

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et Numérique (AMN)

Présentée par:

GOUADRIA SARRA

Thème

*On the Numérical Solution of Volterra-
Fredholm integral equations*

Soutenue le 20/06/2023 devant le jury composé de:

| | | | |
|---------------|-------|----------------------|-----------|
| Bachir GAGUI | M C A | Université de M'sila | président |
| Noui DJAIDJA | M C B | Université de M'sila | Encadreur |
| Amina KHIRANI | M C A | Université de M'sila | examineur |

Année universitaire :2022/2023

:

الهدف من هذه المذكرة هو ايجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا- فريهولم التكاملية من النوع الثاني باستخدام كثير حدود برنولي مع تقديم أمثلة متنوعة لتوضيح فعالية ودقة الطريقة في إيجاد حلول تقريبية

الكلمات المفتاحية

المعادلات التكاملية لفولتيرا-المعادلات التكاملية لفريهولم- معادلات فولتيرا -فريهولم التكاملية –كثيرات حدود برنولي

Résumé :

Le but de ce travail, est la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra -Fredholm de seconde espèce, en utilisant le polynôme de Bernoulli. Divers exemples seront présentés pour illustrer son efficacité et sa précision dans la recherche de solutions approximatives.

Mots clés :

Equation intégrale de Volterra, équation intégrale de Fredholm, équation intégrale mixte de Volterra-Fredholm, Polynôme de Bernoulli

Abstract:

The goal of this work is consecrated to the numerical method to find approximate solutions to the Volterra -Fredholm integral equation of the second kind using Bernoulli polynomials, various examples will be presented to illustrate its effectiveness and accuracy in finding approximate solutions.

Keywords :

Volterra integral equation, Fredholm integral equation, Mixed Volterra-Fredholm integral equation, Bernoulli polynomial,

Remerciements

Je remercie ALLAH, qui m'a donné la force, la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Dr : Noui DJAIDJA, je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury les professeurs Bachir GAGUI et Amina KHIRANI qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Enfin, je remercie tous mes amis de près ou de loin, et je voudrais mentionner et les étudiants de ma promotion de spécialité Analyse Mathématique et Numérique 2023

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes chers parents (Gouadria KAMEL et Nouioua SAIDA) pour leurs amour, leurs vigilance et leurs sacrifices pour le bien de mon éducation. Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi.

A mes chers frères : Ayoub & Islam & Bilal & Amine

A mes belles soeurs : Hadjer & Khadidja

A mes belles cousines : Imane & Noura & Radhia

A toutes mes deux familles : Gouadria et Nouioua

A tous mes amis qui m'ont

toujours encouragé.

Table des matières

| | |
|---|------------|
| Introduction | iii |
| 1 Notions d'analyse fonctionnelle et numérique | 1 |
| 1.1 Espaces fonctionnelles | 1 |
| 1.1.1 Espace vectoriel normé | 1 |
| 1.1.2 Espace de Banach | 2 |
| 1.1.3 Espace Euclidien(préhilbertien) | 2 |
| 1.1.4 Espace de Hilbert | 2 |
| 1.2 Opérateurs | 3 |
| 1.2.1 Opérateurs linéaires | 3 |
| 1.2.2 Opérateurs bornés | 3 |
| 1.2.3 Opérateurs Compacts | 4 |
| 1.2.4 Opérateurs intégrals | 5 |
| 1.3 Notions d'analyse numérique | 7 |
| 1.3.1 Méthodes spectrales | 7 |
| 1.3.2 Méthode de collocation | 7 |
| 1.3.3 Méthode de Galerkin | 8 |
| 2 Les équations intégrales | 10 |
| 2.1 Classification des équations intégrales | 10 |
| 2.1.1 Equations intégrales de Fredholm | 10 |
| 2.1.2 Equations intégrales de Volterra | 11 |
| 2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm | 11 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.2 | Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm | 12 |
| 2.3 | Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm | 15 |
| 2.3.1 | La méthode des solution sous forme de série | 15 |
| 2.3.2 | La méthode de décomposition d'Adomian: | 16 |
| 2.4 | Polynômes et nombres de Bernoulli | 18 |
| 2.4.1 | Les polynômes de Bernoulli | 18 |
| 2.4.2 | Les nombres de Bernoulli | 19 |
| 2.4.3 | Propriétés des polynômes de Bernoulli: | 19 |
| 3 | Résolution numériques des équation intégrales de Volterra -Fredholm | 21 |
| 3.1 | Méthode de collocation-Bernouli | 21 |
| 3.2 | Méthode de Galerkin-Bernouli | 22 |
| 3.3 | Exemples Numériques | 24 |
| | Conclusion | 30 |
| | Bibliographie | 31 |

Introduction

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm de deuxième espèce sont des équations fonctionnelles importantes qui trouvent de nombreuses applications dans divers domaines scientifiques et techniques.

La résolution analytique de ces équations peut être difficile, voire impossible, dans de nombreux cas. C'est pourquoi la résolution numérique est souvent privilégiée. Différentes méthodes numériques ont été développées pour aborder ces équations, telles que les méthodes de collocation, les méthodes de quadrature, les méthodes de Galerkin, etc.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons à l'application des polynômes de Bernoulli pour résoudre numériquement des équations intégrales de Volterra-Fredholm de deuxième espèce qui ont la forme:

$$\varphi(x) - \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in [a,b].$$

Nous examinerons les différentes étapes du processus de résolution numérique, notamment la discrétisation de l'intervalle d'intégration, la construction du système d'équations linéaires à partir de l'approximation par les polynômes de Bernoulli, et enfin la résolution numérique du système pour obtenir la solution approchée.

Ce mémoire se compose de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous donnons les concepts fondamentaux de l'analyse fonctionnelle et numérique, les espaces de Hilbert et de Banach. Nous étudierons également la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité des équations intégrales de Volterra-Fredholm de deuxième espèce. Nous aborderons également différentes méthodes analytiques pour résoudre ces équations, notamment la méthode de solution sous forme de série ainsi que la méthode de décomposition d'Adomian. Des exemples concrets seront présentés pour illustrer ces méthodes.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes de résolution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm en utilisant les méthodes spectrales avec le polynôme de Bernoulli tout en montrant l'efficacité de cette méthode par des exemples illustrés.

Chapitre 1

Notions d'analyse fonctionnelle et numérique

1.1 Espaces fonctionnelles

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1.1 (*norme*) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On appelle norme sur l'espace E toute fonction $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes:

Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$:

1- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

2- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

3- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.1.2 Un espace vectoriel E est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme.

