N° d’ordre :………………

République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l’**E**nseignement **S**upérieur et
de la **R**echerche **S**cientifique

Université de **M**’sila

Faculté des **S**ciences

Département de **P**hysique

MEMOIRE

Présenté pour l’obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

Bouziane Kamel

THEME

La barrière de potentiel dans le cadre du principe d’incertitude généralisé

Soutenue le : 25/06/2013

Devant le jury composé de :

M. Nekkab	**Prof**	**Univ. de M’sila**	**Président**
N. guesmia	**MAB**	**Univ. de M’sila**	**Rapporteur**
S. Nehaoua	**MAA**	**Univ. de M’sila**	**Examinateur**

Promotion Juin 2013

Remerciements

Je tiens à remercier et glorifier en premier

Dieu le tout-puissant pour nous avoir donné la force et la possibilité d'accomplir ce travail .

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur **N.Guesmia** pour ses encouragements, ses efforts, ses conseils, et ses orientations précieuses.

je remercie également **prof M .Nakkab** d'avoir accepté la présidence de jury ,et je remercie **S. Nehaoua** d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

Je remercie infiniment tous mes enseignants. et je tiens à avouer toute ma reconnaissance pour ceux qui ont contribué à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents qui m'ont aidé et soutenu tout au long de ma formation, c'est à vous je dis un grand merci pour tout ce que vous avez enduré pour réaliser ce que je suis maintenant.

pour toute ma famille : Said ,Djamal ,Abd elrachid ,Mourad, Fayçal .et sur tout Said et sa famille

Pour tous mes amis qui m'ont épaulé durant cette période

Pour tout ce que je m'aime.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION :

Le concept de longueur élémentaire n'est pas nouveau en physique. Il a été introduit en Particulier en relation avec le problème fondamental de la physique moderne, à savoir l'unification des interactions gravitationnelles et des interactions fortes, électromagnétiques et faibles. En effet, l'introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs quantiques fait apparaître des divergences qui rendent la théorie non normalisable. Plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce problème, notamment l'existence de Dimensions supplémentaires de l'espace-temps, ou l'existence d'une longueur minimale En dessous de laquelle la physique est inaccessible.

La mécanique quantique déformée est une version modifiée de l'algèbre de Heisenberg en ajoutant quelques corrections sur les commutateurs dues à une longueur dit longueur minimale. Ce formalisme a reçu une considérable attentions depuis quelques années par les physiciens comme Kampf et ses collaborateurs, L'existence de cette longueur est une implique par la théorie de gravitation et de la théorie des cordes, ces théories propose quelques corrections sur la relation d'incertitude de Heisenberg qui devient sous la forme $(\Delta X.\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}(1+\beta\Delta P^2+\cdots)$, ces corrections modifiées la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion qui devient : $[X,P] = i\hbar\left(1+\beta P^2+\cdots\right)$.

L'introduction de cette l'algèbre en mécanique quantique non relativiste peut-être une théorie qui permet d'absorber les divergences qui apparaissent dans la théorie quantique des champs.

L'objet de ce mémoire est l'étude de la diffusion des particules sur une barrière du potentiel à une dimension dans le cadre de la mécanique quantique déformée et nous allons étudier l'influence de cette algèbre sur le phénomène de la diffusion et prenons la barrière de potentiel comme un modèle de test.

Notre travail est réparti sur trois chapitres :

Dans le premier chapitre on fait un rappel sur quelques éléments principaux de la mécanique quantique ordinaire tel que le principe d'incertitude d'Heisenberg ,l'équation de Schrödinger celle de continuité …ensuite on exposera le formalisme de diffusion des particules en mécanique quantique ordinaire qui se base sur la résolution l'équation de Schrödinger et on se limite au cas unidimensionnel de la diffusion qui est basé sur le calcul des probabilités de transmission et réflexion prenons la barrière de potentiel comme un exemple détaillé. Le deuxième chapitre est consacrer au formalisme de la mécanique quantique déformées due à l'existence d'une longueur minimale et nous avons exposé le principe d'incertitude généralisé, qui se fond sur cette longueur, nous allons exposé les conséquences de cette algèbre déformée en effet produit scalaire, relation de fermeture, et bien sûr la nouvelle équation de Schrödinger et la nouvelle forme de l'équation de continuité avec un courant déformé.

Dans le troisième chapitre on exposera un calcul détaillé concernant la résolution de l'équation de Schrödinger déformée avec une barrière de potentiel on utilisera la version déformée du courant pour calculer le coefficient de réflexion R et de transmission T et on vérifiera la loi de concertation $R+T=1$ dans cette nouvelle algèbre, et on terminera par une conclusion.

CHAPITRE 1 :

FORMALISME DE DIFFUSION DES PARTICULER DANS LE CADRE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE ORDINAIRE

1.1.L'espace de Hilbert :

L'espace de Hilbert est un espace de fonctions de carres sommables car $\int |\psi|^2 \, d^3r$ est toujours une quantité finie et égale à l'unité puisqu'elle représente la probabilité totale de trouver la particule dans l'espace. Cet espace qu'on note $\mathcal{L}^2$ est un espace de **Hilbert** et est de dimension infinie, car une fonction est déterminée par une infinité de coordonnées qui sont les valeurs prises par cette fonction pour les diverses valeurs de la variable .tout fois, d'un point de vue physique $\mathcal{L}^2$ est trop vaste car les fonctions d'onde doivent être non seulement par tout définies continues et indéfiniment dérivables mais surtout à support borne pour que la particule se trouve dans une région finie de l'espace .on se limitera donc à l'espace $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ qui contient de pareilles fonctions et qui est un sous –espace de l'espace$\mathcal{L}^2$ de **Hilbert.[1]**

1.2.Structure de l'espace Hilbert $\boldsymbol{\mathcal{H}}$

1.2.1. Définition :

$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ Est un espace vectoriel formé des fonctions de carré sommable. Ainsi les fonctions $\Psi_1(x)$ $et\ \Psi_2(x)$ appartiennent a $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ et si $\lambda_1$et λ_2 sont deux nombres complexes quelconques alors la fonction $\Psi(x)$ donnée par**[2]** :

$$\Psi(x) = \lambda_1\Psi_1(x) + \lambda_2\Psi_2(x) \tag{1.1}$$

Pour montrer que $\Psi(x)$ est de carré sommable développons $|\Psi(x)|^2$:

$$|\Psi(x)|^2 = |\lambda_1|^2|\Psi_1(x)|^2 + |\lambda_2|^2|\Psi_2(x)|^2 + \lambda_1{}^*\lambda_2\Psi_1{}^*(x)\Psi_2(x) + \lambda_1\lambda_2{}^*\Psi_1(x)\Psi_2{}^*(x)$$

D'après l'inégalité de Schwarz on a :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(\Psi_1 + \Psi_2)dx\right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi_1|^2dx} + \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi_2|^2dx} \tag{1.2}$$

Donc$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x)|^2dx$ qui est inférieure à une intégrale convergente, est elle-même convergente alors $\Psi(x)$ est une fonction de carré sommable et appartient a $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

1.2.2. Produit scalaire :

On définit le produit scalaire dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ d'une fonction $\varphi(x)$ par une fonction$\Psi(x)$par le nombre complexe noté $\langle\varphi|\psi\rangle$ et valant**[2]** :

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\psi(x)\, dx \tag{1.3}$$

Les propriétés de ce produit scalaire sont :

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle \tag{1.4}$$

$$\langle\varphi|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2\rangle = \lambda_1\langle\varphi|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle\varphi|\psi_2\rangle \tag{1.5}$$

$$\langle\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2|\psi\rangle = {\lambda_1}^*\langle\varphi_1|\psi\rangle + {\lambda_2}^*\langle\varphi_2|\psi\rangle \tag{1.6}$$

1.2.3.Algèbre des opérateurs linéaires

a. Définition :

Un opérateur linéaire A fait correspondre à tout ket $|\Psi\rangle$ appartenant $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ à un autre ket $|\Psi'\rangle$ la correspondance étant linéaire **[1]** :

$$|\Psi'\rangle = A|\Psi\rangle$$

$$A(\lambda_1|\Psi_1\rangle + \lambda_2|\Psi_2\rangle) = \lambda_1 A|\Psi_1\rangle + \lambda_2 A|\Psi_2\rangle \tag{1.8}$$

Exemples :

Opérateur x : $\Psi(x) \longrightarrow x\,\Psi(x)$

Opérateur p : $\Psi(x) \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)$

L'action de chacun de ces opérateurs étant définie dans la représentation$\{x\}$.

b. Produit de deux opérateurs –commutateur

Le produit de deux opérateurs linéaires A et B Noté AB est défini de la façon suivante :

$$(AB)|\Psi\rangle = A(B|\Psi\rangle) \tag{1.9}$$

En général, le produit AB est différent du produit BA.

On définit le commutateur de A et B qu'on note $[A, B]$ par l'opérateur :

$$[A, B] = AB - BA \tag{1.10}$$

Si $[A, B] = 0$, on dit que les deux opérateurs commutent

Exemple : commutateur $[x, p]$

Dans la représentation$\{x\}$ on a :

$$xp\Psi = x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi = \frac{\hbar}{i}x\frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

$$px\,\Psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(x\,\Psi) = \frac{\hbar}{i}x\frac{\partial}{\partial x}\Psi + \frac{\hbar}{i}\Psi$$

$$(xp - px)\,\Psi = -\frac{\hbar}{i}\Psi = i\hbar\Psi$$

Ψ Étant quelconque, on aura :

$$[x, p] = i\hbar \tag{1.11}$$

Par contre, on vérifier facilement que les commutateurs suivants sont nuls :

$$[x, p_y] = [x, p_z] = 0$$

Nous avons donc :

$$[x, p_x] = i\hbar \tag{1.12}$$

$$[x, p_y] = 0 \tag{1.13}$$

$$[x, p_z] = 0 \tag{1.14}$$

On dit que :

- les opérateurs x et $p_x$ne commutent pas,
- les opérateurs x et p_y et (x et p_z) commutent,
- la valeur $[x, p_x]$ vaut le double du minimum de $\Delta x\,.\Delta p_x$

1.3.Principe d'incertitude de Heisenberg :

Considérons un système physique dans l'état $|\Psi\rangle$ et deux observables A et B qui ne commutent pas ($[A, B] \neq 0$).

