جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF- M'SILA

MÉMOIRE

Présenté à la Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de master

Spécialité: Mathématiques Fondamentales

Option: Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par:

Khalissa MEDJAHED

Intitulée:

Normes équivalentes dans les espaces de Besov

Soutenue publiquement le : 11/05/2015, devant le jury :

Douadi DRIHEM	**M.C.A**	Université Mohamed.Boudiaf M'sila	**Président**
Madani MOUSSAI	**Prof**	Université Mohamed.Boudiaf M'sila	**Rapporteur**
Bachir GAGUI	**M.C.B**	Université Mohamed.Boudiaf M'sila	**Examinateur**

Promotion 2014/2015

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur M. Moussai pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je ne saurais oublier de remercier tous les mombres de jury, mes professeurs.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes groupes et mes frèrers.

Table des matières

Introduction **1**

Notations **2**

1 Quelques résultats préliminaires **4**

1.1 Théorie de Littlewood-Paley . . . 4

1.2 Quelques inégalités classiques . . . 7

2 Espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ **10**

2.1 Définition et propriétés . . . 10

2.2 Quelques propriétés . . . 10

2.3 Inclusions . . . 13

2.4 Exemples des fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ . . . 15

3 Normes équivalentes dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ **19**

3.1 Quelques Normes équivalentes . . . 19

3.2 Normes équivalentes discrètes . . . 21

3.3 Normes équivalentes continues . . . 25

3.4 Espace de Hölder . . . 27

Conclusion **28**

Introduction

Dans ce travail, nous allons étudier quelques normes équivalentes dans l'espace de Besov. Ce mémoire se compose en trois chapitres: quelques notions préliminaires, l'espace de Besov et les normes équivalentes sur l'espace de Besov.

Dans le première chapitre on donne quelque rappeles des notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire comme la théorie de Littlewood-Paley, on donne quelques inégalities classiques nécessaires suivie par ces démonstrations.

L'objectif de deuxième chapitre,est rappelé la définition de l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ avec un aperçu général sur ces espaces, en donnant quelques propriétés récents relatifs à cet espace. On étudier des propositions principales comme $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ étant un espace de Banach avec ses démonstrations, on a abordé quelques inclusions entre ces espaces et enrichit cette étude par des exemples sur des fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ selon des conditions convenables.

On termine ce mémoire par le troixiéme chapitre, en montrant les normes équivalentes dans l'espace de Besov. On donnera quelques définitions des fonctions maximales de Peetre, et on distingue les normes equivalentes discrètes et continues avec des exemples utiles pour notre étude.

Notations

- $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique dans $\mathbb{R}^n$.

- $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

- $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r.

- $C^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions telles que

$$C^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ f, f^{(\alpha)} \, |\alpha| \leq m \text{ continue} \right\}.$$

- Le support d'une fonction f est toute intervale I où $f \neq 0$ sur I.

$$\text{supp} f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}.$$

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à supports compacts.

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{ supp} f \text{ est compact}\}.$$

- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ apellé espace de distribution.

- Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on définit l'opérateur de translation par

$$\tau_a f = f(x - a), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ...\alpha_n$. La dérivée partielle $\partial^\alpha f$ définie par

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$, muni de la norme

$$P_N(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha \varphi(x)|, N = 1, 2, ...$$

- Le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.

- L'espace de Lebesgue $L_p(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions telles que

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ si } p \geq 1\\ \|f\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \text{ess}\,|f(x)| < \infty.\end{aligned}$$

- Si $0 < q \leq \infty$, alors l_q est l'espace de tout suites $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ telle que

$$\|b_k\|_{l_q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- Soit $0 < p \leq \infty$ et $0 < q \leq \infty$, si $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ est une suite des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\begin{aligned}\|f_k\|_{l_q(L_p)} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_k|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}},\\ \|f_k\|_{L_p(l_q)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

- Soit μ mesure de Lebesgue et $0 < p \leq \infty$, si Ω un sous ensemble compact sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$L_p^{\Omega} = \left\{f \text{ telle que } f \in \mathcal{S}'.\ \text{supp}\widehat{f} \subset \Omega,\ \|f\|_{L_{p,\mu}} < \infty\right\}.$$

- Si $s \in \mathbb{R}^n$, alors

$$H_2^s = \left\{f \text{ telle que } f \in \mathcal{S}'.\ \|f\|_{H_2^s} = \left\|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(x)\right\|_{L_2} < \infty\right\},$$

est l'espace de potentiel de Bessel.

- Soit $s \geq 0$, si $s = m = 0, 1, 2...$alors W_2^mest l'espace de Sobolev

$$W_2^m = \left\{f \text{ telle que } f \in \mathcal{S}'.\ \|f\|_{W_2^m} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\right\}$$

- Soit $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, la convolution de f par g est la fonction

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

- soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la transformation de Fourier défini par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\cdot\xi)\,f(x)\,dx,$$

et transformation de Fourier inverse donné par

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\cdot\xi)\,f(x)\,dx.$$

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

Nous définirons quelque notion de série de Littlewood-Paley associée à des opérateurs de convolution, pour obtenir certaines propriétés. Et quelques inégalitiés classiques sera également démontrées.