Exemple 1.1.1 (*Norme de Bielecki*) $\|\cdot\|_B : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\|\varphi\|_B = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| e^{-c(x-a)}, \quad c > 0$$

L'espace $(C[a, b], \|\cdot\|_B)$ est un espace vectoriel normé

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.3 (*Suite de Cauchy*). Soit E est un espace vectoriel normé, une suite de Cauchy (x_n) est une suite d'éléments de E telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tous les indices $m, n \geq N$, on ait $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Définition 1.1.4 (*Espace complet*). Un espace vectoriel normé E , est dit complet, si toute suite de Cauchy dans E converge vers un élément de E .

Définition 1.1.5 On définit un espace de Banach comme un espace vectoriel normé complet.

1.1.3 Espace Euclidien (préhilbertien)

Définition 1.1.6 (*produit scalaire*). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un produit scalaire sur E est une fonction, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{k}$, qui satisfait les propriétés suivantes:

Pour tous les scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et tous les vecteurs $u, v, w \in E$.

1- Linéarité à gauche : $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

2- Défini positif : $\langle u, u \rangle \geq 0$, et $\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$,

3- Symétrie : $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

4- Conjugaison scalaire (uniquement pour $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) : $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien, on peut lui introduire une norme définie par

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.1.7 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel complexe ou réel muni d'un produit scalaire, et il est également complet selon la métrique associée à sa norme. Cette métrique est définie par la fonction de distance $\rho(u, v) = \|u - v\|$, où $\| \cdot \|$ représente la norme sur l'espace.

1.2 Opérateurs

1.2.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.2.1 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur $T : E \rightarrow F$ est dit linéaire s'il vérifie :

Pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$

$$T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que T est continu si, et seulement si, pour toute suite (x_n) dans E convergente vers un élément x de E , la suite $(T(x_n))$ converge vers $T(x)$ dans F .

Autrement dit, pour tout x dans E et pour toute suite (x_n) dans E convergente vers x , on a la propriété suivante : si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \rightarrow x, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (T(x_n)) \rightarrow T(x).$$

Preuve. Voir [1] ■

1.2.2 Opérateurs bornés

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que T est un opérateur borné si, et seulement si, il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x \in E$

$$\|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E \tag{1.2.1}$$

La plus petite des constantes M vérifiant la relation (C1) est appelée norme de T notée $\|T\|$ et donnée par

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(\varphi(x))\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|T(x)\|_F \tag{1.2.2}$$

Remarque 1.2.1 *La norme $\|T\| = \sup \|T(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.*

Remarque 1.2.2 *Un opérateur linéaire T est continu, si et seulement si, il est borné.*

1.2.3 Opérateurs Compacts

Les opérateurs compacts jouent un rôle important dans divers domaines de mathématiques tels que l'analyse fonctionnelle, l'analyse spectrale, la théorie des équations différentielles et la géométrie des espaces de Banach.

Un opérateur compact est un concept clé en analyse fonctionnelle qui caractérise une classe spéciale d'opérateurs entre deux espaces vectoriels normés.

Ensemble relativement compact

Définition 1.2.2 *Dans un espace topologique E , un sous-ensemble G est dit relativement compact, ou précompact, si pour toute suite x_n de G , il existe une sous suite (x_{n_k}) qui converge dans E .*

En d'autres termes, chaque suite extraite de G contient une sous-suite convergente dont la limite appartient à E .

Opérateurs Compacts

Définition 1.2.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que T est un opérateur compact si, pour tout sous-ensemble borné B de E , l'image $T(B)$ est relativement compacte dans F .*

Autrement dit, la fermeture $\overline{T(B)}$ est compact.

Définition 1.2.4 *Soit T un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $T(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{T(G)}$ est compact.*

Théorème 1.2.1 (*critère de compacité*). Un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée x_n de E , la suite Tx_n contient une sous suite convergente de F .

Preuve. Voir [1] ■

Propriétés

- 1- La combinaison linéaire $\alpha T_1 + \beta T_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.
- 2- Le produit $T_1.T_2$ de deux opérateurs bornés T_1 et T_2 est compact si l'un des opérateurs T_1 ou T_2 est compact.
- 3- Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fautive.
- 4- L'opérateur identique I de E est compact si et seulement si E est de dimension finie.

1.2.4 Opérateurs intégraux

Définition 1.2.5 On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire T défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme

$$T\varphi(x) = \int_{G_2} k(x, t)\varphi(t)dt, x \in G_1$$

Où $k(x, t)$ est une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$, appelé noyau de l'opérateur intégral T et $\varphi(t)$ est une fonction mesurable définie sur G_2 .

La fonction $k(x, t)$ appelée noyau de l'opérateur intégral T .

Dans la plupart des cas, le domaine d'intégration G_2 est un intervalle réel $[a, b]$.

Formes de noyaux particulières

- 1- Un noyau k est dit séparable ou dégénéré s'il peut s'écrire sous la forme

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i(x)b_i(t)$$

- 2 -Un noyau k à valeurs complexes est dit symétrique ou hermitien s'il vérifie:

Pour tout x, t

$$\text{Pour tout } x, t, \quad k(x, t) = \overline{k(t, x)},$$

3- Un noyau k est appelé « noyau de convolution » s'il est de la forme :

$$k(x, t) = h(x - t)$$

4- Un noyau k est dit régulier s'il vérifie :

$$\int \int k(x, t) dx dt < +\infty$$

5- Si un noyau k est de la forme, pour une fonction h bornée,

$$\frac{h(x, t)}{(x - t)^\alpha}, \quad \alpha \in]0, 1[$$

alors le noyau k est dit faiblement singulier.

6- Un noyau k est appelé noyau de Cauchy s'il est de la forme

$$\frac{h(x, t)}{(x - t)}$$

Normes des opérateurs intégraux

La norme d'opérateur est utile pour caractériser la taille de l'opérateur, étudier la continuité, la convergence et les propriétés spectrales, ainsi que pour établir des inégalités utiles dans les calculs mathématiques.

Il existe différentes normes des opérateurs intégraux. Les deux normes les plus couramment utilisées sont la norme d'opérateur et la norme d'opérateur essentielle.

Norme d'opérateur

La norme d'opérateur, notée $\|T\|$, mesure la magnitude maximale de l'opérateur intégral. Elle est définie comme suit :

$$\|T\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|T(\varphi)\|$$

Norme d'opérateur essentielle (ou norme essentielle de l'opérateur) :

La norme d'opérateur essentielle, notée $\|T\|_{ess}$, est utilisée pour évaluer la stabilité de l'opérateur intégral. Elle est définie comme suit :

$$\|T\|_{ess} = \inf \{M \geq 0 : \|T(\varphi)\| \leq M \|\varphi\|, \text{ pour presque tout } \varphi\} \quad (1.2.3)$$

Remarque 1.2.3 La plus petite des constantes M vérifiant la relation (C3) est appelée norme essentielle de T .

