

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et informatiques
Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Quelques opérateurs non-linéaires et théorèmes de caractérisation

Présenté par :

Soumia BOUTBIG

Soutenu publiquement le:.././....

Devant le jury composé de :

Mr. Khalil Saadi	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. Maatougui Belaala	(MCB). Univ de M'sila	Encadreur
M r. Rachid Yahi	(MCB) . Univ de M'sila	Examineur

Remerciements

Avant tout ,je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclairer notre vie, renforce notre courage et notre volonté pour finir ce travail.

Je remercie particulièrement mon directeur de ce mémoire Monsieur **BELAALA Maatougui**,pour toute l'aide qu'il m'a apporté et sa patience ,ses conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Remerciement également aux professeurs **Mr.K.SAADI**,et **Mr.R.YAHI** qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.

Un grand merci à ma mère, ma famille, mes proches et mes collègues pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

Enfin, mes remerciements s'adressent à tous les enseignants du département de mathématiques pour leurs dévouements et leurs générosités.

Merci

Table des matières

Introduction	2
Notation	3
1 Préliminaires	5
1.1 Opérateur linéaire borné	5
1.2 Espaces de Banach classiques	6
1.2.1 Les espaces de suites ℓ_p	6
1.2.2 L'espace \mathcal{L}_p	8
1.3 Polynômes homogènes et opérateurs multilinéaires	9
1.3.1 Application multilinéaire	9
1.3.2 Polynômes homogènes de degré m	12
2 Espaces réflexifs et théorèmes de James	16
2.1 Espaces réflexifs	16
2.2 Caractérisation topologique	17
2.2.1 Théorème linéaire de James	19
2.3 Version non-linéaire du théorème de James	19
2.3.1 Version multilinéaire	19
2.3.2 Sur la réflexivité du produit tensoriel projectif	21
2.3.3 Version polynômiale	22
2.4 Version de type rayon-numérique	24

3	Version polynômiale et multilinéaire de théorème de Kwapien	27
3.1	Introduction	27
3.2	Caractérisation multilinéaire des espaces de Hilbert.	27
3.3	Caractérisation polynômiale d'un espace de Hilbert	31
3.3.1	Polynômes m-homogènes Cohen fortement p-sommants	31

Introduction

Le travail de ce mémoire, s'inscrit dans le cadre de la théorie d'opérateurs non-linéaires. Ils portent essentiellement sur les théorèmes de caractérisation des espaces de Banach. Il y a beaucoup de théorèmes qui caractérisent certains types d'espaces de Banach. La caractérisation de James des espaces réflexifs est l'un des résultats célèbres ; il utilise les formes linéaires d'un espace de Banach : X est réflexif si, et seulement si, toute

forme linéaire de X atteint sa norme. Les deux cas non-linéaires considérés ici sont le cas multilinéaire et polynômial. On note qu'une caractérisation multilinéaire signifie qu'on utilise les opérateurs multilinéaires au lieu d'opérateurs linéaires. Le théorème de Kwapien en 1970 donne une caractérisation d'un espace de Hilbert.

Ce travail est divisé en trois chapitres qui sont les suivants :

Dans le premier chapitre, on donnera un aperçu général sur les espaces de Banach notamment les petits ℓ_p et les espaces \mathcal{L}_p . Puis nous rappellerons quelques propriétés des applications non linéaires (les opérateurs multilinéaires et les polynômes homogènes de degré m).

Dans le deuxième chapitre, on abordera et traitera la version multilinéaire et polynômiale du théorème de James. Pour le cas multilinéaire, au lieu de prendre les formes linéaires, on va prendre les formes multilinéaires qui s'écrivent comme produit des formes linéaires et le théorème de James devient comme suit : les espaces X_1, \dots, X_m sont réflexifs si, et seulement si, toute forme multilinéaire de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ de la forme $\varphi = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^*$ atteint sa norme. Dans le cas des polynômes, on donnera deux versions, la première considère les polynômes de la forme $P_x^*(x) = x^*(x)^m$ et la deuxième prend les polynômes de la forme $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x) = x_1^*(x) \dots x_m^*(x)$.

Dans le troisième chapitre et en premier lieu, on fait un petit rappel sur les opérateurs Cohen fortement p -sommants introduits par Cohen en 1973 pour le cas linéaire et par Achour et Mezrag en 2007 pour le cas multilinéaire. On donnera une version polynômiale du théorème de Kwapien ; laquelle : X est isomorphe à un espace de Hilbert si, et seulement si, pour tout espace de Banach Y et tout polynôme homogène 2-dominé $P : X \rightarrow Y$, P est Cohen fortement 2-sommant.

Notation

$L(X, Y)$	Ensemble de tous les opérateurs linéaires de X dans Y .
$B(X; Y) = \mathcal{L}(X, Y)$	Espace d'opérateurs linéaires bornes (continues) de X dans Y .
B_X	Boule unité fermée de l'espace X .
B_{X^*}	Boule unité fermée de l'espace X^* .
\mathbb{k}	Corps des scalaires ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).
p^*	L'exposant conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).
X^*	Le dual topologique de X .
X^{**}	La bidual topologie de X .
T^*	L'adjoint d'opérateur T .
$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$	Espace d'opérateurs m -linéaires de (X_1, \dots, X_m) dans Y .
$C(K)$	Espace des fonctions continues sur un compact K à valeurs réelles.
$X_1 \otimes \dots \otimes X_m$	Le produit tensoriel algébrique.
$X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$	Le produit tensoriel projectif des espaces X_1, \dots, X_m .
$X_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon X_m$	Le produit tensoriel injectif des espaces X_1, \dots, X_m .
$\mathcal{P}(^m X; Y)$	Espace des polynômes homogènes de degré m .
J_X	Plongement canonique.
$\Pi_p^L(X, Y)$	Espace des opérateurs p -sommants de X dans Y .
$D_p(X, Y)$	Espace des opérateurs fortement p -sommants de X dans Y .
$\Pi_p(X, Y)$	Espace des opérateurs p -sommants de X dans Y .

μ

Mesure de probabilité régulière positive sur l'espace compact Ω .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base utilisées dans notre travail, à savoir les définitions importantes et les théorèmes fondamentaux. Dans la deuxième partie, nous rappelons quelques propriétés des applications non linéaires (multilinéaire, produit tensoriel, Polynômes homogènes de degré m) .

1.1 Opérateur linéaire borné

Définition 1.1.1 Soient X, Y deux espaces de Banach définis sur le même corps \mathbb{k} .L'application $T : X \rightarrow Y$ est dite linéaire si :

$$1-\forall x, y \in X : T(x + y) = T(x) + T(y) .$$

$$2-\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{k} : T(\lambda x) = \lambda T(x) .$$

On note $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires de X dans Y .

Si $Y = \mathbb{k}$, $L(X, \mathbb{k}) = X'$, X' s'appelle le dual algébrique de X .