1.1 Théorie de Littlewood-Paley

Soit ρ une fonction continue et paire dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$0 \leq \rho(\xi) \leq 1, \rho(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leq 1 \ et \ \rho(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq \frac{3}{2}.$$

On pose

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et satisfait:

$$supp\gamma \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\right\} \text{ et } \gamma(\xi) \geq 0.$$

Il vient alors la partition de l'unité homogène suivante

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma\left(2^{-j}\xi\right) = 1, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On obtient la partition de l'unité non homogène suivante

$$\rho(\xi) + \sum_{j\geq 1} \gamma\left(2^{-j}\xi\right) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.1}$$

Nous définissons les opérateurs

$$R_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \text{par } R_j = \rho\left(2^{-j}D\right) \quad (j \geq 0),$$

et

$$Q_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \text{par } Q_k = \gamma\left(2^{-k}D\right) \quad (k \geq 1).$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit les opérateurs de convolution.

$$\begin{aligned} (R_j f)(x) &= \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\rho\left(2^{-j}.\right)\right) * f\right)(x) \quad \forall (j \geq 0). \\ (Q_k f)(x) &= \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\gamma\left(2^{-k}.\right)\right) * f\right)(x) \quad \forall (k \geq 1). \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

et on a

$$\widehat{(R_j f)}(\xi) = \rho\left(2^{-j}\xi\right) \widehat{f}(\xi)\ \ \forall (j \geq 0),$$

$$\widehat{(Q_k f)}(\xi) = \gamma\left(2^{-k}\xi\right) \widehat{f}(\xi)\ \ \forall (k \geq 1),$$

avec la notation $Q_0 = R_0$.

Ecrivons la relation (1.1.1) au point $2^{-j}\xi$, alors

$$\rho\left(2^{-j}\xi\right) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) = 1.$$

En multipliant par $\widehat{f}(\xi)$, on obtient

$$\rho\left(2^{-j}\xi\right) \widehat{f}(\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse, on obtient

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\rho\left(2^{-j}.\right)\right) * f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(\gamma\left(2^{-k}.\right)\right) * f = f,$$

on obtient encore

$$R_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k f = f, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Pour $j = 0$, on trouve
$$f = R_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k f.$$

On a donc la définition suivante

Définition 1.1.1 *Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors la décomposition de Littlewood-Paley est donnée par la formule suivante*
$$f = R_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k f. \tag{1.1.3}$$
La série converge au sens des distributions tempérèes.

Proposition 1.1.1 *La formule (1.1.3) implique les deux formules suivantes*

(1) $f = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f.$

(2) $R_j f = \sum_{k=0}^{j} Q_k f.$

Preuve. (1) Pour $j = 0$, on a
$$f = R_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k f,$$
par la notion $(R_0 = Q_0)$, on obtient
$$f = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f.$$

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$f = R_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k f,$$
par la formule (1), on obtient
$$f = \sum_{k=0}^{j} Q_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k f.$$
Alors
$$R_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k f = \sum_{k=0}^{j} Q_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k f.$$
Donc
$$R_j f = \sum_{k=0}^{j} Q_k f.$$
Ce qui termine la preuve. ■

1.2 Quelques inégalités classiques

Théorème 1.2.1 ***(Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin)***

Soit (X,μ) *et* (Y,υ) *deux espaces mesurés et* $p_0,\ p_1,\ q_0,\ q_0 \in [1,\infty]$, *avec* $p_0 \neq p_1$ *et* $q_0 \neq q_1$ *et que*

$$T : L_{p_0}(X,\mu) \to L_{q_0}(Y,\upsilon),$$

avec la norme M_0,

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}.$$

$$T : L_{p_1}(X,\mu) \to L_{q_1}(Y,\upsilon),$$

avec la norme M_1,

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Donc

$$T : L_p(X,\mu) \to L_q(Y,\upsilon),$$

avec la norme M,

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

à condition que $0 < \theta < 1$ *et*

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{1}{p_1}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{1}{q_1}. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2 ***(Inégalité de Hölder)***

Soient $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, *avec* $1 \leq p, q \leq \infty$, *alors*

$$f.g \in L_r(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\|f.g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Théorème 1.2.3 ***(Inégalité de Young)***

Soient $p, q, r \in [1,\infty]$ *tel que* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *alors* $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$f * g \in L_r(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve. On fixe $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur $Tf = f * g$ on a

$$\|Tf\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Car

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g(\cdot - y)\|_q \, dy \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_q . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|Tf(x)\|_r \leq \|f\|_1 \|g\|_{q'}, \text{ tel que } \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + 1,$$

et on a encore

$$\|Tf(x)\|_\infty \leq \|g\|_q \|f\|_{q'} .$$

Alors on applique le théorème de l'interpolation de Riesz-Thorin,

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & L^1(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n) \\ & L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) . \end{aligned}$$

Il vient

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 1.2.4 ***(Inégalité de Bernstien)***

Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Il existe $c > 0$ telle que $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, avec

$$supp\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ |\xi| \leq R\},$$

on a

$$\|f\|_q \leq cR^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_p .$$

Corollaire 1.2.1 *Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *et* $\alpha \in \mathbb{N}$. *Il existe* $c > 0$ *telle que* $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *avec*

$$supp\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ \ |\xi| \leq R\},$$

on a

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_q \leq cR^{|\alpha|+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|f\|_p .$$

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$. On pose

$$\psi_R(\xi) = \psi\left(\frac{\xi}{R}\right).$$

On a

$$\widehat{f} = \psi_R \widehat{f},$$

et par conséquent

$$f^{(\alpha)} = \left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right) * f.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_q \leq \left\| \mathcal{F}^{-1}\psi_R \right\|_r \|f\|_p ,$$

avec

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right)^{(\alpha)}(x) = R^n \left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right)^{(\alpha)}(Rx).$$

Il vient

$$\left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right)^{(\alpha)} \right\|_r = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}} \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right) \right\|_r .$$

Alors

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_q \leq cR^{|\alpha|+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|f\|_p .$$

Ce qui termine la preuve. ■

Chapitre 2

Espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

L'objectif de ce chapitre est d'introduire, dans le cadre générale les espaces de Besov, les propriétés et les outiles que nous aurons à utiliser dans ce mémoire.

