



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Résolution analytique et numérique de l'équation de télégraphe conformable
fractionnaire*

Présentée par :

M^{elle} BOUAZIZ Khalisa

Soutenu publiquement le : 28/Juin/2021.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r MERZOUGUI Abdelkrim*

Encadreur : *M^r NOUIRI Brahim*

Co-Encadreur : *M^r ABDELKEBIR Saad*

Examineur : *M^r ARIOUA Yacine*

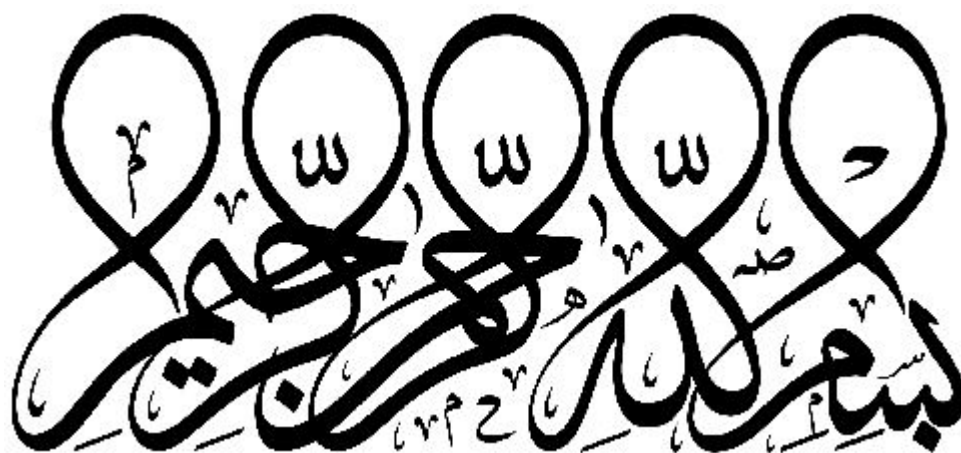
Prof, Université de M'sila

M.C.A, Université de M'sila

M.A.A, Université de M'sila

M.C.A, Université de M'sila

Remerciements



Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant de m'avoir donné la patience, la volonté et l'énergie pour mener à bien ce travail, et je tiens à exprimer toute ma gratitude et mes remerciements à mon directeur de thèse le Professeur **NOURI BRAHIM** pour la confiance qu'il m'a accordée. Accepter de superviser les travaux du maître note pour ses nombreux conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. Je tiens également à remercier le respecté Dr **SAAD ABDELKEBIR**, Et dites-lui combien j'apprécie sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais et des délais de correction des documents que je lui ai transmis. J'ai été très sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de cela. Je tiens également à remercier le respecté Dr **MERZOUGUI Abdelkrim**, qui m'a honoré en tant que président du jury de cette thèse. J'adresse également mes plus sincères remerciements à Monsieur **ARIOUA Yacine** Les parents peuvent faire tout et n'importe quoi juste pour vous voir le meilleur. Merci, **MON PÈRE** et **MA MÈRE**. Enfin, je remercie également toutes les personnes du département Mathématiques de l'Université de Mohamed Boudiaf, Pôle Universitaire de M'sila.

K. Bouaziz!

Dédicaces

Loué soit Dieu, tout à fait digne de sa majesté et de la perfection de ses attributs, qui nous a aidés et nous a aidés à terminer cette étude : A qui le Dieu Tout-Puissant Tout-Puissant a placé le Paradis sous ses pieds et révérence dans son cher livre ... **MA MÈRE BIEN-AIMÉE** ... à mon espérance et mon soutien... à toi, **MA CHÈRE GRAND-MÈRE**, que Dieu prolonge sa vie. Au propriétaire d'une biographie parfumée et d'une pensée éclairée ... A mon bras ferme ... et à mon idéal fidèle ... **MON PÈRE BIEN-AIMÉ** . À **MES FRÈRES** qui ont eu un grand impact sur de nombreux obstacles et difficultés.

À **MA CHÈRE ÂME**, qui a travaillé dur pour obtenir le meilleur.

À tous les chers membres de la famille.

À tous **MES AMIS** et collègues du département.

À tous **MES CHERS PROFESSEURS** qui n'ont pas hésité à tendre la main.

À qui le cœur a mentionné et la plume n'a pas mentionné.

À vous tous, je dédie le fruit de mes travaux.

Enfin, je demande à Dieu Tout-Puissant de rendre cette œuvre de justice acceptable.

K. Bouaziz!

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons proposé des méthodes pour calculer les solutions analytiques et numériques de l'équation télégraphique fractionnaire. Les dérivées fractionnaires sont décrits au sens conformable. La solution analytique est trouvé par la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conformable. Nous avons proposé un algorithme basé sur des polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce. L'équation télégraphique fractionnaire est réduite à un système linéaire d'équations différentielles du second ordre et la méthode de Newmark est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, quelques exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cet algorithme.

Mots-Clés : Calcul fractionnaire conformable, Méthode de Fourier, Méthode de Newmark, Polynômes de Tchebychev, Équation télégraphique fractionnaire.

In this memoir, we have proposed methods to calculate the analytical and numerical solutions of the fractional telegraph equation. Fractional derivatives are described in the conformable sense. The analytical solution is found by the Fourier method and the properties of conformable fractional calculus. We have proposed an algorithm based on shifted Chebyshev polynomials of the fourth kind. The fractional telegraph equation is reduced to a linear system of second order differential equations and Newmark's method is applied to solve this system. Finally, some numerical examples are presented to confirm the reliability and the efficiency of this algorithm.

Keywords : Conformable fractional calculus, Fourier method, Newmark method, Chebyshev polynomials, fractional telegraph equation.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale | 7 |
| Notations | 9 |
| 1 Notions des calcul conformable fractionnaires | 10 |
| 1.1 Espaces fonctionnels | 11 |
| 1.1.1 Espaces des fonctions intégrables | 11 |
| 1.1.2 Espaces des fonctions continues | 11 |
| 1.2 Fonction spéciale pour la dérivation conformable fractionnaire | 11 |
| 1.2.1 La fonction Gamma | 12 |
| 1.2.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma | 12 |
| 1.3 Dérivées et intégrales conformable fractionnaires | 13 |
| 1.3.1 Dérivées conformable fractionnaires | 13 |
| 1.3.2 Quelques propriétés de dérivation conformable fractionnaire | 14 |
| 1.3.3 Intégrations conformable fractionnaires | 15 |
| 1.4 La transformation de Laplace conformable fractionnaire | 16 |
| 1.4.1 Rappel sur la transformation de Laplace | 17 |
| 1.4.2 La transformation de Laplace conformable fractionnaire | 17 |
| 1.4.3 Quelques propriétés de la transformation de Laplace conformable fractionnaire | 20 |
| 2 Solutions Analytique pour l'équation télégraphique conformable fractionnaire | 23 |
| 2.1 Résultats de théories importantes et leur relation avec la solution analytique de l'équation télégraphique conformable fractionnaire | 24 |
| 2.1.1 problème de Sturm-Liouville conformable fractionnaire | 25 |
| 2.1.2 équation télégraphique conforme à l'espace-temps avec condition aux limites de Robin conformable | 27 |
| 2.1.3 Exemples illustratifs | 30 |
| 3 Solutions numérique pour l'équation télégraphique conformable fractionnaire | 33 |
| 3.1 Polynômes de Tchebychev | 34 |
| 3.1.1 Les polynômes de Tchebychev deuxième type | 34 |
| 3.1.2 Certaines propriétés des polynômes de Tchebychev décalés du second type | 34 |
| 3.1.3 Évaluation du dérivée conformable fractionnaire a l'aide des polynômes de Tchebychev décalés du deuxième type | 35 |
| 3.1.4 Erreur d'analyse | 36 |
| 3.1.5 Méthode de collocation Tchebychev | 37 |
| 3.2 Méthode de Newmark's | 39 |

| | | |
|-------|---|----|
| 3.2.1 | Méthode de Newmark's | 39 |
| 3.2.2 | Algorithme de Méthode Newmark's | 41 |
| 3.3 | Applications | 41 |

| | | |
|----------------------|--|-----------|
| Bibliographie | | 48 |
|----------------------|--|-----------|

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | La transformation de Laplace de certaines fonctions | 17 |
|-----|---|----|

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Courbes de fonction $y=\tan(2*\lambda)$ et $y=-\lambda$ | 32 |
| 3.1 | Comparaison des solutions numériques et exactes de l'exemple 3.2 à différents instants et α a niveaux avec $h = 0,01, \Delta t = 0,001$ | 43 |
| 3.2 | Graphiques espace-temps des solutions exactes et numériques pour l'exemple 3.2 à $t = 4$ et $\alpha = 1$ | 43 |
| 3.3 | Comparaison des solutions numériques et exactes de l'exemple 3.3 à différents temps et niveaux β avec $h = 0,01, \Delta t = 0,001$ | 44 |
| 3.4 | Solution numérique espace-temps pour l'exemple 3.3 à $t = 1.2$ avec $\beta = 2$ | 45 |
| 3.5 | Comparaison des solutions numériques et exactes de l'exemple 3.4 à différents instants et β a niveaux avec $h = 0,01, \Delta t = 0,0001$ | 46 |
| 3.6 | Espace-temps de solution numérique et erreur absolue pour l'exemple 3.4 à $t = 1$ et $\alpha = 1$ | 46 |

Introduction générale

L'équation télégraphique est introduite par Oliver Heaviside en 1880 et est une équation aux dérivées partielles hyperbolique linéaire du second ordre. Cette équation décrit le courant et la tension sur une ligne de transmission électrique avec la distance et démontre que les ondes électromagnétiques peuvent être réfléchies sur le fil, et que des modèles d'ondes apparaissent le long de la ligne de transmission [9]. L'équation télégraphique linéaire unidimensionnelle peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{RG}{LC} \right)^2 u(x, t) = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

Où :

- $u(x, t)$ peut être la tension ou le courant traversant le fil à la position x et le temps t .
- R et G sont, respectivement, la Résistance distribuée mesurée en ohms par unité de longueur et la conductance de la résistance.
- C et L sont, respectivement, est la capacité du condensateur et l'inductance de la bobine.

L'équation télégraphique est applicable dans plusieurs domaines comme : Propagation d'onde [31] théorie de la marche aléatoire [3], Méthode de collocation spectrale de Tchebychev [25]. Et plusieurs autres domaines, comme :([10], [8], [26], [33], [16]).

Le calcul fractionnel est l'un des domaines de l'analyse mathématique qui traite de la recherche et des applications du calcul avec des rangs incorrects. Bien qu'il paraisse vieux, il est considéré comme moderne. Où il a reçu une grande attention au cours des dernières décennies. Ceci est dû à son importance dans de nombreuses applications physiques, chimiques, réseaux électroniques, sciences et ingénierie ([22], [27], [6]).

En 2014, une nouvelle définition du dérivé fractionnaire, appelée «dérivé conformable fractionnaire», est introduit par Khalil et al. Cette nouvelle dérivée fractionnaire est compatible avec La dérivée classique et il est excellent pour étudier des solutions non régulières.

Nous sommes intéressés à étudier dans ce mémoire le modèle télégraphique (1) dans le cadre de la dérivée fractionnaire espace-temps conformable. Nous proposerons les transformations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \mathcal{D}_t^{(\alpha)} & \text{et} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \longrightarrow \mathcal{D}_t^{(2\alpha)} = \mathcal{D}_t^{(\alpha)} \mathcal{D}_t^{(\alpha)}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \mathcal{D}_x^{(\beta)} & \text{et} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \longrightarrow \mathcal{D}_x^{(2\beta)} = \mathcal{D}_x^{(\beta)} \mathcal{D}_x^{(\beta)}, \\ a = G/C, & b = R/L, & w^2 = 1/LC, \end{cases} \quad (2)$$

où $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}$ et $\mathcal{D}_x^{(\beta)}$ sont les opérateurs dérivées fractionnaires de temps et d'espace conformables [11]. Ensuite, nous obtenons le modèle télégraphique conformable temps-espace-fractionnaire

associé à la transformation (2) comme suit :

$$\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}u(x, t) + (a + b)\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u(x, t) + (ab)u(x, t) = w^2\mathcal{D}_x^{(2\beta)}u(x, t) + f(x, t), \quad (3)$$

sous réserve des conditions initiales :

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

et la condition aux limites de Dirichlet :

$$u(0, t) = g(t), \quad u_t(1, t) = h(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

où $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{C}^2(0, 1)$, $g, h \in \mathcal{C}^2(0, T)$ et $f \in \mathcal{C}([0, 1][0, T])$ sont des fonctions données.

Afin de résoudre l'équation télégraphique fractionnaire bidimensionnelle, Braoui et al. ont proposé une méthode de Chebyshev Tau pour la solution numérique de l'équation télégraphique conformable fractionnaire [4].

Dans [7], la méthode de séparation des variables a été appliquée pour dériver les solutions analytiques de Equations télégraphiques fractionnaires de temps avec différents types de conditions aux limites. Les transformées de Fourier et de Laplace ont également été appliquées pour dériver des solutions analytiques aux équations télégraphiques fractionnaires dans le temps ([12], [13]).

De plus, des méthodes semi-analytiques ont été employées par les chercheurs dans ([17], [32], [23], [29]) pour résoudre des équations télégraphiques fractionnaires dans le temps.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : Le chapitre 1, fournit une description du dérivée fractionnaire conformable et de ses propriétés.

Dans le chapitre 2, nous travaillons sur la solution analytique de l'équation télégraphique en utilisant la méthode de Fourier et la méthode de séparation des variables. Dans chapitre 3, nous avons proposé une méthode de collocation de Tchebychev basée sur un polynôme de Tchebychev du second espèce pour résoudre le problème ((3)-(5)) avec la méthode de Newmark pour résoudre ce système. Divers exemples illustratifs sont considérés pour confirmer l'efficacité de la méthode proposé.

Notations

- \mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.
- \mathbb{N} : Ensemble des nombres entiers naturels.
- \mathbb{C} : Ensemble des nombres complexes.
- Ω : Domaine borné dans \mathbb{R} .
- $\Gamma(\cdot)$: La fonction Gamma.
- $\mathcal{D}_a^\alpha(f)(t)$: La dérivée conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a .
- ${}_b\mathcal{D}^\alpha(f)(t)$: La dérivée conformable fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b .
- $\mathcal{I}_a^\alpha(f)(t)$: L'intégrale conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a .
- ${}_b\mathcal{I}^\alpha(f)(t)$: L'intégrale conformable fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b .
- $\mathcal{F}_\alpha(s) = \mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s)$: La transformation de Laplace conformable fractionnaire de $f(t)$.
- $U_i(x)$: Le polynôme de Tchebychev du second type.
- $\mathcal{A}_{i,k}^n$: Le noyau de Tchebychev.
- EQM : Erreur de la moyenne quadratique.