Définition 1.1.2 Soit $T \in L(X, Y)$.L'application linéaire T est dite borné ou continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in X : \| T(x) \|_Y \leq C \| x \|_X . \quad (1.1)$$

On note $B(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires bornées muni de la norme :

$$\begin{aligned} \| T \| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \\ &= \sup_{\| x \| \leq 1} \| T(x) \| . \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\forall x \in X, \| T(x) \| \leq \| T \| \| x \| .$$

Cas particulier :

Si $Y = \mathbb{k}$, $B(X, \mathbb{k}) = X^*$, s'appelle le dual topologique de X .

Remarque 1.1.1 $B(X, \mathbb{k}) \subset L(X, \mathbb{k})$.

1.2 Espaces de Banach classiques

1.2.1 Les espaces de suites ℓ_p

Définition 1.2.1 Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R} et $p \in [0, +\infty[$. On définit l'ensemble ℓ_p par :

$$\ell_p = \ell_p(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\} .$$

muni de la norme :

$$\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Si $p = +\infty$, on définit ℓ_∞ par :

$$\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}.$$

muni de la norme :

$$\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Définition 1.2.2 [5] Soit X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$, p^* est le conjugué de p i.e, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. On note par $\ell_p^n(X)$ l'espace de toutes les suites $(x_i)_{i=1}^n$ de X muni de la norme

$$\| (x_n)_{1 \leq i \leq n} \|_{\ell_p^n(X)} = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et par $\ell_p^\omega(X)$ l'espace de toute suite $(x_i)_{i=1}^n$ de X muni de la norme :

$$\| (x_n) \|_{\ell_p^\omega(X)} = \sup_{\|x^*\|_{X^*}=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Où X^* est le dual topologique de X .

Théorème 1.2.1 L'espace ℓ_2 est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n.$$

Théorème 1.2.2 Tout espace de Hilbert séparable admet une base dénombrable est isomorphe à ℓ_2 .

Théorème 1.2.3 Soit $1 < p < +\infty$. On a :

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*}.$$

Avec p^* est le cojugué de p i.e; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Proposition 1.2.1 *Soit $1 < p < +\infty$. L'espace ℓ_p est reflexif alors :*

$$(\ell_p)^{**} = \ell_p.$$

Proposition 1.2.2 *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Nous avons les inclusions suivantes :*

$$\ell_1 \subset \dots \subset \ell_p \subset \ell_q \subset \dots \subset \ell_\infty.$$

1.2.2 L'espace \mathcal{L}_p

Un espace de Banach X est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ si tout sous-espace de dimension finie $E \subset X$ est contenu dans un sous-espace de dimension finie $F \subset X$ pour lequel il existe un isomorphisme $u : F \rightarrow \ell_p^{\dim F}$ avec $\|u\| \|u^{-1}\| < \lambda$. X est un espace \mathcal{L}_p s'il s'agit d'un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour certains $\lambda > 1$. L'espace $\mathcal{L}(\Omega, \mu)$ est un espace \mathcal{L}_p pour tout $\lambda > 1$ ($1 \leq p < \infty$) et tout $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -espace est isomorphe à un sous-espace de certains $L_p(\Omega, \mu)$. Si K est un espace Hausdorff compact , alors $C(K)$ est un espace $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ pour tout $\lambda > 1$. [5]

Définition 1.2.3 *(Sous espace complémenté) [17] Soit X un espace de Banach et Y un sous espace fermé de X . On dit que Y est complémenté de X s'il existe un sous espace fermé Z tel que :*

$$X = Y \oplus Z.$$

Le sous espace fermé Z s'appel le complément de Y .

Théorème 1.2.4 *Un sous espace fermé Y d'un espace de Banach X est complémenté de X si et seulement si, il est l'image d'une projection continue de X .*

1) Tout sous espace fermé d'un espace de Hilbert H est complémenté dans H .

2) Les ℓ_p^n sont complétés dans ℓ_p .

Proposition 1.2.3 [9]

1) Si $1 < p < \infty$ et X est un espace \mathcal{L}_p , alors X^{**} est isomorphe à un sous espace complété de $L_p(\mu)$.

2) Si X est un espace \mathcal{L}_1 (resp. \mathcal{L}_∞), alors X est isomorphe à un sous espace complété de $L_1(\mu)$ (resp. $C(K)$).

Inversement, si X est un sous espace complété de L_p ($1 < p < \infty$), alors X est un espace \mathcal{L}_p ou bien isomorphe à un espace de Hilbert.

Proposition 1.2.4 [9]

1) Si X est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour tout $\lambda \geq 1$, alors X est un $L_p(\mu)$.

2) Tout espace de Hilbert est un espace $\mathcal{L}_{2,\lambda}$ pour tout $\lambda \geq 1$.

1.3 Polynômes homogènes et opérateurs multilinéaires

1.3.1 Application multilinéaire

Soient X_1, \dots, X_m, Y des espaces de Banach. L'application $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est dite multilinéaire (ou m -linéaire) s'il est linéaire par rapport à chaque composante. Il est borné (ou continue) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in X_1, \dots, X_m$, on a :

$$\| T(x_1, \dots, x_m) \| \leq C \| x_1 \| \dots \| x_m \| \tag{1.2}$$

On note $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m -linéaires bornés qui est Banach dont sa norme est la plus petite constante C vérifiant (1.2). Elle peut s'exprimer aussi

par :

$$\| T \| = \sup_{\|x_j\| \leq 1; 1 \leq j \leq m} \| T(x_1, \dots, x_m) \| .$$

Si $Y = \mathbb{R}$, on écrit simplement $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; \mathbb{R}) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ et s'appelle forme multilinéaire.

Opérateur adjoint

Soient X_1, \dots, X_m, Y des espaces de Banach. A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ on associe l'opérateur adjoint suivant :

$$T^* : Y^* \rightarrow \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m).$$

défini par $T^*(y^*) : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow \mathbb{k}$ où $T^*(y^*)(x^1, \dots, x^m) = y^*(T(x^1, \dots, x^m))$ ou ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Produit tensoriel projectif [7]

Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de X_1, \dots, X_m . On définit la norme projective par :

$$\| v \|_{\pi} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \| x_i^j \| \right\}$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations possibles de v de la forme :

$$v = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m.$$

Le complété de $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ pour cette norme sera noté $X_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} X_m$ qui s'appelle le produit tensoriel projectif des espaces X_1, \dots, X_m . Si $X_1 = \dots = X_m = X$, on écrit simplement $\hat{\otimes}_{\pi}^m X$.

On note le produit tensoriel symétrique par $\otimes_s^m X = X \otimes_s \overbrace{\dots}^{(m)} \otimes_s X$, et on note la fermeture de $\otimes_s^m X$ dans $\hat{\otimes}_\pi^m X$ par $\hat{\otimes}_{\pi,s} X$.

Produit tensoriel injectif :

On définit la norme injective par :

$$\| v \|_\varepsilon = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m | x_j^* (x_i^j) | \right\},$$

où le supremum est porté sur toutes les représentations possibles de v de la forme :

$$v = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m.$$

Le complété de $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ pour cette norme sera noté $X_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon X_m$ qui s'appelle le produit tensoriel injectif des espaces X_1, \dots, X_m . Si $X_1 = \dots = X_m = X$, on écrit simplement $\hat{\otimes}_\varepsilon^m X$.

