

UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin D'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Spécialité :Mathématiques Fonda et App

Par

SAADAOUI Hanane

sujet

**Les méthodes fondamentales d'approximation
dans l'analyse.**

Dirigé par :

Dr. B. LAKEHALI

Promotion:2016/2017

Remerciements

Merci avant tout au bon Dieu « ALLAH », le clément,
le miséricordieux, le plus puissant.

En premier lieu j'adresse ma reconnaissance
à mon encadreur le Professeur:

Mr.B.LAKEHALI

Son sérieux et sa compétence m'ont été très utiles
pour mener à bien ce travail.

Je remercie les professeurs

Mr.GAGUI Bachir

Mr.BENSALOUA Cheniti

qui m'ont faite l'honneur d'être membres
du jury.

Merci à tous les enseignants et les étudiants

De département **mathématique**

Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont

Met à notre disposition pour réaliser ce travail.

Enfin, je remercie toutes les personnes, famille, amis, qui
directement ou indirectement ont contribué
à la réalisation de ce travail.

Merci

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaire	3
1.1 Les espaces métriques	3
1.1.1 Propriétés de la distance	4
1.2 Espaces vectoriels normés	5
1.2.1 Distance associée à une norme	5
1.2.2 Propriétés importantes d'une normes	6
1.2.3 Espace de Banach	6
1.3 Espaces fonctionnels	6
1.3.1 Espaces de Sobolev	6
1.3.2 L'espace $H^1(\Omega)$	7
1.3.3 Les sous espace de $H^1(\Omega)$	7
1.3.4 Espace $C^{(l)}(a, b)$	7
1.4 Les formes bilinéaires	8
2 Principales méthodes de Discrétisation	9
2.1 Discrétisation	9
2.1.1 Les étapes de la discrétisation	11
2.1.2 Consistance, Convergence et stabilité	11
2.2 Méthode de différences finies	12
2.2.1 Un problème aux limites monodimensionnel	12
2.2.2 Schéma Des Différences Finis	13

2.2.3	Exemple simple 1-D avec condition de Dirichlet	17
2.2.4	Exemple simple 1-D avec condition mixtes Dirichlet–Neumman	18
2.3	Méthodes variationnelles	19
2.3.1	Exemple de problèmes variationnels	19
2.4	La méthode des éléments finis	23
2.4.1	Choix des fonctions φ_i : les éléments finis	24
2.5	Méthodes de projection	27
2.5.1	Définition des opérateurs de projection	27
2.5.2	Exemples d’opérateurs de projection	27
2.5.3	Apperçu sur les méthodes de projection	28
2.6	Méthode de Collocation	30
2.7	Méthode de Galerkin	32
2.8	Méthode de séries de Neumann	33
2.8.1	Principe de la méthode	34
2.9	Analyse de convergence	35
3	Applications	37
3.1	Discrétisation par différences finies	37
3.2	Discrétisation par Eléments finis	39
3.3	Résolution de Fredholm par les méthodes de projection	42
3.3.1	1 ^{ère} cas : par la méthode de Galerkin	42
3.3.2	2 ^{ème} cas : par la méthode de Collocation	44
3.3.3	3 ^{ème} cas : par la méthode de séries Neumann	45
3.3.4	Programmation Matlab	47
	Conclusion	55
	Bibliographie	56

Introduction.

Tous les problèmes scientifiques sont modélisés par des équations (EDO, EDP, Equation Intégrale) linéaires ou non linéaires qui sont difficiles à résoudre analytiquement, même la solution analytique n'est pas utilisée dans les simulations. Ce qui montre l'importance des solutions approchées dans la plupart des cas. Ce mémoire est composé principalement en deux grandes parties relativement indépendantes, *les Approximation Numérique* et sur *les méthodes de résolution associées*.

Un problème posé sur un domaine continu (espace - temps) n'est pas résoluble tel quel par un ordinateur, qui ne peut traiter qu'un nombre fini d'inconnues. Pour se ramener à un problème en dimension finie, on discrétise l'espace (sous intervalles, triangles, volumes, ... , i.e meshgrid).

Ce mémoire contient trois chapitres.

Le premier, contient les définitions de base et les outils mathématiques qui sont nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités.

La seconde partie, traite de la résolution des équations différentielles par :

- Méthodes de différences finies : le principe est de se donner un nombre de points (x_1, x_2, \dots, x_n) et on approxime l'opérateur en chacun des x_i .
- Méthodes de éléments finis qui est basée sur la technique de formulation variationnelle, qui consiste à remplacer l'espace V par un sous espace de dimension finie $V_h \in V$, construit à l'aide des fonctions de base des éléments finis.
- Méthodes de projection appliquée aux équations intégrales de type Fredholm deuxième espèce. Nous introduisons en particulier les concepts de consistance, de stabilité et de convergence et les liens étroits entre ces trois notions.

Notre objectif dans 3^{ème} chapitre est de rendre accessible les idées que nous avons présenté dans le chapitre précédent. Nous allons réaliser d'une manière détaillée certaines méthodes numériques pour la résolution approchée des équations différentielles et des équations intégrales de second type.

Chapitre 1

Préliminaire

Introduction

L'analyse classique enseignée jusqu'au licence porte essentiellement sur des espaces de dimension finie, cela convient par exemple pour résoudre des équations différentiels linéaires simple. Pour résoudre les équations non linéaire ou équations intégrales ou équations EDP, les solutions sont à chercher à priori dans des espaces de dimension infinie. La recherche des solution explicite étant souvent hors porté. On cherche à décrire la structure des ces solutions par leur appartenance à des espaces adaptés au problème posé. Ceci nous mène à considérer des espaces munis de topologies des normes ou semi norme ou des distances.

1.1 Les espaces métriques

La notion de distance entre 2 points de la droite réelle \mathbb{R} ou du plan \mathbb{R}^2 est la longueur du segment joignant ces deux points. Plus généralement, dans l'espace \mathbb{R}^n on utilise ce qu'on appelle la distance euclidienne

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1, \dots, n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

A cette distance on associe un certain nombre de notions mathématiques intervalles ouverts, limites, des suites ou des séries, continuité des fonctions.

Définition 1.1.1 *espace métrique*

Un espace métrique (X, d) est un ensemble X muni d'une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes:

1. $\forall x, y \in X \ d(x, y) \geq 0$, et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
3. $\forall x, y, z \in X \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Terminologie

Si l'application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés (2) et (3) mais pas (1), on dit que d est une semi-distance sur X . L'exemple par excellence est bien sur \mathbb{R}^n muni de la distance euclidienne. Voici d'autres exemples:

1. Sur \mathbb{R}^n on peut considérer d'autres métriques :

$$- d_{\infty}(x, y) = \max \{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\}.$$

$$- d_1(x, y) = \sum_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

2. Soit $C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$. Si $f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ on pose

$$d_{\infty}(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)|, t \in [0, 1]\}$$

1.1.1 Propriétés de la distance

Une distance d sur un ensemble X , vérifie:

1. La distance est toujours positive ou nulle

$$\forall x, y \in X \ d(x, y) \geq 0.$$

2. la distance entre les distances est plus petite que la distances

$$\forall x, y, z \in X \ |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

1.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1.2.1 *espace vectoriel normé*

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} muni d'une application $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie:

- (1) $\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$, et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{k}$, $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, où $|\lambda|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou le module si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.
- (3) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (inégalité triangulaire).

1. Dans \mathbb{R}^n on peut définir plusieurs normes:

- La norme euclidienne: $\|x\| = \left(\sum_{i=1, \dots, n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, que l'on note aussi $\|x\|_2$.
- $\|x\|_\infty = \sup \{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$.
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

2. L'espace vectoriel $C([0, 1], \mathbb{R})$ peut être muni des normes:

- $\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in [0, 1]\}$.
- $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.
- $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

1.2.1 Distance associée à une norme

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} , et soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . On associe à cette norme une distance d sur E par la formule

$$\forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) = \|u - v\|.$$

Cette distance est dite associée à la norme $\|\cdot\|$.

1.2.2 Propriétés importantes d'une norme

1. $\forall u \in E, \forall v \in E$

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|.$$

2. $\forall u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ et $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \cdot \|u_i\|.$$

1.2.3 Espace de Banach

Définition 1.2.2 On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet

1. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est (en particulier \mathbb{R}^n) est un espace de Banach.
2. $C([0, 1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_1$.
étudier par exemple la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1.3 Espaces fonctionnels

Un espace fonctionnel est un espace vectoriel dont les éléments sont des fonctions.

1.3.1 Espaces de Sobolev

Définition 1.3.1 L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est défini par

$$W^{1,p} = \{u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout multi indice } \alpha, \text{ avec } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

Ω ouvert de \mathbb{R}^n , dans cette définition la dérivée partielle D^α est entendue au sens de distribution

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

1.3.2 L'espace $H^1(\Omega)$

On note par $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Que l'on munit du produit scalaire noté $\langle u, w \rangle_{1,\Omega}$

$$\langle u, w \rangle_{1,\Omega} = \langle u, w \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Et par le fait même d'une norme induite

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(\langle u, u \rangle_{1,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 1.3.1 • Si $p = 2$ on a $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

• H^1 est un espace de Hilbert.

