un 3-vecteur (trivecteur) d'autre invariant numérique que son rang, soit $G_1(E)$ l'espace projectif $IP(E)$ et considérons la projection :

$$P_\alpha : \Lambda^3 E \rightarrow \Lambda^3(E/\alpha)$$

pour $\alpha \in G_1(E)$, on appelle $\varpi(\alpha)$ l'image de ω par P_α et on pose:

$$d_1(\omega) = \inf_a(\text{rang}(\varpi(\alpha))), \quad \alpha \in G_1(E)$$

on a

$$d_0(\omega) = \text{rg}(\omega) > d_1(\omega), d_1(\omega)$$

est invariant par l'action de $GL(E)$, mais il ne l'est pas par extension des scalaires.

Lemme 2.3.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension paire et ω un trivecteur de rang maximal, alors : $d_1(\omega) \neq 0$, en particulier si $\dim E = 8$, $d_1(\omega) \neq 0$.*

Preuve. On a $d_1(\omega) = \inf_a(\text{rg} \varpi(\alpha))$, où α parcourt l'espace projectif $IP(E)$ des droites de E si $d_1(\omega) = 0$, il existe $\alpha = Kx, x \neq 0$ tel que $\varpi(\alpha) = 0$, soit E' un supplémentaire de Kx dans E : de $E = E' \oplus Kx$. Résulte

$$\Lambda^3 E \approx \Lambda^3 E' \oplus (Kx \otimes \Lambda^2 E')$$

alors $\omega = ux + \omega'$ et $\varpi(\alpha) = 0$ signifie que ω' est nul ; de plus $S_\omega = S_u \oplus Kx = E$ comme ω est de rang maximal, $S_u = E'$ et E' est de dimension paire ce qui contredit l'hypothèse sur la dimension de E . ■

Vecteur divisible

Soit ω un trivecteur non nul, ω est un trivecteur divisible s'il existe, un $x \in E/\{0_E\}$ et $u \in \Lambda^2 E_2$ tel que

$$E = Kx \oplus E_2 \quad \text{et}$$

$$\omega = x \wedge u$$

Proposition 2.3.2 ω est un vecteur divisible si et seulement si $d_1(\omega) = 0$.

Preuve. Si $\omega = x \wedge u \implies d_1(\varpi(Kx)) = 0$, si

$$d_1(\omega) = 0 \implies \exists \alpha \in G_1 / \text{rg}(\varpi(\alpha)) = 0$$

d'où $\varpi(\alpha) = 0$ donc si on prend $\alpha = kx$ on obtient : $\omega = y \wedge u$ ce qu'il fallait montrer. ■

Remarque 2.3.3 Comme $d_1(\omega) \neq 0$ si ω est de rang maximal, alors on en déduit qu'il n'y a pas de trivecteur de rang 8 divisible.

2.3.2 Parties stables

Lemme 2.3.3 Soit E un espace vectoriel sur le corps K et considérons la forme bilinéaire alternée par

$$f^x(y, z) = f(x, y, z), \quad (y, z \in E)$$

et f une forme trilinéaire alternée ; alors l'ensemble

$$\overline{R}_i = \{x \in E / \text{rg } f^x = 2i\} \quad (0 \leq 2i \leq n)$$

est stable par $\text{Aut}(\omega)$.

Lemme 2.3.4 L'ensemble $R_i(\omega) = \{x \in E / \varpi(x) \text{ est de type } \omega_i\}$ est une partie stable pour $\text{Aut}(\omega)$.

Preuve. Prenons $E = \langle x \rangle \oplus E'$, alors ω s'écrit : $\omega = xu + \omega'$ avec

$\omega' \in \Lambda^3 E'$, ($\dim E' = n - 1$) et $\varpi(x) = \omega'(x)$, comme $x \notin E'$ alors ϖ' est de même type que $\varpi'(x)$ d'où $\varpi(f(x)) = \overline{\Lambda^3 f(\varpi') f(x)}$ comme f est une application linéaire bijective, elle transforme le trivecteur ω' à un trivecteur de même type, c'est à dire $f(\omega')$ est dans l'orbite de ω' , par suite $\varpi(f(x))$ est de type ω_i d'où $f(x) \in R_i(\omega)$ et $f(R_i(\omega)) \subset R_i(\omega)$, en particulier $R_{6,1}$, et $R_{6,2}$ sont des parties stables. ■

Lemme 2.3.5 Soit E un espace vectoriel sur le corps K de dimension finie V_1, V_2 deux sous espaces de E différents et tel que $\dim V_1 = \dim V_2$ si f est un endomorphisme de E qui laissent stable la réunion de V_1 et V_2 c-à-d ($f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$) alors on a ($f(V_1) \subset V_1$) et ($f(V_2) \subset V_2$) ou ($f(V_1) \subset V_2$) et ($f(V_2) \subset V_1$).