Opérateur linéarisé :

A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1, \dots, X_m \rightarrow Y$ on peut lui associer un opérateur linéaire $\tilde{T} : X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m \rightarrow Y$, appelé linéarisation de T et définit par :

$$\tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \right) = \sum_{i=1}^n T (x_i^1, \dots, x_i^m).$$

Il est bien défini, car il ne dépend pas de représentation choisie (voir [19]). . De plus, \tilde{T} est unique et $\| \tilde{T} \| = \| T \|$.

On a aussi $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = B (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$.

car l'application $\Phi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) \rightarrow B (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$

$$T \rightarrow \Phi(T) = \tilde{T}$$

est une isométrie surjective.

Cas particulier :

$$(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m)^* = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m). \quad (1.3)$$

1.3.2 Polynômes homogènes de degré m

Pour définir le polynôme homogène ,on donne la définition des opérateurs multilinéaires symétriques.

Définition 1.3.1 (*Opérateur Multilinéaire symétrique*): Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $T : \underbrace{X \times \dots \times X}_{(m)} \rightarrow Y$ un opérateur multilinéaire , T est dit symétrique si :

$$T \circ \sigma(x_1, \dots, x_m) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = T(x_1, \dots, x_m).$$

pour toute permutation σ .

On note $\mathcal{L}_s(mX; Y)$ l'espace des opérateurs multilinéaires symétriques.

A chaque opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(mX; Y)$,on peut associer un opérateur symétrique $T_s \in \mathcal{L}_s(mX; Y)$.En effet, soit

$T : \underbrace{X \times \dots \times X}_{(m)} \rightarrow Y$ un opérateur m -linéaire, posons :

$$T_s = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} T \circ \sigma.$$

L'opérateur T_s s'appelle opérateur symétré de T . On a :

(1) Si $T \in \mathcal{L}(mX; Y)$, alors $T_s \in \mathcal{L}_s(mX; Y)$.

(2) $T_s = T$ si et seulement si T est symétrique.

(3) L'opérateur linéaire $S : \mathcal{L}(^m X; Y) \rightarrow \mathcal{L}_S(^m X; Y)$

$$T \rightarrow S(T) = T_S$$

est une projection.

Définition 1.3.2 (*Polynôme homogène de degré m*) Fixons $m \in \mathbb{N}^*$. Soient X, Y deux espaces de Banach. L'application $P : X \rightarrow Y$ est un polynôme homogène de degré m , s'il existe un opérateur multilinéaire symétrique $\hat{T} \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ tel que :

$$P(x) = \hat{T}(x, \overbrace{\dots}^m, x).$$

On note $\mathcal{P}(^m X; Y)$; l'espace des polynômes homogènes de degré m de X dans Y muni de la norme

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup \{ \|P(x)\|, \|x\| \leq 1 \} \\ &= \inf \{ C : \|P(x)\| \leq C \|x\|^m \text{ pour tout } x \in X \} \end{aligned}$$

Si $Y = \mathbb{k}$, on écrit simplement $\mathcal{P}(^m X)$.

Si $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$; on définit sa linéarisation : $\tilde{P} : \hat{\otimes}_{\pi, s}^m X \rightarrow Y$ par :

$$\tilde{P} \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \overbrace{\dots}^{(m)} \otimes x_i \right) = \sum_{i=1}^n P(x_i).$$

où $x_{1 \leq i \leq n} \in X$.

Proposition 1.3.1 La correspondance $P \leftrightarrow \hat{T}$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{P}(^m X; Y)$ et $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$

Proposition 1.3.2 (*Formule de polarisation*) Nous avons pour tout $T \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ ([18]Théorème 1.10)

$$T(x^1, \dots, x^m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m P_T \left(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j x^j \right)$$

où P_T est le polynôme associé à T . De plus, P_T est borné sur la boule unité de X si et seulement si T est borné. Les deux normes vérifient l'inégalité suivante : ([18]Théorème 2.2)

$$\| P_T \| \leq \| T \| \leq \frac{m^m}{m!} \| P_T \| .$$

Opérateurs diagonaux :

Les plongements naturels de X dans $X \times \underbrace{\dots}_m \times X$ et $\hat{\otimes}_\pi^m X$ notés Δ_m et δ_m respectivement.

Ils sont définis par :

$$\begin{aligned} \Delta_m : X &\rightarrow X \times \dots \times X & \delta_m : X &\rightarrow \hat{\otimes}_\pi^m X \\ x &\rightarrow (x, \dots, x) & x &\rightarrow x \otimes \dots \otimes x \end{aligned} ,$$

Il est clair que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \Delta_m \downarrow & \searrow \delta_m & \\ X \times \underbrace{\dots}_m \times X & \xrightarrow{i_m} & \hat{\otimes}_\pi^m X \end{array}$$

i.e, $i_m \circ \Delta_m = \delta_m$ où i_m est l'opérateur multilinéaire canonique, de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans $X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$ défini par :

$$i_m(x_1, \dots, x_m) = x_1 \otimes \dots \otimes x_m.$$

On a aussi le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_m & & \\ i_m \downarrow & \searrow T & \\ X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m & \xrightarrow{\hat{T}} & Y \end{array}$$

Proposition 1.3.3 *Un opérateur $P : X \rightarrow Y$ est un polynôme de degré m , si et seulement si, il existe $T \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Delta_m} & X \times \dots \times X \\
 \delta_m \downarrow & \searrow P & \downarrow T \\
 \hat{\otimes}_{\pi}^m X & \xrightarrow{\tilde{T}} & Y
 \end{array}$$

Preuve. Soit T_S l'opérateur symétrique de T , Par définition et le diagramme ci-dessus, on a : ■

$$S_T(x, \dots, x) = T(x, \dots, x) = T \circ \Delta_m(x) = P(x).$$

Chapitre 2

Espaces réflexifs et théorèmes de James

Dans ce chapitre, Commençons par définition de l'espace réflexif et caractérisation topologique, puis on discute les théorèmes de caractérisation de James linéaire et non linéaire (multilinéaire, polynômiale et type rayon numérique).

2.1 Espaces réflexifs

Définition 2.1.1 (*plongemet canonique*) Soit X espace de Banach. On définit le plongement canonique, noté J_X , de X dans son bidual X^{**} par :

$$J_X(x) : X^* \rightarrow \mathbb{k}$$

avec $J_X(x)(x^*) = x^*(x)$.

L'application J_X est toujours isométrique. En effet, soit $x \in X$, alors :

$$\begin{aligned} \| J_X(x) \| &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} | J_X(x)(x^*) | \\ &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} | x^*(x) | \\ &= \| x \| \end{aligned}$$

On note que J_X n'est pas nécessairement surjective. Si on a le cas, nous donnons donc la définition suivante.