1.3.3 Les sous espace de $H^1(\Omega)$

On a quelques sous-espaces de H^1 sont extrêmement utiles en pratique, il s'agit l'espace $H_0^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma \}.$$

1.3.4 Espace $C^{(l)}(a, b)$

Les éléments de cet espace sont toutes les fonctions définies sur $]a, b[$ et possédant sur cet intervalle des dérivées continues jusqu'à l'ordre l . La norme d'un élément $f \in C^{(l)}(a, b)$ est défini par la formule :

$$\|f\| = \sum_{k=0}^l \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|.$$

Une fonction $F(x, t)$ est dit de carré sommable sur $\Omega(a \leq x, t \leq b)$ si :

$$\int_a^b \int_a^b F^2(x, t) dx dt < \infty.$$

1.4 Les formes bilinéaires

Définition 1.4.1 Forme linéaire

On appelle forme linéaire une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert V . Une forme linéaire l vérifie donc les propriétés suivantes:

$$-l(\beta w) = \beta l(w) \quad \forall w \in V \text{ et } \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

$$-l(w_1 + w_2) = l(w_1) + l(w_2) \quad \forall w_1, w_2 \in V.$$

Définition 1.4.2 Forme linéaire continue

Une forme linéaire l sur l'espace de Hilbert V muni de la norme $\|\cdot\|_V$, est dite continue s'il existe une constante C telle que:

$$|l(w)| \leq C \|w\|_V \quad \forall w \in V.$$

Définition 1.4.3 Forme bilinéaire

Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert V est une application a qui associe à un couple $(u, w) \in V \times V$ un scalaire noté $a(u, w)$ satisfaisant

$$-a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, w) = \beta_1 a(u_1, w) + \beta_2 a(u_2, w), \quad \forall u_1, u_2, w \in V \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

$$-a(u, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 a(u, w_1) + \beta_2 a(u, w_2), \quad \forall u, w_1, w_2 \in V \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses 2 arguments.

Définition 1.4.4 Forme bilinéaire continue

Une forme bilinéaire a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante C telle que:

$$|a(u, w)| \leq C \|u\|_V \|w\|_V \quad \forall u, w \in V.$$

Définition 1.4.5 Forme bilinéaire symétrique

Une forme bilinéaire a est dite symétrique si :

$$a(u, w) = a(w, u) \quad \forall u, w \in V.$$

Définition 1.4.6 Forme bilinéaire coercive

Une forme bilinéaire est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive α telle que :

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2 \quad \forall w \in V.$$

Chapitre 2

Principales méthodes de Discrétisation

Introduction

La résolution d'une EDP est à priori difficile, rares sont les situations où nous savons calculé explicitement la solution. Nous avons alors recours divers les méthodes numériques. Les approches classiques de résolution numérique des EDP sont les méthodes des différences finies et des éléments finis.

2.1 Discrétisation

Considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \varphi''(x) - c(x)\varphi(x) = f(x) \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Ou bien l'équation d'intégrale de Fredholm:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt = f(x) \quad (2.1.2)$$

la solution analytique n'est pas a notre porté, voire impossible on va essayer de trouver une solution approchée. Alors on peut représenté les deux problème (2.1.1) et (2.1.2) comme

suit :

$$\begin{cases} A : X \rightarrow Y \\ A\varphi = f \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Où $A : X \rightarrow Y$ opérateur différentiel ou intégral.

Pour résoudre ce problème continu (2.1.3) dans laquelle $\varphi(x)$ est l'inconnue et $f(x)$ une donnée, comme X, Y deux espaces de dimension infinie c'est pour cette raison qu'on ne peut pas trouver une solution analytique. Alors on va chercher une solution dans un sous espace $X_n \subset X$ tel que X_n de dimension finie n . Le problème donc s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} A_n : X_n \rightarrow Y_n \\ A_n \varphi_n = f_n \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Ce problème est dite problème discret, c'est à dire une discrétisation est tout simplement un remplacement d'un problème continue dans un espace métrique de dimension infinie par un problème discret de dimension finie. Alors on fait recours à une discrétisation *i.e* un ensemble discret est caractérisé par la propriété pour laquelle chaque point a un voisine qui ne contient aucun point de cet ensemble. une fonction définie sur un problème continue peut restricté à cela ensemble discret, et la fonction restreinte est un objet plus simple à déterminer.

Problème bien posés

Considérons le problème suivant: trouver x tel que

$$Ax = b \quad (2.1.5)$$

où A et b sont les données et x l'inconnue. Le problème (2.1.5) est *bien posé si*:

1. la solution existe *i.e* A est surjective.
2. la solution est unique *i.e* A est injective.
3. la solution dépend continuellement des données *i.e* A^{-1} existe

c'est-à-dire une faible perturbation des données conduit à une faible perturbation de la solution(définition de hadamard). Un problème qui ne possède pas la propriété ci-dessus est dit *mal posé*. Nous considérerons dans la suite que des problèmes bien posés.

2.1.1 Les étapes de la discrétisation

Les étapes qu'on doit suivre sont:

1. Au début, un problème posé (2.1.3) ayant la solution une fonction U qui est définie dans domaine D . Notre objectif est de déterminer U ou une solution qui lui est approchée $\tilde{U} \simeq U$.
2. Le domaine D est remplacé par un sous ensemble de dimension fini (ensemble discret) D_h où h un paramètre autorisé à approche zéro afin d'obtenir des ensembles discrets plus fins. Le problème P est remplacé par une version discrète P_h .
3. Problème P_h est résolu ce qui donne une fonction V_h définie sur D_h .
4. Par notion d'un processus d'interpolation, une fonction \overline{V}_h est obtenu dont le domaine est D . Et dont les valeurs est équivalentes avec V_h sur D_h .
5. La fonction V_h est considéré comme une solution approchée du problème original P . On fait des estimations d'erreur pour justifier: Si $h \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{V}_h \approx U$.

Chaque approximation numérique doit vérifier les conditions suivantes:

2.1.2 Consistance, Convergence et stabilité

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales notions sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exact des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

Définition 2.1.1 la stabilité: (Voir [10])

c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée

$$\|u - u_h\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Définition 2.1.2 la consistance: (Voir [10])

la consistance est une condition nécessaire pour la convergence. Une méthode est consistante si le résidu obtenu en injectant la solution exacte dans le schéma numérique tend vers zéro quand h tend vers zéro.

Définition 2.1.3 la convergence: (Voir [10])

C'est la propriété qui assure que la solution numérique tend vers la (ou une) solution exacte des équations continues $u_n \rightarrow u$.

2.2 Méthode de différences finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

2.2.1 Un problème aux limites monodimensionnel

Considérons le problème suivante, étant donné deux fonctions c , et f continues sur l'intervalle $[0, 1]$, trouver une fonction φ deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ tel que:

$$\begin{cases} \varphi''(x) + c(x)\varphi(x) = f(x) \\ \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Remarquons que la première équation de (2.2.1) est une équation différentielle du deuxième ordre dont l'intégration doit faire apparaître deux constantes. Nous avons aussi deux conditions $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, appelées conditions aux limites, qui permettant de déterminer les deux constantes d'intégration. Il n'existe pas de formule permettant d'obtenir explicitement $\varphi(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$. Il convient donc de trouver un moyen d'approcher les valeurs de la solution du problème (2.1.1) d'aussi près que l'on veut. Une méthode pour atteindre ce but consiste à discrétiser le problème (2.1.1) c.a.d à le transformer en un problème qui lui est proche et qui comprend un nombre fini de valeurs à calculer.

2.2.2 Schéma Des Différences Finis

Soit n un entier positif. On pose $h = \frac{1}{n+1}$ et on note $x_i = ih$ avec $i = 0, 1, \dots, n+1$. On note φ_i la valeur discrète de $\varphi(x)$ au point x_i , soit $\varphi_i = \varphi(x_i)$. Les points de discrétisation sont:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$$

Des schémas aux différences finies peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i :

$$\varphi(x_i + h) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_i) + \theta(h^2)$$

$$\varphi(x_i - h) = \varphi(x_i) - h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_i) + \theta(h^2)$$

Où $\theta(h^2)$ désigne un reste, qui lorsque h tend vers zéro est borné par une constante multipliée par h^2 .

$$\varphi''(x_i) = \frac{\varphi(x_i + h) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_i - h)}{h^2} \quad (2.2.2)$$

Directement à partir de l'équation (2.1.1) nous avons:

$$\varphi''(x_i) + c(x_i)\varphi(x_i) = f(x_i)$$

Cette équation s'écrit sous la forme abrégée comme:

$$\varphi_i'' + c_i\varphi_i = f_i$$

Où $\varphi_i'' = \varphi''(x_i)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$. Pour résoudre numériquement le problème (2.1.1) nous nous inspirons de (2.1.2) et nous calculons des valeurs φ_i , sensées être proches de $\varphi(x_i)$ et satisfaisant le problème aux valeurs limites :

$$\begin{cases} \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} + c_i\varphi_i = f_i & 0 \leq i \leq n \\ \varphi_0 = \varphi_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Le schéma (2.1.3) est appelé *problème approché* ou encore *problème discret*, par opposition au problème (2.1.1) qui est appelé *problème continu*. Il s'agit d'un schéma d'approximation par une *méthode de différences finies* du problème (2.1.1). Résoudre (2.1.3) revient à chercher un nombre fini de valeurs φ_i qui devraient être des approximations de $\varphi(x_i)$,

$0 \leq i \leq n$. Si ϕ est le n – Vecteur colonne de composantes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Si F est le n – Vecteur de composantes f_1, f_2, \dots, f_n . et si A est la $n \times n$ matrice tridiagonale. Alors le problème approché (2.1.3) est clairement équivalent à chercher ϕ tel que:

$$A\phi = F \quad (2.2.4)$$

avec

$$\begin{pmatrix} (2 + c_1 h^2) & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & (2 + c_2 h^2) & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & (2 + c_{n-1} h^2) & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & (2 + c_n h^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Les questions suivantes surgissent alors naturellement

1. Le système (2.2.4) admet-il un unique solution ?
2. A-t-on convergence de ϕ vers φ et en quel sens ? Nous allons répondre à ces deux questions. Commençons par le premier.