Preuve. Comme on a $f(V_1) \cup f(V_2) \subset V_1 \cup V_2$ on tire:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (f(V_1) \subset (V_1 \cup V_2)) \\ (f(V_2) \subset (V_1 \cup V_2)) \end{cases} &\implies \begin{cases} (f(V_1) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_1)) \\ (f(V_2) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_2)) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} (f(V_1) \cap V_1) \cup (f(V_1) \cap V_2) = f(V_1) \text{ I} \\ (f(V_2) \cap V_1) \cup (f(V_2) \cap V_2) = f(V_2) \text{ II} \end{cases} \end{aligned}$$

Or la réunion de deux sous espaces vectoriels est un sous espaces vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre ainsi

$$(f(V_1) \cap V_1) \subset (f(V_1) \cap V_2) \quad \text{ou} \quad (f(V_1) \cap V_2) \subset (f(V_1) \cap V_1)$$

et

$$(f(V_2) \cap V_1) \subset (f(V_2) \cap V_2) \quad \text{ou} \quad (f(V_2) \cap V_2) \subset (f(V_2) \cap V_1)$$

on remplace dans I et II on obtient:

$$f(V_1) \cap V_1 = f(V_1) \quad \text{ou} \quad f(V_1) \cap V_2 = f(V_1)$$

$$f(V_2) \cap V_1 = f(V_2) \quad \text{ou} \quad f(V_2) \cap V_2 = f(V_2)$$

ce qui implique que:

$$(f(V_1) \subset V_2 \quad \text{ou} \quad f(V_1) \subset V_2) \quad \text{et} \quad (f(V_2) \subset V_1 \quad \text{ou} \quad f(V_2) \subset V_2)$$

on a quatre cas qui figurent

$$(f(V_1) \subset V_1 \quad \text{et} \quad f(V_2) \subset V_2) \quad \text{ou} \quad (f(V_1) \subset V_2 \quad \text{et} \quad f(V_2) \subset V_1)$$

$$(f(V_1) \subset V_1 \quad \text{et} \quad f(V_2) \subset V_1) \quad \text{ou} \quad (f(V_1) \subset V_2 \quad \text{et} \quad f(V_2) \subset V_2)$$

les deux derniers cas sont impossibles car par exemple :

$$\text{si } (f(V_1) \subset V_1 \quad \text{et} \quad f(V_2) \subset V_1)$$

$$\text{comme } \dim f(V_1) = \dim V_1 \quad \text{et} \quad \dim f(V_2) = \dim V_2$$

$$\text{d'où } f(V_1) = V_1 \quad \text{et} \quad f(V_2) = V_1 \implies V_1 = V_2$$

$$(f \text{ injective}) \text{ ce qui est absurde car } V_1 \neq V_2. \quad \blacksquare$$

Lemme 2.3.6 Soit $\lambda \in K^*$, $u \in K$ et $\dim_k E = 7$

$$h_{\lambda,u} = e_1 e_2 e_3 + e_1 e_4 e_6 + e_3 e_5 e_6 + \lambda e_4 e_5 e_6 + u e_2 e_3 e_6$$

$$h_\lambda = e_1 e_2 e_3 + e_1 e_4 e_6 + \lambda e_4 e_5 e_6$$

alors $h_{\lambda,u}$ et h_λ sont des trivecteur rang 6 du type 6.1

Preuve. Soit $f \in GL(E)$ définie par :

$$f(e_1) = e_i - u e_6, \quad f(e_2) = e_2 - \lambda^{-1} e_6, \quad f(e_4) = e_4 - \lambda^{-1} e_3, \quad f(e_i) = e_i, \quad \forall i = 3, 5, 6, 7$$

$$f.h_{\lambda,u} = (e_1 - u e_6)(e_2 - \lambda^{-1} e_6)e_3 + (e_1 - u e_6)(e_4 - \lambda^{-1} e_3)e_6 + e_3 e_5 e_6 +$$

$$\lambda(e_4 - \lambda^{-1} e_3)e_5 e_6 + u(e_2 - \lambda^{-1} e_6)e_3 e_6.$$

$$f.h_{\lambda,u} = e_1 e_2 e_3 + e_1 e_4 e_6 + \lambda e_4 e_5 e_6 = h_\lambda$$

donc $h_{\lambda,u}$ et h_λ sont équivalents à h_λ .