Définition 2.1.2 *Soit X un espace de Banach. L'espace X est réflexif si son plongement canonique J_X est surjectif.*

Remarque 2.1.1 [2] *Le plongement canonique $J_X : X \rightarrow X^{**}$ n'est pas toujours surjectif. En effet, si $X = c_0$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$, on a $X^* = \ell_1, X^{**} = \ell_\infty$ et le plongement canonique $J_X : X \rightarrow X^{**}$ correspond à l'injection canonique $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$. Donc J n'est pas surjectif.*

- 1) Les espaces normés de dimension finies sont réflexifs.
- 2) Pour tout $p \in]1, +\infty[$, ℓ_p est réflexif.

Théorème 2.1.1 *L'espace X est réflexif si et seulement si X^* est réflexif.*

2.2 Caractérisation topologique

Définition 2.2.1 *(Topologie faible) Soit X un espace de Banach et X^* son dual. On définit la topologie faible de X comme étant la topologie la moins fine qui rend toutes formes linéaires de X^* continues.*

La convergence dans cette topologie se caractérise par :

$$x_n \text{ tend faiblement vers } x \iff \forall x^* \in X^* : \langle x^*, x_n \rangle \rightarrow \langle x^*, x \rangle.$$

Bien entendu, la topologie faible est moins fine que la topologie forte (de norme) et la convergence en norme implique la convergence faible.

On note aussi que la fermeture en norme des sous espaces vectoriels et parties convexes de X reste la même dans la topologie faible. Le théorème suivant caractérise les espaces de Banach réflexifs.

Théorème 2.2.1 [6] *Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si sa boule d'unité fermée B_X est compacte pour la topologie faible.*

Définition 2.2.2 (Topologie $*$ -faible) *Soit X un espace de Banach, dans l'espace X^* on définit la topologie $*$ -faible comme étant la topologie la moins fine rendant continues les applications suivantes :*

$$\begin{aligned} x &: X^* \rightarrow \mathbb{k} \\ x^* &\longmapsto x^*(x) \end{aligned}$$

La convergence dans cette topologie se caractérise par :

$$x_n^* \text{ tend } * \text{-faiblement vers } x^* \iff \forall x \in X : \langle x, x_n^* \rangle \rightarrow \langle x, x^* \rangle.$$

Une grande motivation d'introduire cette topologie est de récupérer la compacité de la boule unité fermée de X^* .

Corollaire 2.2.1 *La boule unité fermée de X^* est compacte pour la topologie $*$ -faible.*

Remarque 2.2.1 *Si l'espace de Banach X possède un préduel (i.e., $\exists G$ espace de Banach tel que $X = G^*$, généralement G n'est pas unique), on peut dans ce cas définir les trois topologies dans X , forte, faible et $*$ -faible. On note aussi que la topologie $*$ -faible est moins fine que la topologie faible et par conséquent, la convergence faible implique la convergence $*$ -faible.*

Théorème 2.2.2 [15] *Un sous ensemble C fermé et convexe d'un espace de Banach X est faiblement compact si et seulement si toute forme linéaire de X^* atteint sa norme sur C .*

Théorème 2.2.3 [8] *Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si sa boule d'unité fermée B_X est faiblement compacte.*

Théorème 2.2.4 *Soit X un espace de Banach, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) L'espace X est réflexif.
- 2) La topologie faible et *-faible sont coïncides dans X^* et qui est l'unique préduel de X .

2.2.1 Théorème linéaire de James

Définition 2.2.3 Soit X un espace de Banach, la forme linéaire x^* de X^* atteint sa norme s'il existe x_0 de B_X tel que

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| \\ &= \|x^*\| |x^*(x_0)|. \end{aligned}$$

Définition 2.2.4

Le théorème suivant est une caractérisation de la réflexivité de James.

Théorème 2.2.5 (James) [6] Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si toute forme linéaire de X^* atteint sa norme.

Théorème 2.2.6 Un sous ensemble faiblement fermé C d'un espace de Banach X est faiblement compact si et seulement si toute forme linéaire x^* de X^* atteint son maximum sur C , i.e.,

$$\forall x^* \in X^*, \exists x_0 \in C : |x^*(x_0)| = \sup_{x \in C} |x^*(x)|.$$

2.3 Version non-linéaire du théorème de James

2.3.1 Version multilinéaire

Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ une forme multilinéaire. On dit que la norme de φ est atteinte s'il existe $x_1^0 \in B_{X_1}, \dots, x_m^0 \in B_{X_m}$ tels que :

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{x_j \in B_{X_j}, 1 \leq j \leq m} |\varphi(x_1, \dots, x_m)| \\ &= |\varphi(x_1^0, \dots, x_m^0)|. \end{aligned}$$

Le théorème suivant généralise celle de James pour plusieurs espaces de Banach.

Théorème 2.3.1 *Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Les espaces X_1, \dots, X_m sont réflexifs.

(b) Toute forme multilinéaire de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ de la forme $\varphi = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^*$ atteint sa norme.

(a) \Rightarrow (b) : On suppose que X_1, \dots, X_m sont réflexifs. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ de la forme $\varphi = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^*$ où $x_j^* \in X_j^*$ ($1 \leq j \leq m$). Alors, d'après le Théorème de James

x_j^* atteint sa norme, i.e., $\exists x_j^0 \in B_{X_j}$ tel que $\|x_j^*\| = |x_j^*(x_j^0)|$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{x_j \in B_{X_j}, 1 \leq j \leq m} |x_1^*(x_1) \dots x_m^*(x_m)| \\ &= \prod_{j=1}^m \sup_{x_j \in B_{X_j}} |x_j^*(x_j)| \\ &= \prod_{j=1}^m |x_j^*(x_j^0)| = |\varphi(x_1^0, \dots, x_m^0)|. \end{aligned}$$

(b) \Rightarrow (a) fixons $1 \leq j \leq m$. Pour tout $1 \leq k \leq m$, ($k \neq j$), on choisit $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $\|x_k^*\| = 1$. Soit maintenant $x^* \in X_j$, on pose la forme multilinéaire suivante :

$$\varphi = x_1^* \otimes \dots \otimes x^* \otimes \dots \otimes x_m^* \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m).$$

Il est facile de voir que $\|\varphi\| = \|x^*\|$. D'après (b), φ atteint sa norme, i.e., il existe $x_1^0 \in B_{X_1}, \dots, x_m^0 \in B_{X_m}$ tels que :

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= |\varphi(x_1^0, \dots, x_m^0)| \\ &= |x_1^*(x_1^0) \dots x^*(x_j^0) \dots x_m^*(x_m^0)| \\ &\leq \|x_1^*\| \dots |x^*(x_j^0)| \dots \|x_m^*\| = |x^*(x_j^0)|, \end{aligned}$$

c'est à dire $\|x^*\| \leq |x^*(x_j^0)|$. D'autre part,

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_{X_j}} |x^*(x)| \geq |x^*(x_j^0)|.$$

D'où $\|x^*\| = |x^*(x_j^0)|$. En déduire d'après le théorème de James que X_j est réflexif.

2.3.2 Sur la réflexivité du produit tensoriel projectif

Corollaire 2.3.1 [6] *Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) L'espace $X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$ est réflexif.
- (b) Toute forme multilinéaire de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ atteint sa norme.