Proposition 2.2.1 (voir [6])

Soit $c = (c_1, \dots, c_n)^t \in \mathbb{R}^n$ tel que $c_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, n$, alors la matrice A est symétrique définie positive, et donc inversible.

Preuve. La matrice A est évidemment symétrique. Montrons qu'elle est définie positive.

Soit $v = (v_1 \dots v_n)^t$, on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$. Calculons le produit scalaire

$Av.v = v^t Av$. On a : $\langle Av, v \rangle =$

$$\frac{1}{h^2} (v_1 \dots v_n) \begin{bmatrix} (2 + c_1 h^2) & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & (2 + c_2 h^2) & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & (2 + c_{n-1} h^2) & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & (2 + c_n h^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\langle Av, v \rangle = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n v_i (-v_{i-1} + (2 + c_i h^2) v_i - v_{i+1}).$$

On a donc, par changement d'indice :

$$\langle Av, v \rangle = \frac{1}{h^2} \left[\sum_{i=1}^n (-v_{i-1} v_i) + \sum_{i=1}^n (2 + c_i h^2) v_i^2 + \sum_{j=1}^{n+1} v_{j-1} v_j \right]$$

Et comme $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 0$, on peut écrire :

$$\langle Av, v \rangle = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n (2 + c_i h^2) v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n (-2v_i v_{i-1})$$

soit encore :

$$\langle Av, v \rangle = \sum_{i=1}^n c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n (-2v_i v_{i-1} + v_i^2 + v_{i-1}^2) + v_n^2$$

On a donc finalement :

$$\langle Av, v \rangle = \sum_{i=1}^n c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n (v_i - v_{i-1})^2 + v_n^2 \geq 0, \forall v = (v_1 \dots v_n)^t$$

Si on suppose $\langle Av, v \rangle = 0$, on a alors

$$\sum_{i=1}^n c_i h^2 v_i^2 = 0 \text{ et } v_i - v_{i-1} = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

On a donc $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v_0 = v_{n+1} = 0$. Remarquons que ces égalités sont vérifiées même si les c_i sont nuls. Ceci démontre que la matrice A est bien définie. ■

Remarque 2.2.1 Existence et unicité de la solution (voir [6])

On a montré ci-dessus que A est symétrique définie positive, donc inversible, ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution de (2.2.4). Nous allons maintenant nous préoccuper de la question de la convergence.

Définition 2.2.1 Erreur de consistance (voir [6])

On appelle *erreur de consistance* la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique. Dans le cas du schéma (2.2.3), l'erreur de consistance au point x_i est donc définie par:

$$R_i = \frac{1}{h^2} (2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_{i+1})) + c(x_i) \varphi(x_i) - f(x_i).$$

L'erreur de consistance R_i est donc l'erreur qu'on commet en remplaçant l'opérateur $-\varphi''$ par le quotient différentiel

$$R_i = \frac{1}{h^2} (2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_{i+1}))$$

Cette erreur peut être évaluée si φ est suffisamment régulière, en effectuant des développements de Taylor. La preuve de convergence du schéma utilise la notion de consistance, ainsi qu'une notion de stabilité, que nous introduisons maintenant:

Proposition 2.2.2 (voir [6])

On dit que le schéma (2.2.3) est stable, au sens où la matrice de discrétisation A satisfait:

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}.$$

On peut réécrire cette inégalité comme une estimation sur les solutions du système (2.2.4):

$$\|\phi\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} \|f\|.$$

Lemme 2.2.1 (voir [6]) Si la solution de (2.2.1) vérifie $u \in C^4([0, 1])$, alors le schéma (2.2.3) est consistant d'ordre 2, et on a plus précisément :

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |\varphi^{(4)}|, \forall i = 1, \dots, n.$$

Définition 2.2.2 Erreur de discrétisation (voir [6])

On appelle erreur de discrétisation en x_i , la différence entre la solution exacte en x_i et la i -ème composante de la solution donnée par le schéma numérique

$$e_i = \varphi(x_i) - \varphi_i \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{2.2.5}$$

Théorème 2.2.1 Soit φ la solution exacte de

$$\begin{cases} -\varphi'' + c\varphi = f \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

On suppose $\varphi \in C^4([0, 1])$. Soit ϕ la solution de (2.2.3). Alors l'erreur de discrétisation définie par (2.2.5) satisfait :

$$\max_{i=1, \dots, n} |e_i| \leq \frac{1}{96} \|\varphi^{(4)}\|_{\infty} h^2.$$

Le schéma est donc convergent.

Preuve. (voir [6]) ■

Remarque 2.2.2 (voir [6])

On peut remarquer que la preuve de la convergence s'appuie sur la stabilité (elle-même déduite de la conservation de la positivité) et sur la consistance. Dans certains livres d'analyse numérique, vous trouverez la formule:

$$\textit{stabilité} + \textit{consistance} \Rightarrow \textit{convergence}.$$

Il faut toutefois prendre garde au fait que ces notions de stabilité et convergence peuvent être variables d'un type de méthode à un autre.

2.2.3 Exemple simple 1-D avec condition de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} -\varphi''(x) = f(x) \\ \varphi(0) = \alpha \quad \text{et} \quad \varphi(1) = \beta \end{cases} \quad x \in]0, 1[$$

Où f est une fonction continue. Le maillage est construit en introduisant $n + 1$ noeuds x_i avec $i = 0, 1, \dots, n$, régulièrement espacés avec un pas h . La quantité φ_i désignera la valeur de la fonction $\varphi(x)$ au noeud x_i . L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque noeud x_i :

$$-\varphi_i'' = f_i$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2:

$$\varphi''(x_i) = \frac{\varphi(x_i + h) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_i - h)}{h^2}$$

L'équation discrétisée est ainsi :

$$\frac{-\varphi(x_i + h) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h)}{h^2} = f_i$$

pour i variant de 1 à $n - 1$. Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ \cdot & & & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h^2 f_{n-1} \\ h^2 f_n + \beta \end{bmatrix}$$

2.2.4 Exemple simple 1-D avec condition mixtes Dirichlet–Neumann

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\varphi''(x) = f(x) \\ \varphi(0) = \alpha \quad \text{et} \quad \varphi'(1) = \beta \end{cases} \quad x \in]0, 1[$$

Où l'on a cette fois une condition de Neumann en $x = 1$. Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes. Tout d'abord, le nombre d'inconnues a changé. Il y a une inconnue au bord en $x = 1$. Le problème discret a donc maintenant, sur la base du même maillage que précédemment, n inconnues φ_i pour i variant de 1 à n . D'autre part, il faut discrétisée la condition de Neumann $\varphi'(1) = \beta$. Plusieurs choix sont possibles pour approximer cette dérivée première. C'est un des inconvénients de la méthode des différences finies, elle ne donne pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann. Dans notre cas, utilisons une approximation d'ordre 1:

$$\varphi'(1) = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{h}$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 2 & -1 & 0 \\ \cdot & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} \\ h^2 f_n + h\beta \end{bmatrix}$$

2.3 Méthodes variationnelles

2.3.1 Exemple de problèmes variationnels

Problème de Dirichlet

Soit $\Omega =]0, 1[$ un ouvert borné de \mathbb{R} . On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad x \in]0, 1[\quad (2.3.1)$$

Où $f \in C([0, 1])$ et $u \in C^2([0, 1])$ où l'on désigne par u'' la dérivée d'ordre 2. On appelle solution classique de (2.3.1) une fonction u qui vérifie (2.3.1). et soit $w \in C_c^\infty(]0, 1[)$, où $C_c^\infty(]0, 1[)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $]0, 1[$. On multiplie (2.3.1) par w et on intègre sur $]0, 1[$ (on appellera par la suite w " fonction test ") on a donc :

$$\int_0^1 -u''(x)w(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

Notons que ces intégrales sont bien définies, Par intégration par parties on a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x)w'(x)dx - \left(u'(1)w(1) - u'(0)w(0) \right) + \int_0^1 c(x)u(x)w(x)dx \\ = \int_0^1 f(x)w(x)dx. \end{aligned}$$

Comme w est nulle sur $\partial\Omega$, on obtient une formulation variationnelle qui consiste à déterminer une fonction $u(x)$, vérifiant $u(0) = u(1) = 0$ et $\forall w(x)|_{w(0)=w(1)=0}$ telle que :

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)w(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx. \quad (2.3.2)$$

Donc la solution classique de (2.3.1) satisfait (2.3.2). Prenons maintenant comme fonction test w , non plus une fonction de $C_c^\infty(\Omega)$, mais une fonction de $H_0^1(\Omega)$. On rappelle que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), u' \in L^2(\Omega)\}$.