On la variance du système **[3]** : $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle$ et $(\Delta B)^2 = \langle (B - \langle B\rangle)^2\rangle$

Avec :
$$\begin{cases}(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\\ (\Delta B)^2 = \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2\end{cases} \tag{1.15}$$

Introduisons les opérateurs A'et B' définis par :

$$A' = A - \langle A\rangle \quad et \quad B' = B - \langle B\rangle \tag{1.16}$$

A'et B' représentent l'écart des opérateurs A et B par rapport à leur valeur Moyenne. Comme $\langle A\rangle$ et $\langle B\rangle$ sont des scalaires on a : $[A',B'] = [A, B]$

Considérons le vecteur $|\Psi'\rangle$ transformé de$|\Psi\rangle$ par l'application de L'opération $\lambda A' + iB'$ou λ est un paramètre réel quelconque :

$$|\Psi'\rangle = (\lambda A' + iB')|\Psi\rangle \tag{1.17}$$

On a:

$$\langle\Psi'|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\,(\lambda A' - iB')(\lambda A' + iB')|\Psi\rangle \tag{1.18}$$

$$= \langle A'^2\rangle\,\lambda^2 + i[\mathrm{A}',\mathrm{B}']\,\lambda + \langle B'^2\rangle$$

$\langle\Psi'|\Psi'\rangle$ Étant une quantité positive, le polynôme du second degré en λ Doit être toujours positif ou nul .Pour qu'il soit toujours ainsi quelque .Soit λ il faut que discriminant soit négatif, c'est-à-dire :

$$(i\langle[A',B']\rangle)^2 - 4\langle A'^2\rangle\langle B'^2\rangle \leq 0 \tag{1.19}$$

Soit :

$$\langle A'^2\rangle\langle B'^2\rangle \geq \frac{1}{4}\,(i\langle[A',B']\rangle)^2 \tag{1.20}$$

Ou encore :

$$\Delta A\,.\,\Delta B \geq \frac{1}{2}\,|\langle[A',B']\rangle| \tag{1.21}$$

On appliquant cette inégalité aux composantes des observables $\vec{r}$ et $\vec{p}$ qui sont telles que :

$$[x,p_x] = [y,p_y] = [z,p_z] = i\hbar \tag{1.22}$$

On obtient :

$$\Delta x\,.\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.23}$$

$$\Delta y\,.\,\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.24}$$

$$\Delta z\,.\,\Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.25}$$

Ces inégalités définies ce qu'on appelle le principe d'incertitude d'Heisenberg.

1.4. L'équation de Schrödinger :

Cette équation a fait rêver ou cauchemarder des générations d'étudiants qui abordaient la physique quantique. Sa forme est assez simple mais ses applications sont fondamentales, et sa compréhension et son importance sont dans le but de la maîtrise la physique quantique.

1.4.1.Présentation de L'équation de Schrödinger :

En considère une particule de masse m se déplacent dans un potentiel $V(r)$ indépendant du temps et ou se propose de déterminer sa fonction d'onde $\Psi(r.t)$. L'équation de Schrödinger s'écrite**[3]** :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(r)\right)\Psi(r.t)=i\hbar\frac{d\Psi(r.t)}{dt} \tag{1.24}$$

Où

- $\hbar=\frac{h}{2\pi}=1{,}05457.10^{-34}$ Js,
- Δ est l'opérateur de Laplace.
- m est la masse de la particule.
- $V(r)$ L'énergie potentielle de la particule au point r.

1.4.2. Résolution de l'équation Schrödinger a une dimension :

les variables r et t sont séparées dans les deux nombre on peut de façon générale chercher des solutions de la forme d'un produit d'une fonction d'espace $\varphi(r)$et d'un fonction dépendant du temps $\chi(t)$ soit **[3]** :

$$\Psi(r.t)=\varphi(r)\chi(t) \tag{1.25}$$

En portant cette expression dans l'équation Schrödinger il vient :

$$i\hbar\varphi\frac{d\chi}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}\chi\Delta\varphi+V\varphi\chi$$

Donc :

$$\frac{i\hbar}{\chi}\frac{d\chi}{dt}=\frac{(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V)\varphi}{\varphi}$$

$$i\hbar\frac{d\chi}{\chi}=\mathrm{E}\,dt \tag{1.26}$$

Alors : $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V\right)\varphi$ =E φ

L'équation (1.26) se résoudre simplement

$$\chi(\mathrm{t}) = \chi(0)e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \qquad (1.27)$$

Donc la solution de équation Schrödinger est :

$$\Psi(r.t) = \varphi(r)e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \qquad (1.28)$$

La densité de probabilité de présence est indépendante du temps $|\Psi(r.t)|^2 = |\varphi(r)|^2$. Les états stationnaires ou l'énergie est constante on les obtient en résolvant l'équation (1.24) qui s'écrit aussi sons la forme :

$$H\varphi = \varphi E \qquad (1.29)$$

Où H est l'operateur Hamiltonian $\qquad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V \qquad (1.30)$

Et φ est tel que $\qquad \iint|\varphi(r)|^2\, d^3r = 1 \qquad (1.31)$

L'équation (1-29) est appelée équation aux valeurs propres avec l'énergie E ,$\varphi(r)$ sont les fonction propres correspondantes aux valeurs propres.

1.5. Densité de courant et équation de continuité :

Considérons une particule dont l'état est décrit par$|\Psi(t)\rangle$**.**

D'après la relation $\int|\psi(\vec{r},t)|^2\, d^3r = 1$

Ou

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = \rho(\vec{r}.t)$$

On a:

$$\int\rho(\vec{r}.t)\, d^3r = 1 \qquad (1.32)$$

$\rho(\vec{r}.t)$ est la densité de probabilité et la probabilité $dP(\vec{r}.t)$ de trouver la particule à l'instant t dans le volume élémentaire d^3r situé au point $\vec{r}$ est :

$$dP(\vec{r}.t) = \rho(\vec{r}.t)d^3r \qquad (1.33)$$

La relation (1.32) exprime la conservation globale de la probabilité ,il doit donc lui correspondre une équation de conservation locale pour la densité de probabilité.

Cette situation se rencontre dans de nombreux domaines de la physique ou à la loi de conservation globale d' une grandeur physique corresponde à une loi de conservation locale pour sa densité .C'est le cas par exemple de la conservation totale de la charge électrique à laquelle correspondre locale de la densité de charge**[1]** qui s' exprime par :

$$div\,\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t)+\frac{\partial\rho(\vec{r}.t)}{dt}=0 \tag{1.34}$$

Ou $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t)$ est le vecteur densité de courant et $\rho(\vec{r}.t)$ la densité volumique de charges. On va montrer qu' on peut définir un vecteur $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t)$ appelé courant de probabilité qui satisfait une équation locale .pour ce fait écrivons en représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$ l'équation de Schrödinger et son complexe conjugué pour une particule plongée dans un potentiel $V(\vec{r}.t)$. On a alors :

$$\begin{cases}-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi(\vec{r}.t)+V(\vec{r}.t)\Psi(\vec{r}.t)=\ i\hbar\frac{d\Psi(\vec{r}.t)}{dt}\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi^*(\vec{r}.t)+V(\vec{r}.t)\Psi^*(\vec{r}.t)=\ -i\hbar\frac{d\Psi^*(\vec{r}.t)}{dt}\end{cases} \tag{1.35}$$

En multipliant la première équation par $\Psi^*(\vec{r}.t)$ et la deuxième par $\Psi(\vec{r}.t)$ et en faisant la différence il vient :

$$i\hbar\frac{\partial}{dt}[\Psi(\vec{r},t)\Psi^*(\vec{r},t)]=-\frac{\hbar^2}{2m}[\Psi^*(\vec{r},t)\triangle\Psi(\vec{r},t)-\Psi(\vec{r},t)\triangle\Psi^*(\vec{r},t)]$$

Soit encore :

$$\frac{\partial}{dt}\rho(\vec{r}.t)+\frac{\hbar}{2im}[\Psi^*(\vec{r},t)\triangle\Psi(\vec{r},t)-\Psi(\vec{r},t)\triangle\Psi^*(\vec{r},t)]=0$$

En comparant avec (1.34) on en déduit que :

$$div\,\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t)=\frac{\hbar}{2im}[\Psi^*(\vec{r},t)\triangle\Psi(\vec{r},t)-\Psi(\vec{r},t)\triangle\Psi^*(\vec{r},t)] \tag{1.36}$$

Ou $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t)$ peut être interprété comme un courant l'expression entre crochet dans le second nombre de (1.36) peut écrire :

$$\Psi^*\triangle\Psi-\Psi\triangle\Psi^*=\nabla(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)$$

Donc :

$$div\,\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t)=\frac{\hbar}{2im}div\,[\Psi^*(\vec{r},t)\nabla\Psi(\vec{r},t)-\Psi(\vec{r},t)\nabla\Psi^*(\vec{r},t)]$$

Soit pour le courant $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t)$:

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2im}\left[\Psi^*(\vec{r},t)\nabla\Psi(\vec{r},t) - \Psi(\vec{r},t)\nabla\Psi^*(\vec{r},t)\right] \tag{1.37}$$

Et on a :

$$\Psi(\vec{r},t) = \varphi(r)e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

Donc :

$$\mathcal{J} = \frac{\hbar}{2mi}(\varphi^*\nabla\varphi - \varphi\nabla\varphi^*) \tag{1.38}$$

1.6. La diffusion a une dimension d'une particule :

Considérons le modèle unidimensionnel, ou une particule incident, auquel est associée une onde Ψ, rencontre une barrière de potentiel d'une hauteur V_0 et d'une largeur a (figure 1). Dans le cadre de la théorie quantique, les solutions de l'équation Schrödinger pour chaque région correspondent à deux ondes progressives à gauche et à droite de la barrière, et une onde évanescente à l'intérieur de la barrière.