Montrons que h_λ est du type 6, 1, soit $g \in GL(E)$ définie par:

$$g(e_5) = e_5 + \lambda^{-1} e_1, \quad g(e_i) = e_i \quad \forall i \neq 5.$$

$$gh_\lambda = e_1 e_2 e_3 + e_1 e_4 e_6 + \lambda e_4 (e_5 + \lambda^{-1} e_1) e_6$$

$$gh_\lambda = e_1 e_2 e_3 + e_1 e_4 e_6 + \lambda e_4 e_5 e_6 + e_4 e_1 e_6.$$

$$gh_\lambda = e_1e_2e_3 + \lambda e_4e_5e_6.$$

c'est un trivecteur du type 6, 1. ■

Lemme 2.3.7 Soit E un K -e-v de dimension 7 et un trivecteur donné par

$$\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + ue_1e_2e_3 + \lambda e_4e_5e_6$$

avec $u, \lambda \in K$, si $u = 0$ ou $\lambda^2 u = -4\omega$ est du type 6, 2 et il est ω du 6, 1 dans les autres cas.

Preuve. Si $u = 0$, $\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6$.

considérons $f \in GL(E)$ définie par : $f(e_3) = e_3 - \lambda e_4$, $f(e_i) = e_i$, $\forall i \neq 3$.

$$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + (e_3 - \lambda e_4)e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6.$$

$$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6$$

du type 6, 2, supposons que $u \neq 0_K$.

comme K est un corps algébriquement clos alors l'équation $x^2 = u$ (I)

admet des solutions dans K , soit a une solution de (I) et considérons

$f \in GL(E)$ définie par :

$$f(e_4) = ae_4, \quad f(e_i) = a^{-1}e_i, \quad i = 1, 2, \quad f(e_j) = ae_j, \quad j = 3, 5, 6, 7, \text{ d'ou}$$

$$\Lambda^3 f(\omega) = a^{-1}e_1(ae_4)e_5 + a^{-1}e_2ae_4e_6 + e_3e_5e_6 + ua^{-2}e_1e_2e_3 + \lambda ae_4e_5e_6.$$

$$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3 + \lambda ae_4e_5e_6.$$

Si on pose $\lambda' = \lambda a$, on remarque que l'étude du type trivecteur ω ($u \neq 0$) revient à l'étude du trivecteur ω lorsque $u = 1$

$$\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda' e_4e_5e_6, \quad \lambda' \in K, \text{ soit } g \in GL(E),$$

définie par:

$$g(e_1) = e_1 + \alpha e_6, \quad g(e_2) = e_2 + ye_5, \quad g(e_3) = e_3 + \xi e_4$$

$$g(e_6) = e_6 + \beta e_1, \quad g(e_5) = e_5 + \delta e_2, \quad g(e_4) = e_4 + \eta e_3$$

$$\text{avec } \alpha, \xi, \beta, \delta, \eta, y \in K, \quad \alpha\beta \neq 1, \quad y\delta \neq 1, \quad \xi\eta \neq 1$$

alors:

$$\Lambda^3 f(\omega) = \begin{cases} (1 - y\beta + \beta\xi + \beta\lambda')e_1e_4e_5 + (\beta - \delta - \beta\delta\xi + \xi - \beta\lambda'\delta)e_1e_2e_4 + \\ (\eta - \beta y\eta + \beta - y + \beta\lambda'\eta)e_1e_3e_5 + (-\delta\eta + \beta\eta - \beta\delta + 1 - \beta\delta\lambda'\eta)e_1e_2e_3 \\ + (\alpha - y + \xi - \xi y\alpha + \lambda')e_4e_5e_6 + (-\alpha\delta + 1 - \xi\delta - \alpha\xi - \lambda'\delta)e_2e_4e_6 + \\ (1 + \alpha\eta - y\eta - \alpha y + \lambda'\eta)e_3e_5e_6 + (\eta - \delta - \alpha\eta\delta + \alpha - \lambda'\eta\delta)e_2e_3e_6 \end{cases}$$

Supposons que la caractéristique de K est impaire et posons

$y = \delta = \alpha = 0$ et $\beta = y = -\xi = \frac{1}{2}\lambda$ alors:

$$\Lambda^3 g(\omega) = (1 + \frac{1}{4}\lambda'^2)e_1e_4e_5 + e_1e_2e_3 + e_2e_4e_6 + e_1e_5e_6.$$

si $\lambda'^2 + 4 = 0$ dans ce cas $\Lambda^3 g(\omega)$ est du type 6, 2 car ω est du type 6, 2

si $\lambda'^2 u = -4$ si $\lambda' = 0, \omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3$.

On applique la transformation g avec $\beta = \delta = y = 1$ et $\alpha = y = \xi = -1$.

On obtient $\Lambda^3 g(\omega) = 2(e_1e_3e_5 + e_2e_4e_6)$ ainsi ω est équivalent à 6, 1

Supposons maintenant que la caractéristique de K est paire et soit $\psi \in K^*$

tel que : $\alpha = \delta = y = 0$ et $\beta = y = \xi = \psi$.

d'où $\Lambda^3 g(\omega) = e_1e_2e_3 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda'e_4e_5e_6$.