1.3 Notions d'analyse numérique

1.3.1 Méthodes spectrales

Les méthodes spectrales sont des approches numériques utilisées pour résoudre des problèmes mathématiques tels que les équations intégrales, les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles.

Les méthodes spectrales se basent sur la représentation des fonctions sur une base spectrale, telle que les polynômes de Chebyshev, les fonctions de Fourier, les polynômes de Bernoulli, les polynômes de Legendre, etc.

1.3.2 Méthode de collocation

Le principe de la méthode de collocation repose sur la recherche d'une solution approchée d'un problème mathématique en satisfaisant des conditions en un ensemble de points spécifiques appelés points de collocation.

Les principales étapes du principe de la méthode de collocation :

1- Choix des points de collocation :

L'espace de résolution est discrétisé en utilisant un ensemble de points de collocation. Ces points peuvent être choisis de différentes manières, tels que les points équirépartis, les points de Gauss-Lobatto, les points de Chebyshev, etc. Le choix des points de collocation peut influencer la précision et la convergence de la méthode.

2- Formulation des conditions de collocation :

Les conditions de collocation sont formulées en évaluant l'équations intégrales, ou l'équation différentielle ou l'équation aux dérivées partielles ainsi que les conditions aux limites en ces points de collocation. Cela revient à imposer que la solution approximée satisfasse les équations du problème en ces points précis.

3- Approximation de la solution :

La solution est approximée par une combinaison linéaire de fonctions de base, souvent des polynômes, définies sur les points de collocation. Les fonctions de base doivent être choisies de manière à respecter les propriétés et les exigences du problème. Les coefficients

de cette combinaison linéaire représentent les inconnues de la méthode, qui doivent être déterminés.

4- Résolution du système d'équations :

En substituant l'approximation de la solution dans les conditions de collocation, on obtient un système d'équations algébriques. Ce système peut être linéaire ou non linéaire, en fonction de la nature du problème. La résolution de ce système permet de déterminer les valeurs des coefficients des fonctions de base, qui représentent l'approximation de la solution.

5- Évaluation de la solution :

Une fois les coefficients des fonctions de base obtenus, la solution approximée peut être évaluée en utilisant cette expression. Cela permet d'obtenir une représentation numérique de la solution du problème mathématique considéré.

1.3.3 Méthode de Galerkin

En mathématiques, dans le domaine de l'analyse numérique, les méthodes de Galerkin, du nom du mathématicien russe Boris Galerkin, convertissent un problème d'opérateur continu, tel qu'une équation différentielle, généralement dans une formulation faible, en un problème discret en appliquant des contraintes linéaires déterminées par fini ensembles de fonctions de base.

Souvent, en se référant à une méthode Galerkin, on donne également le nom ainsi que les hypothèses typiques et les méthodes d'approximation utilisées :

La méthode de Ritz – Galerkin

(d'après Walther Ritz) prend généralement une forme bilinéaire définie symétrique et positive dans la formulation faible, où l'équation différentielle d'un système physique peut être formulée via la minimisation d'une fonction quadratique représentant l'énergie du système et la solution approximative est une combinaison linéaire de l'ensemble donné des fonctions de base

La méthode de Bubnov – Galerkin

(d'après Ivan Bubnov) n'exige pas que la forme bilinéaire soit symétrique et remplace la minimisation de l'énergie par des contraintes d'orthogonalité déterminées par les mêmes fonctions de base qui sont utilisées pour approximer la solution. Dans une formulation d'opérateur de l'équation différentielle, la méthode Bubnov – Galerkin peut être considérée comme l'application d'une projection orthogonale à l'opérateur

La méthode de Petrov – Galerkin

(d'après Georgii I. Petrov) permet d'utiliser des fonctions de base pour les contraintes d'orthogonalité (appelées fonctions de base de test) qui sont différentes des fonctions de base utilisées pour approximer la solution. La méthode Petrov – Galerkin peut être considérée comme une extension de la méthode Bubnov – Galerkin, appliquant une projection qui n'est pas nécessairement orthogonale dans la formulation de l'opérateur de l'équation différentielle

Chapitre 2

Les équations intégrales

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Equations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.1 Une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce est une équation de la forme :

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.1)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue que l'on cherche à déterminer, $f(x)$ est une fonction donnée, et $k(x, t)$ est une fonction donnée appelée noyau de l'équation. Les bornes a et b définissent l'intervalle d'intégration.

Définition 2.1.2 On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.1.2)$$

Où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions donnés, λ est un paramètre réel (appelé paramètre d'intégration).

2.1.2 Equations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Définition 2.1.3 Une équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce est une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme:

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.3)$$

Définition 2.1.4 Une équation intégrale linéaire de Volterra est une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.4)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue que l'on cherche à déterminer, $f(x)$ est une fonction donnée, λ est un paramètre réel (appelé paramètre d'intégration) et $k(x, t)$ est une fonction donnée appelée noyau de l'équation. Les bornes d'intégration vont de a à x , où x est la variable de l'équation.

2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm sont une combinaison des équations intégrales de Volterra et des équations intégrales de Fredholm.

Définition 2.1.5 Une équation intégrale de Volterra-Fredholm a la forme générale suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.1.5)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue que l'on cherche à déterminer, $f(x)$ est une fonction donnée, λ_1 et λ_2 sont des paramètres réels (appelés paramètres d'intégration), et $k_1(x, t)$ et $k_2(x, t)$ sont des fonctions données appelées noyaux de l'équation.

2.2. Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Définition 2.1.6 On appelle équation intégrale mixte de Volterra-Fredholm une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt ds$$

Exemple 2.1.1

$$\varphi(x) = -1 - e^x - x + \int_a^x \varphi(t) dt + \int_0^1 x \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = \frac{17}{2} x^2 + x - \int_0^x \int_0^1 (s - y) \varphi(y) ds dy$$

2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solution de l'équation (2,1,1)

Définition 2.2.1 (Norme de Bielecki) $\|\cdot\|_B : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\|\varphi\|_B = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| e^{-c(x-a)}, \quad c > 0$$

Définition 2.2.2 Soit E un espace normé. Un opérateur $T : E \rightarrow E$ est un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in E$ unique telque:

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi) = \varphi_0 \text{ pour tout } \varphi \text{ de } E.$$

Théorème 2.2.1 (principe de contraction). Soit E un espace normé. Si $T : E \rightarrow E$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ_0 , alors T est un opérateur de Picard et

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Théorème d'existence et d'unicité

2.2. Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a,b] \quad (2.2.1)$$

où

1- $f \in C[a,b]$, $k_1 \in C(D_1)$, $k_2 \in C(D_2)$, tel que $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq x \leq b\}$ et $D_2 = (a,b) \times [a,b]$.