L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit :

$$H\,\varphi(x) = E\varphi(x)$$

H est l' Hamiltenie, qui prend la forme :$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$

D'où

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - (E - V(x))\right]\varphi(x) = 0$$

1.7. La Barrière de potentiel :

La barrière du potentiel est définie par

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 > x \\ V_0 & 0 \le x \le a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

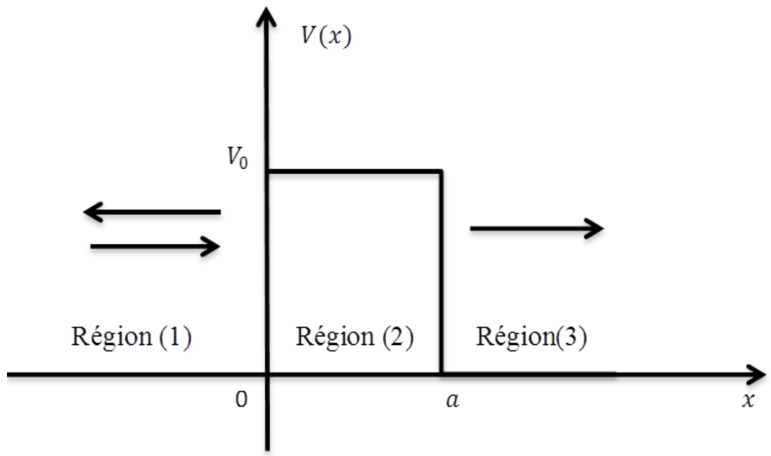

Figure 1 : la barrière de potentiel unidimensionnel

L'équation de Schrödinger indépendante de temps : $H\,\varphi(x) = E\varphi(x)$

Dans la région (1) et (3), l'énergie potentielle est nulle : $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Dans la région (2) l'énergie potentielle est égale à V_0 : $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0$

On obtient les équations indépendantes de temps :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = E\varphi_1 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + V_0\varphi_2 = E\varphi_2 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2} = E\varphi_3 \end{cases} \tag{1.38}$$

Soit encore, compte tenu des définitions :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + {k_0}^2 \varphi_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - k^2 \varphi_2 = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + {k_0}^2 \varphi_3 = 0 \end{cases} \tag{1.39}$$

Avec : ${k_0}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \qquad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$ (1.40)

1.7.1.Cas ou E$< V_0$: effet tunnel

a. Historique :

l'effet tunnel est l'une des conséquences les plus spectaculaires de la mécanique quantique introduite dans les années 1920 essentiellement par Heisenberg , Dirac , Bohr , de Broglie , Born ,et Schrödinger .

L'origine de cet effet provient de ce qu'on appelait la dualité onde –corpuscule. a toutes ondes on peut associer des particules par exemple, la lumière peut se décrire comme des onde électromagnétique ou se comporter comme un flux de photons, et inversement toute particule matérielle peut avoir des comportements relevant du domaine des ondes.

b. Principe de l'effet tunnel :

En mécanique classique, une particule rencontrant une barrière de potentiel, ne peut la traverser s'il possède une énergie E inférieure à celle de la barrière. Dans une approche quantique, la fonction d'onde φ associée à l' particule n'est pas nulle à l'intérieur et au bord de la barrière de potentiel (figeure2). Dans ces conditions, les particules ont la possibilité de franchir la barrière de potentiel lorsque la largeur de celle-ci n'est pas trop grande. Ce phénomène, purement quantique, porte le nom ≪ **effet tunnel** ≫.

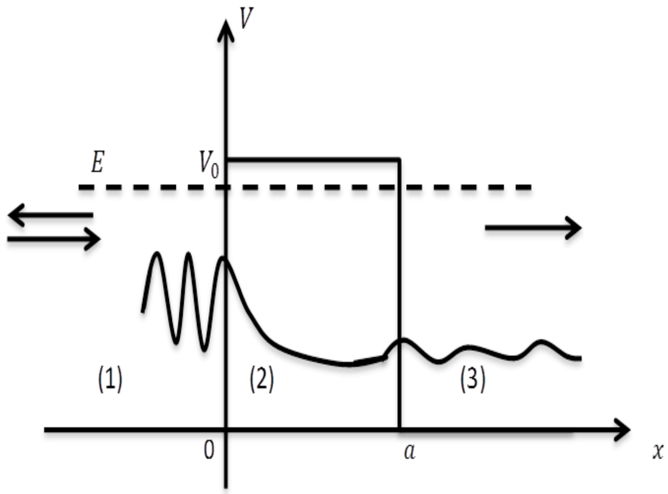

Figure 2 : barrière de potentiel ($E < V_0$)

c. Traversée de la barrière :

La barrière de potentiel est infranchissable pour la particule classique qui est toujours réfléchie dans la région (1).
En écrivant l'équation de Schrödinger dans les trios région (1), (2) et (3) on montre facilement que les fonctions d'onde de la particule dans ces régions s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x} \\ \varphi_2(x) = Ce^{kx} + De^{-kx} \\ \varphi_3(x) = Ee^{ik_0x} + Fe^{-ik_0x} \end{cases} \tag{1.41}$$

k_0 et k ont leur signification précédente et F doit être nul car toute réflexion à l' infini est impossible. Les conditions de continuité en ($x = 0$ et $x = a$) sont :

$$x = 0 \begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \end{cases} \tag{1.42}$$

$$x = a \begin{cases} \varphi_2(a) = \varphi_3(a) \\ \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right|_{x=a} \end{cases} \tag{1.43}$$

Donc :

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ ik_0(A - B) = k_0(C - D) \\ Ce^{ka} + De^{-ka} = Ee^{ik_0 a} \\ k\left(Ce^{ka} - De^{-ka}\right) = ik_0 Ee^{ik_0 a} \end{cases} \tag{1.44}$$

On exprime les amplitudes *B* et *E* et *C* et *D* en fonction de l'amplitude de l'onde incidente *A*.

$$B = \left[\frac{\left(1+\frac{k}{ik_0}\right)\left(1-\frac{k}{ik_0}\right)(1-e^{2ka})}{\left(1+\frac{k}{ik_0}\right)^2 - \left(1-\frac{k}{ik_0}\right)^2 e^{2ka}}\right] A \tag{1.45}$$

$$C = \left[\frac{2\left(1+\frac{k}{ik_0}\right)}{\left(1+\frac{k}{ik_0}\right)^2 - \left(1-\frac{k}{ik_0}\right)^2 e^{2ka}}\right] A \tag{1.46}$$

$$D = \left[-\frac{2\left(1-\frac{k}{ik_0}\right)(e^{2ka})}{\left(1+\frac{k}{ik_0}\right)^2 - \left(1-\frac{k}{ik_0}\right)^2 e^{2ka}}\right] A \tag{1.47}$$

$$E = \left[\frac{4k}{ik_0}\frac{e^{(k-ik_0)a}}{\left(1+\frac{k}{ik_0}\right)^2 - \left(1-\frac{k}{ik_0}\right)^2 e^{2ka}}\right] A \tag{1.48}$$

Le courant s'écrit :

$$\mathcal{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}\right) \tag{1.49}$$

On obtient, pour les régions (1) et (3) :

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\hbar k_0}{m}\left[|A|^2 - |B|^2\right] \tag{1.50}$$

$$\mathcal{J}_3 = \frac{\hbar k_0}{m}|E|^2 \tag{1.51}$$

Avec les définitions suivantes :

$$\mathcal{J}_1\ incident = \frac{\hbar k_0}{m}|A|^2 \tag{1.52}$$

$$\mathcal{J}_1\ réfléchi = -\frac{\hbar k_0}{m}|B|^2 \tag{1.53}$$

$$\mathcal{J}_3\ transmis = \frac{\hbar k_0}{m}|E|^2 \tag{1.54}$$

On déduire directement les coefficients de réflexion R et de transmission T.

$$R=\left|\frac{\mathcal{J}\ réfléchi}{\mathcal{J}\ incident}\right| \tag{1.55}$$

$$T=\left|\frac{\mathcal{J}\ transmis}{\mathcal{J}\ incident}\right| \tag{1.56}$$

Donc

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\left(k_0^2+k^2\right)^2 sh^2(ka)}{4k_0^2k^2+\left(k_0^2+k^2\right)^2 sh^2(ka)} \tag{1.57}$$

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{4k_0^2k^2}{4k_0^2k^2+\left(k_0^2+k^2\right)^2 sh^2(ka)} \tag{1.58}$$

Avec :

$$sh(ka) = \left(\frac{e^{ka}+\ e^{-ka}}{2}\right)$$

$$R+T = \frac{\left(k_0^2+k^2\right)^2 sh^2(ka)}{4k_0^2k^2+\left(k_0^2+k^2\right)^2 sh^2(ka)} + \frac{4k_0^2k^2}{4k_0^2k^2+\left(k_0^2+k^2\right)^2 sh^2(ka)} = \frac{4k_0^2k^2+\left(k_0^2+k^2\right)^2 sh^2(ka)}{4k_0^2k^2+\left(k_0^2+k^2\right)^2 sh^2(ka)} = 1$$

Donc :

$$R+T=1 \tag{1.59}$$

Dans le cas ou $ka \gg 1,$ on a :

$$T= \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\,e^{-2ka} \tag{1.60}$$

La particule a une probabilité non nulle de franchir la barrière de potentiel : la fonction d'onde dans la région (2) n'est pas nulle, mais a le comportement d'une "onde évanescente "de portée $1/k$. Lorsque a $\leq 1/k$, la particule a une probabilité importante de traverser la barrière par "effet tunnel". Cet effet a en physique de nombreuses applications : inversion de la molécule d'ammoniac, diode tunnel, microscopie à effet tunnel, désintégration α de certains noyaux, fission nucléaire spontanée.