Définition 2.3.1 (Formulation faible)

Soit $f \in L^2(\Omega)$, on dit que u est solution faible de (2.3.1) si u est solution de : $u \in H_0^1(\Omega)$, pour toute fonction $w \in V$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \\ a(u, w) = \int_0^1 u'(x) w'(x) dx + \int_0^1 c(x) u(x) w(x) dx \\ \qquad \qquad = \int_0^1 f(x) w(x) dx \\ \qquad \qquad = l(w) \end{array} \right. \quad (2.3.3)$$

Définition 2.3.2 (Formulation variationnelle)

Soit $f \in L^2(\Omega)$, on dit que u est solution variationnelle de (2.3.1) si u est solution du problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \\ J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \\ J(w) = \int_0^1 w'(x) w'(x) dx + \int_0^1 c(x) w(x) w(x) dx \\ \qquad \qquad - \int_0^1 f(x) w(x) dx \end{array} \right. \quad (2.3.4)$$

On cherche à montrer l'existence et l'unicité de la solution de (2.3.3) et (2.3.4). Pour cela, on utilise le théorème de Lax-Milgram, qu'on rappelle ici :

Théorème 2.3.1 de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert et soit l et a des formes linéaire et bilinéaire continues sur V et $V \times V$ respectivement ($l \in V'$). Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution u du problème variationnel :

- trouver une fonction $u \in V$ telle que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V.$$

Preuve. (voir [3]) ■

Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème de Lax-Milgram et si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, le problème variationnel est équivalent au problème de minimisation suivant :

Proposition 2.3.1 • trouver $u \in V$ telle que :

$$J(u) = \inf_{w \in V} J(w) = \inf_{w \in V} \frac{1}{2}a(w, w) - l(w).$$

La fonctionnelle J est souvent appelée fonctionnelle d'énergie dans les applications.

Preuve. (voir [3]) ■

Nous présentons maintenant *la Méthode de Galerkin*, qui est basée sur la formulation faible, contrairement à la méthode de différences finies, qui est basée sur la formulation différentielle. La méthode de Galerkin est le point de départ des méthodes d'éléments finis.

Méthodes de Galerkin

On se place maintenant sous les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V \text{ espace de Hilbert,} \\ a : \text{ forme bilinéaire continue et coercive.} \end{array} \right. \quad (2.3.5)$$

Remarquons que maintenant, a n'est pas nécessairement symétrique, On considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in V \\ a(u, w) = l(w), \quad w \in V \end{array} \right. \quad (2.3.6)$$

Par le théorème de Lax Milgram, il y a l'existence et l'unicité de $u \in V$ solution de (2.3.6). Le principe de la méthode de Galerkin est on se donne $V_h \in V$, tel que $\dim V_h < +\infty$, et on cherche à résoudre le problème approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h \in V_h \\ a(u_h, w) = l(w), \quad \forall w \in V_h \end{array} \right. \quad (2.3.7)$$

Principe de la méthode

Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont n fonctions linéairement indépendantes de V . On peut construire un sous-espace vectoriel de V , noté V_h , engendré par les combinaisons linéaires des fonctions φ_i . Ainsi V_h sera l'ensemble de toutes les fonctions u qui peuvent s'exprimer sous la forme:

$$u(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$$

Où les u_i sont les n nombres réels. Il est donc naturel de formuler une approximation du problème (2.3.3). de la manière suivante:

Trouver une fonction $u_h \in V_h$ pour toute fonction $w_h \in V_h$ telle que:

$$\begin{cases} a(u_h, w_h) = \int_0^1 u'_h(x) w'_h(x) dx + \int_0^1 c(x) u_h(x) w_h(x) dx \\ = \int_0^1 f(x) w_h(x) dx \\ = l(w_h) \end{cases} \quad (2.3.8)$$

On dira que (2.3.8) est une *approximation de Galerkin* de (2.3.3). Puisque u_h est cherché dans V_h , on peut écrire:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$$

Où les u_i sont les n nombres réels à déterminer. En prenant $w_h = \varphi_j$, $1 \leq j \leq n$. Dans (2.3.8), le problème est alors équivalent à chercher u_1, u_2, \dots, u_N tel que:

$$\sum_{i=1}^N u_i \left(\int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx. \quad (2.3.9)$$

pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. Si A est la $n \times n$ matrice de coefficients

$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

Dans le cas où $c = 0$, la matrice A est appelée *matrice rigidité*. Si U est le n - vecteur de composantes u_1, u_2, \dots, u_n et si F est le n - vecteur dont la j^{eme} composante est:

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$$

Alors les problèmes (2.3.8) et (2.3.9) sont équivalents à chercher U tel que:

$$AU = F \quad (2.3.10)$$

Nous dirons que (2.3.8) ou (2.3.9) ou (2.3.10) sont une discrétisation du problème continu (l'équation différentielle). Notons encore que, après avoir construit la matrice A (n'est pas en général symétrique) et le vecteur F , la méthode de Galerkin nécessite, tout comme la méthode des différences finies, la résolution d'un système linéaire.

En résumé, la méthode de Galerkin

1. On se donne $V_h \subset V$.
2. On trouve une base de V_h .
3. On écrit $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$.
4. On calcule A et F .
5. On résout $AU = F$.

Dans la suite de ce chapitre nous étudions plus en détail une méthode de Galerkin spécifique, en l'occurrence *la méthode des éléments finis*.

2.4 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une façon de choisir le base de l'espace d'approximation par la méthode de Galerkin.

Principe de la méthode

L'exemple type sera le problème de Dirichlet, qu'on rappelle ici :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

et l'espace de Hilbert sera l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$. On se limitera à un certain type d'éléments finis, dits "de Lagrange". Donnons les principes généraux de la méthode.

Eléments finis de Lagrange

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$, Soit V l'espace fonctionnel dans lequel on recherche la solution (par exemple $H_0^1(\Omega)$ s'il s'agit du problème de Dirichlet). On cherche $V_n \subset V = H_0^1(\Omega)$ et les fonctions de base $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. On va déterminer ces fonctions de base à partir d'un découpage de Ω en un nombre fini de cellules, appelés, "éléments". la procédure est la suivante :

1. On construit un "maillage" T de Ω que l'on appelle éléments K .
2. Dans chaque élément, on se donne des points que l'on appelle "noeuds".
3. On définit V_h par:

$$V_h = \{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \varphi|_K \in P_K, \forall K \in T \} \cap V$$

Où P_k désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à K . Le degré des polynômes est choisi de manière à ce que u soit entièrement déterminée par ses valeurs aux noeuds. Pour une méthode d'éléments finis de type Lagrange, les valeurs aux noeuds sont également les "degrés de liberté", c.à.d. les valeurs qui déterminent entièrement la fonction recherchée.

4. On construit une base $\{\varphi_i, \dots, \varphi_n\}$ de V_h tel que le support de φ_i soit "le plus petit possible". Les fonctions φ_i sont aussi appelées fonctions de forme.

2.4.1 Choix des fonctions φ_i : les éléments finis

L'intervalle $]0, 1[$ est discrétisé en n points de coordonnées x_i . Les fonctions φ_i sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 définies par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées les éléments finis de degré 1. Avec ces éléments finis, la matrice A est tridiagonale. Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions

de degré 2 ou plus. Le calcul de la matrice A fait intervenir les dérivées $\varphi'_i(x)$ simples à calculer:

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice A , tridiagonale et symétrique. Les trois termes des diagonales sont:

$$a_{ii} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx$$

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx$$

Exemple 2.4.1 en dimension 1

Soit $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ et soit $V = H_0^1([0, 1])$; on cherche un espace V_h d'approximation de V . Pour cela, on divise l'intervalle $]0, 1[$ en n intervalles de longueur $h = 1/(n + 1)$. On pose $x_i = i, i = 0, \dots, n + 1$. Les étapes 1 à 4 décrites précédemment donnent dans ce cas : $\forall i = 0, \dots, n$.

1. *Construction des éléments:* On a construit $n + 1$ éléments $K_i =]x_i, x_{i+1}[$.
2. *Noeuds:* On a deux noeuds par élément, (x_i et x_{i+1} sont les noeuds de K_i Le fait que $V_h \subset H_0^1(]0, 1])$ impose que les fonctions de V_h soient nulles en $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$. On appelle x_1, \dots, x_n les noeuds libres et x_0, x_{n+1} les noeuds liés. Les degrés de liberté sont donc les valeurs de φ en x_1, \dots, x_n . Aux noeuds liés, on a $\varphi(x_0) = \varphi(x_{n+1}) = 0$.
3. *Choix de l'espace:* On choisit comme espace de polynôme: $P_1 = \{ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$ et on pose

$$V_h = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q } \varphi|_{K_i} \in P_1, \forall i = 1, \dots, N. \varphi \in C(\overline{\Omega}) = C([0, 1])\}$$

et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ }.

Rappelons que $V = H_0^1(]0, 1[) \subset C([0, 1])$. Avec le choix de V_h , on a bien $V_h \subset V$.

4. *Choix de la base de V_h* : par l'interpolation de Lagrange avec $V_h = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.

Définition 2.4.1 *convergence (voir [9])*

On dit que la solution numérique φ_h converge vers φ dans V si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi - \varphi_h\|_V = 0.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, la taille de tous les éléments tend vers 0. Il est importante de remarquer que la norme utilisée est celle de l'espace V .

Définition 2.4.2 *(voir [9])*

On dit que la solution numérique φ_h converge à l'ordre p vers φ dans V s'il existe une constante C telle que

$$\|\varphi - \varphi_h\|_V \simeq Ch^p.$$

lorsque h tend vers 0.

En résumé

Les questions à se poser pour construire une méthode d'éléments finis sont donc :

1. La construction du maillage.
2. Un choix cohérent entre éléments, noeuds et espace des polynômes.
3. La construction de l'espace d'approximation V_h et de sa base $\{\varphi_i\}_{i=1\dots n}$.
4. La construction de la matrice de rigidité A et du second membre F .
5. L'évaluation de $d(u, V_h)$ en vue de l'analyse de convergence.

2.5 Méthodes de projection

2.5.1 Définition des opérateurs de projection

Définition 2.5.1 Soit V un espace vectoriel, V_1 et V_2 deux sous espaces vectoriels de V . on dit que V est une somme direct de V_1 et V_2 et on écrit $V = V_1 \oplus V_2$ si tout $v \in V$ peut être décomposé e la manière unique

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

En outre, si V est muni d'un produit scalaire et que:

$$\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2 : \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Alors V est appelé la somme directe orthogonale de V_1 et V_2 .