2- $M_1 = \max_{(x,t) \in D_1} |k_1(x,t)|$, et $M_2 = \max_{(x,t) \in D_2} |k_2(x,t)|$

Théorème 2.2.2 [5] *Dans les condition ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\frac{1}{c}[M_1 + M_2e^{c(b-a)}] < 1$$

Alors l'équation (2.2.1) a une solution unique $\varphi \in C[a,b]$.

Preuve. Soit l'opérateur integral $T : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt$$

On a

2.2. Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x, t)(\varphi(t) - \psi(t))dt + \int_a^b k_2(x, t)(\varphi(t) - \psi(t))dt \right| \\
&\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt \\
&\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t) - \psi(t))| e^{-c(t-a)} e^{c(t-a)} dt + M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| e^{-c(t-a)} e^{c(t-a)} dt \\
&\leq M_1 \max_{t \in [a, b]} |(\varphi(t) - \psi(t))| e^{-c(t-a)} \int_a^x e^{c(t-a)} dt + \\
&\quad M_2 \max_{t \in [a, b]} |(\varphi(t) - \psi(t))| e^{-c(t-a)} \int_a^b e^{c(t-a)} dt \\
&\leq M_1 \|\varphi - \psi\|_B \int_a^x e^{c(t-a)} dt + M_2 \|\varphi - \psi\|_B \int_a^b e^{c(t-a)} dt \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c} (e^{c(x-a)} - 1) + \frac{M_2}{c} (e^{c(b-a)} - 1) \right] \|\varphi - \psi\|_B \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c} e^{c(x-a)} + \frac{M_2}{c} e^{c(x-a+b-x)} \right] \|\varphi - \psi\|_B \\
&\leq \frac{e^{c(x-a)}}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-x)}) \|\varphi - \psi\|_B \\
&\leq \frac{e^{c(x-a)}}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|_B
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|T\varphi(x) - T\psi(x)| e^{-c(x-a)} \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|_B \text{ Pour tout } x \in [a, b]$$

Par conséquent,

$$\|T\varphi(x) - T\psi(x)\|_B \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|_B$$

On déduit que l'opérateur T est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)})$

La condition supposée garantit que T est une contraction. Ainsi, nous appliquons le principe de contraction. ■

2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de VoLterra-Fredholm

Définition 2.3.1 Une fonction $\varphi(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tous les ordres telles que la série de Taylor en $x = 0$ peut être écrite comme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.1)$$

2.3.1 La méthode des solution sous forme de série

La résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm peut être réalisée en utilisant la méthode des solutions sous forme de série. Cette méthode consiste à représenter la solution de l'équation intégrale comme une série infinie de fonctions, et à déterminer les coefficients de la série en utilisant les propriétés de l'équation intégrale.

Considérons une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.3.2)$$

Pour résoudre cette équation intégrale à l'aide de la méthode des solutions sous forme de série, nous supposons que la solution $\varphi(x)$ peut être représentée par une série infinie de fonctions de la forme donné en (2.3.1). En substituant cette expression dans l'équation intégrale (2.3.2), nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt \quad (2.3.3)$$

où $T(f(x))$ est le développement de Taylor de la fonction f .

pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)dt + \int_a^b k_2(x, t)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)dt \quad (2.3.4)$$

Exemple 2.3.1

$$\varphi(x) = -5 - x + 12x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt \quad (2.3.5)$$

En remplaçant $\varphi(x)$ (2.3.5) par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.6)$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -5 - x + 12x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x ((x-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt + \int_0^1 ((x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt$$

D'où

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = -5 + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{6}a_4 + (-1 + a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{5}a_4) + (-1 + \frac{1}{6}a_1)x^3 + \dots$$

En égalant les coefficients de puissances similaires de x des deux cotés de (2.3.6) et en résolvant le système d'équations résultant, nous obtenons

$$a_0 = 0, a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$$

La solution exacte est donc donnée par

$$\varphi(x) = 6x + 12x^2$$

2.3.2 La méthode de décomposition d'Adomian:

La méthode de décomposition d'Adomian est une approche utilisée pour résoudre analytiquement les équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm. Elle est basée sur la décomposition de la solution en une série d'Adomian, qui permet d'obtenir une solution itérative de l'équation intégrale.

La méthode de décomposition d'Adomian suppose que la solution de l'équation intégrale peut être représentée par une série infinie de fonctions appelées les termes d'Adomian. La série d'Adomian est définie comme suit :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.3.7)$$

où les composante $\varphi_n(x), n \geq 0$ sont à déterminer de manière récursive. En substituant cette série dans l'équation intégrale, (2.3.2) nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) dt$$

La composante $\varphi_0(x)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe d'intégral. par conséquent, nous définissons la relation de récurrence

$$\varphi_n(x) = f(x), \varphi_{n+1}(x) = \int_0^x k_1(x, t) \varphi_n(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi_n(t) dt, n \geq 0$$

Après avoir déterminé les compnants $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ la solution sous forme de série est facilement obtenue en utilisant (2.3.7), qui converge vers la solution exacte si une telle solution exacte, nous signalons ici que le phénomène de bruit rém et la méthode de décomposition modifiée sera utilisé dans cette section. cela sera illustré en utilisant les exemples suivants:

Exemple 2.3.2 Utiliser la méthode de décomposition d'Adomian modifiée pour résoudre l'équation intégrale de VoLterra_Fredholm suivante

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2 - x^3 - x^4 - 2 + \int_0^x t\varphi(t) dt + \int_{-1}^1 t\varphi(x) dt$$

L'équation de la méthode de décomposition modifiée donne la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 3x + 4x^2 - x^3 \\ \varphi_1'(x) &= -x^4 - 2 + \int_0^x t\varphi(t) dt + \int_{-1}^1 t\varphi(t) dt \\ &= -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x^5 + x^3 \end{aligned}$$