Remarque 2.3.1 *Si X n'est pas réflexif, pour tout espace de Banach Y , le produit projectif $X \hat{\otimes}_\pi Y$ n'est jamais réflexif. En effet, sinon, on peut construire une forme bilinéaire à partir d'une forme linéaire quelconque de X de la forme $x^* \otimes y^*$ avec $\|y\| = 1$. Par un argument similaire au Théorème 2.2.6 on conclut que x^* atteint sa norme.*

Lemme 2.3.1 *Pour tous espaces de Banach X_1, \dots, X_m, Y , on a l'identification isométrique*

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y^*)^* \quad (2.1)$$

Proposition 2.3.1 *Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) L'espace $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est réflexif.
- (b) Tout opérateur multilinéaire de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ atteint sa norme.

Corollaire 2.3.2 *Si $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est réflexif, alors tous les espaces $X_1, \dots, X_m; Y$ sont réflexifs.*

Contrairement, si l'un de ces espaces est non réflexif alors l'espace $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est non réflexif.

2.3.3 Version polynômiale

Soit X un espace de Banach. Soit $x^* \in X^*$, on définit le polynôme homogène de degré m suivant :

$$P_{x^*}(x) = \underbrace{x^*(x) \dots x^*(x)}_{m \text{ fois}} = x^*(x)^m.$$

Dans ce cas, on a :

$$\|P_{x^*}\| = \sup_{x \in B_X} |P_{x^*}(x)| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)^m| = \|x^*\|^m.$$

Le multilinéaire symétrique associé à ce polynôme est donné par

$$T = \underbrace{x^* \otimes \dots \otimes x^*}_{m \text{ fois}}.$$

Définition 2.3.1 [14] *Soit $P \in \mathcal{P}({}^m X)$ un polynôme de X dans \mathbb{k} . Ce polynôme est dit atteint sa norme s'il existe $x^0 \in B_X$ tel que*

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} |P(x)| = |P(x^0)|.$$

Théorème 2.3.2 *(La première version polynômiale du Théorème de James) :*

Soit X un espace de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(a) L'espace X est réflexif.

(b) Tout polynôme de $\mathcal{P}({}^m X)$ de la forme P_{x^*} atteint sa norme.

(a) \Rightarrow (b) . On suppose que X est réflexif. Soit $P \in \mathcal{P}({}^m X)$ de la forme $P_{x^*} = \otimes^m x^*$ où $x^* \in B_{X^*}$. Alors, d'après le Théorème de James x^* atteint sa norme, i.e., $\exists x^0 \in B_X$ tel que $\|x^*\| = |x^*(x^0)|$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|P_{x^*}\| &= \sup_{x \in B_X} |x^*(x)^m| \\ &= \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|^m = |x^*(x^0)|^m = P_{x^*}(x^0). \end{aligned}$$

Alors P_{x^*} atteint sa norme.

(b) \Rightarrow (a) . On suppose que P_{x^*} atteint sa norme.

Soit $x^* \in X^*$, on pose

$$P_{x^*}(x) = \underbrace{x^*(x) \dots x^*(x)}_{m \text{ fois}} \in \mathcal{P}({}^m X).$$

Nous avons, $\|P_{x^*}\| = \|x^*\|^m$. D'après (b), P_{x^*} atteint sa norme, i.e., il existe $x^0 \in B_X$ tel que

$$\|P_{x^*}\| = |P_{x^*}(x^0)| = \|x^*\|^m,$$

ce qui implique que, $\|x^*\| = |x^*(x^0)|$.En déduire d'après le Théorème de James que X est réflexif.

Considérons maintenant $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$, on définit le polynôme (n'est pas homogène) suivant

$$P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x) = x_1^*(x) \dots x_m^*(x).$$

La norme de ce polynôme est

$$\|P_{x_1^*, \dots, x_m^*}\| = \sup_{x \in B_X} |P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x)| = \sup_{x \in B_X} |x_1^*(x) \dots x_m^*(x)| = \prod_{j=1}^m \|x_j^*\|.$$

Théorème 2.3.3 (Deuxième version) :

Soit X un espace de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'espace X est réflexif.

(b) Pour tous $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$ le polynôme $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}$ atteint sa norme.

(a) \Rightarrow (b). On suppose que X est réflexif. Soit $P \in \mathcal{P}({}^m X)$ de la forme $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x) = x_1^*(x) \dots x_m^*(x)$. Où $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$.

Alors, d'après le Théorème de James $x_i^*(1 \leq i \leq m)$ atteint sa norme, i.e $\exists x^0 \in B_X$ tel

que $\|x_i^*\| = |x_i^*(x^0)|$, nous avons

$$\begin{aligned} \|P_{x_1^*, \dots, x_m^*}\| &= \sup_{x \in B_X} |P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x)| \\ &= \sup_{x \in B_X} |x_1^*(x) \dots x_m^*(x)| \\ &= |x_1^*(x^0) \dots x_m^*(x^0)| \\ &= |P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x^0)| \end{aligned}$$

i.e. $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}$ atteint sa norme.

(b) \Rightarrow (a). On suppose que $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}$ atteint sa norme, soient $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$ on pose $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x) = x_1^*(x) \dots x_m^*(x)$ cela indique qu'il existe $x^0 \in B_X$ tel que

$$\|P_{x_1^*, \dots, x_m^*}\| = \sup_{x \in B_X} |P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x^0)| = |x_1^*(x^0) \dots x_m^*(x^0)| = \prod_{j=1}^m \|x_j^*\|,$$

ce qui implique que

$$\|x_i^*\| = |x_i^*(x^0)|.$$

En déduire, selon le Théorème de James que X est réflexif.

2.4 Version de type rayon-numérique

Pour énoncer la troisième version de théorème de James décrite dans [1], rappelons que le rang numérique d'un opérateur $T \in B(X, X)$ (espace de Banach de tous les opérateurs

linéaires bornés sur X) est l'ensemble borné des scalaires

$$V(T) := \{x^*(Tx) : (x, x^*) \in \Pi(X)\},$$

où $\Pi(X) := \{(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*} : x^*(x) = 1\}$. Et le rayon numérique de T est donné par :

$$v(T) := \sup \{|\mu| : \mu \in V(T)\}.$$

L'opérateur T est atteint son rayon numérique quand le sup qui définit $v(T)$ est le max.

Dans cette version de théorème de James posée ici, on utilise uniquement les opérateurs de rang 1 (rank-one operators), qui sont définis de X dans X par

Si $x \in X$ et $x^* \in X^*$ alors $x^* \otimes x$ dénotera l'opérateur défini sur X par :

$$(x^* \otimes x)(y) := x^*(y)x, \quad y \in X.$$

Proposition 2.4.1 *Si B est l'ensemble défini par :*

$$B = \{y^*(x_0)y : (y, y^*) \in \Pi(X)\}$$

alors le rang numérique de l'opérateur $x^* \otimes x_0$ atteint son rayon numérique sur B .