Proposition 2.5.1 Soit V un espace vectoriel, puis $V = V_1 \oplus V_2$ si et seulement s'il existe un opérateur linéaire $P : V \rightarrow V$ tel que $P^2 = P$ avec $v_1 = P(v)$ et $v_2 = (I - P)(v)$ et aussi $V_1 = P(V)$ et $V_2 = (I - P)(V)$.

Définition 2.5.2 Soit V un espace de Banach, un opérateur $P \in L(V)$ tel que $P^2 = P$ est appelé un opérateur de projection. Si V est espace d'Hilbert l'opérateur P est appelé un opérateur de projection orthogonal. Il est facile de remarquer que l'opérateur de projection P est orthogonal si et seulement si :

$$\langle P(v), (I - P)(u) \rangle = 0, \quad \forall u, v \in V$$

2.5.2 Exemples d'opérateurs de projection

Soit $V = C([a, b])$ et $V_1 = P_n$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à n , et soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ dans ce cas pour $v \in C([a, b])$ on définit $Pv \in P_n$ comme l'interpolation de Lagrange de v relativement à Δ i.e $Pv(x_i) = v(x_i)$, $0 \leq i \leq n$ l'interpolation Pv est unique et l'unicité de cette interpolation donne

$$Pv(x) = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) v(x_i)$$

En générale, soit V_n est une sous espace de dimension n de l'espace d'Hilbert V , supposons que $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base orthonormal de V_n dans ce cas pour tout $v \in V$ la formule

$$Pv = \sum_{i=0}^n \langle u_i, v \rangle u_i$$

définie un opérateur de projection de V dans V_n .

Principe des méthodes de projection

Pour résoudre approximativement l'équation intégrale

$$\lambda \varphi(x) - \int_D k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \dots x \in D \quad (2.5.1)$$

On doit choisir une famille de fonctions de dimensions finies qu'on suppose qu'elle contient la solution approché $\tilde{\varphi}(t)$ qui converge à la solution exacte $\varphi(t)$. On choisit la solution numérique souhaitée $\tilde{\varphi}(t)$ en le faisant satisfaire (2.5.1) approximativement. Il existe différents sens dans lesquels on peut dire $\tilde{\varphi}(t)$ "satisfaire (2.5.1) approximativement" ce qui conduit à différents types de méthodes. Les plus populaires de ces méthodes sont des *méthodes de Galerkin* et de *collocation*, qui sont définies ci-dessous. Lorsque ces méthodes sont formulées dans un cadre abstrait utilisant l'analyse fonctionnelle, elles font toutes une utilisation essentielle des opérateurs de projection. Puisque l'analyse des erreurs est le plus facilement réalisée dans un tel cadre d'analyse fonctionnelle, on se réfère collectivement à toutes les méthodes de projection.

2.5.3 Aperçu sur les méthodes de projection

L'équation d'intégrale (2.5.1) peut être écrit sous la forme

$$\varphi - K\varphi = f \quad (2.5.2)$$

Et l'opérateur K est supposé être compact sur un espace de Banach X à X , ($C([a, b])$ ou $L^2([a, b])$). définit par:

$$K\varphi = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

Dans la pratique, on choisit une suite de sous-espaces de dimension finie $X_n \subset X$, $n \geq 1$, avec X_n ayant la dimension d . et ont une base $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}$. Soit Y_n une autre suite

de sous-espaces de dimension finie de X . et soit $P_n : X \rightarrow Y_n$ une suite d'opérateurs de projection. Nous cherchons une fonction $\varphi_n \in X_n$, pour d'approcher φ par la suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ il suffit de prendre une suite $\{\phi_j\}_{j=1}^d$ comme base de l'espace X_n et écrire φ_n sous la forme:

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^d c_j \phi_j(x) \quad x \in D$$

Définition 2.5.3 (voir [1])

Résiduel

$$R_n(\varphi_n) = (\lambda - K) \varphi_n - f$$

on doit donc choisir φ_n de telle sorte que le résidu $R_n(\varphi_n)$ soit aussi petit que l'on veut dans un sens. Ceci ne sera accompli que si la projection du résidu sur Y_n soit égale à zero

$$P_n R_n(\varphi_n) = 0$$

cela est équivalent à dire que

$$P_n \varphi_n - P_n K \varphi_n = P_n f.$$

Afin que $P_n \varphi_n = \varphi_n$

$$\varphi_n - P_n K \varphi_n = P_n f.$$

Le but est que la fonction qui en résulte $\varphi_n(x)$ sera une bonne approximation de la solution exacte $\varphi(x)$. Soit $\{l_j\}_{j=1}^d$ la base de l'espace dual X_n^* de X_n . Les coefficients $\{c_1, \dots, c_d\}$ sont déterminés en forçant l'équation d'être en un sens presque exacte.

$$\begin{aligned} R_n(\varphi_n)(x) &= \lambda \varphi_n(x) - \int_D k(x,t) \varphi_n(t) dt - f(x) \dots x \in D \\ &= \sum_{j=1}^d l_j(\phi_j(x)) c_j - \sum_{j=1}^d l_j(P_n K \varphi_j(x)) c_j = l_j(f_n(x)) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Pour illustrer ces idées de façon plus concrète, deux méthodes d'approximation standard sont examinés par l'intermédiaire de ce cadre.

Pour résoudre une équation intégrale avec les méthodes classiques ou avec les méthodes numérique, il faut connaître l'existence de la solution. Le théorème de l'alternative de

Fredholm donne des conditions sur l'espace V , et l'opérateur linéaire K pour dire que notre problème (2.5.2) est résoluble.

Alternative de Fredholm

On suppose que X un espace de Banach

Théorème 2.5.1 (voir [13])

Soit $K : X \rightarrow X$ un opérateur compact. Alors l'équation

$$(\lambda - K)\varphi = f$$

admet une solution unique $\varphi \in X$ si et seulement si l'équation homogène

$$(\lambda - K)\varphi = 0$$

n'a que la solution triviale $\varphi = 0$.

Dans ce cas l'opérateur $(\lambda - K)$ est inversible et borné.

2.6 Méthode de Collocation

Pour la collocation polynomiale on prende $X = C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$, Où $C[a, b]$ est l'espace de fonctions continues sur $[a, b]$ et $\|\cdot\|_\infty$ est la norme sup. Soit X_n le sous-espace des polynômes de degré $n - 1$. Ici $Y_n = X_n$. Pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce, on va choisir des points distincts $x_1, \dots, x_d \in D$, telle que

$$R_n(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, d_n \tag{2.6.1}$$

Ceci nous mène à déterminer les coefficients $\{c_1, \dots, c_d\}$

$$R_n(x_i) = \sum_{j=1}^d l_j(\phi_j(x_i))c_j - \sum_{j=1}^d l_j(P_n K \varphi_j(x_i)) c_j = l_j(f_n(x_i)) \dots i = 1 \dots d_n$$

Cette écriture est une forme abstraite alors Nous introduisons un opérateur de projection P_n tel que:

$$P_n : X = C[a, b] \rightarrow X_n$$

$$x \rightarrow P_n \varphi$$

étant donné $\varphi \in C([a, b])$, on définit $P_n\varphi$ comme élément de X_n qui interpole φ au des noeuds $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Cela signifie écrire:

$$P_n(\varphi(x)) = \sum_{j=1}^d \varphi(x_j) l_j(x)$$

Où $\{l_j(x)\}_{j=1}^d$ sont les polynômes fondamentaux de l'interpolation de Lagrange Cela donne :

$$(P_n K \varphi)(x) = \sum_{j=1}^d l_j(x) \int_a^b k(x_j, t) \varphi(t) dt.$$

Soit $\{p_j(x)\}_{j=1}^d$ une base pour X_n , alors les équations de projection (2.5.3) deviennent

$$\varphi_n(x) - \sum_{j=1}^d l_j(x) \int_a^b k(x_j, t) \varphi(t) dt = \sum_{j=1}^d l_j(x) f(x_j) \dots (21) \quad (2.6.2)$$

Par l'évaluation des deux côtés de (2.6.2) à $x = x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Et en utilisant le fait que $l_j(x_i) = \delta_{ij}$, on obtient :

$$\varphi_n(x_i) - \int_a^b k(x_i, t) \varphi_n(t) dt = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6.3)$$

L'écriture

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^d c_j p_j(x).$$

Et la substitution dans l'équation (2.6.3), nous obtenons les équations de collocations :

$$\sum_{j=1}^d c_j p_j(x_i) - \sum_{j=1}^d c_j \int_a^b k(x_i, t) p_j(t) dt = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ce système linéaire admet une solution unique si:

$$\det [\phi_j(t_i) \neq 0] \quad (2.6.4)$$

cette condition signifie que les fonctions $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}$ constituent un système linéairement indépendant.

Exemple 2.6.1 :

Si par exemple $\phi_j(x) = x^j$ alors $\det [\phi_j(x_i)] = \det [\phi_j(x_i^j)] \neq 0$ Ce déterminant de Vandermonde il n'est pas nul. Pour tout i , ($1 \leq i \leq n$), soit $l_i \in V_n$, avec

$$V_n = \text{vect} \{1, x, \dots, x^n\}$$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$P_n \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j(x), \quad x \in D.$$

Le système l_i et le système de polynômes d'interpolation de Lagrange

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

2.7 Méthode de Galerkin

Soit $X = (L^2[a, b], \|\cdot\|_2)$, l'espace de hilbert des fonctions de carré intégrale sur $[a, b]$.