L'annulation du terme de bruit $-x^3$ de $\varphi_0(x)$ donne la solution exacte

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2$$

2.4 Polynômes et nombres de Bernoulli

2.4.1 Les polynômes de Bernoulli

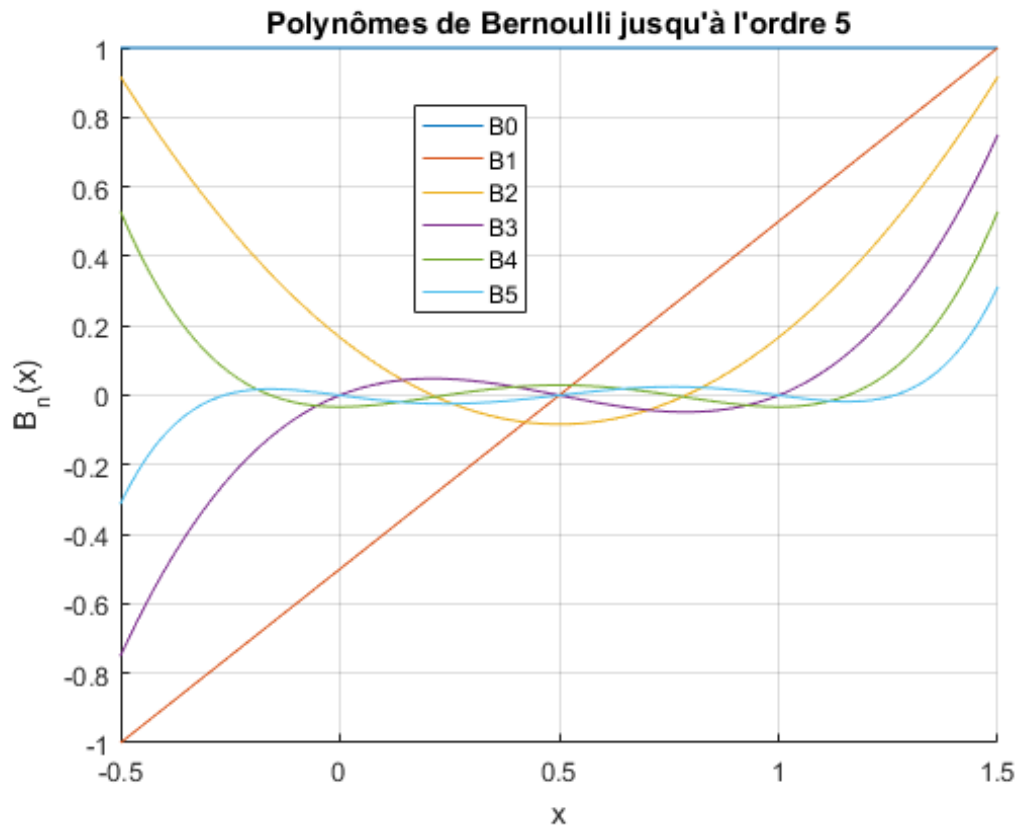
Les polynômes de Bernoulli, notés $B_n(x)$, attribués à Daniel Bernoulli, peuvent être définis par récurrence au moyen des trois conditions :

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ \text{pour tout } n &: B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \\ \int_0^1 B_n(t)dt &= 0 \end{aligned}$$

Les premiers polynômes de Bernoulli

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} \end{aligned}$$

Les graphes du premiers polynômes de Bernoulli



2.4.2 Les nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli sont les nombres $B_n = B_n(0)$.

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{16} = -\frac{3617}{510}, \dots$$

Remarque 2.4.1 Les B_n sont nuls pour n impair distinct de 1.

2.4.3 Propriétés des polynômes de Bernoulli:

1. Parité :

Les polynômes de Bernoulli sont pairs pour $n \geq 2$ et impairs pour $n \geq 3$ impairs. Cela signifie que

$$B_n(-x) = (-1)^n B_n(x).$$

2. La fonction génératrice

$$\begin{aligned} \frac{te^{xt}}{e^t - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n, \\ &= B_0(x) + B_1(x) \frac{t}{1!} + B_2(x) \frac{t^2}{2!} + B_3(x) \frac{t^3}{3!} + B_4(x) \frac{t^4}{4!} + \dots + B_n(x) \frac{t^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

3. Dérivées

On vérifiera aisément par récurrence que pour $n \geq 1$:

$$B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0),$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$B'_n(x) = n B_{n-1}(x)$$

Chapitre 3

Résolution numériques des équation intégrales de Volterra -Fredholm

3.1 Méthode de collocation-Bernouli

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt, x \in [a, b] \quad (3.1.1)$$

on suppose:

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^n C_j B_j(x) \quad (3.1.2)$$

où $B_j(x)$ sont les polynômes de Bernouli de degré j défini sur $[a, b]$ et C_j des coefficients à déterminer.

Substituant (3.1.2) dans (3.1.1) on obtient:

$$\sum_{j=0}^n C_j B_j(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \sum_{j=0}^n C_j B_j(t)dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{j=0}^n C_j B_j(t)dt$$

d'où

$$\sum_{j=0}^n C_j (B_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) B_j(t)dt - \int_a^b k_2(x, t) B_j(t)dt) = f(x) \quad (3.1.3)$$

l'équation (3.1.3) peut s'écrire:

$$\sum_{j=0}^n C_j \psi_j(x) = f(x)$$

avec

$$\psi_j(x) = B_j(x) - \int_a^x k_1(x,t) B_j(x) dt - \int_a^b k_2(x,t) B_j(x) dt$$

Alors les équations de collocation sont obtenues en prend des points $x_i, i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n C_j \psi_j(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.4)$$

$$\sum_{j=1}^n C_j \psi_{ji} = f_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.5)$$

l'équation (3.1.4) représente un système linéaires de (n) inconnue qui s'écrit sous la forme

$$AC = F$$

où

$$A = \psi_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$C = (c_1, \dots, c_n)^t$$

$$F = (f_1, \dots, f_n)^t$$

$$C = A^{-1}F$$

3.2 Méthode de Galerkin-Bernouli

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x,t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (3.2.1)$$

on suppose que

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) = \sum_{j=0}^n C_j B_j(x) \quad (3.2.2)$$

En substituant (3.2.2) Dans (3.2.1) on obtient:

$$\sum_{j=0}^n C_j B_j(x) = f(x) + \sum_{j=0}^n C_j \int_a^x k_1(x,t) B_j(t) dt + \sum_{j=0}^n C_j \int_a^b k_2(x,t) B_j(t) dt \quad (3.2.3)$$

pour déterminer les coefficients C_j on utilise l'idée de Galerkin par multipliant les deux cotés de l'équation (3.2.3) par $B_i(x)$ et intégrant par rapport à x de -1 à 1 . Alors , on a

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n C_j \left(\int_{-1}^1 B_j(x) B_i(x) dx - \sum_{j=0}^n C_j \int_{-1}^{-1} \int_a^x k_1(x,t) B_j(t) dt B_i(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_2(x,t) B_j(t) dt \right) B_i(x) dx \right) \\ &= \int_{-1}^1 f(x) B_j(x) dx, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Alors les équation de Galerkin sont obtenues en prend des point $x_i, i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n C_j \psi_j(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n C_j \psi_{ji} = f_i, \quad i = 1, \dots, n$$

l'équation (3.2.4) représente un système linéaires de (n) inconnûe qui sécrit sous la forme

$$AC = F$$

Où

$$A = \int_{-1}^1 B_j(x) B_i(x) dx - \sum_{j=0}^n C_j \int_{-1}^{-1} \int_a^x k_1(x,t) B_j(t) dt B_i(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_2(x,t) B_j(t) dt \right) B_i(x) dx$$