1.7.2.Cas ou $E > V_0$: Transfert résonnant

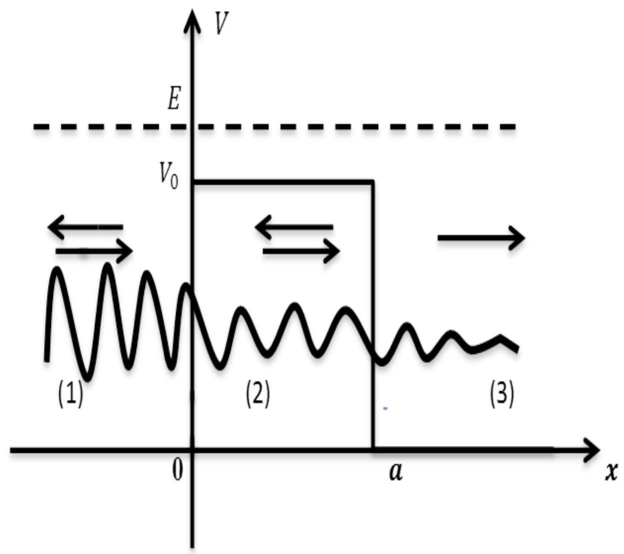

Figure 3 : barrière de potentiel ($E > V_0$)

Dans ce cas, on a toujours on mécanique classique une transmission de la particule avec un ralentissement dans la région centrale. quantiquement On trouve dans les trois régions (1)($x < 0$), (2) ($0 < x < a$) et (3) ($x > a$) :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x} \\ \varphi_2(x) = Ce^{ik_1x} + De^{-ik_1x} \\ \varphi_3(x) = Ee^{ik_0x} + Fe^{-ik_0x} \end{cases} \tag{1.61}$$

Avec : $k^2{}_1 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$

Prenons F= 0 (particule incidente venant de $x= -\infty$) dans Les conditions de raccordement en $x= a$ et $x= 0$ donnent alors B et E et C et D en fonction de A

En remplace k par ik_1 dans les expressions (1.57) et (1.58) de R et T, on obtient :

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k_0^2 - k_1^2)\, sin^2(k_1 a)}{4k_0^2k_1^2 + (k_0^2 - k_1^2)^2\, sin^2(k_1 a)} \tag{1-.62}$$

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{4k_0^2k_1^2}{4k_0^2k_1^2 + (k_0^2 - k_1^2)^2\, sin^2(k_1 a)} \tag{1.63}$$

Avec : $\sin(k_1 a) = \frac{e^{ik_1a} - e^{-ik_1a}}{2i}$

On vérifie facilement que $R + T = 1$.

En remplaçons k_0 et $k_1$par leur valeur il vient :

$$T = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0)+V_0^2\sin^2\left[\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}\ a\right]}$$

T'oscille de manière périodique entre sa valeur minimale $T = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}}$ et sa valeur maximale qui est la fonction ainsi obtenue est l'analogue de celle qui décrit la transmission d'un interféromètre de Pérot-Fabry ;comme en optique, les résonances (obtenues lorsque T =1, c'est-à-dire $2\,k\,a = n\,\pi$) correspondent aux valeurs de a qui sont des multiples entiers de la demi longueur d'onde de la particule dans la région (2). Lorsque $E > V_0$, la réflexion de la particule sur chacune des discontinuités de potentiel se fait sans déphasage de la fonction d'onde ; c'est pourquoi la condition de résonance $2\,k\,a = n\,\pi$ correspond aux valeurs de a pour les quelles il peut s'établir dans la région (2) un système d'ondes stationnaires.

Au contraire, loin des résonances, les diverses ondes réfléchies en $x = 0$ et $x = a$ se détruisent par interférence, de sorte que les valeurs de la fonction d'onde sont faibles.

CHAPITRE 2 :

LA MECANIQUE QUANTIQUE AVEC UNE LONGUEUR MINIMALE

2.1.Introduction :

L'introduction de la longueur minimale est en relation avec le problème de l'unification des interactions, en effet la gravitation devrait mener à une coupure à la limite de l'ultraviolet étant donné que la résolution de l'espace jusqu'aux très petites distances nécessite une très haute énergie. Par conséquent, la structure de l'espace-temps va être perturbée par les effets gravitationnels, et une limite inférieure de résolution de l'espace devient inévitable.

Cette longueur minimale est supposée être proche de la longueur de Planck ($l_p \approx 10^{-35}m$). Le concept de longueur élémentaire est aussi apparu dans le contexte de la théorie des cordes, candidate à l'unification des interactions fondamentales. Dans cette théorie, une échelle minimale est naturelle puisque les particules, qui sont considérées comme des cordes, ne peuvent pas résoudre des distances plus petites que la dimension de la corde. Si l'énergie de la corde atteint une certaine échelle M_s, des excitations de la corde peuvent survenir et auront comme effet l'élargissement de l'extension spatiale de la corde. En particulier, la théorie de diffusion des cordes à haute énergie montre que l'extension de la corde s'accroît proportionnellement à son énergie à chaque ordre de la théorie des perturbations ,De ce fait, une longueur élémentaire, au-dessous de laquelle la résolution de l'espace est impossible, est nécessaire dans cette théorie. L'introduction de cette longueur élémentaire est équivalente à une incertitude supplémentaire sur la mesure de la position, de sorte que l'incertitude minimale ne peut jamais être nulle.

2.2.Longueur minimale :

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, l'hypothèse de l'existence d'une longueur élémentaire a été faite, depuis longtemps en physique, Dans ce contexte, des études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg qui impliquent une incertitude minimale non nulle $(\Delta x)_{min}$sur la position correspondant à cette longueur élémentaire. Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du Caractère de l'espace-temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck l_p= 10^{-35}m, ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires En effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base en mécanique quantique ;l'une des conséquences fondamentales, qui en découle est des particules localisable à des énergies suffisamment grandes, la position d'une particule peut être mesurée avec une incertitude arbitrairement petite. Ceci est traduit par la relation d'incertitude de Heisenberg habituelle En fait, cette description est idéaliste ; une relation d'incertitude généralisée, menant à une incertitude minimale non nulle, serait plus proche de la réalité physique. C'est ce dernier point qui a poussé les physiciens ces dernières années à s'intéresser à cette notion de longueur élémentaire en essayant de l'introduire dans le traitement des problèmes physiques, en mécanique quantique, via des corrections aux relations de commutation canoniques. Le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée a été étudié par Kempff et ses collaborateurs.

2.3 .Principe d'incertitude généralisé :

Dans la littérature, il existe plusieurs théories introduisant le concept de longueur minimale, notamment les théories avec un principe d'incertitude généralisé, avec une relativité restreinte déformée et Pour montrer comment incorporer la notion de la longueur élémentaire (minimale) $l_m$en mécanique quantique Dans ce contexte, on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion p de la particule, le vecteur d'onde k ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de $1/l_m$, En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire, ($\vec{p}=\hbar\vec{k}$) lorsque p approche l'échelle $(\hbar/l_m)$.

Ceci s'interprète physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde $(2\pi/k)$ arbitrairement petites, et que des échelles des distances arbitrairement petites Dans un but de simplicité, raisonnons à une seule dimension. Pour tenir compte de ce postulat, on suppose une relation $p = f(k)$ entre k et p. Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité, et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre $(1/l_m)$ lorsque p tend vers l'infini. On suppose aussi que $f(k)$ est bien définie, Plusieurs formes de la fonction f peuvent être trouvées : par exemple**[4]** le choix de Hossenfelder

$$p = \frac{\hbar}{l_m}\tan(l_m k) \tag{2.1}$$

En utilisant le développement :

$$\tan(n) = \left(n + \frac{n^3}{3} + \cdots\right)$$

Au deuxième ordre en l_m, p s'écrit :

$$p = \hbar\left(k + \frac{l_m^2}{3}k^3 + \cdots\right) \tag{2.2}$$

Supposant que le commutateur entre Xet Pgarde la forme standard, c'est-à-dire $[X\ ,P]$=$i\delta_{ij}$, et utilisant la relation générale :

$$[X, A(k)] = i\frac{\partial A}{\partial k} \tag{2.3}$$

On obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée

$$[X, P(k)] = i\frac{\partial P}{\partial k}$$

$$= i\frac{\partial}{\partial k}\ \hbar\left(k + \frac{l_m^2}{3}k^3 + \cdots\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\left(k + \frac{l_m^2}{3}k^3 + \cdots\right)$$

Donc :

$$i\frac{\partial P}{\partial k} = i\hbar(1 + l_m^2k^2 + \cdots)$$

Or, on a:

$$l_m^2k^2 \sim \frac{l_m^2P^2}{\partial k} + O(l_m^4)$$

On trouve :

$$[X, P(k)] = i\hbar\left(1 + (\frac{l_m}{\hbar})^2P^2 + \cdots\right)$$

En introduisant un paramètre β, relié à la longueur minimale par :

$$\beta = (\frac{l_m}{\hbar})^2 \qquad \text{Soit} \qquad l_m = \hbar\sqrt{\beta}$$

On aboutit à la relation de commutation suivante :

$$[X, P] = \ i\hbar(1 + \beta P^2 + \cdots) \tag{2.4}$$

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude**[5]** :

$$\Delta A\ .\Delta B \geq \frac{1}{2}\ |\langle[A, B]\rangle|$$

$$\Delta X\ .\Delta P \geq \frac{1}{2}\ |\langle[X, P]\rangle|$$

Au premier ordre du paramètre β, la relation d'incertitude modifiée aura la forme Suivante :

$$\Delta X\,.\,\Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1+\beta\langle P^2\rangle)$$

Et la relation de quadratique moyen set :$(\Delta P)^2 = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2$

Donc la relation d'incertitude écrit par la forme Suivante :

$$\Delta X\,.\,\Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1+\beta(\Delta P)^2 + \beta\langle P\rangle^2) \qquad (2.5)$$

β set un paramètre positif.