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ la base de X . Choisir $X_n = \text{span} \left(\{\phi_j\}_{j=1}^d \right)$, $Y_n = X_n$ et P_n comme projection orthogonale sur X_n . plus précisément, si $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ sont orthonormal alors :

$$P_n \varphi = \sum_{j=1}^d \langle \varphi, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Où

$$\langle \varphi, \phi_j \rangle = \int_a^b \varphi(x) \bar{\phi}_j(x) dx.$$

avec

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^d c_k \phi_k(x).$$

$\{c_j\}_{j=1}^d$ peut être obtenu par :

$$\sum_{j=1}^d c_j \langle \varphi_j, \phi_i \rangle - \sum_{j=1}^d c_j \langle \varphi_j, K \phi_i \rangle = \langle f, \phi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.7.1)$$

Où $\{\phi_j\}_{j=1}^d$ sont orthonormées équation (2.7.1) se simplifie en :

$$c_i - \sum_{j=1}^d c_j \langle \varphi_i, K \phi_j \rangle = \langle f, \phi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

$\varphi_n(x)$ satisfait :

$$\varphi_n(x) - \int_a^b k_n(x, t) \varphi_n(t) dt = f_n(x).$$

Où $k_n(x, t)$ est le noyau de dégénérés donné par :

$$k_n(x, t) = \sum_{k=1}^d \phi_j(x) \psi_k(t).$$

avec

$$\psi_k(t) = \int_a^b k(x, t) \bar{\phi}_n(x) dx.$$

C'est le système linéaire de Galerkin. Il suffit de déterminer les coefficients c_j . Depuis X_n est de dimension fini, il peut être démontré que ce problème a une solution. et par X_n étant un produit intérieur de l'espace, la solution peut être unique.

2.8 Méthode de séries de Neumann

C'est la méthode la plus universelle, puisqu'elle n'utilise nullement les propriétés hilbertiennes (on n'utilise ni produit scalaire, ni projection), et est donc valable sur un espace normé complet quelconque (i.e un espace de Banach).

Théorème 2.8.1 *Soit V un espace de Banach, A un opérateur linéaire borné, $A \in L(V)$ et I opérateur identitique. Supposons que*

$$\|K\| < 1.$$

Alors l'opérateur $(I - K)$ est inversible dans V et $(I - K)^{-1}$ est borné tel que :

$$\|(I - K)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|K\|}.$$

Preuve. (voir [13]) ■

Sous les hypothèses du théorème pour tout $f \in V$ l'équation

$$(I - K) \varphi = f.$$

admet une solution unique dans V telle que

$$\varphi = (I - K)^{-1} f.$$

On approche donc la solution φ par $\varphi_n = K_n \varphi$, où l'opérateur K_n est défini par la somme de la série de Neumann :

$$K_n = \sum_{n=0}^n K^n.$$

Donc la série de Neumann donne une formule pour calculer la solution

$$\varphi_n = \sum_{n=0}^n K^n \varphi.$$

2.8.1 Principe de la méthode

On considère l'équation intégrale linéaire de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

Où les fonctions $k(x, t)$, $f(x)$ sont de carrées intégrables. Nous allons chercher une solution pour cette équation en utilisant la suite itérative

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi_n(t) dt \\ \varphi_0(x) \quad \text{donnée} \end{cases}$$

Si on prend par exemple $\varphi_0(x) = f(x)$, on obtient le premier itéré:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi_0(t) dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) f(t) dt \\ &= f(x) + \lambda \psi_1 \end{aligned}$$

Avec

$$\psi_1(x) = \int_a^b k(x, t) f(t) dt$$

À partir des deux premiers itérés nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)[f(t) + \lambda\psi_1(t)] dt \\ &= f(x) + \psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x)\end{aligned}$$

Avec

$$\psi_2(x) = \int_a^b k(x,t)\psi_1(t) dt$$

En continuant ce processus itératif , en notons:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x) + \dots + \lambda^n\psi_n(x) + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\psi_n(x)\end{aligned}$$

Où

$$\psi_n(x) = \int_a^b k(x,t)\psi_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1.$$

Par passage à la limite ,quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient ce qu'on appelle série de Neumann :

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$$

2.9 Analyse de convergence

Proposition 2.9.1 Soit $\varphi(x) \in H^k$ espace de sobolev et soit $P_n(\varphi(x)) = \sum_{j=1}^n c_j\phi_j(x)$ le polynôme d'approximation de $\varphi(x)$ en norme L^2 . Alors :

$$\|\varphi(x) - P_n(\varphi(x))\|_{L^2([-1,1])} \leq C_0 n^k \|\varphi(x)\|_{H^k([-1,1])}$$

Avec C_0 est une constante positive , qui dépend de la norme sélectionnée et est indépendant de $\varphi(x)$ et n .

Preuve. (voir [8]) ■

Théorème 2.9.1 *supposons $K : X \rightarrow X$ un opérateur borné avec X espace de Banach*

$$\|K - P_n K\| \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$\forall n \geq M$ *il existe un opérateur $(I - P_n K)^{-1}$ borné de X dans X de plus est uniformément borné*

$$\sup_{m \geq M} \|(I - P_n K)^{-1}\| < \infty$$

$$(I - P_n K) \varphi_n = P_n f, \varphi_n \in X \text{ et } (I - K) \varphi = f$$

$$\varphi - \varphi_n = I(I - P_n K)^{-1}(\varphi - P_n(x))$$

$$\frac{|I|}{\|I - P_n K\|} \|\varphi - P_n(x)\| \leq \|\varphi - \varphi_n\| \leq |I| \|(I - P_n K)^{-1}\| \|\varphi - P_n(x)\|$$

Preuve. (voir [8]) ■

La proposition et le théorème assurent la convergence de ces méthodes numériques.

Chapitre 3

Applications

3.1 Discrétisation par différences finies

Appliqué la méthode de discrétisation sur le cas simple précédemment exposé. On choisit comme fonction $f(x) = -2\pi \cos(2\pi x)$. L'équation différentielle à résoudre est donc :

$$\begin{cases} -u''(x) = -2\pi \cos(2\pi x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, 1] \quad (3.1.1)$$

La solution exacte au problème (3.1.1) est :

$$u(x) = \sin^2(2\pi x).$$

1^{ère} étape : le schéma des différences finies

Soit $x_i = x_0 + ih = ih$, pour $n = 7 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n+1} = \frac{1}{8}$, et on pose $u(x_i) = u_i$, $f(x_i) = f_i$.

On a

$$-u''(x) = \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2}$$

$$u(0) = u(x_0) = u_0 = 0$$

$$u(1) = u(x_{n+1}) = u_{n+1} = 0$$

Le schéma s'écrit

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f_i \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \quad x_i \in]0, 2[$$

2^{ème} étape : Le système $Ax = b$.

$$\begin{cases} -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f_i & x_i \in]0, 1[\\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u_0 + 2u_1 - u_2 = h^2 f_1 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = h^2 f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ -u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1} = h^2 f_n \end{cases}$$

3^{ème} étape : détermine la solution approchée:

on a le système $Ax = b$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} h^2 f_1 \\ \vdots \\ h^2 f_n \end{pmatrix}$$

4^{ème} étape : Comparaison avec la solution exacte et la solution approchée

x_i	sol exacte	sol app	erreur
0	0	-0.0096	0.0096
0.0313	0.0096	-0.0000	0.0096
0.5	1	0.9936	$6.4e - 003$
0.7500	0.5000	0.4920	$8e - 003$
1	0	0.0285	0.0285

5^{ème} étape : Erreur de consistance

Si f est constante, alors $-u''$ est constante, et donc les dérivées d'ordre supérieur de u sont nulles. Donc par l'estimation (2.2.1) sur l'erreur de consistance, on a $R_i = 0$ pour

tout $i = 1, \dots, N$. Si on appelle u le vecteur de composantes u_i et u_h le vecteur de \mathbb{R}^n de composantes $u(xi)$, on peut remarquer facilement que $u - u_h = A^{-1}R$, où R est le vecteur de composantes R_i . On a donc $u - u_h = 0$, c.q.f.d.

3.2 Discrétisation par Eléments finis

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 1 & x \in]0, 2[\\ u(0) = u(2) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte de cet équation :

$$u(x) = \frac{1}{\exp(-2) - \exp(2)} ((1 - \exp(-2)\exp(x)) - (\exp(1) - 1)\exp(-x)) - 1.$$

selon la décomposition $[0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2]$.

1^{ère} étape : On recherche le problème variationnel, telle que:

$$V_h = \{u \in H^1([0, 2]), \text{ avec } v(0) = v(2) = 0\} = H_0^1([0, 2])$$

On multiplier l'équation par une fonction de test v , tel que $v \in V_h$

$$\int_0^2 (-u'' + u)v dx = \int_0^2 v dx$$

par intégration par partie, on obtient

$$\int_0^2 (u'v' + uv) dx = \int_0^2 v dx$$

finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V_h, \text{ tel que} \\ a(u, v) = \int_0^2 (u'v' + uv) dx = l(v) = \int_0^2 v dx \\ u(0) = u(2) = 0 \end{array} \right.$$

Pour justifier l'équation admet une unique solution on peut utiliser le théorème de

Lax-Milgram.