$$C = (c_1, \dots, c_n)^t$$

$$F = (f_1, \dots, f_n)^t$$

$$C = A^{-1} F \quad (3.2.5)$$

3.3 Exemples Numériques

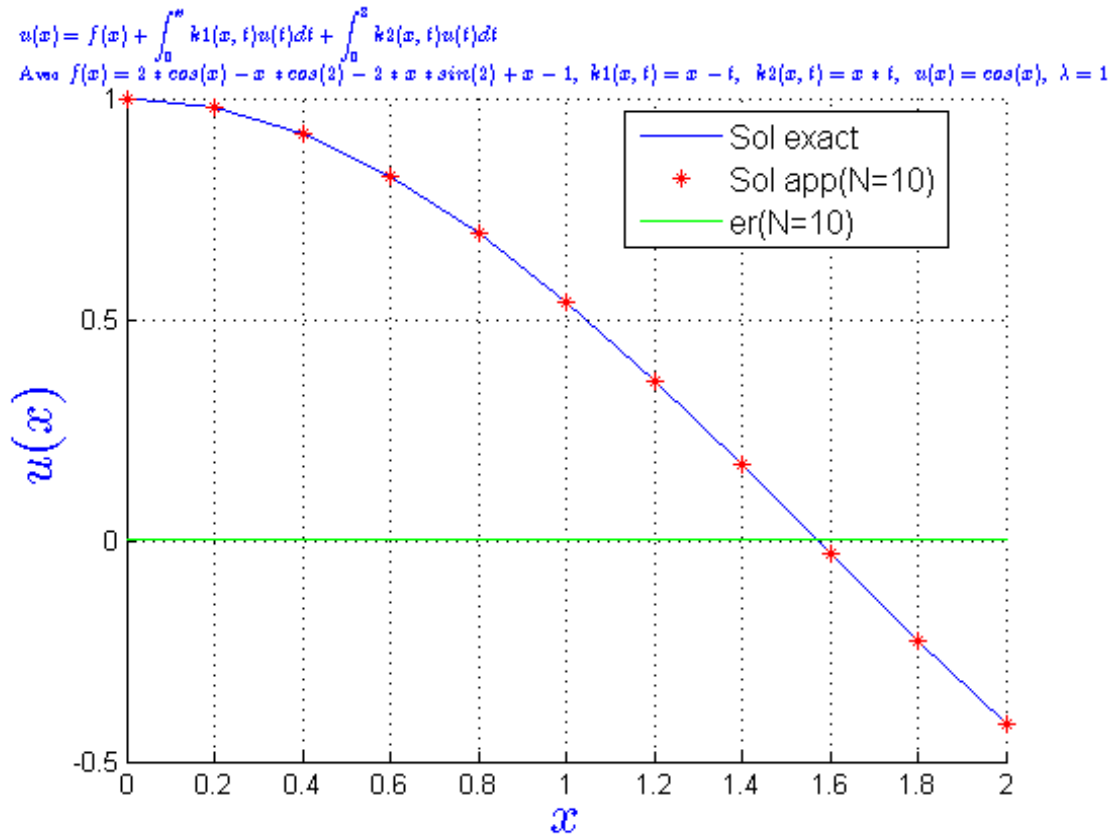
Exemple 1 .Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt - \int_0^2 xt\varphi(t)dt = 2\cos(x) - x\cos 2 - 2x\sin 2 + x - 1, \quad 0 \leq x, t \leq 2,$$

$$\varphi_{ex}(x) = \cos(x).$$

Table 1. Nous présentons la solution approchée φ_{app} , de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Bernouli, en certains points, l'erreur est calculée pour $n = 10$

| val x | $\varphi_{ex}(x)$ | φ_{app} | err |
|------------|-------------------|-----------------|------------|
| 0.0000 | 1.0000e+00 | 1.0000e+00 | 8.6042e-14 |
| 2.0000e-01 | 9.8007e-01 | 9.8007e-01 | 5.6588e-13 |
| 4.0000e-01 | 9.2106e-01 | 9.2106e-01 | 2.1629e-12 |
| 6.0000e-01 | 8.2534e-01 | 8.2534e-01 | 3.7653e-12 |
| 8.0000e-01 | 6.9671e-01 | 6.9671e-01 | 5.6734e-12 |
| 1.0000e+00 | 5.4030e-01 | 5.4030e-01 | 7.8164e-12 |
| 1.2000e+00 | 3.6236e-01 | 3.6236e-01 | 1.0157e-11 |
| 1.4000e+00 | 1.6997e-01 | 1.6997e-01 | 1.2761e-11 |
| 1.6000e+00 | -2.9200e-02 | -2.9200e-02 | 1.5432e-11 |
| 1.8000e+00 | -2.2720e-01 | -2.2720e-01 | 1.6590e-11 |
| 2.0000e+00 | -4.1615e-01 | -4.1615e-01 | 7.6200e-12 |



Exemple 2 .Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

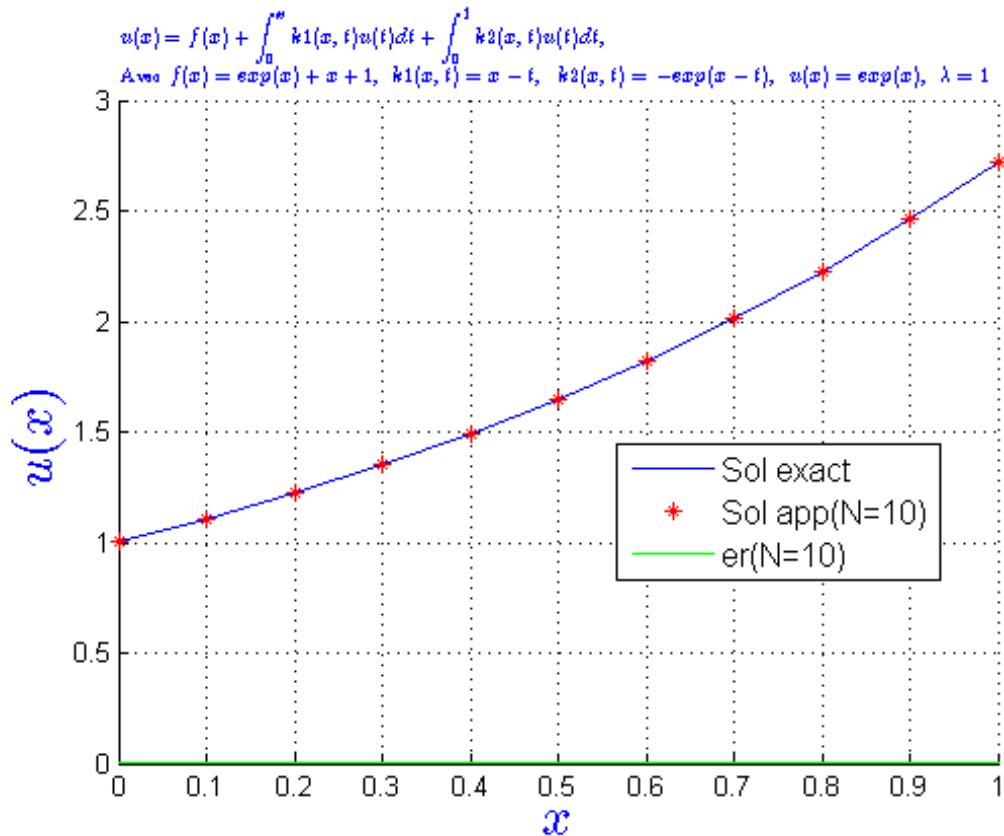
$$\varphi(x) - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt = e^x + x + 1, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