NOTIONS DES CALCUL CONFORMABLE FRACTIONNAIRES

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul conforme fractionnaire telles que les fonctions spécifiques pour l'intégration conforme fractionnaire, la dérivation conforme fractionnaire et d'autres notions dont on aura besoin dans la suite de notre mémoire.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette partie, nous présentons un préliminaire dans lequel on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.1. ([21]) Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $1 \leq p \leq +\infty$.

- ❶ Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f et mesurable et

$$\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty.$$

- ❷ Pour $p = +\infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω .

Théorème 1.1. ([21]) Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} .

- ❶ Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- ❷ L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{M \geq 0 : |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.1.2 Espaces des fonctions continues

Définition 1.2. ([1]) Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \max_{t \in \Omega} |f^{(k)}(t)|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0, C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

1.2 Fonction spéciale pour la dérivation conformable fractionnaire

Dans cette partie, nous présentons la fonction Gamma. Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie du calcul conformable fractionnaire et ses applications.

1.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** $\Gamma(z)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.3. ([21]) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$.

1.2.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

- ❶ Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0, \quad (1.2)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!. \end{aligned}$$

❷

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) \quad : z > 0. \quad (1.3)$$

qui peut être prouvé en utilisant l'intégration par parties :

❸

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad : z < 0, z \neq -1, -2, -3, \dots \quad (1.4)$$

qui résulte de la substitution de $z+1$ par z dans la propriété récursive .

❹

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad : n \in \mathbb{N}, \quad (1.5)$$

$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5) \dots 5(3)(1)$. qui est également le résultat de la propriété récursive .

⑤

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi} : n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

⑥

$$\Gamma(k) = \pm\infty : k = 0, -1, -2, \dots \quad (1.7)$$

1.3 Dérivées et intégrales conformable fractionnaires

En 2014, ([11]) a introduit une définition complètement nouvelle du calcul conformable fractionnaire appelé *Dérivée conformable fractionnaire*. La nouvelle définition semble être très pratique par rapport aux définitions précédentes, car elle peut être étendue à la définition classique de la première dérivée quand $\alpha = 1$.

Le but de cette partie est d'introduire les deux plus importantes approches du calcul conformable fractionnaire y compris quelques unes de leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches.

1.3.1 Dérivées conformable fractionnaires

Définition 1.4. ([30]) (Les Dérivées conformable fractionnaires gauche et droit) : Étant donné une fonction $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors la dérivée conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a est définie par :

$$\mathcal{D}_\alpha^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (1.8)$$

Si $\mathcal{D}_\alpha^a(f)(t)$ existe sur (a, b) , Alors $\mathcal{D}_\alpha^a(f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \mathcal{D}_\alpha^a(f)(t)$.

quand $a = 0$, On écrit \mathcal{D}_α qui est la définition originale fondée par ([11]), et nous disons que f est α -différentiable chaque fois que \mathcal{D}_α existe, on donne une fonction $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors la dérivée conformable fractionnaire de f d'ordre α pour tout $t > 0$ est définie par :

$$\mathcal{D}_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (1.9)$$

tel que cette limite existe et terminée.

Étant donné une fonction $f : [-\infty, b) \mapsto \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors la dérivée conformable fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b est définie par :

$${}^b\mathcal{D}_\alpha(f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (1.10)$$

Si ${}^b\mathcal{D}_\alpha(f)(t)$ existe sur (a, b) alors ${}^b\mathcal{D}_\alpha(f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} {}^b\mathcal{D}_\alpha(f)(t)$

1.3.2 Quelques propriétés de dérivation conformable fractionnaire

([30],[24]) Dans ce qui suit quelques propriétés de dérivée conformable fractionnaire .

Propriétés 1.1. Pour $f, g : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ et $t > 0$, \mathcal{D}_α sera réaliser les propriétés suivantes pour $\alpha \in (0, 1]$:

❶ Si f est α -différentiable à $t > 0$ alors f est continue a t , soit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = f(t). \quad (1.11)$$

❷

$$\mathcal{D}_\alpha(af + bg) = a\mathcal{D}_\alpha(f) + b\mathcal{D}_\alpha(g) \quad : a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

❸

$$\mathcal{D}_\alpha(t^k) = kt^{k-\alpha} \quad : k \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

❹

$$\mathcal{D}_\alpha(C) = 0 \quad : C \text{ constant}, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{D}_t^\alpha(t^p) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n)} t^{p-n} & \text{Si } p \in \mathbb{N} \text{ et } p > \alpha, \\ 0 & \text{Si } p \in \mathbb{N} \text{ et } p < \alpha, \end{cases} \quad (1.15)$$

Où $n < \alpha \leq n + 1$.

❺

$$\mathcal{D}_\alpha(fg) = f\mathcal{D}_\alpha(g) + g\mathcal{D}_\alpha(f). \quad (1.16)$$

❻

$$\mathcal{D}_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathcal{D}_\alpha(f) - f\mathcal{D}_\alpha(g)}{g^2}. \quad (1.17)$$

❼ Si f est différentiable alors :

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = t^{1-\alpha} f'(t). \quad (1.18)$$

❽ Si f est n fois différentiable, alors nous avons :

$$\mathcal{D}_t^\alpha(f)(t) = t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t), \quad \forall n < \alpha \leq n + 1. \quad (1.19)$$

❾ Soit $h(t) = f(g(t))$ tel que f et g des fonctions α -différentiable alors :

$$\mathcal{D}_\alpha(h)(t) = \mathcal{D}_\alpha(f)(g(t)).\mathcal{D}_\alpha(g)(t).g(t)^{\alpha-1}. \quad (1.20)$$

Les preuves des propriétés ci-dessus peuvent être dérivées directement de la définition. En appliquant la propriété aux fonctions différentiables, nous pouvons trouver la dérivée conformable fractionnaire d'ordre α pour de nombreuses fonctions des preuves.

Remarque 1.1. On a :

❶ Si f est différentiable alors :

$$\mathcal{D}_\alpha^a(f)(t) = (t - a)^{1-\alpha} f'(t). \quad (1.21)$$

❷ Si f est différentiable alors :

$${}^b\mathcal{D}_\alpha(f)(t) = -(b - t)^{1-\alpha} f'(t). \quad (1.22)$$

La définition précédent peut être étendue pour inclure n'importe quel $\alpha \in (n, n + 1]$: $n \in \mathbb{N}$. Ce pendant, dans cas, les chercheurs ne considèrent que le cas où $\alpha \in (0, 1]$ pour son importance.

1.3.3 Intégrations conformable fractionnaires

Définition 1.5. ([30]) (Les Intégrales conformable fractionnaires gauche et droite)

Étant donné une fonction $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors l'intégrale conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a est définie par :

$$\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t) = \int_a^t f(x) d_\alpha(x, a) = \int_a^t f(x) (x - a)^{\alpha-1} dx. \quad (1.23)$$

Tel que $a = 0$ on écrit $d_\alpha(x) = x^{\alpha-1} dx$ quand $a = 0$, on écrit \mathcal{I}_α qui est la définition originale fondée par ([11]), et nous disons que f est α -différentiable chaque fois que \mathcal{I}_α existe, on donne une fonction $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors l'intégrale conformable fractionnaire de f d'ordre α pour tout $t > 0$ est définie par :

$$\mathcal{I}_\alpha(f)(t) = \int_0^t f(x) x^{\alpha-1} dx, \quad t \geq 0. \quad (1.24)$$

tel que cette limite existe et terminée.

Étant donné une fonction $f : [-\infty, b) \mapsto \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors l'intégrale conformable fractionnaire droite de f d'ordre α se terminant en b est définie par :

$${}^b\mathcal{I}_\alpha(f)(t) = \int_t^b f(x) d_\alpha(b, x) = \int_t^b f(x) (b - x)^{\alpha-1} dx. \quad (1.25)$$

Lemme 1.1. ([30]) Étant donné une fonction continue $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors pour tout $t > a$ On a :

$$\mathcal{D}_\alpha^a[\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t)] = f(t). \quad (1.26)$$

Démonstration. Puisque f est continue, alors $\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t)$ est clairement différentiable. donc en appliquant (1.18) sur $\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t)$ nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha^a(\mathcal{I}_\alpha^a(f))(t) &= (t - a)^{1-\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \mathcal{I}_\alpha^a(f)(t) \\ &= (t - a)^{1-\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \int_a^t f(x) (x - a)^{\alpha-1} dx. \\ &= (t - a)^{1-\alpha} \cdot f(t) (t - a)^{\alpha-1} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons un lemme similaire . S'il pruvé de la même manière. □

Lemme 1.2. ([30]) *Étant donné une fonction continue $f : [-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors pour tout $t < b$ On a :*

$${}^b\mathcal{D}_\alpha {}^b\mathcal{I}_\alpha(f)(t) = f(t). \quad (1.27)$$

Lemme 1.3. ([30]) *Étant donné une fonction différentiable $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors pour tout $t > a$ On a :*

$$\mathcal{I}_\alpha^a \mathcal{D}_\alpha^a(f)(t) = f(t) - f(a). \quad (1.28)$$

Démonstration. Puisque f est différentiable, alors $\mathcal{D}_\alpha^a(f)(t) = (t - a)^{1-\alpha} f'(t)$, donc nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\alpha^a \mathcal{D}_\alpha^a(f)(t) &= \int_a^t \mathcal{D}_\alpha^a(f)(x)(x - a)^{\alpha-1} dx \\ &= \int_a^t (x - a)^{1-\alpha} f'(x)(x - a)^{\alpha-1} dx \\ &= \int_a^t f'(x) dx \\ &= f(t) - f(a) \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2. ([30]) *(Intégration par parties) Soit $0 < \beta \leq 1$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f, g différentiable. alors nous avons :*

$$\int_a^b f(x) \mathcal{D}_\beta^a(g)(x)(x - a)^{\beta-1} dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x) \mathcal{D}_\beta^a(f)(x)(x - a)^{\beta-1} dx. \quad (1.29)$$

Démonstration. En utilisant la propriété (1.15), lemme 1.3

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\beta^a \mathcal{D}_\beta^a(fg) &= \int_a^b (fg)(x)(x - a)^{\beta-1} dx \\ &= \int_a^b [f(x) \mathcal{D}_\beta^a(g)(x) + g(x) \mathcal{D}_\beta^a(f)(x)] (x - a)^{\beta-1} dx \\ &= \int_a^b f(x) \mathcal{D}_\beta^a(g)(x)(x - a)^{\beta-1} dx + \int_a^b g(x) \mathcal{D}_\beta^a(f)(x)(x - a)^{\beta-1} dx \end{aligned}$$

puisque f, g différentiables, nous pouvons appliquer $\mathcal{I}_\alpha^a \mathcal{D}_\alpha^a$ sur fg . donc nous obtenons :

$$\mathcal{I}_\alpha^a \mathcal{D}_\alpha^a(fg) = fg|_a^b$$

$$\rightarrow fg|_a^b = \int_a^b f(x) \mathcal{D}_\beta^a(g)(x)(x - a)^{\beta-1} dx + \int_a^b g(x) \mathcal{D}_\beta^a(f)(x)(x - a)^{\beta-1} dx.$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x) \mathcal{D}_\beta^a(g)(x)(x - a)^{\beta-1} dx = fg|_a^b - \int_a^b g(x) \mathcal{D}_\beta^a(f)(x)(x - a)^{\beta-1} dx. \quad \square$$

1.4 La transformation de Laplace conformable fractionnaire

Dans cette section, les chercheurs présentent la définition du transformation de Laplace conformable fractionnaire et quelques propriétés de base du transformation de Laplace de conformable fractionnaire aussi. OÙ dans cette section nous commencerons rappel sur le transformation de Laplace (Transformation de Laplace Classique).

1.4.1 Rappel sur la transformation de Laplace

La Transformation de Laplace créé par le mathématicien français Pierre-Simon Laplace (1749–1827). Il est considéré comme une technique très utile pour résoudre les équations différentielles ordinaires et partielles, qui décrivent comment certaines quantités varient avec le temps, comme le flux de chaleur à travers un conducteur isolé ou le courant dans un circuit électrique.

Ces équations sont généralement accompagnées de conditions initiales qui décrivent l'état du système au temps $t = 0$.

Définition 1.6. [28] Soit f une fonction réelle ou complexe de la variable (Temps) $t > 0$, et soit s un paramètre réelle ou complexe, alors la transformée de Laplace de $f(t)$ est :

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1.30)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt. \quad (1.31)$$

Si la limite existe alors (1.30) est dite convergente, sinon elle diverge et il n'y a pas de transformation Laplace définie pour f . Le domaine du paramètre s est choisi de manière appropriée pour que la convergence de l'intégrale de Laplace (1.30) est assurée. Donc s peut appartenir au plan complexe \mathbb{C} , ou ligne vraie \mathbb{R} .

Dans ce qui suit la transformation de Laplace de certaines fonctions :

| $f(t)$ | $\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ |
|---------------|--|
| 1 | $\frac{1}{s}$ |
| t | $\frac{1}{s^2}$ |
| t^n | $\frac{\Gamma(1+n)}{s^{1+n}}$ |
| e^{bt} | $\frac{1}{s-b}$ |
| $\sin(bt)$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ |
| $\cos(bt)$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ |
| $\sinh(bt)$ | $\frac{b}{s^2-b^2}$ |
| $\cosh(bt)$ | $\frac{s}{s^2-b^2}$ |
| $e^{bt} f(t)$ | $\mathcal{F}(s-b)$ |
| $t f(t)$ | $-\mathcal{F}'(s)$ |

TABLE 1.1 – La transformation de Laplace de certaines fonctions

1.4.2 La transformation de Laplace conformable fractionnaire

Définition 1.7. ([30]) Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle, Alors le Laplace conformable fractionnaire d'ordre α est défini par :

$$\mathcal{L}_{\alpha}\{f(t)\}(s) = \mathcal{F}_{\alpha}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \frac{t^{\alpha}}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-s \frac{t^{\alpha}}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt. \quad (1.32)$$

Si $\alpha = 1$, Alors (1.32) est la définition classique de la transformation de Laplace d'ordre entier (1.30), Ce qui signifie que (1.32) est une généralisation de (1.30).