La relation d'incertitude (2.5) implique une incertitude minimale non nulle sur la position ; elle a été étudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs **[6, 7, 8].** Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement sur la référence **[6],** pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

2.4. Représentation théorique

On a la relation d'incertitude modifiée :

$$\Delta X\,.\,\Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1+\beta(\Delta P)^2 + \beta\langle P\rangle^2) \qquad (2.6)$$

On pose $\beta\langle P\rangle^2 = \gamma$ (γ dépend de la valeur moyenne de l'impulsion) .

Le paramètre βest relié à la longueur élémentaire à travers la relation $l_m = \hbar\sqrt{\beta}$, Donc la relation d'incertitude modifiée (2.5) s'écrit par la forme suivante :

$$\Delta X\,.\,\Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1+\beta(\Delta P)^2 + \gamma) \qquad (2.7)$$

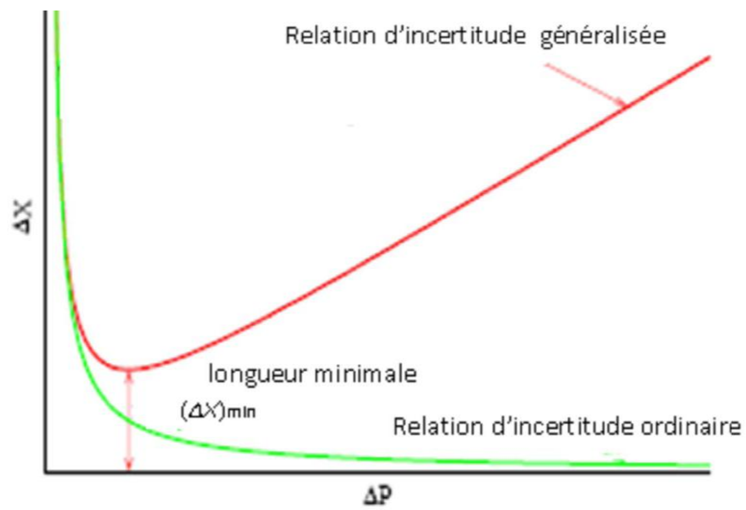

Figure 2.1 : La relation d'incertitude généralisée, impliquant une 'longueur minimale'$(\Delta X)_{\min}$ >0

Dans la mécanique quantique ordinaire ($\beta = \gamma = 0$), donc la relation d'incertitude set : $\Delta X \,.\, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$

ΔX Peut-être arbitrairement petit si ΔP est suffisamment grand, ce qui veut dire que l'on peut résoudre des échelles de distances arbitrairement petites en utilisant des particules test suffisamment énergétiques. Ceci n'est pas le cas dans la relation (2.7) du fait de la présence du terme $\beta(\Delta P)^2$dans le membre droit de l'inégalité ; même pour de grandes valeurs de ΔX , ΔPest toujours supérieur à une valeur minimale ΔX_{min} non nulle, que nous allons définir par la suite. La courbe représentant cette relation d'incertitude est illustrée sur la **figure (2.1).** On observe que pour les petites valeurs de ΔP, la relation d'incertitude généralisée et la relation d'incertitude ordinaire sont presque identiques ; elles deviennent remarquablement différentes dans la région de grandΔP**[9]**

2.4.1.Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs X et P satisfaisant à la relation de commutation :

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2) \qquad \beta > 0 \tag{2.10}$$

La relation d'incertitude correspondante est :

$$\Delta X \,.\, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle P\rangle^2) \tag{2.11}$$

Pour un (ΔX) fixe, l'inégalité (2.11) est satisfaite dans l'intervalle**[9]** : [ΔP_-,ΔP_+], tel que :

$$\Delta P_{\pm} = \frac{\Delta X}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\beta\langle P\rangle^2+1}{\beta}}$$

La plus petite valeur de ΔXest celle qui correspond à une racine double, c.-à-d., $\Delta P_- = \Delta P_+$ soit :

$$\left(\frac{(\Delta X)_0}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\beta\langle P\rangle^2+1}{\beta} = 0$$

$$(\Delta X)_0 = \hbar\sqrt{\beta}(\beta\langle P\rangle^2 + 1)^{1/2}$$

La valeur minimale (ΔX) min, correspond à ($\langle P\rangle = 0$)

$(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$

Dans l'espace des impulsions, où X et P agissent sur les fonctions $\psi(p)$ =$\langle p|\psi\rangle$, ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs $x \ et \ p$, satisfaisant la relation de commutation canonique : $[x\ , p\ ]$=$i\hbar$ Alors on peut trouver une représentation de X et P qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.10). La réalisation la plus simple s'écrit **[6]**:

$$X = \mathrm{i}\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} \qquad , \qquad P = p \tag{2.12}$$

Où l'on a :

$$p\psi(p) = p\psi(p)$$

$$x\psi(p) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi(p)$$

Alors, X et P s'écrivent explicitement :

$$X = \mathrm{i}\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} \qquad , \qquad P = p$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (2.10).

2.5. conséquences :

2.5.1.la produit scalaire et la relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (2-12), est préservation de la Symétrie des opérateurs X et P pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que P n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente ; il n'en est pas le cas pour l'opérateur X en effet, la condition de symétrie s'écrit**[6]** :

$$(\langle\psi|X)|\varphi\rangle = \langle\psi|(X|\varphi\rangle) \tag{2.13}$$

$$(\langle\psi|P)|\varphi\rangle = \langle\psi|(P|\varphi\rangle) \tag{2.14}$$

Il est facile de voir que cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{+\infty}^{-\infty} dp\, \psi^*(p)\varphi(p).$$

Pour que l'opérateur X soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon Suivante :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\varphi(p) \tag{2.15}$$

Le facteur $\frac{1}{1+\beta p^2}$ est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l'opérateur X en effet :

$$\langle\psi|(\mathrm{X}|\varphi\rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \psi^*(p) \left[i\hbar(1+\beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \right] = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p)$$

En intégrant par parties et en tenant compte que $\psi(p)$ et $\varphi(p)$ sont nulles à l'infini, on obtient:

$$\langle\psi|(\mathrm{X}|\varphi\rangle) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p)$$

Et on a :

$$(\langle\psi|\,\mathrm{X}\,)|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \left[i\hbar(1+\beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \right]^* \varphi(p) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p)$$

Ceci montre bien que X est symétrique par rapport au produit scalaire :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \psi^*(p)\varphi(p) \tag{2.16}$$

La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture ; celle-ci devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p|p\rangle = 1 \tag{2.17}$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p''|p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p''|p\rangle\langle p|p'\rangle$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'ortho normalisation :

$$\langle p|p'\rangle = (1+\beta p^2)\delta(p-p') \tag{2.18}$$

2.6. Relation d'incertitude généralisée à N dimensions :

Une généralisation naturelle de la relation de commutation (2.10) préservant la symétrie rotationnelle s'écrit **[6]**

$$[X_i\,, P_j] = i\hbar\delta_{ij}(1+\beta P^2) \tag{2.19}$$

Avec :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i=j \\ 0 & si \quad i\neq j \end{cases} \tag{2.20}$$

$$P^2 = \sum_{i=1}^{N} P_i^2$$

Si on impose**[9]** :

$$[P_i , P_j] = 0 \tag{2.21}$$

L'identité de Jacobi**[10]** donne

$$[X_i , X_j] = \frac{2\beta i\hbar}{1+\beta P^2}(P_i X_j - P_j , X_i) \tag{2.22}$$

Ce qui mène naturellement à une algèbre de Heisenberg non commutative. La relation d'incertitude impliquée par (2.11) s'écrit :

$$(\triangle X_i)(\triangle P_j) \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left(1 + \beta \sum_{i=1}^{N}[(\triangle X_k)^{\mathbf{2}} + \langle P_k\rangle^{\mathbf{2}}]\right) \tag{2.23}$$

N étant la dimension de l'espace. Cette relation d'incertitude implique des incertitudes minimales non nulles sur toutes les composantes du vecteur position. On peut déduire facilement, comme dans le cas à une dimension :

$$(\Delta X_i) \text{ min} = \hbar\sqrt{N\beta} \qquad \forall_i \tag{2.24}$$

Dans l'espace des impulsions, la représentation la plus simple, satisfaisant à la relation :

$$X_i = i\hbar(1 + \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p_i} \qquad , \qquad P_i = p_i \tag{2.25}$$

Les opérateurs $X_i$et $P_j$sont symétriques par rapport au produit scalaire :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^N p}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\varphi(p) \tag{2.26}$$

Comme dans le cas à une dimension, contrairement aux opérateurs d'impulsion qui sont toujours essentiellement auto-adjoints, les opérateurs de position sont simplement symétriques, et ne possèdent pas d'états propres physiques.