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1.1 *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$, *alors l'espace de Besov* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des fonctions* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telles que*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{sk}\|Q_k f\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Si $q = \infty$

$$\|f\|_{B^s_{p,\infty}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} 2^{sk}\|Q_k f\|_p\,.$$

2.2 Quelques propriétés

i) $B^s_{p,q} = C^s$ si $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$.

ii) $B^s_{2,2} = H^s$ espace de Sobolev.

iii) $B^s_{\infty,\infty}$ espace de Hölder.

iiii) $B^s_{p,2} = H^s_p$ espace de potentiel de Bessel.

Proposition 2.2.1 *Si* $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *alors* $\partial^\alpha f \in B^{s-|\alpha|}_{p,q}$.

Preuve. D'après l'inégalité de Bernstein on a

$$\|Q_k(\partial^\alpha f)\|_p \leq c2^{k|\alpha|}\|Q_k f\|_p .$$

Puisque

$$\begin{aligned} Q_k(\partial^\alpha f) &= \mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{-k}\cdot\right)\partial^\alpha f \\ &= \partial^\alpha\left(\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{-k}\cdot\right)f\right), \end{aligned}$$

car

$$f^{(\alpha)} * g = f * g^{(\alpha)} = (f * g)^{(\alpha)} .$$

En fait une caclul simple

$$\begin{aligned} 2^{sk}\|Q_k(\partial^\alpha f)\|_p &= 2^{sk}\|\partial^\alpha(Q_k f)\|_p \\ &\leq c2^{k|\alpha|+sk}\|Q_k f\|_p , \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} 2^{(sk-k|\alpha|)q}\|Q_k(\partial^\alpha f)\|_p^q &\leq c2^{skq}\|Q_k f\|_p^q \\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k(s-|\alpha|)}\|Q_k(\partial^\alpha f)\|_p\right)^q &\leq c\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{sk}\|Q_k f\|_p\right)^q \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k(s-|\alpha|)}\|Q_k(\partial^\alpha f)\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq c\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{sk}\|Q_k f\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

alors

$$\|\partial^\alpha f\|_{B^{s-|\alpha|}_{p,q}} \leq c\|f\|_{B^s_{p,q}} .$$

Ce qui termine la preuve. ■

Définition 2.2.1 *(Voir[6], page 45)*

Soit $\phi(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de tous les suites* $\varphi = \left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *telles que*

$$\begin{cases} supp\varphi_0 \subset \{x \text{ tel que } |x| \leq 2\} \\ supp\varphi_j \subset \left\{x \text{ tel que } 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\right\} \text{ si } j = 1, 2, 3... \end{cases}$$

Pour tout indice α, il existe une constante c_α positive telle que

$$2^{j|\alpha|}\left|D^{\alpha}\varphi_j(x)\right| \leq c_\alpha,\ \forall j=0,1,2...et\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)=1,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Proposition 2.2.2 *(Voir[6], page.48)*

Si $s\in\mathbb{R}$, $1<p<\infty$ et $1<q<\infty$, alors $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{2.2.1}$$

Preuve. La démonstration suivante est dûe à ([6] page 48).

Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}\in\phi(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que F contient tout les opérateurs linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, en particulier, $P_N(F\varphi)$ avec $N=1,2,3$...engendres par la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si $L,M,N\in\mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_k 2^{sk}\|Q_kf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \sup_k 2^{sk}\left\|\left(1+|x|^2\right)^{2L}Q_kf\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&= \sup_k 2^{sk}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(1+(-\Delta)^L\right)Q_kf\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq c\sup_k 2^{sk}\left\|\left(1+(-\Delta)^L\right)Q_kf\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq c'\sup_k 2^{sk}\left\|\left(1+|x|^L\right)\left(1+(-\Delta)^L\right)Q_kf\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq c'P_N(F\varphi).
\end{aligned}$$

avec c et c' sont des nombres positifs, ce qui implique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

On montre que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si $s\in\mathbb{R}$ et $1\leq p,q\leq\infty$.

Soit $f\in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, si $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}\in\phi(\mathbb{R}^n)$ alors on pose

$$f_N(x)=\sum_{k=0}^{N}Q_kf.$$

On a $f_N\in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\|f-f_N\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\leq c\left\|\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{r=-1}^{1}2^{skq}\left|Q_kQ_{k+r}f\right|^q\right\|^{\frac{1}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

et

$$\|f - f_N\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \sum_{k=N}^{\infty} 2^{skq} |Q_k f|^q \right\|^{\frac{1}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.2.2}$$

d'après le théorème de convergence de Lebesgue, on démontre que la formule 2.2.2 est tend vers à zéro si N tend vers à ∞. Donc, f_N converge vers f dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.
Ce qui termine la preuve. ■

Proposition 2.2.3 *(Voir[6], page 48)*
Si $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.

Preuve. La démonstration suivante est dûe à ([6], page 48).

On a $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace normée, montrons maintenant qui'est complet.