Théorème 1.3. ([30]) (La transformation de Laplace conformable fractionnaire de dérivée fractionnaire)
Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle différentiable, Alors :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ \mathcal{D}_\alpha(f)(t) \} (s) = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0). \quad (1.33)$$

Démonstration. Par la définition 1.7 et de l'intégration par partie on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{ \mathcal{D}_\alpha(f)(t) \} (s) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} \mathcal{D}_\alpha(f)(t) t^{\alpha-1} dt. \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} \frac{df}{dt} t^{1-\alpha} t^{\alpha-1} dt. \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} \frac{df}{dt} dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, nous fixons :

$$u = e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} \quad dv = \frac{df}{dt} dt$$

$$du = -st^{\alpha-1} e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \quad f(t)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{ \mathcal{D}_\alpha(f)(t) \} (s) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) \right]_0^\tau - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau -st^{\alpha-1} e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) dt. \\ &= [0 - f(0)] + s \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt \quad : s > 0. \\ &= s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0) \quad : s > 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.4. ([30]) Soit $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}_\alpha \{ f(t) \} (s) = \mathcal{F}(s)$ existe. Alors :

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} (s)$$

Démonstration. Dans la définition 1.7 nous fixons $u = \frac{t^\alpha}{\alpha}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(s) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt. \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-su} f \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) du. \\ &= \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit la transformation de Laplace conformable fractionnaire de certaines fonctions :

❶

$$\mathcal{L}_\alpha \{ 1 \} (s) = \frac{1}{s} \quad : s > 0. \quad (1.34)$$

②

$$\mathcal{L}_\alpha \{t\} (s) = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{s^{1 + \frac{1}{\alpha}}} \quad : s > 0. \quad (1.35)$$

③

$$\mathcal{L}_\alpha \{t^p\} (s) = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha}\right)}{s^{1 + \frac{p}{\alpha}}} \quad : s > 0. \quad (1.36)$$

④

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\} (s) = \frac{1}{s-1} \quad : s > 0. \quad (1.37)$$

⑤

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sin \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad : s > 0. \quad (1.38)$$

⑥

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cos \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \frac{s}{s^2 + b^2} \quad : s > 0. \quad (1.39)$$

⑦

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sinh \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \frac{b}{s^2 - b^2} \quad : s > |b|. \quad (1.40)$$

⑧

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cosh \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \frac{s}{s^2 - b^2} \quad : s > |b|. \quad (1.41)$$

Démonstration. Les preuves suivantes facilement à l'aide du lemme 1.4 et du tableau précédent du transformation de Laplace.

①

$$\mathcal{L}_\alpha \{1\} (s) = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \quad : s > 0. \quad (1.42)$$

②

$$\mathcal{L}_\alpha \{t\} (s) = \mathcal{L} \left\{ (at)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \mathcal{L} \left\{ t^{\frac{1}{\alpha}} \right\} = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{s^{1 + \frac{1}{\alpha}}} \quad : s > 0. \quad (1.43)$$

③

$$\mathcal{L}_\alpha \{t^p\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \left((at)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^p \right\} = \mathcal{L} \left\{ (at)^{\frac{p}{\alpha}} \right\} = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \cdot \mathcal{L} \left\{ t^{\frac{p}{\alpha}} \right\} = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha}\right)}{s^{1 + \frac{p}{\alpha}}} \quad : s > 0. \quad (1.44)$$

Notez quand $p = n\alpha$, Alors :

$$\mathcal{L}_\alpha \{t^p\} (s) = \alpha^n \mathcal{L} \{t^n\} \quad : s > 0. \quad (1.45)$$

④

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ e^{\frac{((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{\alpha}} \right\} = \mathcal{L} \{ e^t \} = \frac{1}{s-1} \quad : s > 0. \quad (1.46)$$

⑤

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sin \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \sin \left(b \frac{((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{\alpha} \right) \right\} = \mathcal{L} \{ \sin(bt) \} = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad : s > 0. \quad (1.47)$$

⑥

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cos \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \cos \left(b \frac{((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{\alpha} \right) \right\} = \mathcal{L} \{ \cos(bt) \} = \frac{s}{s^2 + b^2} \quad : s > 0. \quad (1.48)$$

⑦

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sinh \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \sinh \left(b \frac{((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{\alpha} \right) \right\} = \frac{b}{s^2 - b^2} \quad : s > |b|. \quad (1.49)$$

⑧

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cosh \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \cosh \left(b \frac{((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{\alpha} \right) \right\} = \frac{s}{s^2 - b^2} \quad : s > |b|. \quad (1.50)$$

□

1.4.3 Quelques propriétés de la transformation de Laplace conformable fractionnaire

Propriétés 1.2. Certaines propriétés du transformation de Laplace conformable fractionnaire :

① La transformation de Laplace conformable fractionnaire est un opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ \mu f(t) \pm \lambda g(t) \} (s) = \mu \mathcal{F}_\alpha(s) \pm \lambda \mathcal{G}_\alpha(s). \quad (1.51)$$

Tel que μ et λ sont des constantes.

② Déplacement([30]) :

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} |_{s=s+k} \quad : s > -k. \quad (1.52)$$

Démonstration. Par le lemme 1.4, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) \right\} &= \mathcal{L} \left\{ e^{-\frac{k((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{\alpha}} f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} \\ &= \mathcal{L} \left\{ e^{-kt} f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} \\ &= \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} |_{s=s+k} \quad : s > -k, \end{aligned}$$

par exemple :

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \{ \cos(t) \} |_{s=s+k} = \frac{s}{1+s^2} |_{s=s+k} = \frac{s+k}{1+(s+k)^2} \quad : s > 0.$$

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \{ \sin(t) \} |_{s=s+k} = \frac{1}{1+s^2} |_{s=s+k} = \frac{1}{1+(s+k)^2} \quad : s > 0.$$

□

- ③ La transformation de Laplace conformable fractionnaire de l'intégrale conformable fractionnaire :

$$\mathcal{F}_\alpha (\mathcal{I}_\alpha (f)(t)) = \frac{\mathcal{F}_\alpha (s)}{s}. \quad (1.53)$$

- ④ Les dérivées de la transformée de Laplace conformable fractionnaire satisfont :

$$\mathcal{F}_\alpha^{(n)} (s) = (-1)^n \mathcal{L}_\alpha \left\{ \frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n} f(t) \right\}. \quad (1.54)$$

- ⑤ Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions quelconques, Alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la convolution de $f(t)$ et $g(t)$ est :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ (f * g)(t) \} = \mathcal{F}_\alpha (s) \cdot \mathcal{G}_\alpha (s) \quad (1.55)$$

Où $0 < \alpha \leq 1$.

Démonstration. Par le lemme 1.4 et la définition de la convolution, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{ (f * g)(t) \} &= \mathcal{L} \left\{ (f * g) \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} (s) \\ &= \int_0^\infty (f * g) \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f \left((\alpha(t-u))^{\frac{1}{\alpha}} \right) g \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) du \right) e^{-st} dt \end{aligned}$$

On change l'ordre d'intégration, donc :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ (f * g)(t) \} = \int_0^\infty \int_u^\infty f \left((\alpha(t-u))^{\frac{1}{\alpha}} \right) g \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) e^{-st} dt du$$

Soit $t - u = v$, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{ (f * g)(t) \} &= \int_0^\infty \int_0^\infty f \left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}} \right) g \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) e^{-s(v+u)} dv du \\ &= \left(\int_0^\infty f \left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}} \right) e^{-sv} dv \right) \left(\int_0^\infty g \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) e^{-su} du \right) \\ &= \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} \cdot \mathcal{L} \left\{ g \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} \\ &= \mathcal{L}_\alpha \{ f(t) \} \cdot \mathcal{L}_\alpha \{ g(t) \} \\ &= \mathcal{F}_\alpha (s) \cdot \mathcal{G}_\alpha (s) \end{aligned}$$

□

- ⑥ Si $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ la continuellement première différentiable, alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la dérivée conformable fractionnaire séquentielle du première ordre de f est :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ \mathcal{D}_\alpha(f)(t) \} (s) = s \mathcal{F}_\alpha(s) - f(0) \quad : 0 < \alpha \leq 1. \quad (1.56)$$

- ⑦ Si $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ la continuellement deuxième différentiable, alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la dérivée conformable fractionnaire séquentielle du deuxième ordre de f est :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ \mathcal{D}_{2\alpha}(f)(t) \} (s) = s^2 \mathcal{F}_\alpha(s) - s f(0) \quad : 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}. \quad (1.57)$$

- ⑧ Si $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ la continuellement troisième différentiable, alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la dérivée conformable fractionnaire séquentielle du troisième ordre de f est :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ \mathcal{D}_{3\alpha}(f)(t) \} (s) = s^3 \mathcal{F}_\alpha(s) - s^2 f(0) \quad : 0 < \alpha \leq \frac{1}{3}. \quad (1.58)$$

SOLUTIONS ANALYTIQUE POUR L'ÉQUATION TÉLÉGRAPHIQUE CONFORMABLE FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution analytique pour l'équation télégraphique conformable fractionnaire avec une dérivée et une intégrale conformable fractionnaire, Où nous commencerons par présenter certaines des théories les plus importantes que nous utiliserons comme principe de base pour résoudre le problème .

2.1 Résultats de théories importantes et leur relation avec la solution analytique de l'équation télégraphique conformable fractionnaire

([24],[2]) Nous introduisons le théorème principal, qui est utilisé plus loin dans cet section.

Théorème 2.1. Soit λ et μ des constantes positives avec $\mu > \lambda^2$, et $g : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue. pour tout $0 < \alpha \leq 1$, le problème de valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(2\alpha)} y(t) + 2\lambda \mathcal{D}_t^{(\alpha)} y(t) + \mu y(t) = g(t), \\ y(0) = y_0, \mathcal{D}_t^{(\alpha)} y(0) = y_\alpha. \end{cases} \quad (2.1)$$

admet une solution unique donnée par :

$$y(t) = \left[y_0 \cos \left(\sqrt{\mu - \lambda^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \frac{y_0 \lambda + y_\alpha}{\sqrt{\mu - \lambda^2}} \sin \left(\sqrt{\mu - \lambda^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right] e^{-\frac{\lambda t^\alpha}{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}} \int_0^t e^{-\frac{\lambda \tau^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\mu - \lambda^2} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right) g(t - \tau) d\tau.$$

Démonstration. De (1.51), (1.56) et la définition 1.7, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{y(t)\} &= Y(s), \mathcal{L}_\alpha \{g(t)\} = G(s), \\ \mathcal{L}_\alpha \{\mathcal{D}_t^\alpha y(t)\} &= sY(s) - y(0), \\ \mathcal{L}_\alpha \{\mathcal{D}_t^{2\alpha} y(t)\} &= s^2 Y(s) - sy(0) - \mathcal{D}_t^\alpha y(0). \end{aligned}$$

On utilisant la définition 1.7 et (2.1), on a :

$$Y(s) = \frac{y_0(s + \lambda)}{s^2 + 2\lambda s + \mu} + \frac{y_0 \lambda + y_\alpha}{s^2 + 2\lambda s + \mu} + \frac{G(s)}{s^2 + 2\lambda s + \mu} \quad (2.2)$$

$$= \frac{y_0(s + \lambda)}{(s + \lambda)^2 + \mu - \lambda^2} + \frac{y_0 \lambda + y_\alpha}{(s + \lambda)^2 + \mu - \lambda^2} + \frac{G(s)}{(s + \lambda)^2 + \mu - \lambda^2}. \quad (2.3)$$

En utilisant l'inverse de la transformation de Laplace conformable fractionnaire.

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{y_0(s + \lambda)}{s^2 + 2\lambda s + \mu} \right\} (t) = y_0 e^{-\frac{\lambda t^\alpha}{\alpha}} \cos \left(\sqrt{\mu - \lambda^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{y_0 \lambda + y_\alpha}{s^2 + 2\lambda s + \mu} \right\} (t) = \frac{y_0 \lambda + y_\alpha}{\sqrt{\mu - \lambda^2}} e^{-\frac{\lambda t^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\mu - \lambda^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right). \quad (2.5)$$

Et à partir de (1.55), on obtient :

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1} \frac{G(s)}{(s + \lambda)^2 + \mu - \lambda^2} = \frac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}} \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\mu - \lambda^2}}{(s + \lambda)^2 + \mu - \lambda^2} \right\} (t) * \mathcal{L}_\alpha^{-1} \{G(s)\} (t) \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}} \int_0^t e^{-\frac{\lambda \tau^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\mu - \lambda^2} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right) g(t - \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Par conséquent, de (2.4),(2.5) et (2.7), on obtient la solution $y(t)$ du problème de valeur initiale (2.1). \square

2.1.1 problème de Sturm-Liouville conformable fractionnaire

([24],[2]) Dans cette sous-section, nous discutons de la frontière qui consiste en l'équation différentielle conformable.

$$\mathcal{D}_x^{(2\beta)} f(x) + \lambda f(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (2.8)$$

conditions aux limites de Robin

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} f(a) = 0, & a_0 a_1 \leq 0 \\ b_0 f(b) + b_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} f(b) = 0, & b_0 b_1 \geq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Le problème (2.8) et (2.9), est appelé un problème Sturm-Liouville conformable. Notons que si $\beta = 1$, Le problème (2.8),(2.9) a été étudié dans ([21]), mais généralisons ce problème à un ordre conformable fractionnaire .

Clairement, $f(x) = 0$ est toujours une solution de (2.8),(2.9). Résoudre un tel problème signifie trouver les valeurs de λ appelées valeurs propres et les solution non triviales correspondantes $f_\lambda(x)$ appelées fonctions propres .