$$\varphi_{ex}(x) = e^x.$$

Table 2. Nous présentons la solution approchée φ_{app} , de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Bernoulli, en certains points, l'erreur est calculée

pour $n = 10$

| val x | $\varphi_{ex}(x)$ | φ_{app} | err |
|------------|-------------------|-----------------|------------|
| 0.0000 | 1.0000e+00 | 1.0000e+00 | 8.8920e-12 |
| 1.0000e-01 | 1.1052e+00 | 1.1052e+00 | 9.6396e-12 |
| 2.0000e-01 | 1.2214e+00 | 1.2214e+00 | 6.6591e-12 |
| 3.0000e-01 | 1.3499e+00 | 1.3499e+00 | 1.1888e-12 |
| 4.0000e-01 | 1.4918e+00 | 1.4918e+00 | 4.6734e-12 |
| 5.0000e-01 | 1.6487e+00 | 1.6487e+00 | 8.7570e-12 |
| 6.0000e-01 | 1.8221e+00 | 1.8221e+00 | 9.5588e-12 |
| 7.0000e-01 | 2.0138e+00 | 2.0138e+00 | 6.7453e-12 |
| 8.0000e-01 | 2.2255e+00 | 2.2255e+00 | 1.3149e-12 |
| 9.0000e-01 | 2.4596e+00 | 2.4596e+00 | 4.6860e-12 |
| 1.0000e+00 | 2.7183e+00 | 2.7183e+00 | 8.8911e-12 |



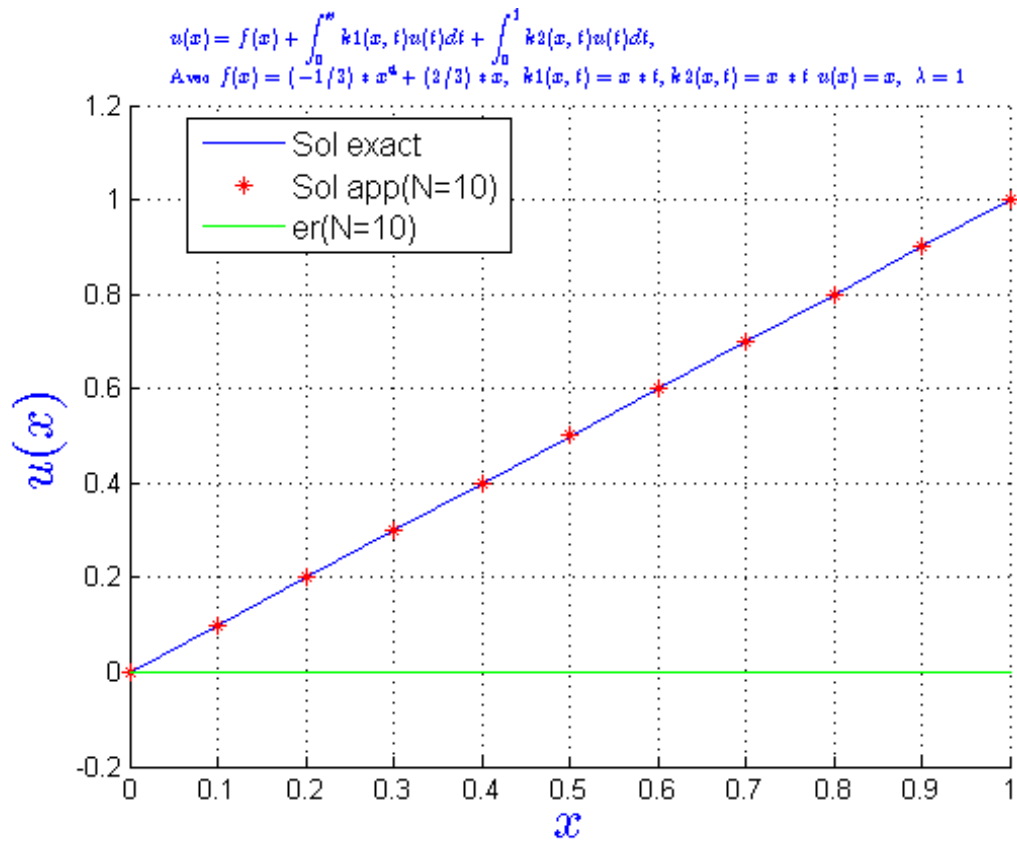
Exemple 3 Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) - \int_0^x xt\varphi(t)dt - \int_0^1 xt\varphi(t)dt = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

$$\varphi_{ex}(x) = x.$$

Table 3. Nous présentons la solution approchée φ_{app} , de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Bernoulli, en certains points, l'erreur est calculée pour $n = 10$

| val x | $\varphi_{ex}(x)$ | φ_{app} | err |
|------------|-------------------|-----------------|------------|
| 0.0000 | 0.0000 | -1.0532e-11 | 1.0532e-11 |
| 1.0000e-01 | 1.0000e-01 | 1.0000e-01 | 8.7590e-12 |
| 2.0000e-01 | 2.0000e-01 | 2.0000e-01 | 3.6275e-12 |
| 3.0000e-01 | 3.0000e-01 | 3.0000e-01 | 2.8579e-12 |
| 4.0000e-01 | 4.0000e-01 | 4.0000e-01 | 8.2226e-12 |
| 5.0000e-01 | 5.0000e-01 | 5.0000e-01 | 1.0457e-11 |
| 6.0000e-01 | 6.0000e-01 | 6.0000e-01 | 8.7322e-12 |
| 7.0000e-01 | 7.0000e-01 | 7.0000e-01 | 3.6859e-12 |
| 8.0000e-01 | 8.0000e-01 | 8.0000e-01 | 2.7951e-12 |
| 9.0000e-01 | 9.0000e-01 | 9.0000e-01 | 8.2420e-12 |
| 1.0000e+00 | 1.0000e+00 | 1.0000e+00 | 1.0532e-11 |