Si $\lambda' = 0_K$, ω est équivalent à 6, 2 et si $\lambda' \neq 0_K$, ω est équivalent à 6, 2 d'après le lemme 2.3.4. ■

Chapitre 3

Classifications des trivecteurs en dimension inférieure à 6

3.1 Classification en dimension inférieure à 6

Si $\dim E = 3$, il n'y a qu'une orbite de trivecteurs non nuls si $\omega \in \Lambda^3 E - \{0\}$ il existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$, alors $Aut(\omega)$ est le groupe spécial $SL_3(E)$,

$$C(\omega) = K, \omega(e_1, e_2, e_3) = 1, \omega(e_i, e_j, e_k) = 0.$$

Si $\dim E = 4$, tous les trivecteurs non nuls sont décomposables, donc $\Lambda^3 E$ a deux orbites, dans une base (e_i) , $1 \leq i \leq 4$, un représentant de chaque orbite est donné par 0, $e_1 e_2 e_3$, de l'isomorphisme entre $\Lambda^p K^{p+1}$ et $\Lambda^1 K^{p+1}$ on déduit qu'il n'y a pas de p -vecteurs de rang $p + 1$, en particulier il n'y a pas de trivecteurs de rang 4.

Si $\dim E = 5$, l'isomorphisme $\Lambda^3 E \simeq \Lambda^2 E^*$ montre qu'il y a trois orbites dans $\Lambda^3 E$: en effet si un trivecteur est non nul et non décomposable, il est nécessairement de rang maximal, donc divisible par un vecteur e_1 : $\omega = e_1 u$ où u est un bivecteur de rang 4, on peut choisir pour S_u , tout supplémentaire de Ke_1 dans E et il existe une base $(e_i), 1 \leq i \leq 5$, de E telle que un représentant de chaque orbite est donné par 0, $e_1 e_2 e_3, e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$

$$\omega(e_1, e_2, e_3) = \omega(e_1, e_4, e_5) = 1, \omega(e_i, e_j, e_k) = 0$$

l'invariant $C(\omega)$ d'un trivecteur de rang 5 est réduit au corps K ; pour l'invariant $Aut(\omega)$.

Proposition 3.1.1 Soient le trivecteur $\omega = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$ et $A = \text{Aut}(\omega)$ alors on a les suites exactes suivantes :

$$1 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow K^* \rightarrow 1 \text{ et } 1 \rightarrow K^4 \rightarrow A' \rightarrow S_{p_4}(K) \rightarrow 1$$

Preuve. Considérons l'ensemble $E_1 = \{x \in E / x\omega = 0\}$

si $x = \sum_{i=1}^5 \alpha_i e_i$ appartient à E_1 , on a $x = \alpha_1 e_1$, donc $E_1 = \text{Vect}\{e_1\}$, si $x \in E_1$, on a $\Lambda^4 f(x\omega) = f(x)\Lambda^3 f(\omega) = f(x)\omega = 0$ pour $f \in A$, d'où $f(E_1) \subset E_1$ et il existe $\lambda \in K^*$ tel que $f(e_1) = \lambda e_1$. la matrice de f dans la base $\{e_1, \dots, e_5\}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

cela permet de définir un homomorphisme surjectif de groupes de A dans K^* par

$$\psi(f) = \lambda$$

pour $\alpha \in K^*$ on prend pour antécédent l'application linéaire $f : E \rightarrow E$ définie par $f(e_1) = \alpha e_1$, $f(e_{2i}) = \alpha^{-1} e_{2i}$, $f(e_{2i+1}) = e_{2i+1}$ pour $i = 1, 2$. Soit

$$f \in A' = \text{Ker } \psi : e_1 \Lambda^2 f(e_2e_3 + e_4e_5) = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$$

autrement dit $\Lambda^2 f(e_2e_3 + e_4e_5) = e_2e_3 + e_4e_5 + x e_1$ avec

$x \in E_2 = \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$, considérons $g : E_2 \rightarrow E_2$ l'application linéaire dont la matrice est

$$B : \Lambda^2 g(e_2e_3 + e_4e_5) = e_2e_3 + e_4e_5$$

l'homomorphisme $\varphi : A' \rightarrow S_{p_4}(K)$ défini par $\varphi(f) = B$ est surjectif et de noyau isomorphe à K^4 , d'où le résultat, de la démonstration il ressort que la première suite exacte est canoniquement scindée. ■

Remarque 3.1.1 Dans le cas où $\dim E = 2k + 1$, on a un résultat analogue si

$$\omega = e_1(e_2e_3 + \dots + e_{2k}e_{2k+1})$$

et $A = \text{Aut}(\omega)$, on a :

$$1 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow K^* \rightarrow 1 \text{ et } 1 \rightarrow K^{2k} \rightarrow A' \rightarrow S_{p_{2k}}(K) \rightarrow 1$$

et en particulier si $K = F_q$

$$|A| = q^{k^2+2k}(q-1)\prod_{i=1}^k(q^{2i}-1)$$

3.2 Classification des trivecteurs en dimension 6

Dans tout ce paragraphe, K est un corps commutatif et $\omega \in \Lambda^3 E$ est de rang maximal $r(\omega) = \dim E = 6$, comme la dimension de E est paire $d_1(\omega) \neq 0$ et on a $d_1(\omega) \in \{3, 5\}$.