Quoi que les états à localisation maximale puissent toujours être utilisés pour définir une "quasi-représentation de configuration est important de noter, que la relation de commutation a été généralisée pour avoir non seulement une incertitude minimale non nulle sur la position, mais aussi, pour assurer que les opérateurs $X_i$et $P_j$adjoints La relation de commutation la plus générale s'écrit :

$$[X_i , P_j] = i\hbar\ [\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + \beta' P_i P_j] \qquad , \qquad (\beta, \beta') > 0 \tag{2.27}$$

En supposant :

$$[P_i\,,\,P_i]=0 \tag{2.28}$$

Alors, l'identité de Jacobi implique l'algèbre "non commutative" suivante**[10]** :

$$\left[X_i,X_j\right]=i\hbar\frac{(2\beta-\beta')+\beta(2\beta+\beta')P^2}{1+\beta P^2}\left(P_iX_j-P_jX_i\right). \tag{2.29}$$

En supposant que ΔP_ine dépend pas de$j$, on peut déduire facilement la relation d'incertitude correspondant à la relation de commutation (2.27) :

$$(\Delta X_i)\,(\Delta P_j)\geq\frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left[1+(N\beta+\beta')\left(\Delta P_j\right)^2+\gamma\right] \tag{2.30}$$

Avec $\qquad \gamma=\beta\sum_{k=1}^{N}\langle P_k\rangle^2+\beta'\,\langle P_i\rangle^2$

La minimisation de cette dernière relation par rapport à ΔP_j donne :

$$(\Delta X_i)_{min}=\hbar\sqrt{(N\beta+\beta')}\;,\;\;\forall i \tag{2.31}$$

Dans la littérature, plusieurs représentations des opérateurs $X_i$et $P_j$ont été utilisées. Le choix de la représentation se fait toujours en supposant que X_i et $P_j$comme des fonctions des opérateurs $x_i$et $p_j$satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

La première représentation de Kempff **[11]**est :

$$X_i=x_i+\beta\frac{p^2x_i+x_ip^2}{2}+\beta'\frac{p_ip_jx_j+x_jp_ip_j}{2}\qquad,\qquad P_i=p_i \tag{2.32}$$

où dans l'espace des impulsions :

$$x_i=i\hbar\frac{\partial}{\partial p_i}\qquad,\qquad p_i=p_i$$

La forme de (2.32) s'écrit comme :

$$X_i=i\hbar\left[(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p_i}+\beta' p_ip_j\frac{\partial}{\partial p_j}+\left(\beta+\frac{N+1}{2}\beta'\right)p_i\right]\quad,\quad P_i=p_i \tag{2.33}$$

En introduisant un paramètre arbitraire e γ **[12]** :

$$\gamma=\left(\beta+\frac{N+1}{2}\beta'\right)$$

Donc :

$$X_i = i\hbar\left[(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i\right] \tag{2.34}$$

Soit :

$$X_i = \left[(1+\beta p^2)x_i + \beta' p_i p_j x_j + \gamma p_i\right] \tag{2.35}$$

Le paramètre positif γn'affecte ni les relations de commutation ni les observables Physiques

2.7.La réduction de Brau :

Dans la référence **[13],**l'auteur considère le cas $\beta' = 2\beta$ dans lequel les commutateurs entre les opérateurs de position (2.29) s'annulent au premier ordre de β .Ce cas présente un intérêt particulier puisque, en plus de l'invariance rotation nulle, Pour ce cas particulier, les opérateurs $X_i$et $P_i$satisfaisant au premier ordre en βà l'algèbre de Heisenberg déformée (2.27) sont représentés par :

$$X_i = x_i \quad , \quad P_i = p_i(1+\beta p^2) \tag{2.36}$$

Avec :

$$x_i = x_i \quad , \quad p_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Cette représentation est très simple, et convient surtout lors de l'utilisation de la théorie des perturbations.

Dans la référence **[14],**En représentation généralisant (2.36) au cas $\beta' \neq 2\beta$a été donnée, elle a la forme suivante :

$$X_i = x_i + \frac{2\beta-\beta'}{4}(p^2 x_i + x_i p^2), P_i = p_i(1+\frac{\beta'}{2}p^2) \tag{2.37}$$

Cette représentation est valable seulement au premier ordre de β et β'.

2.8. l'équation de Schrödinger :

Dans la mécanique quantique ordinaire l'équation de Schrödinger écrit par la forme :

$$H\Psi(\vec{r}.t) = E\,\Psi(\vec{r}.t)$$

Avec : $H=\frac{P^2}{2m} + V(x)$ et $E=i\hbar\frac{d}{dt}$

Utilisons la réduction de Brau où l'on a :

$$P = p(1+\beta p^2) \quad \text{et} \quad X = x \quad \text{avec} \quad p = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

On aura :

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x) = \frac{\left(p\,(1+\beta p^2)\right)^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) + \frac{\beta}{m}p^4 + O(\beta^2)$$

Donc $$H = H_0 + H_1 + O(\beta^2) \tag{2.38}$$

Ou $$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad et \quad H_1 = \frac{\beta}{m}p^4 \tag{2.39}$$

Donc, nous voyons que tout système avec un Hamilton quantique (ou même classique) défini bien H_0, est perturbé par H_1, Il reste à calculer les corrections dû au Hamilton H_1.Avant que nous fassions, nous écrivons aussi l'équation Schrödinger dépendante du temps :

$$H\psi(\vec{r}.t) = i\hbar\frac{d\psi}{dt} \tag{2.40}$$

Donc :

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m}p^4 + V(x)\right)\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{d\psi}{dt} \tag{2.41}$$

Comme est vu clairement, l'effet de la longueur minimale est décrit par la présence d'un terme de la perturbation ($\frac{\beta}{m}p^4$) dans l'équation Schrödinger ordinaire.

2.9. la densité de courant et l'équation continuité de probabilité :

Dans l'équation Schrödinger (2.41), $V(x)$ Doit être réel pour que H soit hermétique. L'équation conjuguée est la complexe conjuguée de (2 ,42)est

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m}p^4 + V(x)\right)\psi^* = -\mathrm{i}\hbar\frac{d\psi^*}{dt} \tag{2.42}$$

Multiplions les équations de (2.41) par ψ^*, et (2.42) par ψ on aura :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^* \triangle \psi + \frac{\beta}{m}\hbar^4\psi^* \triangle^2 \psi + \psi^* V(x)\psi = \mathrm{i}\hbar\psi^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}} \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi \triangle \psi^* + \frac{\beta}{m}\hbar^4 \psi \triangle^{2\psi^*} + \psi V(x)\psi^* = -\mathrm{i}\hbar\psi\frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{dt}} \end{cases} \tag{2.43}$$

On faisant la différence entre deux équations on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^* \vartriangle \psi - \psi \vartriangle \psi^*) + \frac{\beta}{m}\hbar^4(\psi^* \vartriangle^2 \psi - \psi \vartriangle^2 \psi^*) = \mathrm{i}\hbar\left(\psi^* \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}} + \psi \frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{dt}}\right) \tag{2.44}$$

$$-\frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \vartriangle \psi - \psi \vartriangle \psi^*) + \frac{\beta}{mi}\hbar^3(\psi^* \vartriangle^2 \psi - \psi \vartriangle^2 \psi^*) = \left(\psi^* \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}} + \psi \frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{dt}}\right) \tag{2.45}$$

Et on l'équation de continuité est : ($\vec{\nabla}\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t) + \frac{d\rho(\vec{r}.t)}{dt} = 0$) , comparons cette équation avec (2.45), en trouve :

$$\vec{\nabla}\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \vartriangle \psi - \psi \vartriangle \psi^*) - \frac{\beta}{mi}\hbar^3(\psi^* \vartriangle^2 \psi - \psi \vartriangle^2 \psi^*) \tag{2.46}$$

Avec :

$$\Psi^* \vartriangle \Psi - \Psi \vartriangle \Psi^* = \vec{\nabla}(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*) \tag{2.47}$$

$$(\psi^* \vartriangle^2 \psi - \psi \vartriangle^2 \psi^*) = \vec{\nabla}\left[\left(\psi^*\vec{\nabla} \vartriangle \psi - \psi\vec{\nabla} \vartriangle \psi^*\right) + \left(\vartriangle \psi^*\vec{\nabla}\psi - \vartriangle \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right] \tag{2.48}$$

En remplace (2.47) et (2.48) dans (2.46) en trouve :

$$\vec{\nabla}\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\vec{\nabla}(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*)\right) - \frac{\beta}{mi}\hbar^3\vec{\nabla}\left[\left(\psi^*\vec{\nabla} \vartriangle \psi - \psi\vec{\nabla} \vartriangle \psi^*\right) + \left(\vartriangle \psi^*\vec{\nabla}\psi - \vartriangle \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right]$$

Donc :

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}.t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)\right) \quad - \frac{\beta}{mi}\hbar^3\left[\left(\psi^*\vec{\nabla} \vartriangle \psi - \psi\vec{\nabla} \vartriangle \psi^*\right) + \left(\vartriangle \psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right]$$

$$= \vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{J}}_1 \tag{2.50}$$

Où $\vec{\mathcal{J}}$ est l'expression courante dans la mécanique quantique ordinaire et $\vec{\mathcal{J}}_1$est le terme supplémentaire due au déformation.