Théorème 2.2. *Les valeurs propres du problème Sturm-Liouville conformable (2.8),(2.9) sont simples, c'est-à-dire . si λ est valeur propre de (2.8),(2.9) et $f_1(x)$, $f_2(x)$ sont les fonctions propres correspondantes, alors $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont linéairement dépendant .*

Démonstration. Puisque $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont tous deux des solutions de (2.8), nous avons :

$$\mathcal{D}_x^{(2\beta)} f_1(x) + \lambda f_1(x) = 0. \quad (2.10)$$

Et

$$\mathcal{D}_x^{(2\beta)} f_2(x) + \lambda f_2(x) = 0. \quad (2.11)$$

En multipliant (2.10) par $f_2(x)$ et (2.11) par $f_1(x)$ et en soustrayant, on obtient

$$f_2(x) \mathcal{D}_x^{(2\beta)} f_1(x) - f_1(x) \mathcal{D}_x^{(2\beta)} f_2(x) = 0. \quad (2.12)$$

Et de lui, on a :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} [f_2(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_1(x) - f_1(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_2(x)] = f_2(x) \mathcal{D}_x^{(2\beta)} f_1(x) - f_1(x) \mathcal{D}_x^{(2\beta)} f_2(x).$$

De (2.12) il s'ensuit que :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} [f_2(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_1(x) - f_1(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_2(x)] = 0.$$

Et donc :

$$f_2(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_1(x) - f_1(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_2(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Pour trouver la valeur de C , notons que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ vérifient les conditions aux limites (2.8), et donc

$$\begin{cases} a_0 f_1(a) + a_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_1(a) = 0 \\ a_0 f_2(a) + a_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_2(a) = 0, \end{cases}$$

Ce qui implique $f_1(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_2(x) - f_2(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_1(x) = 0$. Ainsi, de (2.13) il s'ensuit que

$$f_2(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_1(x) - f_1(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_2(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

C'est-à-dire $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont linéairement dépendant. □

Théorème 2.3. Soit $\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*$ les valeurs propres du problème Sturm-Liouville conformable (2.8),(2.9) et $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ les fonctions propres correspondantes, alors la séquence de fonctions $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthogonale en $[a, b]$ par rapport à la fonction de poids $x \mapsto (x - a)^{\beta-1}$.

Démonstration. Soit λ_i et $\lambda_j, (i \neq j)$ des valeurs propres, et $f_i(x)$ et $f_j(x)$ les fonctions propres correspondantes de (2.8),(2.9). Puisque $f_i(x)$ et $f_j(x)$ sont des solutions de (2.8), on a :

$$\mathcal{D}_x^{(2\beta)} f_i(x) + \lambda_i f_i(x) = 0.$$

Et

$$\mathcal{D}_x^{(2\beta)} f_j(x) + \lambda_j f_j(x) = 0.$$

Maintenant, en suivant l'argument du théorème 2.2, nous obtenons

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} [f_j(x)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f_i(x) - f_i(x)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f_j(x)] + (\lambda_i - \lambda_j)f_i(x)f_j(x) = 0,$$

qui sur l'intégration donne

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b (x - a)^{\beta-1} f_i(x)f_j(x)dx = f_j(x)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f_i(x) - f_i(x)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f_j(x)|_a^b \quad (2.14)$$

Ensuite puisque $f_i(x)$ et $f_j(x)$ vérifient les conditions aux limites (2.9) c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a_0 f_i(a) + a_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_i(a) = 0, & b_0 f_i(b) + b_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_i(b) = 0, \\ a_0 f_j(a) + a_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_j(a) = 0, & b_0 f_j(b) + b_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} f_j(b) = 0, \end{cases}$$

il est nécessaire que

$$f_i(a)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f_j(a) - f_j(a)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f_i(a) = f_i(b)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f_j(b) - f_j(b)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f_i(b). \quad (2.15)$$

Par conséquent, l'identité (2.14) se réduit à

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b (x - a)^{\beta-1} f_i(x)f_j(x)dx = 0. \quad (2.16)$$

Cependant, puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$ il s'ensuit que $\int_a^b (x - a)^{\beta-1} f_i(x)f_j(x)dx = 0$. Alors la séquence de fonctions $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthogonale en $[a, b]$ par rapport à la fonction de poids $x \mapsto (x - a)^{\beta-1}$. \square

Théorème 2.4. Toutes les valeurs propres du problème Sturm-Liouville conformable fractionnaire (2.8),(2.9) sont strictement positifs.

Démonstration. Soit λ , la valeur propre et $f(x) \neq 0$ la fonction propre correspondante du problème Sturm-Liouville conformable (2.8),(2.9). Puisque $f(x)$ est la solution de (2.8), on a :

$$\mathcal{D}_x^{(2\beta)} f(x) + \lambda f(x) = 0 \quad (2.17)$$

En multipliant (2.17) par $f(x)$ et en utilisant l'intégration par parties 1.2, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b (x - a)^{\beta-1} f^2(x)dx &= - \int_a^b (x - a)^{\beta-1} \mathcal{D}_x^{(2\beta)} f(x)f(x)dx \\ &= -f(x)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f(x)|_a^b + \int_a^b (x - a)^{\beta-1} [\mathcal{D}_x^{(\beta)} f(x)]^2 dx \\ &= f(a)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f(a) - f(b)\mathcal{D}_x^{(\beta)} f(b) + \int_a^b (x - a)^{\beta-1} [\mathcal{D}_x^{(\beta)} f(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

$f(x)$ satisfait les conditions aux limites (2.8), et donc

$$\lambda = \frac{-\frac{a_0}{a_1}f^2(a) + \frac{b_0}{b_1}f^2(b) + \int_a^b (x-a)^{\beta-1} [\mathcal{D}_x^{(\beta)} f(x)]^2 dx}{\int_a^b (x-a)^{\beta-1} f^2(x) dx} > 0.$$

D'autre part, si $a_0 = b_0 = 0$ et $f(x) = C \neq 0$ alors $\lambda = 0$. □

2.1.2 équation télégraphique conforme à l'espace-temps avec condition aux limites de Robin conformable

([24]) Dans cette sous-section, nous déterminons la solution analytique de l'équation télégraphique fractionnaire espace-temps conformable non homogène avec condition initiale.

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \mathcal{D}_t^\alpha u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.18)$$

et condition aux limites conformable de Robin non homogène donnée par :

$$\begin{cases} a_0 u(0, t) + a_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} u(0, t) = g(t), & a_0 a_1 \leq 0 \\ b_0 u(l, t) + b_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} u(l, t) = h(t), & b_0 b_1 \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.19)$$

où $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(0, l)$ et $g, h \in \mathcal{C}^2(0, T)$ tel que

$$\begin{cases} a_0 \varphi(0) + a_1 \psi(0) = g(0), \\ b_0 \varphi(l) + b_1 \psi(l) = h(0). \end{cases}$$

Remarque 2.1. On a :

- 1 Si $a_1 = b_1 = 0$, alors la condition aux limites (2.19) est appelée la condition aux limites de Dirichlet.
- 2 Si $a_0 = b_0 = 0$, alors la condition aux limites (2.19) est appelée la condition aux limites de Neumann.
- 3 Si $a_1 = 0$ et $b_0 = 0$, ou $a_0 = 0$ et $b_1 = 0$, alors la condition aux limites (2.19) est appelée la condition aux limites de mixte.
- 4 Si $a_1 = 0$ ou $b_1 = 0$, alors la condition aux limites (2.19) est appelée la condition aux limites de Dirichlet-Robin.
- 5 Si a_0 ou $b_0 = 0$, alors la condition aux limites (2.19) est appelée la condition aux limites de Neumann-Robin.

nous supposons

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x, t),$$

tel que $W(x, t)$ est donnée par :

$$W(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{a_0} g(t) + \frac{[a_0 h(t) - b_0 g(t)] x^\beta}{a_0 b_0 \ell^\beta / \beta} & \text{Si } a_1 = b_1 = 0, a_0 < 0, b_0 > 0, \\ \frac{1}{a_1} g(t) + \frac{[a_1 h(t) - b_1 g(t)] x^{2\beta}}{a_1 b_1 \ell^\beta} & \text{Si } a_0 = b_0 = 0, a_1 < 0, b_1 > 0, \\ \frac{(b_0 + b_1 \frac{\ell^\beta}{\beta}) g(t) - a_0 h(t)}{a_1 b_0 - b_1 a_0 + a_1 b_1 \frac{\ell^\beta}{\beta}} + \frac{[a_1 h(t) - b_1 g(t)] x^\beta}{a_1 b_0 - b_1 a_0 + a_1 b_1 \frac{\ell^\beta}{\beta}} & \text{Si } a_0 a_1 < 0, b_0 b_1 > 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

qui satisfait la condition aux limites :

$$\begin{cases} a_0W(0, t) + a_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}W(0, t) = g(t), \\ b_0W(\ell, t) + b_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}W(\ell, t) = h(t), \end{cases}$$

et la fonction $V(x, t)$ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(2\alpha)}V(x, t) + (a + b)\mathcal{D}_t^{(\alpha)}V(x, t) + (ab)V(x, t) = w^2\mathcal{D}_x^{(2\beta)}V(x, t) + \tilde{f}(x, t), \\ V(x, 0) = \varphi_1(x), \mathcal{D}_t^{(\alpha)}V(x, 0) = \psi_1(x), \\ a_0V(0, t) + a_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}V(0, t) = 0, \\ b_0V(\ell, t) + b_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}V(\ell, t) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{f}(x, t) = -\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}W(x, t) - (a + b)\mathcal{D}_t^{(\alpha)}W(x, t) - (ab)W(x, t) + w^2\mathcal{D}_x^{(2\beta)}W(x, t) + f(x, t), \\ \varphi_1(x) = \varphi(x) - W(x, 0), \\ \psi_1(x) = \psi(x) - \mathcal{D}_t^{(\alpha)}W(x, t). \end{cases}$$

On suppose d'abord que la solution de l'équation homogène dans (2.21) (Posons $\tilde{f}(x, t) = 0$), il a la forme suivante :

$$V(x, t) = X(x)T(t).$$

En substituant dans (2.21) on obtient le problème de Sturm-Liouville conformable :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x^{(2\beta)}X(x) + \lambda^2X(x) = 0, \\ a_0X(0) + a_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}X(0) = 0, \\ b_0X(\ell) + b_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}X(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

Proposition 2.1. [1] *Le problème de Sturm-Liouville conformable (2.22) admet une suite croissante de valeurs propres positives (λ_n^2) , $n \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\lambda_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

[2] *Les valeurs propres du problème Sturm-Liouville conformable (2.22) vérifient l'équation algébrique suivante :*

$$\tan\left(\lambda \frac{\ell^\beta}{\beta}\right) = \frac{(a_1b_0 - a_0b_1)\lambda}{a_0b_0 + a_1b_1\lambda^2}. \quad (2.23)$$

[3] *Les fonctions propres $X_n(x)$ correspondant aux valeurs propres λ_n^2 sont données par :*

$$X_n(x) = \begin{cases} j\lambda_n \cos\left(\lambda_n \frac{x^\beta}{\beta}\right) + \sin\left(\lambda_n \frac{x^\beta}{\beta}\right) & \text{Si } j = -a_1/a_0 \text{ et } a_0 \neq 0, \\ \cos\left(\lambda_n \frac{x^\beta}{\beta}\right) + \frac{j}{\lambda_n} \sin\left(\lambda_n \frac{x^\beta}{\beta}\right) & \text{Si } j = -a_0/a_1 \text{ et } a_1 \neq 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Si $a_0 = b_0 = 0$, Alors $\lambda_0 = 0$ et $X_0(x) = 1$.

Les fonctions propres $X_n(x)$ sont orthogonales sur $[0, \ell]$ correspondant à la fonction de poids $x \mapsto x^{\beta-1}$ avec produit interne

$$\langle X_n(x), X_m(x) \rangle = \int_0^\ell x^{\beta-1} X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \neq m, \\ R_n & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Nous cherchons maintenant une solution du problème non homogène (2.21) sous la forme suivante :

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(t) X_n(x). \quad (2.26)$$

Afin de déterminer $B_n(t)$, nous développons $\tilde{f}(x, t)$ comme une série de Fourier par les fonctions propres $X_n(x)$

$$\tilde{f}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{f}_n(t) X_n(x), \text{ tel que } \tilde{f}_n(t) = \frac{1}{R_n} \int_0^\ell \tilde{f}(x, t) X_n(x) dx. \quad (2.27)$$

nous remplacerons (2.26), (2.26) par (2.21), on a :

$$\mathcal{D}_t^{2\alpha} B_n(t) + (a + b) \mathcal{D}_t^\alpha B_n(t) + (ab + \lambda_n w^2) B_n(t) = \tilde{f}_n(t). \quad (2.28)$$

Puisque $V(x, t)$ satisfait les conditions initiales de (2.21), on a :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0) X_n(x) = \varphi_1(x), & 0 < x < \ell, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}_t^{(\alpha)} B_n(0) X_n(x) = \psi_1(x), & 0 < x < \ell, \end{cases}$$

qui donne :

$$\begin{cases} B_n(0) = \frac{1}{R_n} \int_0^\ell \varphi_1(x) X_n(x) dx, & n \in \mathbb{N}^*, \\ \mathcal{D}_t^{(\alpha)} B_n(0) = \frac{1}{R_n} \int_0^\ell \psi_1(x) X_n(x) dx, & n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (2.29)$$

Ici R_n est donné dans (2.25).

Nous supposons que :

$$\left(\frac{a - b}{2k} \right)^2 < \lambda_1^2, \quad (2.30)$$

Où λ_1^2 est la plus petite valeur propre du problème de Sturm-Liouville conformable (2.22). En utilisant la condition (2.30), théorème 2.1, (2.28), (2.29) et (2.26) nous obtenons la solution du problème (2.21) comme :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \left[B_n(0) e^{-\frac{(a+b)t^\alpha}{2\alpha}} \cos \left(\sqrt{4k^2\lambda_n^2 - (a-b)^2} \frac{t^\alpha}{2\alpha} \right) \right] \\
 & + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(a+b)B_n(0) + 2\mathcal{D}_t^\alpha B_n(0)}{\sqrt{4k^2\lambda_n^2 - (a-b)^2}} e^{-\frac{(a+b)t^\alpha}{2\alpha}} \sin \left(\sqrt{4k^2\lambda_n^2 - (a-b)^2} \frac{t^\alpha}{2\alpha} \right) \right] \\
 & + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{4k^2\lambda_n^2 - (a-b)^2}} \int_0^t e^{-\frac{(a+b)\tau^\alpha}{2\alpha}} \sin \left(\sqrt{4k^2\lambda_n^2 - (a-b)^2} \frac{\tau^\alpha}{2\alpha} \right) \tilde{f}_n(t - \tau) d\tau \right] X_n(x) + W(x, t).
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.1.3 Exemples illustratifs

[(24)] Dans cette sous-section, nous donnons les exemples suivants :

Exemple 2.1. (Équation télégraphique conforme au temps avec condition aux limites de Dirichlet homogène), Dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

- Dans(3), $a = b = 1, \alpha = 1/2, \beta = 1, k = 1, \ell = \pi$ et $f(x, t) = 0$
- Dans(2.18), $\varphi(x) = 1$, et $\psi(x) = 0$.
- Dans(2.19), $a_1 = b_1 = 0, a_0 = -1, b_0 = 1$ et $g(t) = h(t) = 0$.