Lemme 3.2.1 *Si $d_1(\omega) = 3$, il existe une base $(e_i), 1 \leq i \leq 6$, de E telle que ω s'écrit :*

$$\omega_{6,1} = e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6 \quad \text{ou} \quad \omega_{6,2} = e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_5 + e_1 e_3 e_6$$

Lemme 3.2.2 *Tout trivecteur de rang 6 est 2-scindable.*

Proposition 3.2.1 *Les groupes d'automorphismes $\text{Aut}(\omega_{6,1})$ et $\text{Aut}(\omega_{6,2})$ vérifiant respectivement les suites exactes suivantes :*

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow SL_3(K) \times SL_3(K) \rightarrow \text{Aut } \omega_{6,1} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow K^8 \rightarrow \text{Aut } \omega_{6,2} \rightarrow GL_3(K) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

3.2.1 Commutant d'un trivecteur de rang inférieure ou égale à 6

On sait, que $C(\omega)$ est une K -algèbre commutative, produit direct fini d'anneaux locaux commutatifs on va expliciter $C(\omega)$ quand ω est un trivecteur de rang 6 :

si $\omega = \omega_{6,1} = e_1^* e_2^* e_3^* + e_4^* e_5^* e_6^*$, on a

$$\omega(e_1, e_2, e_3) = \omega(e_4, e_5, e_6) = 1 \quad \text{et} \quad \omega(e_i, e_j, e_k) = 0$$

dans les autres cas, si $f \in C(\omega)$, sa matrice dans la base $(e_i), 1 \leq i \leq 6$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A = \lambda I_3$ et $B = \alpha I_3$, $\lambda, \alpha \in K$; autrement dit $C(\omega) \simeq K \times K$.