Soit $\{f_l\}_{l=1}^{\infty}$ est une suite de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Alors (2.2.1) montre que $\{f_l\}_{l=1}^{\infty}$ est aussi une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, car $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est complet alors $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Si $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \in \phi(\mathbb{R}^n)$, alors $Q_k f_l \to Q_k f$ si $l \to \infty$. D'autre part $\{Q_k f_l\}_{l=1}^{\infty}$ est une suite de $L_p(\mathbb{R}^n)$. Par la relation

$$\left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{f(\cdot - z)}{1 + |z|^{\frac{n}{r}}} \right\|_{L_p} \leq c_0 \|f\|_{L_p},$$

il est aussi une suite de $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. On montre que l'élément de limite de $\{Q_k f_l\}_{l=1}^{\infty}$ dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ (qui est la même dans $L_\infty(\mathbb{R}^n)$) coincide avec $Q_k f$. Maintenant il suivre par des arguments standards que $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et que f_l converge à f dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Donc, $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est complet.
Ce qui termine la preuve. ■

2.3 Inclusions

1) $B^s_{p,q} \hookrightarrow B^t_{p,q}$ si $s > t$ et $1 \leq p, q \leq \infty$.

2) $B^s_{p,q_1} \hookrightarrow B^s_{p,q_2}$ si $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$.

3) $B^s_{p_1,q} \hookrightarrow B^t_{p_2,q}$ si $s > t$, $p_1 \leq p_2$ et $s - \frac{n}{p_1} = t - \frac{n}{p_2}$.

4) $B^s_{p,q} \hookrightarrow L_\infty$ si $s > \frac{n}{p}$.

Preuve. 1) Soit $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ alors $f \in \mathcal{S}'$ et

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \|Q_k f\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

On a $s > t$, alors $2^{tkq} < 2^{skq}$, donc

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{tk} \|Q_k f\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \|Q_k f\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

d'où $\|f\|_{B^t_{p,q}} \leq \|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty$. Ce qui donne $f \in B^t_{p,q}$.

2) Si $q_1 \leq q_2$, alors $l^{q_1} \hookrightarrow l^{q_2}$. Par conséquent

$$\|f\|_{q_2} \leq c \|f\|_{q1}.$$

On a

$$\begin{aligned} \|Q_k f\|_{q_2} &\leq c \|Q_k f\|_{q1} \\ 2^{skq_2} \|Q_k f\|_p^{q_2} &\leq 2^{skq_1} \|Q_k f\|_p^{q_1} \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \|Q_k f\|_p \right)^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \|Q_k f\|_p \right)^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}, \end{aligned}$$

alors

$$B^s_{p,q_1} \hookrightarrow B^s_{p,q_2}.$$

3) D'aprés l'inégalité de Bernstien, on a

$$\|Q_k f\|_{p_2} \leq c R^{n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} \|Q_k f\|_{p_1}.$$

Car

$$supp\ \mathcal{F}(Q_k f) \subset \left\{ \xi : |\xi| \leq c 2^k \right\}.$$

Alors

$$2^{tk} \|Q_k f\|_{p_2} \leq c 2^{sk} \|Q_k f\|_{p_1}.$$

Donc

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{tk} \|Q_k f\|_{p_2} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \|Q_k f\|_{p_1} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

4) On a

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f.$$

Avec $R_0 = Q_0$

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_k f\|_\infty \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\frac{n}{p}} \left(\|Q_k f\|_p 2^{ks} \right) 2^{-ks} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\left(\frac{n}{p}-s\right)} \left(2^{ks} \|Q_k f\|_p \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\left(\frac{n}{p}-s\right)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{ks} \|Q_k f\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \infty,
\end{aligned}$$

car $\frac{n}{p} - s < 0$ ce qui implique $s > \frac{n}{p}$.

Ce qui termine la preuve. ■

2.4 Exemples des fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Exemple 2.4.1 $f(x) = vp\frac{1}{x}$ *(la valeur principal de* $\frac{1}{x}$*). On a*

$$\widehat{f}(\xi) = -i\pi sgn\xi, \tag{2.4.1}$$

et

$$supp\ \widehat{Q_k f} \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R} \text{ tell que } |\xi| \leq 2^{k+1} \right\}.$$

D'après l''inégalité de Bernstein on obtient

$$\|Q_k f\|_p \leq c_1 2^{k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|Q_k f\|_2 \quad (p \geq 2). \tag{2.4.2}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|Q_k f\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\|\widehat{Q_k f}\right\|_2 \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\|\gamma\left(2^{-k}\cdot\right) f\right\|_2 \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\|\gamma\left(2^{-k}\cdot\right)\right\|_2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{1}{2}} \|\gamma\|_2 \\
&= c_2 2^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

car $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. En remplaçant dans (2.4.2) on obtient

$$\|Q_k f\|_p \leq c 2^{k\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \text{ avec } c = c_1 c_2.$$

D'où

$$2^{sk} \|Q_k f\|_p \leq c 2^{k\left(s+\frac{1}{p}\right)},$$

la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{k\left(s+\frac{1}{p}\right)q}$, est converge si $s \leq -\frac{1}{p}$ avec $1 \leq q \leq \infty$.
Ce qui donne $vp\frac{1}{x} \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans les deux cas suivantes

1) Si $s = -\frac{1}{p'}$, $1 \leq p \leq \infty$, et $q = \infty$ alors

$$\|f\|_{B^{-\frac{1}{p'}}_{p,\infty}} = \sup_{k \geq 0} 2^{-\frac{1}{p'}k} \|Q_k f\|_p.$$

2) Si $s < -\frac{1}{p'}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$, alors

$$\|f\|_{B^s_{p,\infty}} < \infty.$$

Preuve. De (2.4.1).