Alors à partir de (2.23),(2.24) les valeurs propres et les fonctions propres sont données par :

$$\lambda_n^2 = n^2 \text{ et } X_n(x) = \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

De (2.25) et (2.29) nous obtenons :

$$R_n = \pi/2 \text{ et } B_n(0) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n).$$

A partir de (2.31), la solution du problème (3),(2.18),(2.19) est donnée par :

$$\blacksquare \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8e^{-2\sqrt{t}}}{\pi(2n+1)} \left[\cos(4n+2)\sqrt{t} + \frac{\sin(4n+2)\sqrt{t}}{2n+1} \right] \sin(2n+1)x.$$

Exemple 2.2. (Équation télégraphique conforme au temps avec condition aux limites de Neumann homogène) dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

- Dans(3), $a = b = 1, \alpha = 1/2, \beta = 1, k = 1, \ell = \pi$ et $f(x, t) = 0$.
- Dans(2.18), $\varphi(x) = x$, et $\psi(x) = 0$.
- Dans(2.19), $a_0 = b_0 = 0, a_1 = -1, b_1 = 1$ et $g(t) = h(t) = 0$.

Alors à partir de (2.23),(2.24) les valeurs propres et les fonctions propres sont données par :

$$\lambda_n^2 = n^2 \text{ et } X_n(x) = \cos(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

De (2.25) et (2.29) nous obtenons :

$$R_n = \pi/2 \text{ et } B_n(0) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1).$$

A partir de (2.31), la solution du problème (3),(2.18),(2.19) est donnée par :

$$\blacksquare \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-8e^{-2\sqrt{t}}}{\pi(2n+1)^2} \left[\cos(4n+2)\sqrt{t} + \frac{\sin(4n+2)\sqrt{t}}{2n+1} \right] \cos(2n+1)x.$$

Exemple 2.3. (Équation télégraphique conforme à l'espace-temps avec condition aux limites mixte homogène) dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

- Dans(3), $a = b = 1, \alpha = \beta = 1/2, k = 1, \ell = \pi$ et $f(x, t) = 0$.
- Dans(2.18), $\varphi(x) = 1$, et $\psi(x) = 0$.
- Dans(2.19), $a_0 = -1, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1$ et $g(t) = h(t) = 0$.

Alors à partir de (2.23),(2.24) les valeurs propres et les fonctions propres sont données par :

$$\lambda_n^2 = \frac{\pi n^2}{4} \text{ et } X_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}\sqrt{\pi x}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

De (2.25) et (2.29) nous obtenons :

$$R_n = \sqrt{\pi} \text{ et } B_n(0) = \frac{1 - \cos(\pi n/2)}{\pi n}.$$

A partir de (2.31), la solution du problème (3),(2.18),(2.19) est donnée par :

$$\blacksquare \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(\pi n/2))e^{-2\sqrt{t}}}{\pi n} \left[\cos n\sqrt{\pi t} + \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \sin n\sqrt{\pi t} \right] \sin\left(\frac{n}{2}\sqrt{\pi x}\right).$$

Exemple 2.4. (Équation télégraphique conforme au temps avec condition aux limites de Robin homogène), Dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

- Dans(3), $a = b = 1, \alpha = 1/2, \beta = 1, k = 1, \ell = 1$ et $f(x, t) = 0$.
- Dans(2.18), $\varphi(x) = 1$, et $\psi(x) = 0$.
- Dans(2.19), $a_0 = -1, a_1 = 1, b_0 = 1, b_1 = 0$ et $g(t) = h(t) = 0$.

Alors à partir de (2.23), les valeurs propres sont des solutions de l'équation suivante :

$$\tan(2\lambda) = -\lambda \quad \text{où } \lambda > 0. \tag{2.32}$$

Pour trouver les réelles racines de (2.32), on trace les courbes $y = -\lambda$ et $y = \tan(2\lambda)$, et on observe les valeurs de λ , où ces courbes se croisent.

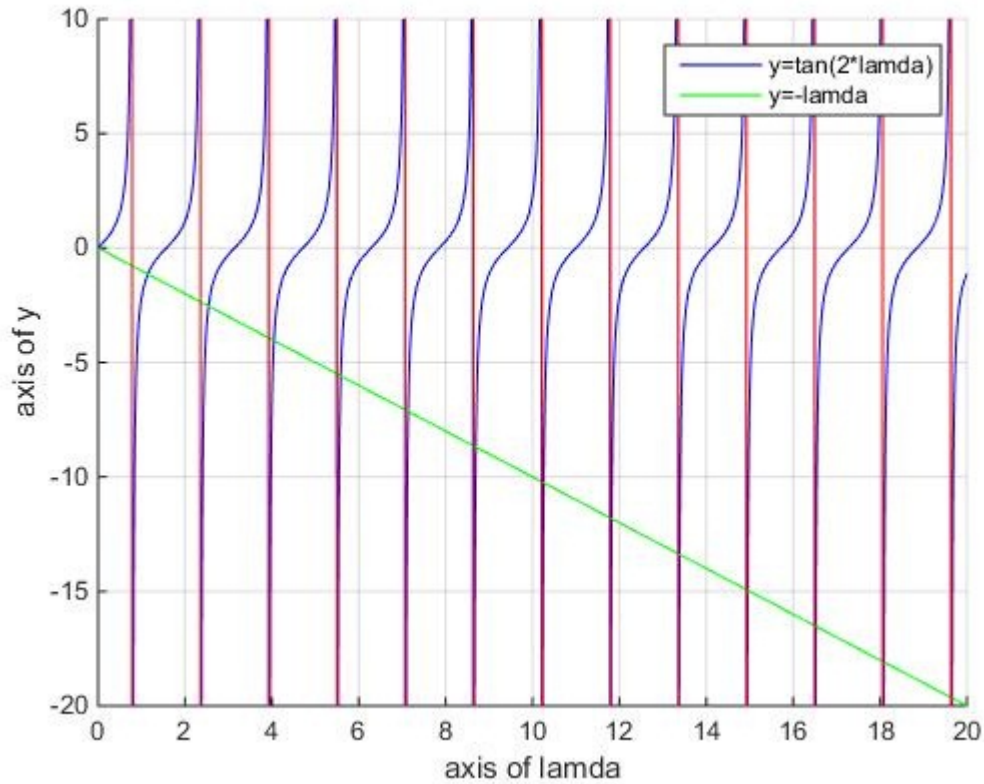


FIGURE 2.1 – Courbes de fonction $y=\tan(2*\lambda)$ et $y=-\lambda$.

D'après la figure 2.1, il est clair que l'équation (2.32) a un nombre infini de racines positives $\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*$, qui se rapprochent des multiples impairs de $\pi/4$, c'est-à-dire $\lambda_n = (2n+1)\pi/4$. Ainsi, le problème (2.22) a aussi un nombre infini de valeurs propres $\lambda_n^2 = (2n+1)^2\pi^2/16, n \in \mathbb{N}^*$. De (2.24) les fonctions propres de (2.22) sont données par :

$$X_n(x) = \lambda_n \cos(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x), n \in \mathbb{N}^*.$$

De (2.25) et (2.29) nous obtenons :

$$R_n = \frac{1}{2}(\lambda_n^2 + 2) + \frac{\lambda_n^2 - 1}{4\lambda_n} \sin(2\lambda_n) - \frac{\cos(2\lambda_n)}{2\lambda_n}, \text{ et } B_n(0) = \frac{1 - \cos(\lambda_n)}{\lambda_n R_n}.$$

A partir de (2.31), la solution du problème (3),(2.18),(2.19) est donnée par :

$$\blacksquare \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(\lambda_n))e^{-2\sqrt{t}}}{\lambda_n R_n} \left[\cos(2\lambda_n \sqrt{t}) + \frac{1 - \cos(\lambda_n)}{\lambda_n^2 R_n} \sin(2\lambda_n \sqrt{t}) \right] X_n(x).$$

SOLUTIONS NUMÉRIQUE POUR L'ÉQUATION TÉLÉGRAPHIQUE CONFORMABLE FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme basé sur les polynômes de Tchebychev décalés du second espèce. L'équation télégraphique fractionnaire est réduite à un système linéaire d'équations différentielles du second ordre et la méthode de Newmark est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, quelques exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cet algorithme.

3.1 Polynômes de Tchebychev

Il existe plusieurs types de polynômes de Tchebychev. Nous ne considérons que le deuxième type et c'est le plus important dans les polynômes de Tchebychev.

3.1.1 Les polynômes de Tchebychev deuxième type

([14]) Le polynôme de Tchebychev $U_n(x)$ du deuxième type est un polynôme de degré n en x défini par :

$$U_n(x) = \sin(n+1)\theta / \sin \theta \text{ tel que } x = \cos \theta. \quad (3.1)$$

Les formules initiales donnent :

$$\sin 1\theta = \sin \theta, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \sin 3\theta = \sin \theta(4 \cos^2 \theta - 1), \sin 4\theta = \sin \theta(8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta), \dots,$$

de sorte que nous voyons que le rapport des fonctions sinus (3.1) est bien un polynôme en $\cos \theta$, et on peut en déduire immédiatement que :

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x, \dots \quad (3.2)$$

3.1.2 Certaines propriétés des polynômes de Tchebychev décalés du second type

([14], [18]) Les polynômes de Tchebychev décalés du second type $U_n^*(x)$ de degré n en x sont définis sur $[0, 1]$ et peuvent être déterminés par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} U_0^*(x) = 1, \\ U_1^*(x) = 4x - 2, \\ U_n^*(x) = 2(2x - 1)(U_{n-1}^*(x)) - U_{n-2}^*(x), \quad n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

Les polynômes $U_n(x)$ sont orthogonaux sur $[0, 1]$ par rapport aux produits internes :

$$\langle U_n^*(x), U_m^*(x) \rangle = \int_0^1 \sqrt{x-x^2} U_n^*(x) U_m^*(x) dx \begin{cases} 0 & \text{Si } n \neq m, \\ \pi/8 & \text{Si } n = m, \end{cases} \quad (3.4)$$

Où $\sqrt{x-x^2}$ est la fonction poids.

La forme analytique des polynômes de Tchebychev décalés du second type $U_n^*(x)$ de degré n est donnée par :

$$U_n^*(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} \frac{\Gamma(2n-k+2)x^{n-k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(2n-2k+2)}, \quad n > 0, \quad (3.5)$$

La fonction qui apparaît dans la solution du problème de modèle peut être écrite comme une série de $U^*(x)$.

Soit $g(x)$ double intégrable dans $[0, 1]$, il peut être exprimé en termes de polynômes de Tchebychev décalés du second type comme suit :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i U_i^*(x), \quad (3.6)$$

Où les coefficients $a_i, i = 0, 1, \dots$, sont donnés par :

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 g\left(\frac{x+1}{2}\right) \sqrt{1-x^2} U_i(x) dx, \quad (3.7)$$

où

$$a_i = \frac{8}{\pi} \int_0^1 g(x) \sqrt{x-x^2} U_i^*(x) dx, \quad (3.8)$$

Pour des raisons pratiques, nous ne prenons que les premiers termes $(m+1)$ de $U_n^*(x)$ dans l'approximation qui est donnée :

$$g_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i U_i^*(x). \quad (3.9)$$

3.1.3 Évaluation du dérivée conforme fractionnaire a l'aide des polynômes de Tchebychev décalés du deuxième type

([25], [18]) La principale formule approximative de la fonction $g_m(x)$ donnée dans (3.9) est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit $g(x)$ approchée par des polynômes de Tchebychev décalés du second type comme (3.9) et supposons également $\delta > 0$, alors :*

$$\mathcal{D}^{(\delta)}(g_m(x)) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^{i-(n+1)} a_i \mathcal{A}_{i,k}^n x^{i-k-\delta}, \quad (3.10)$$

Où $\mathcal{A}_{i,k}^n$ est donné par :

$$\mathcal{A}_{i,k}^n = (-1)^k \frac{2^{2i-2k} \Gamma(2i-k+2) \Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(2i-2k+2) \Gamma(i-k-n)}. \quad (3.11)$$

Démonstration. En utilisant la linéarité de la dérivée fractionnaire conforme donnée dans (1.12) et en utilisant la définition de la fonction d'approximation $g_m(x)$ comme dans (3.9), on obtient :

$$\mathcal{D}_x^{(\delta)} g_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i \mathcal{D}_x^{(\delta)} U_i^*(x), \quad \forall \delta > 0. \quad (3.12)$$

De plus, de l'eqs (1.12), (1.19), (1.15) et (3.5) on obtient :

$$\mathcal{D}_x^{(\delta)} U_i^*(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n < \delta \leq n+1. \quad (3.13)$$

À partir de (1.15), pour $i - k > n$, on a :

$$\mathcal{D}_x^{(\delta)} x^{i-k} = \frac{\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(i-k-n)} x^{i-k-\delta}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n < \delta \leq n+1. \quad (3.14)$$

Nous remplaçons (3.14) dans l'Eq. (3.5) on obtient l'égalité suivante pour $n < \delta \leq n+1$:

$$\mathcal{D}_x^{(\delta)} U_i^*(x) = \sum_{k=0}^{i-(n+1)} (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i-k+2)\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+2)\Gamma(i-k-n)} x^{i-k-\delta}, \quad (3.15)$$

nous remplaçons (3.15) dans (3.12) on obtient :

$$\mathcal{D}_x^{(\delta)} g_m(x) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^{i-(n+1)} a_i (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i-k+2)\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+2)\Gamma(i-k-n)} x^{i-k-\delta},$$

Où peut-on l'écrire sous forme :

$$\mathcal{D}_x^{(\delta)} g_m(x) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^{i-(n+1)} a_i \mathcal{A}_{i,k}^n x^{i-k-\delta},$$

Où $\mathcal{A}_{i,k}^n$ est défini par (3.11). □

Exemple 3.1. Considérons $g(x) = x^2$ avec $m = 2$ et $\delta = 1.2$, $n = 1$. Utilisation des équations (1.15) nous obtenons.

$$\mathcal{D}_x^{(1.2)}(x^2) = \mathcal{D}_x^{(0.2)}(2x) = 2x^{0.8}.$$

Maintenant, en utilisant la méthode précédente, nous obtenons :

$$\mathcal{D}_x^{(1.2)}(x^2) = \sum_{i=2}^3 \sum_{k=0}^{i-2} a_i \mathcal{A}_{i,k}^1 x^{i-k-1.2}, \quad (3.16)$$

Où :

$$\mathcal{A}_{2,0}^1 = 32.$$

Substituer les constantes $a_2 = \frac{1}{16}$ et $a_3 = 0$ à partir de l'équation. (3.8) dans l'Eq. (3.16) nous obtenons :

$$\mathcal{D}_x^{(1.2)}(x^2) = 2x^{0.8}.$$

3.1.4 Erreur d'analyse

L'objectif principal de cette section est d'étudier l'erreur de troncature et son analyse de convergence.