Démonstration. Soit $f \in C(\omega)$ ■

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) & f(e_5) & f(e_6) \\ \lambda_2 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \mu_1 & \delta_1 \\ \lambda_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \mu_2 & \delta_2 \\ \lambda_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \mu_3 & \delta_3 \\ \lambda_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \alpha_4 & \mu_4 & \delta_4 \\ \lambda_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \alpha_5 & \mu_5 & \delta_5 \\ \lambda_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \alpha_6 & \mu_6 & \delta_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{on a } \omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)) \\
 &f(e_1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 \\
 &*\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6, e_2, e_3) = \lambda_1 \omega(e_1, e_2, e_3) + \\
 &\lambda_2 \omega(e_2, e_2, e_3) + \lambda_3 \omega(e_3, e_2, e_3) + \lambda_4 \omega(e_4, e_2, e_3) + \lambda_5 \omega(e_5, e_2, e_3) + \lambda_6 \omega(e_6, e_2, e_3) = \lambda_1 \\
 &= \beta_2 = \gamma_3. \\
 &*\omega(f(e_4), e_5, e_6) = \omega(e_4, f(e_5), e_6) = \omega(e_4, e_5, f(e_6)) \\
 &f(e_4) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 \\
 &*\omega(f(e_4), e_5, e_6) = \alpha_1 \omega(e_1, e_5, e_6) + \alpha_2 \omega(e_2, e_5, e_6) + \alpha_3 \omega(e_3, e_5, e_6) + \alpha_4 \omega(e_4, e_5, e_6) + \\
 &\alpha_5 \omega(e_5, e_5, e_6) + \alpha_6 \omega(e_6, e_5, e_6) = \alpha_4 = \mu_5 = \delta_6 \\
 &*\omega(f(e_1), e_1, e_2) = \omega(e_1, f(e_1), e_2) = \omega(e_1, e_1, f(e_2)) \\
 &f(e_1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 \\
 &*\omega(f(e_1), e_1, e_2) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_2) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_2) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_2) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_2) + \\
 &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_2) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_2) = \lambda_3 = -\lambda_3 = 0. \\
 &*\omega(f(e_1), e_1, e_3) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_3) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_3) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_3) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_3) + \\
 &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_3) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_3) = -\lambda_2 = 0. \\
 &*\omega(f(e_1), e_1, e_4) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_4) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_4) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_4) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_4) + \\
 &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_4) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_4) = 0. \\
 &*\omega(f(e_1), e_1, e_5) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_5) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_5) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_5) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_5) + \\
 &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_5) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_5) = 0. \\
 &*\omega(f(e_1), e_1, e_6) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_6) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_6) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_6) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_6) + \\
 &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_6) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_6) = 0. \\
 &*\omega(f(e_2), e_2, e_1) = \omega(e_2, f(e_2), e_1) = \omega(e_2, e_2, f(e_1)) \\
 &f(e_2) = \beta_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_2 e_3 + \beta_2 e_4 + \beta_2 e_5 + \beta_2 e_6 \\
 &*\omega(f(e_2), e_2, e_1) = \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_1) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_1) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_1) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_1) + \\
 &\beta_5 \omega(e_5, e_2, e_1) + \beta_6 \omega(e_6, e_2, e_1) = \beta_3 = -\beta_3 = 0. \\
 &*\omega(f(e_2), e_2, e_3) = \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_3) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_3) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_3) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_3) + \\
 &\beta_5 \omega(e_5, e_2, e_3) + \beta_6 \omega(e_6, e_2, e_3) = \beta_1 = 0. \\
 &*\omega(f(e_2), e_2, e_4) = \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_4) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_4) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_4) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_4) + \\
 &\beta_5 \omega(e_5, e_2, e_4) + \beta_6 \omega(e_6, e_2, e_4) = 0. \\
 &*\omega(f(e_2), e_2, e_5) = \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_5) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_5) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_5) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_5) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \beta_5 \omega(e_5, e_2, e_5) + \beta_6 \omega(e_6, e_2, e_5) = 0. \\
 & * \omega(f(e_2), e_2, e_6) = \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_6) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_6) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_6) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_6) + \\
 & \beta_5 \omega(e_5, e_2, e_6) + \beta_6 \omega(e_6, e_2, e_6) = 0. \\
 & * \omega(f(e_3), e_3, e_1) = \omega(e_3, f(e_3), e_1) = \omega(e_3, e_3, f(e_1)) \\
 & f(e_3) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5 + \gamma_6 e_6 \\
 & * \omega(f(e_3), e_3, e_1) = \gamma_1 \omega(e_1, e_3, e_1) + \gamma_2 \omega(e_2, e_3, e_1) + \gamma_3 \omega(e_3, e_3, e_1) + \gamma_4 \omega(e_4, e_3, e_1) + \\
 & \gamma_5 \omega(e_5, e_3, e_1) + \gamma_6 \omega(e_6, e_3, e_1) = \gamma_2 = -\gamma_2 = 0. \\
 & * \omega(f(e_3), e_3, e_2) = \gamma_1 \omega(e_1, e_3, e_2) + \gamma_2 \omega(e_2, e_3, e_2) + \gamma_3 \omega(e_3, e_3, e_2) + \gamma_4 \omega(e_4, e_3, e_2) + \\
 & \gamma_5 \omega(e_5, e_3, e_2) + \gamma_6 \omega(e_6, e_3, e_2) = \gamma_1 = 0. \\
 & * \omega(f(e_3), e_3, e_4) = \gamma_1 \omega(e_1, e_3, e_4) + \gamma_2 \omega(e_2, e_3, e_4) + \gamma_3 \omega(e_3, e_3, e_4) + \gamma_4 \omega(e_4, e_3, e_4) + \\
 & \gamma_5 \omega(e_5, e_3, e_4) + \gamma_6 \omega(e_6, e_3, e_4) = 0. \\
 & * \omega(f(e_3), e_3, e_5) = \gamma_1 \omega(e_1, e_3, e_5) + \gamma_2 \omega(e_2, e_3, e_5) + \gamma_3 \omega(e_3, e_3, e_5) + \gamma_4 \omega(e_4, e_3, e_5) + \\
 & \gamma_5 \omega(e_5, e_3, e_5) + \gamma_6 \omega(e_6, e_3, e_5) = 0. \\
 & * \omega(f(e_3), e_3, e_6) = \gamma_1 \omega(e_1, e_3, e_6) + \gamma_2 \omega(e_2, e_3, e_6) + \gamma_3 \omega(e_3, e_3, e_6) + \gamma_4 \omega(e_4, e_3, e_6) + \\
 & \gamma_5 \omega(e_5, e_3, e_6) + \gamma_6 \omega(e_6, e_3, e_6) = 0. \\
 & * \omega(f(e_4), e_4, e_1) = \omega(e_4, f(e_4), e_1) = \omega(e_4, e_4, f(e_1)) \\
 & f(e_4) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 \\
 & * \omega(f(e_4), e_4, e_1) = \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_1) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_1) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_1) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_1) + \\
 & \alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_1) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_1) = 0. \\
 & * \omega(f(e_4), e_4, e_2) = \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_2) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_2) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_2) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_2) + \\
 & \alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_2) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_2) = 0. \\
 & * \omega(f(e_4), e_4, e_3) = \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_3) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_3) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_3) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_3) + \\
 & \alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_3) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_3) = 0. \\
 & * \omega(f(e_4), e_4, e_5) = \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_5) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_5) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_5) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_5) + \\
 & \alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_5) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_5) = \alpha_6 = -\alpha_6 = 0. \\
 & * \omega(f(e_4), e_4, e_6) = \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_6) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_6) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_6) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_6) + \\
 & \alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_6) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_6) = -\alpha_5 = 0. \\
 & * \omega(f(e_5), e_5, e_1) = \omega(e_5, f(e_5), e_1) = \omega(e_5, e_5, f(e_1)) \\
 & f(e_5) = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_5 e_5 + \mu_6 e_6 \\
 & * \omega(f(e_5), e_5, e_1) = \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_1) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_1) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_1) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_1) +
 \end{aligned}$$