Soient $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(xg)(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}g(\xi)$ et

$$\begin{aligned}
\left\langle x\widehat{f}, \varphi\right\rangle &= \langle f, x\widehat{\varphi}\rangle \\
&= \lim_{\xi \to 0} \int_{|x| \geq \xi} \exp(ix.0)\,\widehat{\varphi}(x)\,dx \\
&= 2\pi \mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}(0) \\
&= 2\pi\varphi(0) \\
&= 2\pi \langle \delta, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

d'ou

$$\mathcal{F}(x\ f)(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}f(\xi) = 2\pi\delta$$

(δ mesure de Dirac), ce qui donne

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\pi H(\xi) + a,\ (a \text{ constante})$$

ou H est la fonction de Heavsiede, puisque $\delta = H'$ en effet

$$\begin{aligned}\langle H', \varphi\rangle &= -\langle H, \varphi'\rangle \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(0),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

f est impaire donc $\widehat{f}$ est impaire ($\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$ $\xi \in \mathbb{R}$). D'où

$$a = i\pi\left(H(\xi) + H(-\xi)\right) = i\pi,$$

avec

$$\begin{aligned}H(\xi) &= -i\pi sgn\xi \\ &= \begin{cases}-i\pi,\ \xi \geq 0; \\ i\pi,\ \xi \leq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Ce qui terminre la preuve. ■

Exemple 2.4.2 *$f = \delta$ (δ mesure de Dirac), soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{\delta}, \varphi\right\rangle &= \langle \delta, \widehat{\varphi}\rangle \\ &= \widehat{\varphi}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx \\ &= \langle 1, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{Q_k\delta} = \varphi\left(2^{-k}.\right)$$

comme dans l'exemple (1.5.1) on obtient

$$2^{sk}\left\|Q_k\delta\right\|_p \leq c2^{k\left(s+\frac{n}{p'}\right)}.$$

La série $\sum_{k\geq 0} 2^{k\left(s+\frac{n}{p'}\right)q}$ *converge si* $s < -\frac{n}{p'}$, $1 \leq q \leq \infty$.

Ce qui donne $\delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *dans les cas suivants:*

1) Si $s = -\frac{n}{p'}$, $1 \leq p \leq \infty$ *et* $q = \infty$.

2) Si $s < -\frac{n}{p'}$ *et* $1 \leq p, q \leq \infty$.

Exemple 2.4.3 *Soit* f *tell que* $\widehat{f}(x) = |\xi|^{-j}$, *alors*

$$f \in B^{j-\frac{n}{p'}}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Pour démontrer cet exemple, il suffit d'appliquer la proposition (2.1.1).

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *on pose* $|\alpha| = j$, *alors ona*

$$|\xi|^j \widehat{f}(x) = \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(x) = 1.$$

D'apres l'exemple (1.5.2), on a

$$\partial^\alpha f = \delta.$$

Avec $\delta \in B^{-\frac{n}{p'}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. *par conséquent,* $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *dans le cas suivante*

1) Si $s = -\frac{n}{p'}$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

Chapitre 3

Normes équivalentes dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

3.1 Quelques Normes équivalentes

Définition 3.1.1 *(Voir[6], page 46)*

On dit que deux normes $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ dans un espace vectoriel linéaire A donné sont équivalentes. S'il existe deux nombres positifs c_1 et c_2 tel que

$$\|f\|_1 \leq c_1 \|f\|_2 \text{ et } \|f\|_2 \leq c_2 \|f\|_1$$

Pour tout $f \in A$.

Définition 3.1.2 *Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit la norme de $\|f\|^{\varphi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|f\|^{\psi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ par*

$$\begin{aligned} \|f\|^{\varphi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|2^{sk}\varphi_k * f\right\|_{l^q(L^p(\mathbb{R}^n))}. \\ \|f\|^{\psi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|2^{sk}\psi_k * f\right\|_{l^q(L^p(\mathbb{R}^n))}. \end{aligned}$$

Où φ_k et ψ_k sont de même type de $\gamma\left(2^{-k}\cdot\right)$, où γ est défini en (1.1) chapitre1.

Proposition 3.1.1 *Si $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, alors $\|f\|^{\varphi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|f\|^{\psi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ sont normes équivalentes sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 3.1.1 *La proposition (3.1.1) est dûe à ([6], p.46).*

Nous rappelons quelques étapes essentielles de sa démonstration.

Remarque 3.1.2 *(Voir[6], page 22)*

Soit $0 < p \leq \infty$ *et soit*

$$\Omega = B_b = \{y \text{ tel que } |y| \leq b\} \text{ avec } b > 0.$$

Si $f \in L_p^\Omega$ *alors on a* $f(b^{-1}\cdot) \in L_p^\omega$ *où* $\omega = B_1$.

Soit $M \in H_2^s$ *avec* $s > \sigma_p$ *où* $\sigma_p = n \max\left(\frac{1}{p} - 1, 0\right)$

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}^{-1} M \widehat{f} \right\|_{H_2^s} &= b^{-\frac{n}{p}} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[M(b\cdot) \left(\widehat{f}\left(b^{-1}\cdot\right) \right)(\cdot) \right] \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &= c \left\| M(b\cdot) \right\|_{H_2^s} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Où c *est independente de* b *et* $f \in L_p^\Omega$.