Pour $x^* \in X^*$ on a que :

$$\begin{aligned} v(x^* \otimes x_0) &= \sup_{(y, y^*) \in \Pi(X)} \{|y^*(x^* \otimes x_0)(y)|\} \\ &= \sup_{(y, y^*) \in \Pi(X)} \{|y^*(x^*(y)(x_0))|\} \\ &= \sup_{(y, y^*) \in \Pi(X)} \{|(x^*(y)y^*(x_0))|\} \text{ (car } y^* \text{ linéaire)} \\ &= \sup_{(y, y^*) \in \Pi(X)} \{|(x^*(y^*(x_0))y)|\} \\ &= \sup_{b \in \Pi(X)} |x^*(b)|. \end{aligned}$$

Théorème 2.4.1 Soit X un espace de Banach et $x_0 \in X \setminus \{0\}$ tel que le sous ensemble :

$$\{x^* \in X^* : x^* \otimes x_0 \text{ atteint son rayon numérique}\},$$

possède un intérieur non vide $*$ -faible. Alors, X est réflexif.

Remarque 2.4.1 Le résultat précédent se généralise voir (Théorème 1, [4]) comme le suivant :

Un espace de Banach est réflexif si chaque opérateur atteint son rayon numérique.

Dans la proposition suivante, on obtient une réciproque partielle du résultat précédent.

Proposition 2.4.2 Soit X un espace de Banach réflexif et $x_0 \in X$, alors il existe une norme équivalente sur X telle que pour tout x^* de X^* l'opérateur $x^* \otimes x_0$ atteint son rayon numérique.

Corollaire 2.4.1 Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si pour certain $x_0 \in X$, ($x_0 \neq 0$), il existe une norme équivalente telle que l'opérateur $x^* \otimes x_0$ atteint son rayon numérique pour tout x^* de X^* .

Chapitre 3

Version polynômiale et multilinéaire de théorème de Kwapien

3.1 Introduction

Dans l'article de Cohen [11] , il a montré que $\Pi_2(H; Y) \subseteq \mathcal{D}_2(H; Y)$ pour tout espace de Banach Y et tout espace de Hilbert H . Kwapien [16] a donné une version réciproque de ce théorème de Cohen : X est isomorphe à un Hilbert si et seulement si, pour tout espace de Banach Y ; on a $\Pi_2(H; Y) \subseteq \mathcal{D}_2(H; Y)$, puis dans [10] Q.Bu a généralisé ce résultat de Kwapien pour tous $1 < p, q < \infty$ i.e $\Pi_p(X; Y) \subseteq D_q(X; Y)$. Dans ce chapitre, on s'intéresse à donner une version multilinéaire et polynômiale de cette caractérisation.

Les concepts de ce chapitre sont inspirés en général des deux articles [3] et [5] .

3.2 Caractérisation multilinéaire des espaces de Hilbert.

Définition 3.2.1 [12] *Un opérateur u entre espaces de Banach X, Y est Cohen fortement p -sommant ($1 < p < \infty$) s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ on a :

$$\sum_{i=1}^n |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{\ell_p^n}^* . \quad (3.1)$$

La plus petite constante C , notée $d_p(u)$, telle que l'inégalité (3.1) a lieu, définit la norme fortement p -sommante sur l'espace de Banach $\mathcal{D}_p(X; Y)$ des opérateurs Cohen fortement p -sommants de X dans Y . Pour $p = 1$, l'espace $\mathcal{D}_1(X; Y)$ coïncide avec $B(X; Y)$; l'espace des opérateurs bornés de X dans Y .

Définition 3.2.2 [13] Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. L'opérateur T est fortement p -sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_j^1, \dots, x_j^n \in X_j, (j = 1, \dots, m)$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\phi \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)} \left(\sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \quad (3.2)$$

La classe des opérateurs m -linéaires fortement p -sommants de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , notée $\mathcal{L}_s^p(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un espace de Banach pour la norme $\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}$ qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité (3.2) soit vérifiée.

Définition 3.2.3 [3] Soient $m \in \mathbb{N}$ et X_j, Y des espaces de Banach ($j = 1, \dots, m$). Un opérateur m -linéaire

$T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est Cohen fortement p -sommant, $1 < p \leq \infty$; s'il existe une constante positive C telle que pour tout $x_j^1, \dots, x_j^n \in X_j$ et tout $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{\ell_p^n}^* . \quad (3.3)$$

La classe des opérateurs m -linéaires Cohen fortement p -sommants de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , notée $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$d_p^m(T) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (3.3)}\}.$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Théorème 3.2.1 [16] *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- 1) X est isomorphe à un espace de Hilbert.
- 2) Pour tout espace de Banach Y , $\Pi_2(X; Y) \subseteq \mathcal{D}_2(X; Y)$.
- 3) Pour tout espace de Banach Y , $\mathcal{D}_2(Y; X) \subseteq \Pi_2(Y; X)$.

(1) \Rightarrow (2) Par le théorème de Cohen.

(2) \Rightarrow (1) Préliminaire : Soient $K = B_{X^*}$ muni de la topologie $*$ -faible et $(x_i^*)_{i \in \mathbb{N}} \subset C(K)^*$ tels que $\|(x_i^*)_{i \in \mathbb{N}}\|_{\ell_2^\omega(C(K)^*)} \leq 1$. On lui associe l'application linéaire :

$$u : C(K) \rightarrow \ell_2$$

définie par $u(x) = (\langle x, x_i^* \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$. L'application u est bornée car

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle x, x_i^* \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|(x_i^*)_{i \in \mathbb{N}}\|_{\ell_2^\omega(C(K)^*)} \leq 1.$$

D'après le petit théorème de Grothendieck, elle est 2-sommante, ce qui implique que

$$u \circ i_X : X \rightarrow C(K) \rightarrow \ell_2$$

est 2-sommante, donc Cohen fortement 2-sommant, i.e, $i_X^* \circ u^*$ est 2-sommante.

Montrons à l'aide du Préliminaire que $i_X^* \in \Pi_2(C(K)^*; X^*)$. Soit $(x_i^*) \in \ell_2^\omega(C(K)^*)$ et soit u associée à (x_i^*) comme ci-dessus. Alors $x_i^* = u^*(e_i)$, donc

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \|i_X^*(x_i^*)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \|i_X^* \circ u^*(e_i)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \pi_2(i_X^* \circ u^*) < \infty.$$

et par conséquent i_X^* est 2-sommante. Il existe donc un espace de Hilbert H tel que

$$i_X^* = v_1 \circ v_2 : C(K)^* \xrightarrow{v_2} H \xrightarrow{v_1} X^*$$

Comme i_X^* est surjective, v_1 est aussi surjective. D'après le théorème de l'application ouverte, X^* est isomorphe à l'espace quotient $\frac{H}{\text{Ker}(v_1)}$, donc à un Hilbert.

(2) \Leftrightarrow (3) Facile à voir.