2^{ème} étape : les fonctions de base on a

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donc

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

La solution $u(x)$ s'écrit

$$u(x) \simeq u_h(x) = u_0\varphi_0 + u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2$$

alors

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a(u_0\varphi_0 + u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2, v) \\ &= u_0a(\varphi_0, v) + u_1a(\varphi_1, v) + u_2a(\varphi_2, v) \end{aligned}$$

on prend $v = \varphi_j$, avec $j = 0, 1, 2$.

$$a(u, v) = u_0a(\varphi_0, \varphi_j) + u_1a(\varphi_1, \varphi_j) + u_2a(\varphi_2, \varphi_j)$$

donc

$$u_0a(\varphi_0, \varphi_j) + u_1a(\varphi_1, \varphi_j) + u_2a(\varphi_2, \varphi_j) = l(\varphi_j)$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_0) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_0) + u_2 a(\varphi_2, \varphi_0) = l(\varphi_0)$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_1) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_1) + u_2 a(\varphi_2, \varphi_1) = l(\varphi_1)$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_2) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_2) + u_2 a(\varphi_2, \varphi_2) = l(\varphi_2)$$

$$u_0 a_{0,0} + u_1 a_{0,1} + u_2 a_{0,2} = l_0$$

$$u_0 a_{1,0} + u_1 a_{1,1} + u_2 a_{1,2} = l_1$$

$$u_0 a_{2,0} + u_1 a_{2,1} + u_2 a_{2,2} = l_2$$

on a $u_0 = u(x_0) = u(0) = 0$ et $u_2 = u(x_2) = u(2) = 0$ donc

$$u_1 a_{0,1} = l_0$$

$$u_1 a_{1,1} = l_1$$

$$u_1 a_{2,1} = l_2$$

3^{ème} étape : détermine la solution approchée: on peut trouver la solution de cet système

$$u_1 a_{0,1} = l_0$$

$$a_{0,1} = -\frac{5}{6}$$

$$l_0 = \frac{1}{2}$$

donc

$$-\frac{5}{6}u_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = -\frac{3}{5}$$

alors

$$u(x) = -\frac{3}{5}\varphi_1$$

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{3}{5}x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{3}{5}(2-x), & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

4^{ème} étape : Comparaison avec la solution exacte et la solution approchée

x_i	sol exacte	sol app	erreur
0	0	0	0
0.25	-0.16	-0.15	0.01
0.5	-0.27	-0.3	0.03
0.75	-0.332	-0.45	0.118
1	-0.35	-0.6	0.25
1.25	-0.332	-0.45	0.118
1.5	-0.27	-0.3	0.03
1.75	-0.16	-0.15	0.01
2	0	0	0

Comparaison avec la méthode des différences finies

Le schéma obtenu est donc :

$$\begin{cases} 2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = h^2 f(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N. \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

C'est exactement le schéma différences finies avec un pas constant h .

3.3 Résolution de Fredholm par les méthodes de projection

3.3.1 1^{ère} cas : par la méthode de Galerkin

On se propose de résoudre par le procédé de Galerkin l'équation intégrale suivante

$$u(x) = x + \int_{-1}^1 xtu(t) dt. \tag{3.3.1}$$

La solution exacte de cette équation est : $u(x) = 3x$.

Prenant pour système complet sur $[-1, 1]$ un système de polynômes de Legendre $\{l_i(x)\}_{1 \leq i \leq 3}$ avec

$$l_1(x) = 1, \quad l_2(x) = x, \quad l_3(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

On cherche la solution approchée $u_n(x)$ de la forme :

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Portons dans (3.3.2) $u_n(x)$ à la place de $u(x)$ il vient :

$$c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^1 xt \left(c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} \right) dt$$

en calculant l'intégrale on obtient

$$c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \frac{2}{3}c_2x$$

En multipliant successivement les deux membres de la dernière équation par 1, x , $\frac{3x^2 - 1}{2}$ et en intégrant par rapport à x de -1 à 1 . nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\langle c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} - x - \frac{2}{3}c_2x, 1 \right\rangle &= 0 \\ \left\langle c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} - x - \frac{2}{3}c_2x, x \right\rangle &= 0 \\ \left\langle c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} - x - \frac{2}{3}c_2x, \frac{3x^2 - 1}{2} \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2c_2 = 0 \\ \frac{2}{3}c_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}c_2 \\ \frac{2}{5}c_3 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 0$$

Ainsi on obtient une solution

$$u_3(x) = 3x.$$

Cette solution coïncide avec la solution exacte.

3.3.2 2^{ème} cas : par la méthode de Collocation

On se propose de résoudre par le procédé de Collocation l'équation intégrale suivante

$$u(x) = x + \int_{-1}^1 xt u(t) dt. \quad (3.3.2)$$

Prenant pour système complet sur $[-1, 1]$ un système de polynômes de Legendre $\{l_i(x)\}_{1 \leq i \leq 3}$ avec

$$l_1(x) = 1, \quad l_2(x) = x, \quad l_3(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

On cherche la solution approchée $u_n(x)$ de la forme :

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Portons dans (3.3.2) $u_n(x)$ à la place de $u(x)$ il vient :

$$c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^1 xt \left(c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} \right) dt$$

en calculant l'intégrale on obtient

$$c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \frac{2}{3}c_2x$$

En choisissant les points $-1, 0, 1$ et en intégrant par rapport à x de -1 à 1 , nous obtenons

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{3}c_2x_1 + c_3 \frac{3x_1^2 - 1}{2} - x_1 = 0 \\ c_1 + \frac{1}{3}c_2x_2 + c_3 \frac{3x_2^2 - 1}{2} - x_2 = 0 \\ c_1 + \frac{1}{3}c_2x_3 + c_3 \frac{3x_3^2 - 1}{2} - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c_2 = 0 \\ \frac{2}{3}c_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}c_2 \\ \frac{2}{5}c_3 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 0$$

Ainsi on obtient une solution

$$u_3(x) = 3x.$$

La solution approchée de l'équation intégrale est $u_3(x) = 3x$. Sachant que la solution exacte est $u(x) = 3x$, on obtenu donc la solution exacte, et ceci revient bien sur au choix de la base.

3.3.3 3^{ème} cas : par la méthode de séries Neumman

Résoudre l'équation

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^1 xt\varphi(t) dt$$

En utilisant la méthode d'approximations successives de séries Neumman.

On pose $\varphi_0(x) = 1$ alors :

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= x + \int_{-1}^1 xt\varphi_0(t) dt \\ &= x + \int_{-1}^1 xt dt \\ &= x\end{aligned}$$

De même, la deuxième approximation est :

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= x + \int_{-1}^1 xt\varphi_1(t) dt \\ &= x + \int_{-1}^1 xt^2 dt \\ &= x + \frac{2}{3}x\end{aligned}$$

Et la troisième approximation :

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= x + \int_{-1}^1 xt\varphi_2(t) dt \\ &= x + x \int_{-1}^1 \left(t + \frac{2}{3}t\right) dt \\ &= x \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)\end{aligned}$$

Donc, on trouve :

$$\varphi_n(x) = x \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n}\right)$$

Par passage à la limite on trouve la solution approchée :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} x \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= 3x\end{aligned}$$

3.3.4 Programmation Matlab

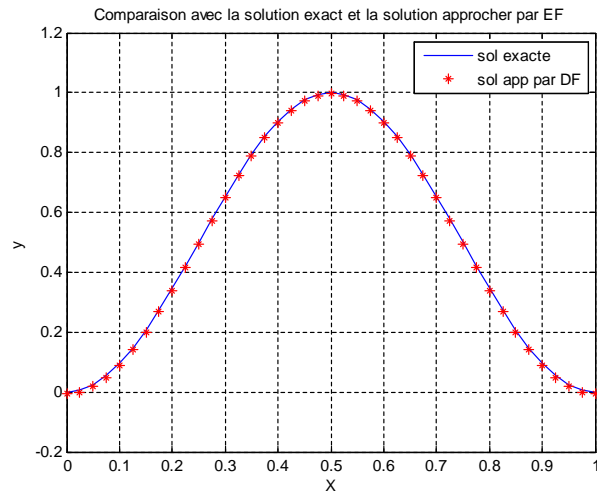
Programme 1 : approximation d'un équation de poisson par la méthode de différences finies

```

clc
clear all
f=inline('-2*pi^2*cos(2*pi*x)')
n=input('donner n= ')
a=0; b=1; h=(b-a)/n;
x=0:h:1
v=ones(1,n);
A=2*eye(n+1)-diag(v,1)-diag(v,-1)
b2=[h^2*f(x(1:n+1))]'
u=inv(A)*b2
t=x;
uext=inline('(sin(pi*t)).^2')
y=uext(t)
%uext=uext(t)
plot(x,y,x,u,'r*')
%plot(t,y,'r*')
grid on
legend('sol exacte','sol app par DF')
title('Comparaison avec la solution exact et la solution approcher par EF')
xlabel('X')
ylabel('y')
fid=fopen('exemple diff fini.txt','w');
fprintf(fid,'\n n      x      Sol.exact      Sol.app      Err\n');
for k=1:n
    err(k)=abs(u(k)-y(k));
    fprintf(fid,'%2i    %2.3f    %f    %f    %e\n\n',k,x(k),y(k),u(k),err(k));
end

```

3.3. Résolution de Fredholm par les méthodes de projection



2^{ème} étape : Comparaison avec la solution exacte et la solution approchée

x_i	sol exacte	sol app	erreur
0	0.000000	-0.006169	$6.168503e - 003$
0.1250	0.146447	0.140580	$5.867012e - 003$
0.2500	0.500000	0.494861	$5.139149e - 003$
0.3750	0.853553	0.849142	$4.411287e - 003$
0.5000	1.000000	0.995890	$4.109796e - 003$
0.6250	0.853553	0.849142	$4.411287e - 003$
0.7500	0.500000	0.494861	$5.139149e - 003$
0.8750	0.146447	0.140580	$5.867012e - 003$
1	0.006156	-0.000000	$6.155830e - 003$

Programme 2: approximation d'une équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin :

1^{ère} **étape** : Déclaration les polynome de legendre

```
function y=Leg(n)
syms('x')
if n==0
    y=x.^0;
else
    y=(-1).^n/((2.^n).*factorial(n)).*diff((1-(x.^2)).^n,n);
end
```

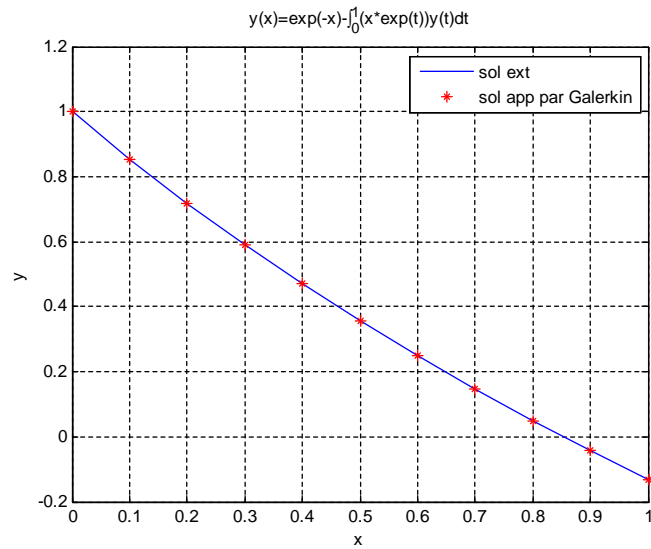
2^{ème} **étape** : le programme dans *M-file*

```
function Eq_legendre(f,k,ex,a,b,lambda)
%Eq_legendre('exp(-x)', 'x.*exp(t)', 'exp(-x)-x/2', 0, 1, -1)
clc
n=4;m=10;
h=(b-a)/m;
syms x t;
k=inline(k);
    for j=1:n
        for i=1:n
            B2=inline(leg(j-1));
            B1=inline(leg(i-1));
            g=int(k(x,t)*B1(t),t,a,b);
            g=inline(g);
            A(i,j)=int((B1(x)-lambda*g(x))*B2(x),x,a,b);
        end
    end
end
f=inline(f);
```

```

for i=1:n
    B1=inline(leg(i-1));
    %B(i)=Inttra1(f(x)*B1(x),n,a,b);
    B(i)=int(f(x)*B1(x),a,b);
end
X=inv(A)*B'
ex=inline(ex)
u=0;
for j=1:n
    B=inline(leg(j-1));
    u=u+B(x)*X(j)
end
u=inline(u);
x=a:h:b;
plot(x,ex(x),x,u(x),'*r')
legend('exacte Solution',' approx. Solution ');
title('y(x)=1+\int_{0}^{1}(xt+x^2t^2)y(t)dt')
xlabel('x')
ylabel('y')
grid on
uapp=u(a:h:b);
exact=ex(a:h:b);
fid = fopen('legendre.txt', 'w');
fprintf(fid,'\n n x Sol.exact Sol.app Err\n');
for k=1:m+1
    err(k)=abs(uapp(k)-exact(k));
    fprintf(fid,'%2i %2.3f %f %f %e\n\n',k,x(k),exact(k),uapp(k),err(k))
end
fclose(fid);

```



Alors, on trouve la solution approchée égale :

$$U_n = \frac{14584}{\exp(1) - 5364}.$$

3^{ème} étape : Comparaison avec la solution exacte et la solution approchée

n	x	Sol ext	Sol app	Err
1	0	1.000000	0.999614	$3.863593e - 004$
2	0.1	0.854837	0.854931	$9.354185e - 005$
3	0.2	0.718731	0.718883	$1.519075e - 004$
4	0.3	0.590818	0.590854	$3.551937e - 005$
5	0.4	0.470320	0.470229	$9.085043e - 005$
6	0.5	0.356531	0.356394	$1.366352e - 004$
7	0.6	0.248812	0.248733	$7.841202e - 005$
8	0.7	0.146585	0.146632	$4.648777e - 005$
9	0.8	0.049329	0.049475	$1.457601e - 004$
10	0.9	-0.043430	-0.043353	$7.735973e - 005$
11	1	-0.132121	-0.132466	$3.457667e - 004$

Programme 3: approximation d'un équation intégrale de Fredholm par la méthode de Collocation

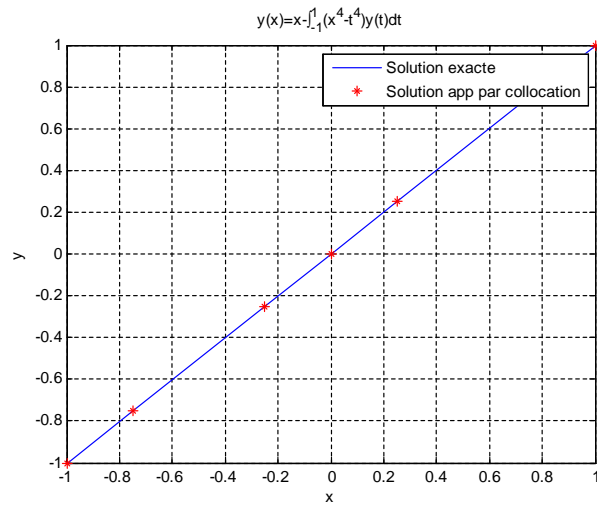
```
function coll_leg(f,k,ex,a,b,l)
%coll_leg('x','x*t','3*x',-1,1,-1)
%coll_leg('x','-(x.^4)-(t.^4)','x',-1,1,-1)
%coll_leg('exp(x)','2*exp(t)*exp(2)','exp(x)/(2-exp(2))',0,1,1)
clc,close all
fprintf('k(x,t)=%s f(x)=%s exacte(x)=%s\na=%.1f b=%.1f lambda=%.1f\n',k,f,ex,a,b,l)
m=input('nmbe des points n= ');
for i=1:m
    fprintf('point n\U{b0}%d =',i)
    z(i)=input('');
end
tic
syms x t;
k=inline(k);
for j=1:length(z)
    for i=1:length(z)
        T1=inline(log(i-1));
        g=int(k(x,t)*T1(t),t,a,b);
        g=inline(g);
        A(j,i)=T1(z(j))+l*g(z(j));
    end
end
f=inline(f);
for i=1:length(z)
    F(i)=f(z(i));
end
X=inv(A)*F'
time=toc;
```

```

ex=inline(ex);
u=0;
for j=1:length(z)
    B=inline(log(j-1));
    u=u+B(x)*X(j);
end
u=inline(u);
uapp=u(z);
ex=ex(z);
err=abs(uapp-ex);
plot(z,ex,z,u(z),'*r')
legend('Solution exacte','Solution app par collocation')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('y(x)=x-\int_{-1}^{1}(x^4-t^4)y(t)dt')
grid on
fprintf('\n n      x      Sol.exact      Sol.app      Err\n');
for k=1:m
    err(k)=abs(uapp(k)-ex(k));
    fprintf('%2i   %2.3f   %f      %f      %e\n\n',k,z(k),ex(k),uapp(k),err(k));
end

```

3.3. Résolution de Fredholm par les méthodes de projection



2^{ème} étape : Comparaison avec la solution exacte et la solution approchée

n	x_i	Sol ext	Sol app	Err
1	-1	-1.0000	-1.0000	0.0000e + 000
2	-0.25	-0.2500	-0.2500	1.6653e - 016
3	0	0.0000	0.0000	1.5612e - 016
4	0.25	0.2500	0.2500	1.6653e - 016
5	1	1.0000	1.0000	3.3306e - 016

Conclusion

Les méthodes de résolution numérique des équations ordinaires et intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux dans les assimilations des phénomènes scientifiques qui sont difficiles à réaliser, voir impossible à résoudre.

Dans ce travail, nous avons étudié la résolution numérique de ces équation par La méthode des différences finies qui est la " mère " des méthodes de discrétisation, ensuite par les éléments finis qui sont basées sur la technique de la formulation variationnels. Puis on utilise les méthodes de projection pour résoudre l'équation intégrale de fredholm dans un cadre fonctionnel.

Qui permettent d'approximer la valeur d'une fonction en un point et pour relier la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue on doit respecter les trois principales critères sont la convergence, la stabilité et la consistance.

A la fin, ont comparé les solutions exactes avec les solutions approchées pour quelques exemples.

Bibliographie

- [1] K. ATKINSON, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Combridge 1997.
- [2] W. CHENEY, *Analysis for Applied Mathematics*, University of Texas at Austin.
- [3] A.FORTIN, A GARON, *Les éléments finis de la théorie à la pratique*, Université Laval 1997-2014.
- [4] M.A GOLBERG, *A Survey of Numerical Methods for Integral Equations*, New York 1979
- [5] E. GONCALVES DA SILVA, *Méthodes et Analyse Numériques*, Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [6] R HERBIN, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Université Aix Marseille 1, 2007.
- [7] G. LEBORGNE, *Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et Éléments finis*, Septembre 2004.
- [8] K. MALEKNEJAD, K. NOURI, M. YOUSEFI, *Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations*, 2007, pages 335–339.
- [9] A. MILI ELHOUSSEYN, *Méthodes des éléments finis les équation linéaires*, Université de M'sila, 2014/2015.
- [10] A. QUARTERONI, F SALERI, P GERVASIO, *Calcul Scientifique*, Springer-Verlag Italia 2008.

- [11] M. RAHMAN, *Integral Equations and their Applications*, Dalhousie University, Canada.
- [12] J. RAPPAZ, M. PICASSO, *Introduction à l'analyse numérique*, Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [13] O. REMILI, *équations intégrales de frontière exemple de résolution numérique*, Université de D'oran.