Preuve. (De la proposition (3.1.1))

Il est facile de voir que $\|f\|^{\varphi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|f\|^{\psi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ sont des normes. Afin de prouver l'équivalence de ces deux normes on applique l'inégalité (3.1.1). On rappelle que $H_2^s = W_2^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev usuel si $m = 1, 2, 3, ...$, normé par

$$\|f\|_{W_2^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\psi_{-1} \equiv 0$, alors on a

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \varphi_j(x) \sum_{r=-1}^{1} \psi_{j+r}(x), \text{ où } j = 0, 1, 2 \text{...donc} \\ \mathcal{F}^{-1} \varphi_j(x) \widehat{f} &= \sum_{r=-1}^{1} \mathcal{F}^{-1} \varphi_j(x) \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \psi_{j+r}(x) \widehat{f}, \\ Q_j f &= \sum_{r=-1}^{1} Q_j \widehat{Q}_{j+r} f. \end{aligned}$$

Si on remplace f, M et b dans (3.1.1) par $Q_j f$, φ_j et $d2^j$ respectivement, où $d > 0$ est un nombre approprié, alors on obtient

$$\left\| Q_j \widehat{Q}_{j+r} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \varphi_j\left(d2^j \cdot\right) \right\|_{W_2^m(\mathbb{R}^n)} \|Q_{j+r} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

où c est independente de j, et on a

$$c \left\| \varphi_j\left(d2^j \cdot\right) \right\|_{W_2^m(\mathbb{R}^n)} \leq c \text{ pour } j = 0, 1, 2...$$

D'où il existe une constante c positive telle que

$$\|Q_j Q_{j+r} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Q_{j+r} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \text{ pour } j = 0, 1, 2... \text{et } r = -1, 0, 1.$$

mais la norme $\|f\|^{\varphi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ est estimé par $c \|f\|^{\psi}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$. Alors ces deux normes sont equivalentes.

Ce qui termine la preuve. ■

Définition 3.1.3 *(Voir[6], page.79)*

Soit $s \leq p \leq \infty$, on pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_p(\mathbb{R}^n) &= \Big\{ b \text{ tell que } \{b_k(x)\}_{k=0}^{\infty}, \, b_k(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}^n), \\ & \quad supp\widehat{b_0} \subset \{y \text{ tell que } |y| \leq 2\}, \; supp\widehat{b_j} \subset y \text{ tell que } 2^{j-1} \leq |y| \leq 2^{j+1} \text{ si } j = 1, 2, 3... \Big\}. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Si $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \in \phi(\mathbb{R}^n)$ et $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors $\{Q_k f\}_{k=0}^{\infty} \in \mathfrak{B}_p(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3.1.1 *Toujours selon [[6], p.79]*

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors

$$\left. \begin{aligned} B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \; \exists \{b_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \in \mathfrak{B}_p(\mathbb{R}^n) \text{ tel que} \\ f = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \; \left\|2^{sk} b_k\right\|_{l_q(L_p(\mathbb{R}^n))} < \infty \end{aligned} \right\} . \tag{3.1.3}$$

De plus,

$$\inf \left\|2^{sk} b_k\right\|_{l_q(L_p(\mathbb{R}^n))} \tag{3.1.4}$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

3.2 Normes équivalentes discrètes

Définition 3.2.1 *[Voir[6], p.80]*

Soit $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, et soit

$$E_p\left(2^k, f\right) = \inf \|f - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \, k = 1, 2, 3...$$

où l'infimuin étant prise sur tout les $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$supp\widehat{g} \subset \left\{ y \text{ tell que } |y| \leq 2^k \right\}.$$

Soit

$$\|f\|^{*}_{B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} E_p\left(2^k, f\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Oú $1 \leq p, q \leq \infty$ *et* $s > 0$.

En fait la théorie des espaces de Besov qu'est une norme équivalente dans $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et que

$$B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \text{ telle que } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),\ \|f\|^{*}_{B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}.$$

Définition 3.2.2 *Soient* $R, Q \in \mathcal{S}$, $\varepsilon > 0$, *et un entier* $S \geq 1$ *telle que*

$$\begin{aligned} \left|\hat{R}(\xi)\right| &> 0 \textit{ sur } \{|\xi| < 2\varepsilon\}, \\ \left|\hat{Q}(\xi)\right| &> 0 \textit{ sur } \left\{\frac{\varepsilon}{2} < |\xi| < 2\varepsilon\right\}, \end{aligned}$$

et

$$D^{\alpha}\hat{R}(0) = 0 \textit{ pour tout } |\alpha| \leq S.$$

Soit $f \in \mathcal{S}'$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\begin{aligned} R^{*}_{a} f(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|R * f(y)|}{(1 + |x-y|^a)}, \qquad (3.2.1) \\ Q^{*}_{j,a} f(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_j * f(y)|}{(1 + 2^j |x-y|)^a}. \end{aligned}$$

Cette fonction est appelé les fonctions maximales de Peetre.

Définition 3.2.3 *Pour* $f \in L^{1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *on définit la fonction maximale de Hardy-Littelwood par*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|x-y| \leq r} |f(y)|\, dy.$$

Théorème 3.2.1 *1)* $M : L_p \to L_p$ *pour* $1 < p \leq \infty$.

2) $M : (l_q(L_p)) \to (l_q(L_p))$ *pour* $1 < p \leq \infty$.

Preuve. Voir [9]. ■

Lemme 3.2.1 *Soit* $\varphi \in \mathcal{S}$ *tell que* $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}$, *alors*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \frac{|\varphi(y)|}{(1 + |x-y|)^a} \leq \left(M |\varphi|^{\frac{n}{a}}(x)\right)^{\frac{a}{n}}.$$

Pour tout $a > 0$.