Théorème 3.2.2 [3] Fixons $m \geq 2$. Soient $X_j (1 \leq j \leq m)$ des espaces de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) Les espaces X_1, \dots, X_m sont isomorphes aux espaces de Hilbert.
- 2) Pour tous $1 < p, q < \infty$, et tout espace de Banach Y

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq D_q^m(X_1, \dots, X_m; Y).$$

- 3) Pour tout espace de Banach Y , $\mathcal{L}_d^2(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq D_2^m(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Théorème 3.2.3 Soient $1 < p \leq \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et T^* son adjoint, alors les assertions suivantes sont équivalentes

- a) L'opérateur T est Cohen fortement p -sommant.
- b) Il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que, pour tout $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, et tout $y^* \in Y^*$

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^m \|x_j\|_{X_j} \|y^*\|_{L_{p^*}(\mu)} \quad (3.4)$$

c) L'opérateur adjoint T^* est p^* -sommant. De plus

$$d_p^m(T) = \prod_{p^*}(T^*) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (3.4)}\}.$$

Théorème 3.2.4 *Fixons $m \geq 2$, soit Y un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- 1) Y est isomorphe à un espace de Hilbert.
- 2) Pour tous espaces de Banach X_1, \dots, X_m et tous $1 < p, q < \infty$,

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^q(X_1, \dots, X_m; Y).$$

- 3) Pour tous espaces de Banach X_1, \dots, X_m ; $\mathcal{D}_2^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^2(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Corollaire 3.2.1 *Soient H_1, \dots, H_m, H des espaces de Hilbert, alors*

$$\mathcal{L}_d^p(H_1, \dots, H_m; H) \subset \mathcal{D}_q^m(H_1, \dots, H_m; H) \subset \mathcal{L}_s^r(H_1, \dots, H_m; H)$$

pour tous $1 < p, r, q < \infty$.

3.3 Caractérisation polynômiale d'un espace de Hilbert

3.3.1 Polynômes m -homogènes Cohen fortement p -sommants

Définition 3.3.1 [5] *Fixons $m \in \mathbb{N}$, soient $1 < p \leq \infty$ et X, Y deux espaces de Banach, un polynôme m -homogène $P : X \rightarrow Y$ est Cohen fortement p -sommant, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$,*

$$\sum_{i=1}^n |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{\ell_{p^*}^n}. \quad (3.5)$$

La classe de ces polynômes est notée par $\mathcal{P}_{coh}^p({}^m X; Y)$, elle est muni de la norme

$dp(P)$, i.e. la plus petite constante $C > 0$ vérifiant l'inégalité (3.5), pour $p = 1$ on a $\mathcal{P}_{Coh}^1({}^m X; Y) = \mathcal{P}({}^m X; Y)$.

Définition 3.3.2 [20] *Etant donné $1 \leq p < \infty$, un polynôme $P \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$ est p -dominé s'il existe un constant $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x_1, \dots, x_m \in X$*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|P(x_i)\|_{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{m}{p}}$$

On note par $\mathcal{P}_d^p({}^m X; Y)$ l'espace des polynômes p -dominés $P : X \rightarrow Y$ et par $\delta_p(P)$ l'infimum de tout C vérifiant l'inégalité ci-dessus. pour $p < m$, $\delta_p(P)$ est une norme sur $\mathcal{P}_d^p({}^m X; Y)$, mais pour $p < m$, il est seulement un quasi-norme. ces polynômes sont parfois appelés polynômes $(p/m, p)$ -sommant absolues.

Corollaire 3.3.1 *Soient $m \in \mathbb{N}$, $1 < p, q \leq \infty$ et H un espace de Hilbert et Y un espace de Banach et $P \in \mathcal{P}({}^m H; Y)$. Si P est un polynôme p -dominé, alors P est un polynôme Cohen fortement q -sommant.*

Proposition 3.3.1 *Soient $1 < p \leq \infty$, $P : X \rightarrow Y$ un polynôme m -homogène et \tilde{P} sa linéarisation. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- a) Le polynôme $P \in \mathcal{P}_{coh}^p({}^m X; Y)$.
- b) Le polynôme $\tilde{P} \in \mathcal{D}_p(\hat{\otimes}_{\pi, s}^m X; Y)$.

Exemple 3.3.1 [5] Soit $m \in \mathbb{N}$ et $u : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire fortement p -sommant et $\varphi \in X^*$. Le polynôme

$$P : X \rightarrow Y : P(x) = \varphi^{m-1}(x)u(x)$$

est Cohen fortement p -sommant. En effet, pour $x_1, \dots, x_n \in X, y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n | \langle P(x_i), y_i^* \rangle | &= \sum_{i=1}^n | \langle \varphi^{m-1}(x_i) u(x_i), y_i^* \rangle | \\ &= \sum_{i=1}^n | \langle u(\varphi^{m-1}(x_i) x_i), y_i^* \rangle | \\ &\leq d_p(u) \|\varphi\|^{m-1} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left(\sum_{i=1}^n |y_i^*(y)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Ainsi, P est Cohen fortement p -sommant et $d_p(P) \leq d_p(u) \|\varphi\|^{m-1}$.

Théorème 3.3.1 Soit $m \in \mathbb{N}$, un polynôme m -homogène $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ est Cohen fortement p -sommant ($1 < p \leq \infty$) si et seulement si il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ et $C > 0$ telles que, pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$

$$| \langle P(x), y^* \rangle | \leq C \|x\|^m \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (3.6)$$

En plus, dans ce cas $d_p(P) = \min \{C : C \text{ verifiant}(3.6)\}$.

Corollaire 3.3.2 Soit $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$. Si $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p_2}(^m X; Y)$, alors $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p_1}(^m X; Y)$ et $d_{p_1}(P) \leq d_{p_2}(P)$.

Etant donné $m \in \mathbb{N}$ et X un espace de Banach. Dans cette section, on montre que : X est isomorphe à un espace de Hilbert, si et seulement si pour tout espace de Banach Y et tout polynôme m -homogène 2-dominé de X dans Y , u est Cohen fortement 2-sommant.

Théorème 3.3.2 Soient $m \in \mathbb{N}$, $1 < p, q < \infty$ et X, Y des espaces de Banach tels que $\mathcal{P}_d^p({}^m X; Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^q({}^m X; Y)$. Alors $\Pi_p(X; Y) \subseteq \mathcal{D}_q(X; Y)$.