CHAPITRE 3
APPLICATION :
LA BARRIERE DU POTENTIEL DANS LE CADRE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE DEFORMEE.

3.1.Formalisme de diffusion d'une particule en mécanique quantique déformée :

Dans la mécanique quantique ordinaire l'équation de Schrödinger à une dimension s'écrit :

$$\left(\frac{P^2}{2m} + V(x)\right)\psi = \mathrm{E}\psi$$

On utilise toujours la réduction de Brau **[13]**: $P = p(1+\beta p^2)$ et $X = x$.

Ou p et x sont les opérateurs impulsion et position ordinaire satisfait le commutateur canonique $[\,x\,,\ p\,] = i\hbar$

Donc l'équation de Schrödinger prend la forme suivante :

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m}p^4 + V(x)\right)\psi = \mathrm{E}\psi$$

Ou $$\left(p^4 + \frac{p^2}{2\beta} + \frac{m}{\beta}V(x)\right)\psi = \mathrm{E}\frac{m}{\beta}\psi \qquad (3.1)$$

On a $p = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ d ou

$$\left[\hbar^4\frac{\partial^4}{\partial^4 x} - \frac{\hbar^2}{2\beta}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{m}{\beta}(V(x) - \mathrm{E})\right]\psi = 0 \qquad (3.2)$$

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial^4 x} - \frac{1}{2\beta\hbar^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{m}{\beta\hbar^4}(V(x) - \mathrm{E})\right]\psi = 0 \qquad (3.3)$$

A. Le cas libre : $\boldsymbol{V(x) = 0}$

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial^4 x} - \frac{1}{2\beta\hbar^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - \frac{m\mathrm{E}}{\beta\hbar^4}\right]\psi = 0 \qquad (3.4)$$

Cette équation est une équation différentielle de ordre quatre, pour solutionner cette équation

Posons $$\psi = Ae^{rx} \qquad (3.5)$$

On aura :

$$r^4 - \frac{1}{2\beta\hbar^2}r^2 - \frac{m\mathrm{E}}{\beta\hbar^4} = 0 \qquad (3.6)$$

Posons $t = r^2$

Donc :

$$t^2 - \frac{1}{2\beta\hbar^2}t - \frac{mE}{\beta\hbar^4} = 0 \quad (3.7)$$

Cette équation admise deux solutions t_1 et t_2 :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1-\sqrt{1+16\beta mE}}{4\beta\hbar^2} \\ t_2 = \frac{1+\sqrt{1+16\beta mE}}{4\beta\hbar^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

Donc on a :

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1+16\beta mE}} \quad , \ r_3 = \frac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta mE}} \\ r_2 = +\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1+16\beta mE}} \quad , \ r_4 = \frac{-i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta mE}} \end{cases} \quad (3.9)$$

La solution formelle de l'équation de Schrödinger est donc :

$$\psi = A\, e^{-\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1+16\beta mE}}\,x} + Be^{+\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1+16\beta mE}}\,x} + Ce^{\frac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta mE}}\,x} + De^{\frac{-i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta mE}}\,x}$$

B. Cas $\boldsymbol{V(x) = V_0}$

$$r^4 - \frac{1}{2\beta\hbar^2}r^2 + \frac{m}{\beta\hbar^4}(V_0 - E) = 0 \quad (3.10)$$

On pose $t = r^2$

Donc :

$$t^2 - \frac{1}{2\beta\hbar^2}t + \frac{m}{\beta\hbar^4}(V_0 - E) = 0 \quad (3.11)$$

L' équation (3.10) admit deux solutions t_1 et t_2 :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1-\sqrt{1-16\beta m(V_0-E)}}{4\beta\hbar^2} \\ t_2 = \frac{1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-E)}}{4\beta\hbar^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

Donc on a :

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-\mathrm{E})}} \\ r_2 = +\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-\mathrm{E})}} \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} r_3 = \frac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-\mathrm{E})}} \\ r_4 = \frac{-i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-\mathrm{E})}} \end{cases} \tag{3.14}$$

3.2.Application au Barrière de potentiel :

La barrière de potentiel est défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 > x \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

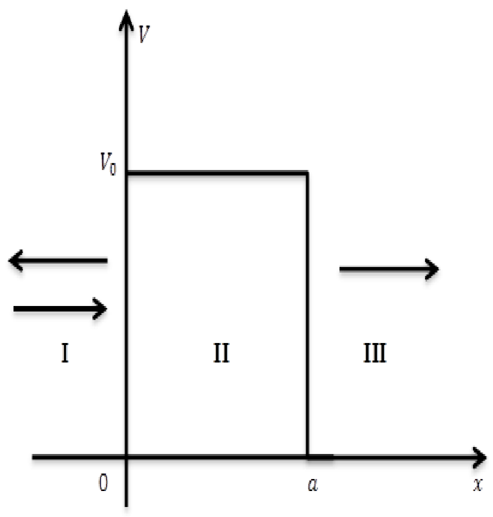

Figure 4 :la barrière de potentiel unidimensionnel

L'équation de Schrödinger indépendant de temps : $H\psi(x) = E\psi(x)$

S'écrit dans les différentes régions :

$$\text{Région}(\,I\,) \quad \left[\frac{\partial^4}{\partial^4 x} - \frac{1}{2\beta\hbar^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - \frac{m\mathrm{E}}{\beta\hbar^4}\right]\psi_I = 0 \qquad pour \quad 0 > x \tag{3.15}$$

$$\text{Région}(\,II\,) \quad \left[\frac{\partial^4}{\partial^4 x} - \frac{1}{2\beta\hbar^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{m}{\beta\hbar^4}(V_0 - \mathrm{E})\right]\psi_{II} = 0 \qquad pour \quad 0 \le x \le a \tag{3.16}$$

$$\text{Région}(\,III\,) \quad \left[\frac{\partial^4}{\partial^4 x} - \frac{1}{2\beta\hbar^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - \frac{m\mathrm{E}}{\beta\hbar^4}\right]\psi_{III} = 0 \qquad pour \quad x > a \tag{3.17}$$

- **Prenons le cas $\mathbf{E} < \boldsymbol{V_0}$**

Dans les régions (I) et (III) la solution de l'équation (3.15) et (3.17) sont :

$$\begin{cases} r_1 = -\dfrac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1+16\beta m\mathrm{E}}} \quad , \quad r_3 = \dfrac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta m\mathrm{E}}} \\ r_2 = +\dfrac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1+16\beta m\mathrm{E}}} \quad , \quad r_4 = \dfrac{-i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta m\mathrm{E}}} \end{cases}$$

$$r = \{\pm ik', \ \pm 1/k_l\} \tag{3.18}$$

Ou k' et k_l sont donnés par :

$$k' = \frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta m\mathrm{E}}} \qquad \text{Et} \qquad k_l = \frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1+16\beta m\mathrm{E}}}$$

A l'ordre dominant de β on a

$$k' = \frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+1+8\beta m\mathrm{E}-32(\beta m\mathrm{E})^2} = \frac{\sqrt{8\beta m\mathrm{E}}}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1-4\beta m\mathrm{E}}$$

$$= \frac{\sqrt{2m\mathrm{E}}}{\hbar}(1-2\beta m\mathrm{E}) = \frac{\sqrt{2m\mathrm{E}}}{\hbar}\left(1-\beta\hbar^2\left(\frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}\right)\right)$$

Donc :

$$k' = k_0\left(1-\beta\hbar^2 {k_0}^2\right)$$

Où

$${k_0}^2 = \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}$$

En pour k_l ona :

$$k_l = \frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1+16\beta m\mathrm{E}}}$$

$$= \frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+1+8\beta m\mathrm{E}} = \frac{\sqrt{2}}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+4\beta m\mathrm{E}}$$

$$k_l = \frac{1}{\hbar\sqrt{2\beta}}(1+2\beta m\mathrm{E}) = \frac{1}{\hbar\sqrt{2\beta}} + \frac{2\sqrt{\beta}m\mathrm{E}}{\hbar\sqrt{2}} \qquad , \frac{1}{\hbar\sqrt{2\beta}} \gg \frac{2\sqrt{\beta}m\mathrm{E}}{\hbar\sqrt{2}}$$

$$k_l = \frac{1}{\sqrt{2\beta\hbar^2}} \tag{3.19}$$

Dans la région (II) la solution de l'équation (3.16) sont telque:

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-\mathrm{E})}} \\ r_2 = +\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-\mathrm{E})}} \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} r_3 = \frac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-\mathrm{E})}} \\ r_4 = \frac{-i}{2\hbar\sqrt{\beta}}\sqrt{-1+\sqrt{1-16\beta m(V_0-\mathrm{E})}} \end{cases} \tag{3.21}$$

A l'ordre dominant de β on a :

$$r = \{\pm ik_1' \quad , \pm 1/k_l\} \tag{3.22}$$

$$k_1' = k(1-\beta\hbar^2 k^2) \tag{3.23}$$

Avec : $\quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-\mathrm{E})$

Les solution dans les déferentes régions s'écrivent comme suit :

Région(I) $\quad \psi_I = Ae^{ik'x} + Be^{-ik'x} + A_1 e^{k_l x}$ (3.24)

Région(II) $\quad \psi_{II} = Fe^{k_1' x} + Ge^{-k_1' x} + Le^{-k_l x} + He^{k_l x}$ (3.25)

Région(III) $\quad \psi_{III} = Ce^{ik'x} + De^{-k_l x}$ (3.26)