Théorème 3.2. ([5]) (Converge uniformément le théorème). Soit $g \in L^2(0, 1)$ une fonction deux fois différentiable sur $[0, 1]$ et la deuxième dérivée est bornée sur $[0, 1]$, c'est-à-dire :

$$\exists M > 0, \forall x \in [0, 1] : |g''(x)| \leq M.$$

Si $g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i U_i^*(x)$ est la somme des séries de polynômes de Chebyshev décalés du second type, alors

la suite des sommes partielles (g_m) avec $g_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i U_i^*(x)$ converge uniformément vers $g(x)$ sur $[0, 1]$.

Démonstration. En utilisant la variable change $2x - 1 = \cos(\theta)$ dans (3.8) on obtient :

$$a_i = \frac{8}{\pi} \int_0^\pi g \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right) \sin \left[\left(i + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \sin(\theta/2) d\theta.$$

Maintenant en intégrant par parties deux fois, on obtient :

$$a_i = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g'' \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right) \kappa_i(\theta) d\theta,$$

Où

$$\kappa_i(\theta) = \sin(\theta) \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\sin(i-1)\theta}{i-1} - \frac{\sin(i+1)\theta}{i+1} \right) + \frac{1}{i+1} \left(\frac{\sin i\theta}{i} - \frac{\sin(i+2)\theta}{i+2} \right) \right]. \quad (3.17)$$

$$|a_i| = \left| \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g'' \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right) \kappa_i(\theta) d\theta \right| \leq \frac{M}{4\pi} \int_0^\pi |\kappa_i(\theta)| d\theta = \frac{M(i^2 + 2i - 1)}{i(i^2 - 1)(i + 2)} \leq \frac{M}{i^2}. \quad (3.18)$$

D'autre part, nous avons :

$$|g(x) - g_m(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} |a_i| |U_i^*(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} |a_i| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{M}{i^2}.$$

Donc, $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$ est la série de Riemann convergente, puis le reste de cette série converge vers zéro, donc la séquence $(g_m(x))$ converge uniformément vers $g(x)$ sur $[0, 1]$. \square

3.1.5 Méthode de collocation Tchebychev

([25]) Dans cette section, nous appliquons la méthode de collocation de Tchebychev aux problèmes (3)-(5) basés sur les polynômes de Tchebychev décalés du second type. Notons $u_m(x, t)$ comme l'approximation de $u(x, t)$ sous la forme suivante :

$$u_m(x, t) = \sum_{i=0}^m a_i U_i^*(x). \quad (3.19)$$

On applique le théorème 3.1, et on suppose l'équation télégraphique conformable fractionnaire suivante :

$$\mathcal{D}_t^{(1+\alpha)}u(x, t) + (2a)\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u(x, t) + (b^2)u(x, t) = w\mathcal{D}_x^{(\beta)}u(x, t) + f(x, t), \quad (3.20)$$

et (3.19) on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} a_i''(t) U_i^*(x) + (2a) \sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} a_i'(t) U_i^*(x) + (b^2) \sum_{i=0}^m a_i(t) U_i^*(x) \\ = w \sum_{i=2}^m \sum_{k=0}^{i-2} a_i(t) \mathcal{A}_{i,k}^1 x^{i-k-\beta} + f(x, t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

où $0 < \alpha \leq 1$. Nous colocalisons maintenant Eq. (3.21) en $m - 1$ points de collocation x_p comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} a_i''(t) U_i^*(x_p) + (2a) \sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} a_i'(t) U_i^*(x_p) + (b^2) \sum_{i=0}^m a_i(t) U_i^*(x_p) \\ = w \sum_{i=2}^m \sum_{k=0}^{i-2} a_i(t) \mathcal{A}_{i,k}^1 x_p^{i-k-\beta} + f(x_p, t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Les points de collocation sont les racines des polynômes de Tchebychev décalés du second type $U_{m-1}^*(x)$.

Généralement, les racines des polynômes de Tchebychev décalés du second type $U_m^*(x)$ sont calculées par la formule suivante :

$$x_p = \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(m-p)}{m+1} \right) \right) \frac{1}{2}, \quad p = 1, 2, \dots, m-1,$$

Par application. Ensuite nous avons

$$\sum_{i=0}^m [t^{1-\alpha} a_i''(t) U_i^*(x_p) + (2a)t^{1-\alpha} a_i'(t) U_i^*(x_p) + a_i(t) R_i(x_p)] = f(x_p, t), \quad (3.23)$$

Où

$$\begin{cases} S_0(x_p) = S_1(x_p) = 0, \\ S_i(x_p) = \sum_{k=0}^{i-2} \mathcal{A}_{i,k}^1 x_p^{i-k-\beta}, \quad i = 2, 3, \dots, m, \\ R_i(x_p) = (b^2) U_i^*(x_p) - w S_i(x_p), \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

On met aussi (3.19) dans (5), nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i a_i(t) = g(t), \quad \sum_{i=0}^m (2i+1) a_i(t) = h(t). \quad (3.24)$$

Nous introduisons les vecteurs $V(t)$ et $F(t)$ définis par :

$$\begin{aligned} V(t) &= (a_0(t), a_1(t), \dots, a_m(t))^T, \\ F(t) &= (f(x_1, t), f(x_2, t), \dots, f(x_{m-1}, t), g(t), h(t))^T. \end{aligned}$$

En remplaçant (3.8) et (3.19) dans les conditions initiales (4), nous pouvons calculer

$$V(0) = (a_0(0), a_1(0), \dots, a_m(0))^T \text{ et } \frac{d}{dt}V(0) = (a'_0(0), a'_1(0), \dots, a'_m(0))^T.$$

Soit les matrices $M(t)$, $C(t)$ et K données par :

$$M(t) = t^{1-\alpha} \begin{pmatrix} U_0^*(x_1) & U_1^*(x_1) & \dots & U_m^*(x_1) \\ U_0^*(x_2) & U_1^*(x_2) & \dots & U_m^*(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_0^*(x_{m-1}) & U_1^*(x_{m-1}) & \dots & U_m^*(x_{m-1}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(t) = (a + b)M,$$

$$K = \begin{pmatrix} R_0(x_1) & R_1(x_1) & \dots & R_m(x_1) \\ R_0(x_2) & R_1(x_2) & \dots & R_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_0(x_{m-1}) & R_1(x_{m-1}) & \dots & R_m(x_{m-1}) \\ 1 & -1 & \dots & (-1)^m \\ 1 & 3 & \dots & 2m + 1 \end{pmatrix}$$

En combinant les équations (3.23) et (3.24), nous trouvons la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} M(t) \ddot{V} + a(t) \dot{V} + KV(t) = F(t), \\ V(0) = (a_0(0), a_1(0), \dots, a_m(0))^T, \\ \dot{V}(0) = (a'_0(0), a'_1(0), \dots, a'_m(0))^T. \end{cases} \quad (3.25)$$

Pour résoudre le système d'équations différentielles du second ordre (3.25), Nous utilisons Méthode de Newmark's.

3.2 Méthode de Newmark's

La méthode de Newmark's permet la résolution numérique d'équations différentielles du second ordre. Elle convient, non seulement pour des systèmes différentiels linéaires, mais aussi pour des systèmes fortement non linéaires avec une matrice de masse et une force appliquée qui peuvent dépendre à la fois de la position et du temps.

3.2.1 Méthode de Newmark's

([25]) La méthode de Newmark's est une méthode très utilisée dans les codes de dynamique. C'est une méthode de résolution directe qui s'applique à l'équation matricielle.

On essayons alors de résoudre le système (3.25) à l'instant t_{n+1} :

$$[M] \ddot{V}_{n+1} + [C] \dot{V}_{n+1} + [K_{n+1}]V_{n+1} = F_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.26)$$

Où M est la matrice de masse, C la matrice d'amortissement, K la matrice de rigidité, F la force généralisée. La solution est une fonction $V(t)$ dépendante du temps. Le schéma de Newmark's se présente sous la forme Pour l'entier positif N , $\Delta t = T/N$, désigne la taille du pas de la variable t , Nous définissons donc $t_n = n\Delta t$ dans lequel $n = 0, 1, \dots, N$, nous introduisons les notations suivantes $a_i(t_n) = a_n^i$, $g(t_n) = g_n$, $h(t_n) = h_n$, $V_n = (a_{0,n}, a_{1,n}, \dots, a_{m,n})^T$ et $F_n = (f(x_1, t_n), f(x_2, t_n), \dots, f(x_{m-1}, t_n), g_n, h_n)^T$.

Dans 1959 Newmark's a proposé une méthode, voir [20] qui relie les accélérations, les vitesses et les déplacements des nœuds aux instants t_{n+1} et t_n comme suit :

$$V_{n+1} = V_n + \Delta t \dot{V}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[(1 - 2\theta_1) \ddot{V}_n + 2\theta_1 \ddot{V}_{n+1} \right], \quad (3.27)$$

$$\dot{V}_{n+1} = \dot{V}_n + \Delta t \left[(1 - \theta_2) \ddot{V}_n + \theta_2 \ddot{V}_{n+1} \right]. \quad (3.28)$$

Où $0 \leq \theta_1 \leq 1/2$ et $0 \leq \theta_2 \leq 1$ sont deux paramètres voir [25]. Lorsque ces deux paramètres sont nuls, on retrouve les formules de Taylor, La méthode la plus couramment utilisée est méthode de la moyenne d'accélération ($\theta_1 = 1/4$ et $\theta_2 = 1/2$).

Réorganiser (3.27) pour fournir une expression pour \ddot{V}_{n+1} donne :

$$\ddot{V}_{n+1} = \frac{V_{n+1} - V_n}{\theta_1 \Delta t^2} - \frac{\dot{V}_n}{\theta_1 \Delta t} - \left(\frac{1}{2\theta_1} - 1 \right) \ddot{V}_n. \quad (3.29)$$

L'insertion de l'expression pour \ddot{V}_{n+1} de (3.29) dans (3.28) donne :

$$\dot{V}_{n+1} = \frac{\theta_2}{\theta_1 \Delta t} (V_{n+1} - V_n) + \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \dot{V}_n + \Delta t \left(1 - \frac{\theta_2}{2\theta_1} \right) \ddot{V}_n. \quad (3.30)$$

Nous pouvons maintenant insérer les expressions explicites pour \ddot{V}_{n+1} et \dot{V}_{n+1} de (3.29) et (3.30) dans (3.26) pour obtenir le système linéaire suivant :

$$A_{n+1}V_{n+1} = B_{n+1}, \quad (3.31)$$

Où

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{M}{\theta_1 (\Delta t)^2} + \frac{\theta_2 C}{\theta_1 \Delta t} + K_{n+1}, \\ B_{n+1} &= F_{n+1} + M \left[\frac{V_n}{\theta_1 (\Delta t)^2} + \frac{\dot{V}_n}{\theta_1 \Delta t} + \left(\frac{1}{2\theta_1} - 1 \right) \ddot{V}_n \right] \\ &\quad + C_{n+1} \left[\frac{\theta_2 V_n}{\theta_1 \Delta t} - \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \dot{V}_n - \Delta t \left(1 - \frac{\theta_2}{2\theta_1} \right) \ddot{V}_n \right]. \end{aligned}$$

3.2.2 Algorithme de Méthode Newmark's

([25])

Algorithme 1

1. Calculs initiaux :

- (a) formation la matrice de rigidité K_{n+1} , la matrice de masse M et la matrice d'amortissement C .
- (b) Initialiser V_0, \dot{V}_0 et \ddot{V}_0 .
- (c) Sélectionnez le pas de temps $\Delta t = T/N$, les paramètres θ_1, θ_2 et calculez les constantes d'intégration :

$$\theta_2 \geq 1/2; \theta_1 \geq \frac{(\theta_2 + 1/2)^2}{4};$$

$$a_0 = \frac{1}{\theta_1(\Delta t)^2}; a_1 = \frac{\theta_2}{\theta_1\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\theta_1\Delta t}; a_3 = \frac{1}{2\theta_1} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\theta_2}{\theta_1} - 1; a_5 = \Delta t \left(\frac{\theta_2}{2\theta_1} - 1 \right); a_6 = \Delta t(1 - \theta_2); a_7 = \theta_2\Delta t.$$

- (d) formation la matrices de rigidité effective $A_{n+1} = a_0M + a_1C + K_{n+1}$.

2. Pour chaque pas de temps :

- (a) Calculer les charges effectives au moment $t_{n+1} = t_n + \Delta t$:

$$B_{n+1} = F_{n+1} + M_{n+1} \left(a_0V_n + a_2\dot{V}_n + a_3\ddot{V}_n \right) + C_{n+1} \left(a_1V_n + a_4\dot{V}_n + a_5\ddot{V}_n \right).$$

- (b) Résoudre les déplacements à temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$:

$$A_{n+1}V_{n+1} = B_{n+1}.$$

- (c) Calculer les accélérations et les vitesses au temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$:

$$\ddot{V}_{n+1} = a_0(V_{n+1} - V_n) - a_2\dot{V}_n - a_3\ddot{V}_n,$$

$$\dot{V}_{n+1} = \dot{V}_n + a_6\ddot{V}_n + a_7\ddot{V}_{n+1}.$$

3.3 Applications

([25]) On compare les solutions numériques obtenues par l'algorithme 3.2.2 avec des solutions exactes connues et les méthodes numériques disponibles dans la littérature. Tous les calculs numériques ont été réalisé par *MATLAB R2014b* sous OSWindows 10 (64 bits) avec Intel(R) Core(TM) i7 - 2670QM, Processeur 2, 20 GHz et 8 Go de mémoire.