Soit $u \in \Pi_p(X; Y)$, On montrera que $u \in \mathcal{D}_q(X; Y)$. Fixons $x_0 \in B_X$ et $x_0^* \in B_{X^*}$ tel que $x_0^*(x_0) = 1$. On définit l'opérateur $\pi_j : \hat{\otimes}_{\pi, s}^{j+1} X \rightarrow \hat{\otimes}_{\pi, s}^j X$, ($1 \leq j \leq m-1$) par

$$\pi_j \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \binom{j+1}{\cdot} \otimes x_i \right) = \sum_{i=1}^n x_0^*(x_i) x_i \otimes \binom{j}{\cdot} \otimes x_i.$$

Soit $\delta_m : X \rightarrow \hat{\otimes}_{\pi, s}^m X$ le polynôme canonique. On montre que le polynôme $P = u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m : X \rightarrow Y$ est p -dominé. On raisonne par récurrence sur m . Pour $m = 1$, le cas est trivial. On suppose maintenant que

$$u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-2} \circ \delta_{m-1} : X \rightarrow Y$$

est p -dominé. Soit $x_i \in X$ ($1 \leq i \leq n$). Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \| P(x_i) \|_{\frac{p}{m}} &= \sum_{i=1}^n \| u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m(x_i) \|_{\frac{p}{m}} \\ &= \sum_{i=1}^n \| u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1} \left(x_i \otimes \binom{m}{\cdot} \otimes x_i \right) \|_{\frac{p}{m}} \\ &= \sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)|^{\frac{p}{m}} \| u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-2} \left(x_i \otimes \binom{m-1}{\cdot} \otimes x_i \right) \|_{\frac{p}{m}} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n \| P(x_i) \|_{\frac{p}{m}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^n \| u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-2} \circ \delta_{m-1}(x_i) \|_{\frac{p}{m-1}}^{\frac{m-1}{m}} \right)^{\frac{m-1}{m}}$$

On obtient par la déduction supposée et le fait que $x_0^* \in B_{X^*}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \| P(x_i) \|_{\frac{p}{m}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{m}} \left(C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{m-1}{p}} \right)^{\frac{p}{m}} \\
 &\leq C^{\frac{p}{m}} \left(\sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{m-1}{p}} \\
 &\leq C^{\frac{p}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p .
 \end{aligned}$$

Par conséquent, P est p -dominé d'où ,il est Cohen fortement q -sommant. Par la décomposition $P = \tilde{P} \circ \delta_m$ on a, $\tilde{P} = u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1}$ lequel est Cohen fortement q -sommant par la proposition 4.10. Maintenant comme, il a été montré dans la preuve du ([7], Théorème 3), ils existent des opérateurs $k_j : \hat{\otimes}_{\pi,s}^j X \rightarrow \hat{\otimes}_{\pi,s}^{j+1} X$, ($1 \leq j \leq m-1$), définis en fonction de x_0^* et x_0 tel que $\pi_j \circ k_j$ est l'opérateur identité sur $\hat{\otimes}_{\pi,s}^j X$. On a

$$u = u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1} \circ k_{j-1} \circ \dots \circ k_1 : X \rightarrow Y$$

lequel est Cohen fortement q -sommant, selon la propriété idéale.

Théorème 3.3.3 [5] *Soit X un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- 1) L'espace X est isomorphe à un espace de Hilbert.
- 2) Pour tous $m \in \mathbb{N}$, $1 < p, q < \infty$, et chaque espace de Banach Y

$$\mathcal{P}_d^p({}^m X; Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^q({}^m X; Y)$$

- 3) Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et chaque espace de Banach Y

$$\mathcal{P}_d^2({}^m X; Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^2({}^m X; Y)$$

Bibliographie

- [1] M.D.ACOSTA and J.B.GUERRERO and G.M.Ruiz. James type results for polynomials and symmetric multilinear forms. *Arc. Mat*, 42(2004), 1-11.
- [2] D. ACHOUR, Cours d'analyse fonctionnelle master 1, Université de M'sila, Algeria, 2019/2020.
- [3] D. ACHOUR and L.MEZRAG. On the Cohen strongly p -summing multilinear operators. *J. Math. Anal. Appl.* 327 (1) (2007), 550-563.
- [4] M.D.ACOSTA and G.M.Ruiz. A version of James' Theorem for numerical radius, *Bull, London Math. Soc.*31 (1999), 67-74.
- [5] D. ACHOUR and K. SAADI. A polynomial characterization of Hilbert spaces. *Collect. Math.* 61, 3 (2010), 291 –301.
- [6] M.BELAALA.(2011).Extension non linéaire des théorèmes de caractérisation des espaces de Banach.Thèse de magister ;Université de M'sila .
- [7] F. BLASCO. Complementation in spaces of symmetric tensor products and polynomials, *Studia Math.*123, (1997). 165-173.
- [8] H. BREZIS. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1987).
- [9] JEAN. BOURGAIN. New Classes of L_p -spaces, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1981).

-
- [10] Q.Bu. Some mapping properties of p -summing operators with hilbertian do-main, Contemp. Math. 328 (2003) 145–149.
- [11] J.S. COHEN. A characterization of inner product spaces using 2-summing operators. Studia Mathematica T.1970, 271-276.
- [12] J.S. COHENh, Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates. Math. Ann. 201 (1973), 177-200.
- [13] V. DIMANT. Strongly p -summing multilinear mappings, J. Math. Anal.Appl. 278 (2003), 182-193.
- [14] M. R. GALAN. Polynomials, Symetric Multilinear Forms and Weak Compactness. Positivity 8, (2004), 297-304.
- [15] R. C. JAMES(1).American Mathemaical Society,vol 11,1963.Weakly Compact Sets.
- [16] S. KWAPIE´N. A linear topological characterization of inner product space.Studia Mathematica T. 1970, 277-278.
- [17] J. LINDENSTRAUSSAND and L.TZAFRIRI.Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces .Belin Heidelberg NewYork 1977.
- [18] J. Mujica. Complex Analysis in Banach Spaces. Math. Studies, Vol. 120,North Holland, Amsterdam, (1986).
- [19] Raymond A. Ryan. Introduction to tensor products of Banach spaces.Springer Monographs in Mathematics. (2001).
- [20] SAADI, K. (2010). Les opérateurs multi p -sommants et leurs applications (Doctoral dissertation, Université de Batna 2).

ملخص :

في هذه المذكرة درسنا بعض المؤثرات غير الخطية الخاصة بالمؤثرات متعددة الخطية وكثيرات الحدود من الدرجة m ثم ناقش نظريات التمايز ل " جامس " حسب صيغها :متعددة الخطية , كثيرة نصف قطر العددي وفي الأخير ادخلنا نظرية "كويين" ودورها في التمايز متعدد الحدود ومن نمط الخطية و كثير الحدود للايزومورفي لفضاء "هلبرت" .

الكلمات المفتاحية :

نظرية "جامس" , مؤثر متعدد الخطية, فضاء انعكاسي, نظرية "كويين", فضاء "هلبرت", كثير حدود متجانس من الدرجة m

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques opérateurs non-linéaires, qui concernent les opérateurs multilinéaires et les polynômes homogènes de degré m . Puis on discute les théorèmes de caractérisation de James selon ses versions, multilinéaire, polynômiale et de type rayon numérique. Et enfin nous avons introduit le théorème de Kwapien et son rôle dans la caractérisation multilinéaire et polynômiale de l'isomorphie à un espace de Hilbert.

Mots clés :

Théorème de James, opérateur multilinéaire, polynôme homogène de degré m , théorème de Kwapien, espace de Hilbert, espace réflexif.

Abstract:

In this thesis, we have studied some non-linear operators, which concern multilinear operators and homogeneous polynomials of degree m . Then we discuss the characterization of James's theorems in its versions, multilinear, polynomial and of numerical radius type. Finally, we have introduced Kwapien's theorem and its role in the multilinear and polynomial characterization of the isomorphy to a Hilbert space.

Key words:

Theorems of James, multilinear operator, homogeneous polynomial of degree m , Kwapien's theorem, Hilbert space, reflexive space.