$$\mu_5\omega(e_5, e_5, e_1) + \mu_6\omega(e_6, e_5, e_1) = 0.$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_2) &= \mu_1\omega(e_1, e_5, e_2) + \mu_2\omega(e_2, e_5, e_2) + \mu_3\omega(e_3, e_5, e_2) + \mu_4\omega(e_4, e_5, e_2) + \\ \mu_5\omega(e_5, e_5, e_2) + \mu_6\omega(e_6, e_5, e_2) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_3) &= \mu_1\omega(e_1, e_5, e_3) + \mu_2\omega(e_2, e_5, e_3) + \mu_3\omega(e_3, e_5, e_3) + \mu_4\omega(e_4, e_5, e_3) + \\ \mu_5\omega(e_5, e_5, e_3) + \mu_6\omega(e_6, e_5, e_3) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_4) &= \mu_1\omega(e_1, e_5, e_4) + \mu_2\omega(e_2, e_5, e_4) + \mu_3\omega(e_3, e_5, e_4) + \mu_4\omega(e_4, e_5, e_4) + \\ \mu_5\omega(e_5, e_5, e_4) + \mu_6\omega(e_6, e_5, e_4) &= -\mu_6 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_6) &= \mu_1\omega(e_1, e_5, e_6) + \mu_2\omega(e_2, e_5, e_6) + \mu_3\omega(e_3, e_5, e_6) + \mu_4\omega(e_4, e_5, e_6) + \\ \mu_5\omega(e_5, e_5, e_6) + \mu_6\omega(e_6, e_5, e_6) &= \mu_4 = 0. \end{aligned}$$

$$* \omega(f(e_6), e_6, e_1) = \omega(e_6, f(e_6), e_1) = \omega(e_6, e_6, f(e_1))$$

$$f(e_6) = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 + \delta_5 e_5 + \delta_6 e_6$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_6), e_6, e_1) &= \delta_1\omega(e_1, e_6, e_1) + \delta_2\omega(e_2, e_6, e_1) + \delta_3\omega(e_3, e_6, e_1) + \delta_4\omega(e_4, e_6, e_1) + \\ \delta_5\omega(e_5, e_6, e_1) + \delta_6\omega(e_6, e_6, e_1) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_6), e_6, e_2) &= \delta_1\omega(e_1, e_6, e_2) + \delta_2\omega(e_2, e_6, e_2) + \delta_3\omega(e_3, e_6, e_2) + \delta_4\omega(e_4, e_6, e_2) + \\ \delta_5\omega(e_5, e_6, e_2) + \delta_6\omega(e_6, e_6, e_2) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_6), e_6, e_3) &= \delta_1\omega(e_1, e_6, e_3) + \delta_2\omega(e_2, e_6, e_3) + \delta_3\omega(e_3, e_6, e_3) + \delta_4\omega(e_4, e_6, e_3) + \\ \delta_5\omega(e_5, e_6, e_3) + \delta_6\omega(e_6, e_6, e_3) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_6), e_6, e_4) &= \delta_1\omega(e_1, e_6, e_4) + \delta_2\omega(e_2, e_6, e_4) + \delta_3\omega(e_3, e_6, e_4) + \delta_4\omega(e_4, e_6, e_4) + \\ \delta_5\omega(e_5, e_6, e_4) + \delta_6\omega(e_6, e_6, e_4) &= \delta_5 = -\delta_5 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_6), e_6, e_5) &= \delta_1\omega(e_1, e_6, e_5) + \delta_2\omega(e_2, e_6, e_5) + \delta_3\omega(e_3, e_6, e_5) + \delta_4\omega(e_4, e_6, e_5) + \\ \delta_5\omega(e_5, e_6, e_5) + \delta_6\omega(e_6, e_6, e_5) &= -\delta_4 = 0. \end{aligned}$$

Donc $C(\omega) \simeq K \times K$.