Exemple 4 Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

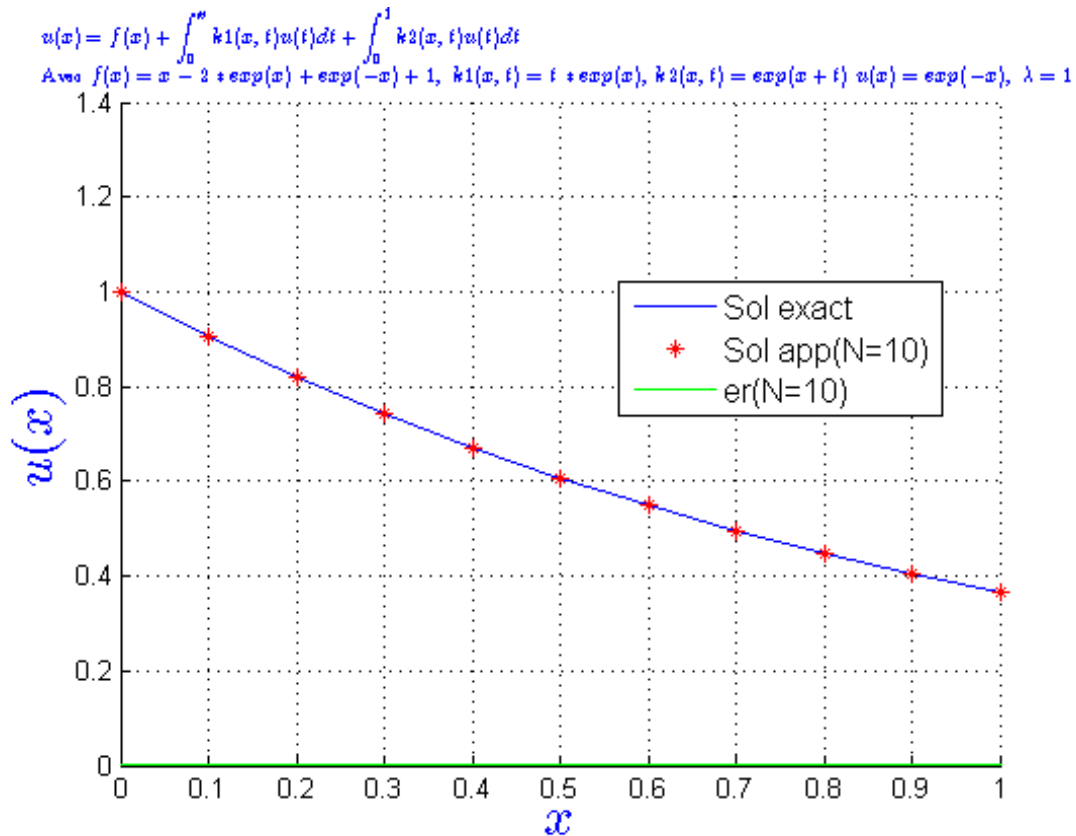
$$\varphi(x) - \int_0^x t e^x \varphi(t) dt - \int_0^1 e^{x+t} \varphi(t) dt = x - 2e^x + e^{-x} + 1, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

$$\varphi_{ex}(x) = \exp(-x).$$

Table 4. Nous présentons la solution approchée φ_{app} , de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Bernoulli, en certains points, l'erreur est calculée

pour $n = 10$

| val x | $\varphi_{ex}(x)$ | φ_{app} | err |
|------------|-------------------|-----------------|------------|
| 0.0000 | 1.0000e+00 | 1.0000e+00 | 2.1335e-11 |
| 1.0000e-01 | 9.0484e-01 | 9.0484e-01 | 1.7579e-11 |
| 2.0000e-01 | 8.1873e-01 | 8.1873e-01 | 7.1110e-12 |
| 3.0000e-01 | 7.4082e-01 | 7.4082e-01 | 6.0232e-12 |
| 4.0000e-01 | 6.7032e-01 | 6.7032e-01 | 1.6819e-11 |
| 5.0000e-01 | 6.0653e-01 | 6.0653e-01 | 2.1214e-11 |
| 6.0000e-01 | 5.4881e-01 | 5.4881e-01 | 1.7558e-11 |
| 7.0000e-01 | 4.9659e-01 | 4.9659e-01 | 7.2068e-12 |
| 8.0000e-01 | 4.4933e-01 | 4.4933e-01 | 5.9478e-12 |
| 9.0000e-01 | 4.0657e-01 | 4.0657e-01 | 1.6881e-11 |
| 1.0000e+00 | 3.6788e-01 | 3.6788e-01 | 2.1334e-11 |



Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire est de résoudre numériquement l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce. Pour atteindre cet objectif, une méthode basée sur l'expansion des solutions en séries de polynômes de Bernoulli a été utilisée. Cette méthode a permis de transformer l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce en un système d'équations algébriques, offrant ainsi une formulation plus facile à traiter numériquement. En outre, nous évaluons leurs performances en les testant sur plusieurs exemples représentatifs. Les résultats obtenus confirment l'efficacité de l'approche basée sur les polynômes de Bernoulli pour la résolution numérique de l'équation de Volterra-Fredholm. De plus cette méthode présente des avantages tels que la stabilité numérique et la convergence rapide.

Bibliographie

- [1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [2] A.M Wazwaz linear and nonlinear intigral equation.methods and application soint xavier iniversity
- [3] Noui DJAIDJA,Etude des équations intégrales de volterra de première espèce en utilisant les techniques des splines,Thèse de doctorat,Université de M'sila.
- [4] Maadadi Asma ,polynomes orthogonaux,Doctorat LMD,université de Bordj Bou Arréidj.
- [5] M.BOUDRIOUA MOHAMED SAMIR, Polynomes de Bernoulli ,Memoire Master ,université Mouloud MAMMERI Tizi-ouzou.
- [6] F. Calio , E. Marchetti, V. Muresan, On some Volterra-Fredholm integral equations,International Journal of Pure and Applied Mathematics,Volume 31 No. 2 2006, 174-184.
- [7] GI-SANC CHEONA, Note on the Bernoulli and Euler Polynomials, Applied Mathematics Letters 16 (2003) 365-368.
- [8] Wang, K.Y.; Wang, Q.S.Lagrange collocation method for solving Volterra–Fredholm integral equations. Appl. Math. Comput. 219, 10434–10440 (2013).
- [9] M. M. Muna and I. N. Ghanim. Numerical Solution of Linear Volterra-Fredholm Integral Equations Using Lagrange Polynomials, Mathematical Theory and Modeling, vol.4, no.5, pp. 137- 146, 2014.

- [10] Nemati, S. Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations using Legendre collocation method. *J. Comput. Appl. Math.* 278, 29–36 (2015).
- [11] Brunner, H.. On the numerical solution of Volterra–Fredholm integral equation by collocation methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 27(4), 87–96 (1990).