Preuve. [Voir [6], page 16] dans la formule (2) avec $r = \frac{n}{a}$. ∎

Lemme 3.2.2 *L_p est invariant par la translation, c'est à dire*

$$\|f\|_p = \|f(a - \cdot)\|_p .$$

Théorème 3.2.2 *Soit $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $a > \frac{n}{p}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{S}'$*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}}^{*,a} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{sj} \left\| Q^*_{j,a} f \right\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Pour démontre ce théorème il suffit de vérifier que

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|^{*,a}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

Soit $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{D}$, tell que $\widetilde{\gamma}\gamma = \gamma$ on définit

$$\widetilde{Q}_j f(x) = 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\widetilde{\gamma}\left(2^j(x-y)\right) f(y)\, dy,$$

alors on a

$$\widetilde{Q}_j Q_j f = Q_j f,$$

on obtien

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\widetilde{\gamma}\left(2^j(x-y)\right) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\widetilde{\gamma}\left(2^j(x-y)\right) f(y)}{\left(1+2^j|x-y|\right)^{-a}} \cdot \frac{\mathcal{F}^{-1}\widetilde{\gamma}\left(2^j(x-y)\right) f(y)}{\left(1+2^j|x-y|\right)^{a}} dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |Q_j f(x)| &\leq \sup_y \frac{|Q_j f(y)|}{\left(1+2^j|x-y|\right)^{a}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\widetilde{\gamma}\left(2^j(x-y)\right)\right|}{\left(1+2^j|x-y|\right)^{-a}} dy \\ &\leq c_0 Q^*_{j,a} f(x). \end{aligned}$$

On pose $2^j|x-y| = h$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|\mathcal{F}^{-1}\widetilde{\gamma}(h)\right|}{\left(1+|h|\right)^{a}} dh = c_0.$$

Donc

$$\|f\|^{*,a}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|^{*,a}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

Maintenant on démontre que

$$\|f\|^{*,a}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

Comme

$$\operatorname{supp}\widehat{Q_j f} \subset \left\{ \xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2} 2^j \right\}.$$

On peut appliquer le lemme (3.1.2), on obtient

$$\frac{\varphi\left(x-z\right)}{\left(1+|z|\right)^a} = \frac{Q_j f\left(2^{-j}\left(2^j x - z\right)\right)}{\left(1+|z|\right)^a},$$

on pose $x - z = X$

$$\begin{aligned} \varphi\left(X\right) &= Q_j f\left(2^{-j}\left(2^j x - X + x\right)\right) \\ &= Q_j f\left(2^{-j}\left(x - 2^{-j}x - 2^{-j}X\right)\right), \end{aligned}$$

alors

$$\left\|Q^*_{j,a} f\left(x\right)\right\| \leq c\left(M\left|Q_j f\right|^{\frac{n}{a}}\left(x - 2^{-j}x - 2^{-j}X\right)\right)^{\frac{a}{n}} .$$

D'apres le lemme (3.1.1), on a

$$\begin{aligned} \left\|Q^*_{j,a} f\left(x\right)\right\|_p &\leq c\left\|M\left|Q_j f\right|^{\frac{n}{a}}\left(2^{-j}X\right)\right\|_p^{\frac{a}{n}} \\ &\leq c, \end{aligned}$$

et on a aussi

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\left\|Q^*_{j,a} f\left(x\right)\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\left\|M\left|Q_j f\right|^{\frac{n}{a}}\left(2^{-j}X\right)\right\|_p^{\frac{a}{n}q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

puisque

$$\begin{aligned} \left\|M\left|f\right|^{\frac{n}{q}}\right\|_p^{\frac{q}{n}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(M\left|f\right|^{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{a}{n}p\cdot\frac{n}{a}}\right)^{\frac{a}{p}n} \\ &\leq \left\|\left(M\left|f\right|^{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{a}{n}}\right\|_{L_{\frac{a}{n}p}}, \end{aligned}$$

avec la condition $\frac{a}{n}p > 1$ alors $a > \frac{n}{p}$.

Ce qui termine la preuve. ∎

3.3 Normes équivalentes continues

Pour toute distribution f sur $\mathbb{R}^n$, et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\begin{aligned}\left(\Delta_h^1 f\right)(x) &= f(x+h) - f(x) \text{ et} \\ \left(\Delta_h^m f\right)(x) &= \Delta_h^1 \left(\Delta_h^{m-1} f\right)(x),\end{aligned}$$

où $m = 1, 2, 3...$

soit encore

$$\sigma_p = n \max\left(\frac{1}{p} - 1, 0\right) \text{ si } 0 < p \leq \infty.$$

Théorème 3.3.1 *(Voir [6], page110)*

Soit $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $s > \sigma_p$. *Si* M *est un entier tel que* $M > s$, *alors*

$$\|f\|_{B_{p,q}^s}^m = \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^m f(x)|^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{h^n}\right)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

est un norme équivalente dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. (Voir [6], page 110).

Premierement on remarque que si $\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ est logique si $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > \sigma_p$, et que $\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ est estimé de dissus par $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. De plus , la derniere assertion de le théorème est évidente. maintenant on montre qu' il existe une constante positive c tell que

$$\|f\|_{B_{p,q}^s}^m \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

est vrai pour tous $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Soit $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \phi(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f.$$

Où $f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f$ converge pas seulment dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ mais aussi dans $L_p(\mathbb{R}^n)$.
Et soit $\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)$ définit comme (3.2.1), on a

$$|(\Delta_h^m Q_j f)(x)| \leq c 2^{(j-k)M} \left(Q_{j,a}^* f\right)(x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Si $|\varrho| \leq 2^{-k}$ et $j = 0, 1, 2, ..., k$. Donc, on obtient en tout les cas, c'est-à-dire $j = 0, 1, 2, ...$ que

$$\sup_{|\varrho|\leq 2^{-k}} \|\Delta_h^m Q_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq c \min\left(1, 2^{(j-k)M}\right) \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

Où c est indépendante de f. Soit $0 < p \leq \infty$ alors

$$\begin{aligned}
\sup_{|\varrho|\leq 2^{-k}} \|\Delta_h^m f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{|\varrho|\leq 2^{-k}} \|\Delta_h^m Q_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&\leq c \sum_{j=0}^{k} 2^{(j-k)Mp} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&\quad + c \sum_{j=k+1}^{\infty} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p .
\end{aligned}$$