de même si $\omega = \omega_{6,2} = e_1^* e_2^* e_4^* + e_2^* e_3^* e_5^* + e_1^* e_3^* e_6^*$ alors

$$\omega(e_1, e_2, e_4) = \omega(e_2, e_3, e_5) = \omega(e_1, e_3, e_6) = 1 \quad \text{et} \quad \omega(e_i, e_j, e_k) = 0$$

dans les autres cas, si $f \in C(\omega)$, sa matrice dans la base (e_i) , $1 \leq i \leq 6$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

où $A = \lambda I_3$, $B = \alpha I_3$, et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda, \alpha \in K$, désignons par $\varepsilon: E \rightarrow E$ l'application linéaire définie par $\varepsilon(e_1) = e_5$, $\varepsilon(e_2) = -e_6$, $\varepsilon(e_3) = e_4$ et $\varepsilon(e_i) = 0$ si $i \in \{4, 5, 6\}$, alors

$$C(\omega) = K[\varepsilon] \text{ où } \varepsilon^2 = 0 :$$

si $\omega = \omega_{6,1,d}$ (ou $\omega_{6,2,d}$), on a $\omega(e_1, e_3, e_4) = \omega(e_1, e_5, e_6) = \omega(e_2, e_3, e_6) = 1$

$\omega(e_2, e_4, e_5) = -d$ et $\omega(e_i, e_j, e_k) = 0$ dans les autres cas si $f \in C(\omega)$ on a

$f = \lambda Id_E + \alpha D$ où $\lambda, \alpha \in K$ et $D: E \rightarrow E$ l'application linéaire définie par

$$D(e_2) = de_1, D(e_1) = e_2, D(e_3) = e_5, D(e_4) = de_6, D(e_5) = de_3$$

et $D(e_6) = e_4$ comme $D^2 = d Id_E$, on a $C(\omega) \simeq K(\sqrt{d})$, si $\omega = \omega_{6,1,a}$ on a

$$\omega(e_1, e_3, e_4) = \omega(e_2, e_3, e_6) = \omega(e_2, e_4, e_5) = \omega(e_2, e_5, e_6) = 1$$

$\omega(e_1, e_5, e_6) = a$ et $\omega(e_i, e_j, e_k) = 0$ dans les autres cas tout élément f de $C(\omega)$ s'écrit $\lambda Id_E + \alpha D'$ ou l'application linéaire $D': E \rightarrow E$ vérifie la relation $D'^2 + D' = a Id_E$, donc $C(\omega) \simeq K(\alpha)$ où $\alpha^2 + \alpha + a = 0$ d'où le.

Théorème 3.2.1 Soit $\omega \in \Lambda^3 E^*$ une forme trilinéaire alternée de rang 6 la K -algèbre $C(\omega)$ caractérise l'orbite de ω sous l'action du groupe linéaire $GL(E)$.

Résumé

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats déjà connus sur la classification des formes trilinéaires alternées de rang inférieure à 6 sur le corps $\mathbb{C}$.

Cette classification est interprétable, en générale pour d'écrire certaines classifications des courbes elliptiques.

Abstract :

In this memoir, we recall the main results already known on classification of alternating trilinear forms of lower rank 6 on the body $\mathbb{C}$.

This classification is interpretable in general to write some classifications of elliptic curves.

Bibliographie

- [1] N.Bourbaki , Algèbre, chapitres 1 à 3 , Hermann , Paris , 1970.
- [2] H.Busemann and D.E.Glassco , Irreducible sums of simple multivectors, Pacific Journal of Mathematics , 49 (1973) 13-32.
- [3] A.Cohen et A.Helminck , Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7 , Communications in Algebra 16(1) , 1988 , p.1-25.
- [4] D.Djokovic's , Classification of trivectors of an eight dimensional real vector space , Linear and multilinear Algebra , 13(3) , 1983 p.3-39
- [5] G.B.Gurevitch , Theory of algebraic invariants . P.Noordhof LTD , Groningen , the Netherland , 1964.
- [6] S.Lang , Algebra , second edition , Addisson-Wesley publishing company Inc California 1984.
- [7] L.Noui et Ph.Revoy, Formes multilinéaires alternées , Ann.Math.Blaise Pascal Vol 1 , n°2 , 1994 , p.43-69.
- [8] L.Noui , Trivecteurs de rang 8 sur un corps algébriquement clos ,C.R.Acad.Sci.Paris , t.324 , série i , Algèbre , 1997, p.611-614.
- [9] Ph.Revoy , Trivecteurs de rang 6 , in coll. Sur les formes quadratiques, Bulletin SMF , 59 , 1979 , p.141-155.
- [10] Ph.Revoy , Formes trilinéaires alternées de Rang 7 , Bul.Sc. Math.112 1988,p.357-368.