On utilise les conditions de continuité suivantes**[15]** :

$$\partial^n\psi_1|_{x=0} = \partial^n\psi_2|_{x=0} \quad , \; n = 0,1,2,3 \tag{3.27}$$

$$\partial^n\psi_2|_{x=a} = \partial^n\psi_3|_{x=a} \quad , n = 0,1,2,3 \tag{3.28}$$

On obtient le système d'équations :

$$A + B + A_1 = F + G + L + H \tag{3.29}$$

$$ik'(A - B) + k_l A_1 = k_1'(F - G) + k_l(H - L) \tag{3.30}$$

$$-k'^2(A + B) + {k_l}^2 A_1 = {k_1'}^2(F + G) + {k_l}^2(H + L) \tag{3.31}$$

$$-k'^3(A - B) + k_l^3 A_1 = k_1'^3(F - G) + k_l^3(H - L) \tag{3.32}$$

$$Fe^{k_1'a} + Ge^{-k_1'a} + Le^{-k_l a} + He^{k_l a} = Ce^{ik'a} + De^{-k_l a} \tag{3.33}$$

$$k_1'\left(Fe^{k_1'a} - Ge^{-k_1'a}\right) - k_l Le^{-k_l a} + k_l He^{k_l a} = ik'Ce^{ik'a} - k_l De^{-k_l a} \tag{3.34}$$

$$k_1'^2\left(Fe^{k_1'a} + Ge^{-k_1'a}\right) + {k_l}^2 Le^{-k_l a} + {k_l}^2 He^{k_l a} = -k'^2 Ce^{ik'a} + {k_l}^2 De^{-k_l a} \tag{3.35}$$

$$k_1'^3\left(Fe^{k_1'a} - Ge^{-k_1'a}\right) - k_l^3 Le^{-k_l a} + k_l^3 He^{k_l a} = -ik'^3 Ce^{ik'a} - k_l^3 De^{-k_l a} \tag{3.36}$$

On exprime les amplitudes B et C et F et G en fonction de l'amplitude de l'onde incidente A on aura :

$$\frac{B}{A} = \frac{\left(k'^2 + k_1'^2\right)\left(e^{2k_1'a} - 1\right)}{e^{2k_1'a}(k' + ik_1')^2 - (k' - ik_1')^2} \tag{3.37}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{4ik'k_1' e^{-ik'a} e^{k_1'a}}{e^{2k_1'a}(k' + ik_1')^2 - (k' - ik_1')^2} \tag{3.38}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{-2k'(k' - ik_1')}{e^{2k_1'a}(k' + ik_1')^2 - (k' - ik_1')^2} \tag{3.39}$$

$$\frac{G}{A} = \frac{2e^{2k_1'a}k'(k' + ik_1')}{e^{2k_1'a}(k' + ik_1')^2 - (k' - ik_1')^2} \tag{3.40}$$

Utilisons la formule du courant (2.50) nous obtenons :

$$\mathcal{J}_1 = k'\left[|A|^2 - |B|^2\right] \tag{3.41}$$

$$\mathcal{J}_3 = k'|C|^2 \tag{3.42}$$

Donc, les coefficients de la réflexion et transmission sont donné par :

$$R = \left|\frac{\mathcal{J}\ réfléchi}{\mathcal{J}\ incident}\right|^2 = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \tag{3.43}$$

$$R = \left|\frac{(k'^2+k_1'^2)\left(e^{2k_1'a}-1\right)}{e^{2k_1'a}(k'+ik_1')^2-(k'-ik_1')^2}\right|^2 = \left[\frac{(k'^2+k_1'^2)^2 sh^2(k_1'a)}{(2k'k_1')^2+(k'^2+k_1'^2)^2 sh^2(k_1'a)}\right] \tag{3.44}$$

$$T = \left|\frac{\mathcal{J}\ transmis}{\mathcal{J}\ incident}\right|^2 = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \tag{3.45}$$

$$T = \left|\frac{4ik'k_1'e^{-ik'a}e^{k_1'a}}{e^{2k_1'a}(k'+ik_1')^2-(k'-ik_1')^2}\right|^2 = \left[\frac{(2k'k_1')^2}{(2k'k_1')^2+(k'^2+k_1'^2)^2 sh^2(k_1'a)}\right] \tag{3.46}$$

On vérifie facilement que :

$$R + T = 1 \tag{3.47}$$

Notons que le PUG affecte R et T.et l'équation de la conservation (3.47) ne vouloir pas si nous nous avons pas utiliser les solutions exponentielles dans équations. (3.24) et (3.26).

Utilisons les définitions de k,k_0, k', k_1' , on peut montrer que quand ka ≫1, le coefficient de la transmission est approximativement

$$T = T_0 \left[1 + \frac{4m\beta(2\mathrm{E}-V_0)^2}{V_0} + \frac{2\beta a}{\hbar}[2m(V_0 - E)]^{3/2}\right] \tag{3.48}$$

Avec :

$$T_0 = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-2ka} \tag{3.49}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique déformée : en présence d'une longueur élémentaire, introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position, en modifiant la relation d'incertitude de Heisenberg. Ceci équivaut à modifier les relations de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion sous la forme: $[X_i , P_j] = i\hbar\ [\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + \beta' P_i P_j]$ ce qui conduit à une algèbre non Commutative des opérateurs de position ($[X_i , X_j] \neq 0$).

Les nouveaux opérateurs De position et d'impulsion sont en général considérés comme des fonctions des Anciens opérateurs $x_i$et $p_j$satisfaisant aux relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

.

Pour montrer comment Incorporer la longueur minimale dans l'équation de Schrödinger, La partie principale de notre mémoire est l'application du formalisme de cette Version déformée de la mécanique quantique au formalisme de la diffusion des particules en calculons les probabilités de transmission et de réflexion, en prenons comme Application la barrière de potentiel. On a constaté que l'équation de probabilités R+T=1 reste conservée avec des corrections dans les quantités R et T en βdue à la longueur minimale.

REFERENCES :

[1] Claude. cohen-tannoudji ,Bernard .Diu et Franck . Laloe mécanique quantique –tomes 1 et 2 –Edition Heramann (1973).

[2] Physique quantique, 2nd Edition Michel Le Bellac

[3] Habib Bouchriha ,introduction à la physique quantique ,cour et applications

[4] Sabine. Hossenfelder, Class. Quantum Grav. 23, 1815 (2006).

[5] K. Gottfried, Quantum Mechanics, Vol. 1 : Fundamentals, (Academic Press Inc, New

York, 1966), p. 213.

[6] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann, Phys. Rev. D52, 1108 (1995).

[7] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37 (1996) 2121-2137.

[8] Achim. Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994).

[9] Thèse Djamil Bouaziz ,Mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé. Application à l'interaction $1/r^2$,en vue de l'obtention du grade de docteur en sciences -Spécialité : Physique théorique -Promoteur : Michel Bawin-Juin 2009

[10] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, Phys. Rev. A 72, 012104 (2005).

[11] Achim. Kempf, J. Phys. A : Math. Gen. 30, 2093 (1997).

[12] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65, 125027 (2002).

[13] F. Brau, J. Phys. A : Math. Gen. 32, 7691 (1999).

[14] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A 74, 012101 (2006).

[15] Saurya Das1∗ and Elias , Phenomenological Implications of the Generalized Uncertainty Principle,arXiv:0901,1768v1 [hep-th] 13 jan 2009

ملخص:

في هذا العمل، نقدم الأدوات الأساسيةَ لشكلية ميكانيك الكم الغير النسبي المستند على مبدأ الارتياب العام الذي يَدل على وجودِ طول أولّي.

نُطبق هذه الشكلية في إنشار الجزيئات علي الحاجز الكموني في بُعد واحد, نَدْرس حل معادلة شرودينغر في فضاءِ الترتيبات, نستعمل الصيغةَ الجديدةَ لتيارات لحِساب معاملات النفوذ والانعكاس , ووجدنا ان معادلة الاحتمالات: معامل النفوذ+ معامل الانعكاس= 1 . تبْقى محفوظةً مع التصحيحاتِ المضافة على هذه المعاملات.

الكلمات المفتاحية: ميكانيك الكم غير النسبي - حاجز الكمون- إنتشار الجزيئات-الطول الاولي- مبدأ الإرتياب العام- ميكانيك الكم المشوه

Résumé :

Dans ce travail ,Nous présentons les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique non relativiste basée sur un principe d'incertitude généralisé, impliquant l'existence d'une longueur élémentaire.

Nous appliquons ce formalisme à la diffusion des particules sur la barrière de potentiel à une dimension, qui nécessite une régularisation aux petites distances au mécanique quantique ordinaire. Nous étudions la solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace des configurations. Nous utilisons la nouvelle formule des courants pour calculer les coefficients de la transmission et réflexion et en trouve que l'équation de probabilités $R+T=1$ reste conservée avec des corrections en β dans les quantités R et T.

Les Mot clé : mécanique quantique non relativiste , la barrière de potentiel , diffusion des particules , longueur élémentaire, principe d'incertitude généralisé, mécanique quantique.

Abstract :

In this work, We discuss the fundamental tools of the formalism of non-relativistic quantum mechanics based on a generalized uncertainty principle, implying the existence of a minimal length.

We apply this formalism in the one dimensional scattering of the particles in barrier potential, whose short distance behavior must be regularized in ordinary quantum mechanics. We solve analytically the one-dimensional Schrödinger equation in configurations space We use the new formula of the currents to calculate the transmission and reflection coefficients and finds that the equation of probabilities $R+T=1$ remains preserved with β corrections in the quantities R and T.

Keys words: non-relativistic quantum mechanics, barrier potential , scattering of the particles, minimal length, generalized uncertainty principle(GUP), deforms quantum mechanics