Il se ensuit que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B_{p,q}^s}^q &\leq c \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q + c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \sup_{|\varrho|\leq 2^{-k}} \|\Delta_h^m f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \\
&\leq c \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q + c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \left(\sum_{j=0}^{k} 2^{(j-k)Mp} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\quad + c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \left(\sum_{j=k+1}^{k} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{q}{p}} .
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < s < s + \varepsilon < M$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \left(\sum_{j=0}^{k} 2^{(j-k)Mp} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{q}{p}} &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} 2^{(j-k)(M-\varepsilon-s)q} 2^{jsq} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \\
&\leq c' \sum_{j=0}^{\infty} 2^{skq} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q ,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{q}{p}} &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{(j-k)(s-\varepsilon)q} 2^{jsq} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \\
&\leq c' \sum_{j=0}^{\infty} 2^{skq} \left\|\left(Q_{j,a}^* f\right)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q ,
\end{aligned}$$

on obtien

$$\left\|2^{js} \sup \left(Q_{j,a}^* f\right)\right\|_{l_q(L_p)} \leq c \sup \|f\|_{B_{p,q}^s} .$$

■

3.4 Espace de Hölder

Définition 3.4.1 *Soit* $s \in \mathbb{R}$ *et* $s = [s] + \{s\}$ *avec* $[s]$ *un entier et* $0 \leq \{s\} < 1$.

Si $s \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{N}$, $C^s(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace de Hölder des fonctions* $f \in C^{[s]}(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\|f\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{C^{[s]}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}} < \infty, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Corollaire 3.4.1 *L'espace de Hölder* $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *admet une norme continue équivalente définit par*

$$\|f\|_{B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_\infty + \sup_{h \neq 0} \frac{\|\Delta_h^m f\|_p}{|h|^s}$$

où $\sigma_p < s < m$.

Preuve. *Ce corollaire est une forme simple de théorème (3.3.1).* ■

Remarque 3.4.1 *L'espace de Hölder* $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ *pour* $0 < \alpha < 1$ *admet la norme suivante*

$$\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_\infty + \sup_{h \neq 0} \frac{\|\Delta_h^1 f\|_\infty}{|h|^\alpha}.$$

Exemple 3.4.1 *Soit* $\omega \in C^\infty(S^{n-1})$, *où* S^{n-1} *est la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$. *(*S^1 *est définie par* $(\cos\theta, \sin\theta) \in S^1$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$, *où* S^1 *est la sphère unité de* $\mathbb{R}^2$*) c'est-à-dire, si* $x \in S^{n-1}$ *alors* $|x| = 1$.

Soit la fonction $f(x) = |x|^\tau \omega\left(\frac{x}{|x|}\right)$ *avec* $c > 0$. *On a le resultat suivant*

$$f \in B^\tau_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{3.4.1}$$

La formule 3.4.1 est démontrée par G.Bourdaud en 1978.

On a aussi la formule suivante:

$\exists c > 0$ *tel que* $\forall 0 < \tau < 1$ *on a*

$$\begin{aligned} \left| |x+h|^\tau \omega\left(\frac{x+h}{|x+h|}\right) - |x|^\tau \omega\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| &\leq c_0 \|f\|_{B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c, \ \forall x, h \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Où $\omega \in C^\infty(S^{n-1})$.

Exemple 3.4.2 **1)** $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$.

2) $\omega(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{1+|\cos\theta|}, \forall\theta$ *et* $\omega \in C^\infty(S^1)$.

Conclusion

L'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ admet des normes équivalentes sous formes discrètes et continues. les travaux de Triebel et Peetre forment une base de cette théorie d'équivalence de normes.

Bibliographie

[1] S. E. ALLAOUI. Intégrales singuliéres, thèse de doctorat, Batna, 2011.

[2] J.Berg, J.Löfström. Interpolation spaces an introduction, New york, 1976.

[3] J.Peetre. New thoughts on Besov spaces, Durhan, 1976.

[4] T. Runst, W. Sickel. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial di erential equations. de Gruyter, Berlin, 1996.

[5] V.S.Rychkov. On a theorem of Bui, Paluszynski, and Taibleson. Math, 227(1999) 280-292.

[6] H.Triebel, Theory of function spaces, Basel, Boston, Stuttgart, 1983.

[7] H.Triebel, Theory of function spaces II, Basel.Boston.Berlin 1992.

[8] H.Triebel, Fractals and spectra, Related to Fourier Analysis and functions spaces, Birkhäuser, 1997.

[9] S.Weiss, introduction to Fourier analysis on Eucludean space, 1971.

Résumé

Les espèces de Besov sont caractérisées par leurs normes, comme toute espèce fonctionnelle. Il admet des normes discrètes et continues, comme nous avons rappelé quelques résultats dans ce mémoire.

Mots clés : L'espace de Besov, théorie de Littlewood-Paley, fonction maximale de Peetre.

Abstract

The Besov spaces are characterized by their norms, as all function space. They admit discrete and continuous norms as we have recalled some results in this thesis.

Key words: Besov space, Littlewood-paley theory, maximale function of Peetre.

ملخص

نميز فضاء بيزوف بواسطة أنظمته، ككل فضاء دالي. حيث يقبل أنظمة متقطعة و مستمرة كما ذكرنا سابقا في نتائج هته المذكرة.

الكلمات المفتاحية فضاء بيزوف, نظرية ليتلوود بالي, دوال بيتر. .