[25] Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques des équations télégraphiques fractionnaires d'espace-temps conformables (3) avec les conditions initiales (4) et aux

limites (5). Pour tester l'efficacité de l'algorithme ??, plusieurs exemples numériques pour différentes valeurs de a, b, w, α et β sont donnés dans cette section avec L_2, L_∞ et les erreurs de la moyenne quadratique (EQM) sont calculées par :

$$L_2 = \|u_e - u_m\|_2 = \sqrt{h \sum_{i=0}^N |u_e(x_i, t) - u_m(x_i, t)|^2},$$

$$L_\infty = \|u_e - u_m\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq N} |u_e(x_i, t) - u_m(x_i, t)|,$$

$$EQM = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N |u_e(x_i, t) - u_m(x_i, t)|^2}{N + 1}},$$

où u_e est l'exact solution et u_m est la solution numérique.

Exemple 3.2. ([25]) Dans cet exemple, nous considérons l'équation télégraphique :

$$\mathcal{D}_t^{(1+\alpha)} u(x, t) + (2a)\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x, t) + (b^2)u(x, t) = w\mathcal{D}_x^{(\beta)} u(x, t) + f(x, t), \quad (3.32)$$

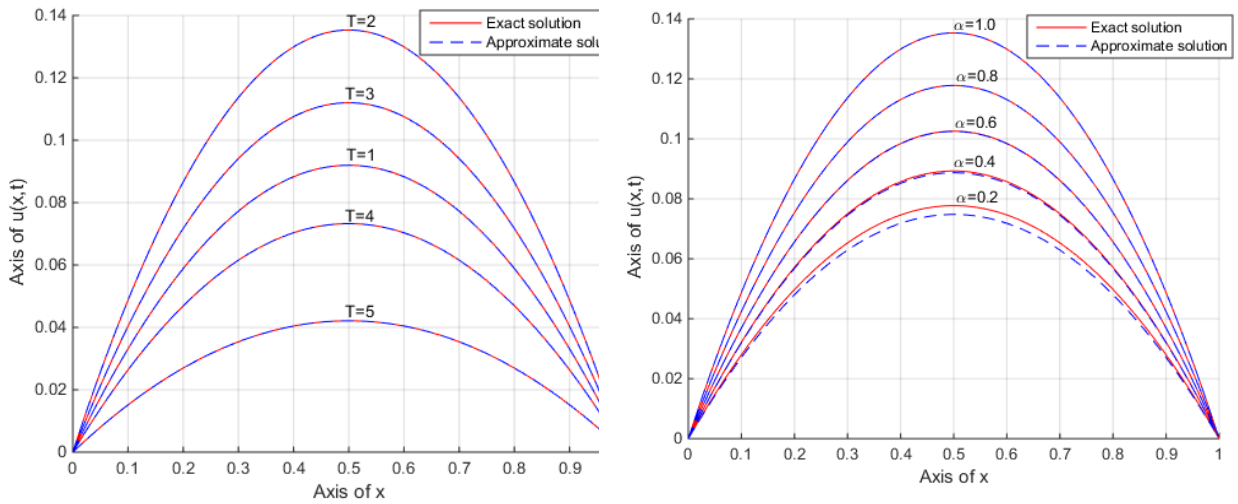
avec $a = 1/2, b = 1, w = 1$ et $\beta = 2$ dans le domaine $0 \leq x \leq 1$, avec les conditions initiales et aux limites suivantes,

$$\begin{cases} u(x, 0) = \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t \leq 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

et $f(x, t) = (\alpha + \alpha^2 - (1 + \alpha)t + t^{1+\alpha})(x - x^2)e^{-t} + 2t^{1+\alpha}e^{-t}$. La solution exacte de cet exemple est $u_e(x, t) = (x - x^2)t^{1+\alpha}e^{-t}$. Si $\alpha = 1$, cet exemple a été étudié dans ([15], [19]) par différentes méthodes numériques. Nous appliquons l'algorithme 3.2.2 pour $m = 5$ et approchons de la solution $u(x, t)$ comme suit :

$$u_5(x, t) = \sum_{i=0}^5 a_i(t)U_i^*(x).$$

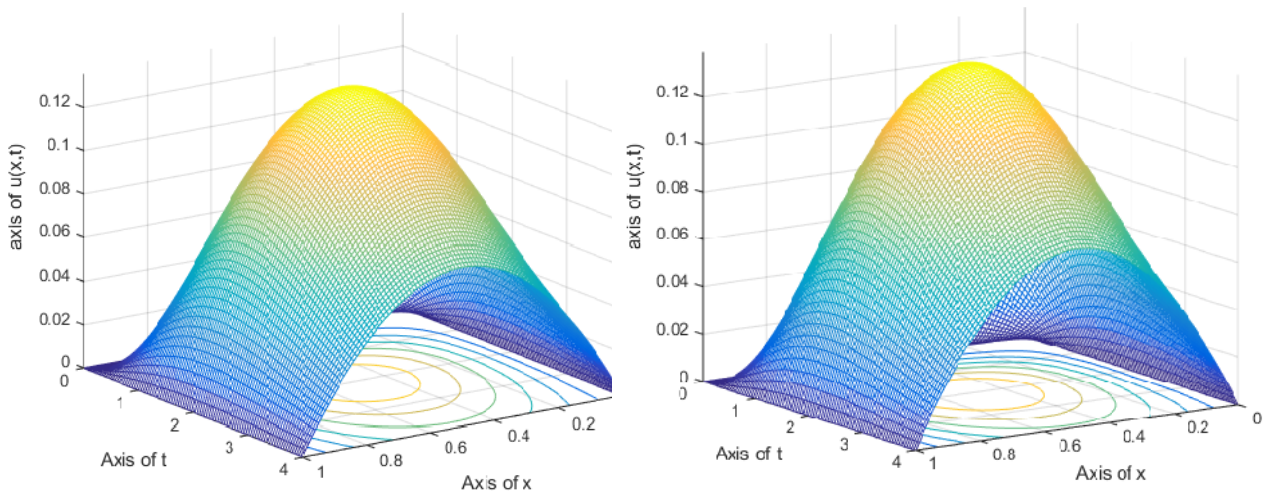
Utilisation du système linéaire (3.31) pour $m = 5$ et $N = 1000$ avec les données initiales $V^0 = \dot{V}^0 = \ddot{V}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. nous présentons les erreurs L_2 et L_∞ à différents t pour $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, avec $\Delta t = 0,0001$ et $h = 0,01$. Le graphique des solutions exactes et numériques pour $\alpha = 1$ à $t = 1, 2, 3, 4, 5$ et pour $t = 2$ à $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ est représenté sur la figure 3.1 et l'espace-temps des graphiques de solution numérique et d'erreur absolue jusqu'à $t = 5$ sont présentés dans la figure 3.2.



(a) Solutions exactes et numériques (gauche) pour $\alpha = 1$ à $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) Solutions exactes et numériques (droite) pour $t = 2$ à $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

FIGURE 3.1 – Comparaison des solutions numériques et exactes de l'exemple 3.2 à différents instants et α a niveaux avec $h = 0, 01, \Delta t = 0, 001$.



(a) Solution exact

(b) Solution numérique

FIGURE 3.2 – Graphiques espace-temps des solutions exactes et numériques pour l'exemple 3.2 à $t = 4$ et $\alpha = 1$.

Exemple 3.3. ([25]) Nous considérons l'équation (3.32) dans le domaine $[0, 1]$ avec $a = 6, b = 2, w = 1$ et $\alpha = 1$. Les conditions initiales et aux limites sont données par,

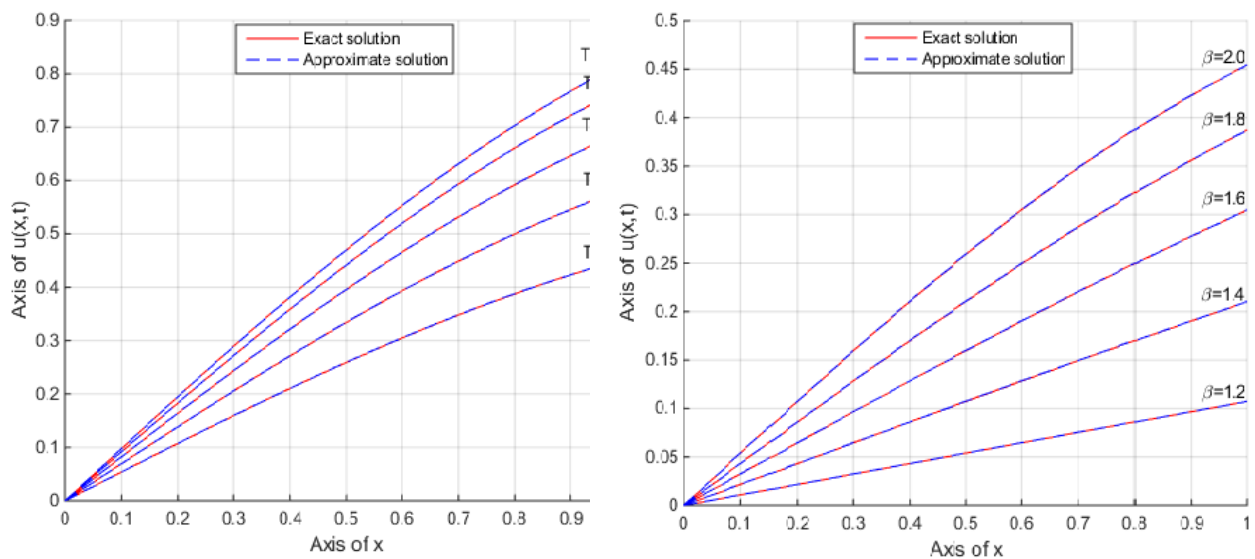
$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin((\beta - 1)x), u_t(x, 0) = 0 : 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \cos(t) \sin(\beta - 1), t \geq 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

et $f(x, t) = [3 \cos(t) - 12 \sin(t) + (\beta - 1)^2 x^{2-\beta} \cos(t)] \sin(\beta - 1)x$. La solution exacte de cet exemple est $u_e = \cos(t) \sin((\beta - 1)x)$. Si $\beta = 2$, cet exemple a été étudié dans ([15], [19]) par

différentes méthodes numériques. Nous appliquons l'algorithme 3.2.2 pour $m = 5$ et nous approchons de la solution $u(x, t)$ comme suit :

$$u_5(x, t) = \sum_{i=0}^5 a_i(t) U_i^*(x).$$

Utilisation du système linéaire (3.31) pour $m = 5$ et $N = 1000$ avec les données initiales $V^0 = (0.2373, 0.2273, -0.0124, -0.0023, 0.0001, 0)^T$, $\dot{V}^0 = \ddot{V}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, on calcule la solution approximative $u_5(x, t)$. L'efficacité de l'algorithme 3.2.2 est mesurée en utilisant L_2 , L_∞ et les erreurs quadratiques moyennes avec $\Delta t = 0,0001$, $h = 0,01$. Dans la figure 3.3, nous présentons la comparaison des solutions numériques et exactes pour différents niveaux de temps avec $\Delta t = 0,001$ et $h = 0,01$. Le graphique spatio-temporel de la solution numérique jusqu'à $t = 1$ et $t = 2$ est illustré à la figure 3.4.



(a) Solutions exactes et numériques
(gauche) pour $\beta = 2$ et $t = 0.2$ à $t = 1.0$.

(b) Solutions exactes et numériques
(gauche) pour $t = 1$ et $\beta = 1.2$ à $\beta = 2.0$.

FIGURE 3.3 – Comparaison des solutions numériques et exactes de l'exemple 3.3 à différents temps et niveaux β avec $h = 0,01$, $\Delta t = 0,001$.

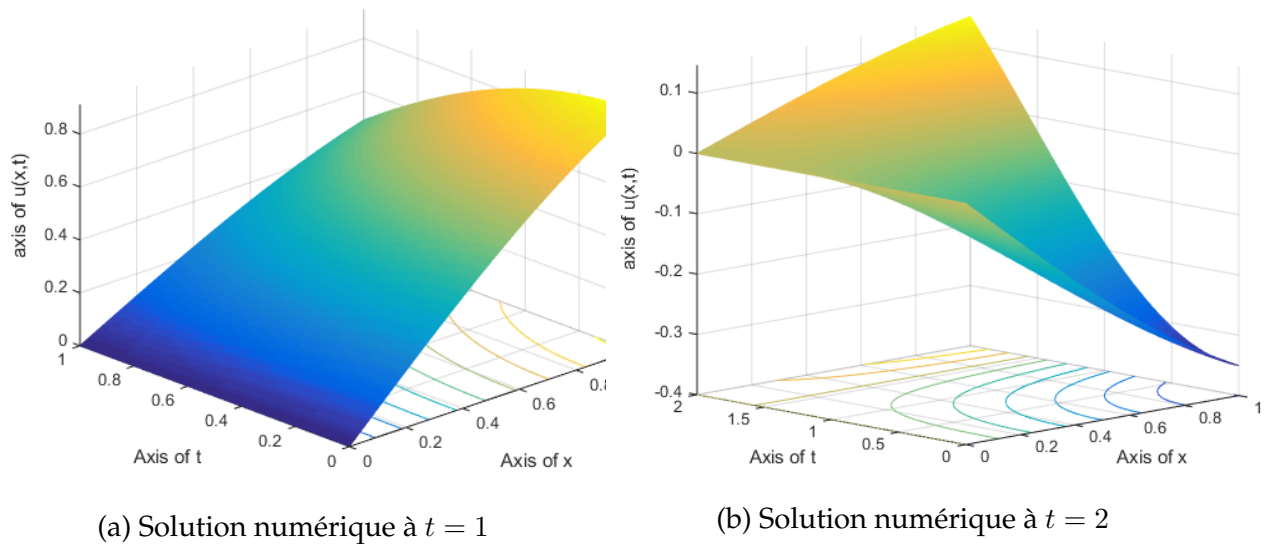


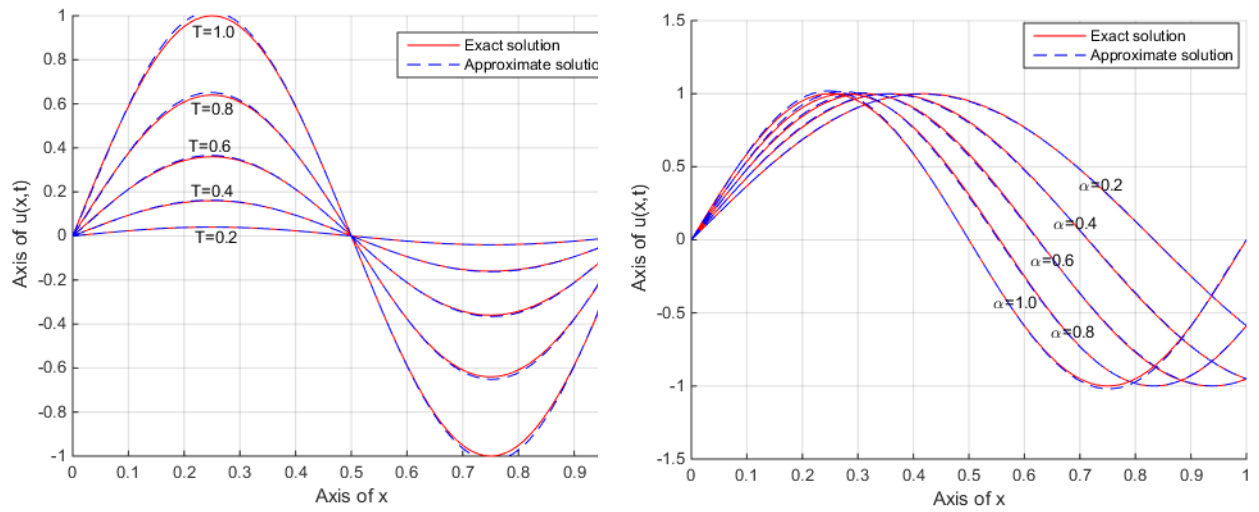
FIGURE 3.4 – Solution numérique espace-temps pour l'exemple 3.3 à $t = 1.2$ avec $\beta = 2$.

Exemple 3.4. ([25]) Dans cet exemple, nous considérons l'équation télégraphique (3.32) avec $a = 10$, $b = 5$, $w = 1$ et $\beta = 1 + \alpha$ dans le domaine $0 \leq x \leq 1$, avec les conditions initiales et aux limites suivantes,

$$\begin{cases} u(x, 0) = \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = t^{1+\alpha} \sin(\pi(1 + \alpha)), & 0 < t \leq 1. \end{cases} \quad (3.35)$$

et $f(x, t) = [\alpha(\alpha + 1) + 20(\alpha + 1)t + 25t^{1+\alpha} + \pi^2(1 + \alpha)^2 x^{1-\alpha} t^{1+\alpha}] \sin(\pi(1 + \alpha)x)$. La solution exacte de cet exemple est : $u_e = t^{1+\alpha} \sin(\pi(1 + \alpha)x)$.

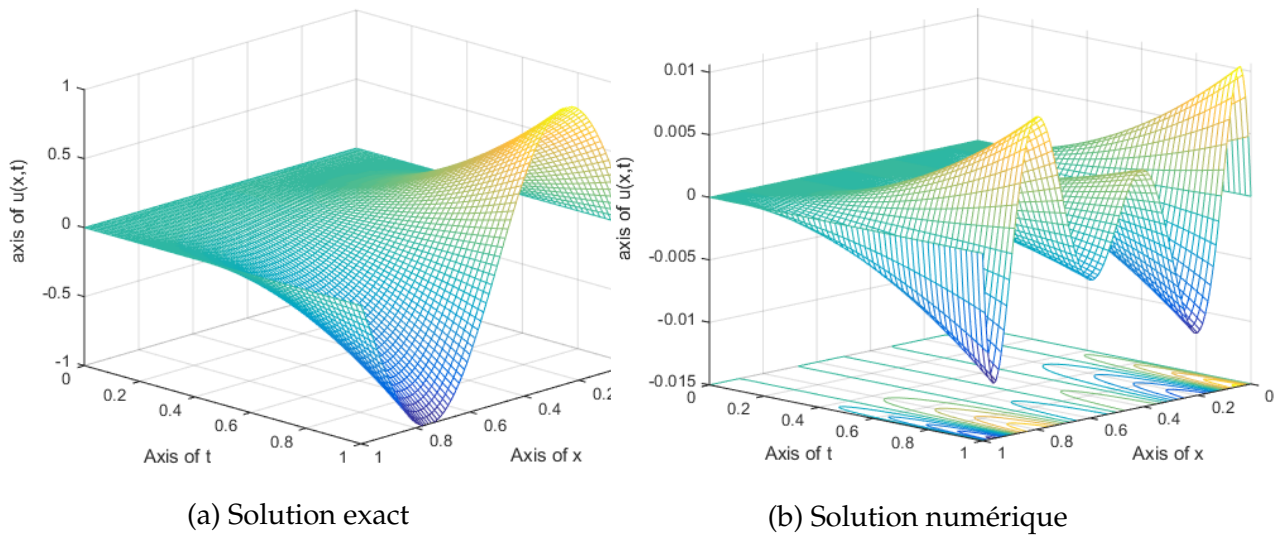
Erreurs L_2 et L_∞ à différentes tailles de pas de temps t pour $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, avec $\Delta t = 0,001$ et $h = 0,01$. De la figure 3.5, il est clair que la solution numérique coïncide avec le solution exacte pour différents temps et a niveaux avec $\Delta t = 0,001$ et $h = 0,01$. Les graphiques espace-temps de la solution numérique et l'erreur absolue sont présentées dans la figure 3.6.



(a) Solutions exactes et numériques (gauche) pour $\alpha = 1$ à $t = 0.2$ à $t = 1.0$.

(b) Solutions exactes et numériques (droite) pour $t = 1$ à $\alpha = 0.2$ à $\alpha = 1.0$.

FIGURE 3.5 – Comparaison des solutions numériques et exactes de l'exemple 3.4 à différents instants et β a niveaux avec $h = 0,01, \Delta t = 0,0001$.



(a) Solution exact

(b) Solution numérique

FIGURE 3.6 – Espace-temps de solution numérique et erreur absolue pour l'exemple 3.4 à $t = 1$ et $\alpha = 1$.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons proposé des méthodes pour calculer la solution analytique et numérique de l'équation télégraphique fractionnaire. Les dérivées fractionnaires sont décrits au sens conformable.

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **La solution analytique** : est calculé par la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conformable.
- ✓ **La solution numérique** : nous avons proposé un algorithme basé sur les polynômes de Tchebychev décalés du second espèce. L'équation télégraphique fractionnaire est réduite à un système linéaire d'équations différentielles du second ordre et la méthode de Newmark est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, quelques exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cet algorithme

Comme perspectives, nous avons prévu le sujet de recherche suivant :

- ✎ Résolution numérique de l'équation télégraphique fractionnaire avec coefficients variables suivantes :

$$\mathcal{D}_t^{(1+\alpha)}u(x, t) + (2a)\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u(x, t) + (b^2)u(x, t) = w(x, t)\mathcal{D}_x^{(\beta)}u(x, t) + f(x, t), \quad (3.36)$$

avec conditions initiales :

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.37)$$

et les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u(0, t) = g(t), \quad u_t(1, t) = h(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.38)$$

où $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{C}^2(0, 1)$, $g, h \in \mathcal{C}^2(0, T)$ et $f \in \mathcal{C}([0, 1][0, T])$ sont des fonctions données.

Bibliographie

- [1] H.M. Srivastava A. A. Kilbas and J.J. Trujillo. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.
- [2] R.P. Agarwal and D. O'Regan. *Ordinary and partial differential equations*. New York : Springer-Verlag, 2009.
- [3] Jacek Banasiak and Janusz R Mika. Singularly perturbed telegraph equations with applications in the random walk theory. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 11(1) :9–28, 1998.
- [4] Ali H Bhrawy, Mahmoud A Zaky, and José A Tenreiro Machado. Numerical solution of the two-sided space–time fractional telegraph equation via chebyshev tau approximation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 174(1) :321–341, 2017.
- [5] Nouiri Brahim. Numerical approach of the nonlinear reaction-advection-diffusion equation with time-space conformable fractional derivatives. 2334(1) :060012, 2021.
- [6] Carlo Cattani, Hari M Srivastava, and Xiao-Jun Yang. *Fractional dynamics*. De Gruyter Open Poland, 2016.
- [7] Jinhua Chen, Fawang Liu, and Vo Anh. Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338(2) :1364–1377, 2008.
- [8] Mehdi Dehghan and Ali Shokri. A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations : An International Journal*, 24(4) :1080–1093, 2008.
- [9] O. Heaviside. *Electromagnetic theory*. Chelsea Publishing Company, New York, Vol-2,, 1899.
- [10] PM Jordan and Ashok Puri. Digital signal propagation in dispersive media. *Journal of Applied Physics*, 85(3) :1273–1282, 1999.
- [11] Roshdi Khalil, Mohammed Al Horani, Abdelrahman Yousef, and Mohammad Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264 :65–70, 2014.
- [12] Devendra KUMAR, Jagdev SINGH, and Sunil KUMAR. Analytic and approximate solutions of space-time fractional telegraph equations via laplace transform. *Walailak Journal of Science and Technology (WJST)*, 11(8) :711–728, 2014.
- [13] Sunil Kumar. A new analytical modelling for fractional telegraph equation via laplace transform. *Applied Mathematical Modelling*, 38(13) :3154–3163, 2014.
- [14] J. Mason and D. Handscomb. *Chebyshev polynomial*. Chapman and hall, CRC, New York, Boca Raton, 2003.

- [15] RC Mittal and Rachna Bhatia. Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic b-spline collocation method. *Applied Mathematics and Computation*, 220 :496–506, 2013.
- [16] Syed Tauseef Mohyud-Din, Ahmet Yıldırım, and Yasemin Kaplan. Homotopy perturbation method for one-dimensional hyperbolic equation with integral conditions. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 65(12) :1077–1080, 2010.
- [17] Shaher Momani. Analytic and approximate solutions of the space-and time-fractional telegraph equations. *Applied Mathematics and Computation*, 170(2) :1126–1134, 2005.
- [18] A. M. Nagy N. H. Sweilam and A. A. Sayed. Second kind shifted chebyshev polynomials for solving space fractional order diffusion equation. *Chaos, Solitons , Fractals*, 73(p.(141-147)), 2015.
- [19] Tahir Nazir, Muhammad Abbas, and Muhammad Yaseen. Numerical solution of second-order hyperbolic telegraph equation via new cubic trigonometric b-splines approach. *Cogent Mathematics & Statistics*, 4(1) :1382061, 2017.
- [20] A. M. A Newmark. method of computation for structural dynamics . *ASCE journal of Engineering Mechanics Division* 85, 67-94, 1959.
- [21] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [22] Igor Podlubny. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [23] Amit Prakash. Analytical method for space-fractional telegraph equation by homotopy perturbation transform method. *Nonlinear Engineering*, 5(2) :123–128, 2016.
- [24] ABDELKEBIR. S and NOUIRI. B. Analytical solution for the conformable fractional telegraph equation by fourier method. *Proceedings of International Mathematical Sciences*, Volume II Issue 1(06 pages), 2020.
- [25] Abdelkebir Saad and Nouri Brahim. An efficient algorithm for solving the conformable time-space fractional telegraph equations. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, 7(3) :413–429, 2021.
- [26] Abbas Saadatmandi and Mehdi Dehghan. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the chebyshev tau method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations : An International Journal*, 26(1) :239–252, 2010.
- [27] S Samko. A kilbas and marichev. *Fractional intearals and derivatives : theory and agglications*, 1993.
- [28] Joel L Schiff. *The Laplace Transform : Theory and Applications*. New York : Springer-Verlag, 1999.
- [29] Ali Sevimlican. An approximation to solution of space and time fractional telegraph equations by he’s variational iteration method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, 2010.
- [30] Abdeljawad. T. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 2012, article 62(10 pages), 2015.
- [31] VH Weston and S He. Wave splitting of the telegraph equation in r3 and its application to inverse scattering. *Inverse Problems*, 9(6) :789, 1993.

- [32] Ahmet Yıldırım. He's homotopy perturbation method for solving the space-and time-fractional telegraph equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(13) :2998–3006, 2010.
- [33] SA Yousefi. Legendre multiwavelet galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations : An International Journal*, 26(3) :535–543, 2010.

ملخص: في هذه المذكرة، اقترحنا طرقا لحساب الحل التحليلي و العددي لمعادلة التلغراف الكسري. يتم وصف المشتقات الكسرية بالمعنى المطابق. تم حساب الحل التحليلي من خلال طريقة فورييه و خصائص حساب التفاضل و التكامل الكسري المطابق. لقد اقترحنا خوارزمية تعتمد على كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الثاني. تم تبسيط و تحويل معادلة التلغراف الكسري إلى جملة خطية من المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية ذات معاملات ثابتة. قمنا بتوظيف طريقة نيومارك لحل هذه الجملة. اخيرا تم تقديم بعض الأمثلة العددية لتأكيد موثوقية و كفاءة هذه الخوارزمية.

كلمات مفتاحية: حساب التفاضل و التكامل الكسري المطابق ، طريقة فورييه ، طريقة نيومارك ، كثيرات حدود تشيبيشيف ، معادلة التلغراف الكسري.

Dans ce mémoire, nous avons proposé des méthodes pour calculer les solutions analytiques et numériques de l'équation télégraphique fractionnaire. Les dérivées fractionnaires sont décrits au sens conformable. La solution analytique est trouvé par la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conformable. Nous avons proposé un algorithme basé sur des polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce. L'équation télégraphique fractionnaire est réduite à un système linéaire d'équations différentielles du second ordre et la méthode de Newmark est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, quelques exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cet algorithme.

Mots-Clés : Calcul fractionnaire conformable, Méthode de Fourier, Méthode de Newmark, Polynômes de Tchebychev, Équation télégraphique fractionnaire.

In this memoir, we have proposed methods to calculate the analytical and numerical solutions of the fractional telegraph equation. Fractional derivatives are described in the conformable sense. The analytical solution is found by the Fourier method and the properties of conformable fractional calculus. We have proposed an algorithm based on shifted Chebyshev polynomials of the fourth kind. The fractional telegraph equation is reduced to a linear system of second order differential equations and Newmark's method is applied to solve this system. Finally, some numerical examples are presented to confirm the reliability and the efficiency of this algorithm.

Keywords : Conformable fractional calculus, Fourier method, Newmark method, Chebyshev polynomials, fractional telegraph equation.