



**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique**

**Département de Mathématiques**



## **MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

**Par**

**BOUGUERRA Karima**

**Sujet**

**Théorèmes du point fixe et Applications aux  
Equations différentielles**

**Devant le jury :**

Mr.NADIR Mostefa..... Prof. Univ de M'sila Président

Mme.KHIRANI Amina ... M.C.B. Univ de M'sila Rapporteur

Mme.BOUNEB Noura.....M.C.B. Univ de M'sila Examineur

**Promotion : 2016 / 2017**

# *Remerciements*

Je remercie ALLAH le clément et le mésirécordieux.

Mes premiers remerciements vont à docteur KHIRANI Amina, qui a dirigé mes travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Je remercie vont également à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

NADIR Mostafa, professeur à l'Université de M'sila.

BOUNEB Noura, docteur à l'Université de M'sila.

Je ne saura oublier de remercier l'ensemble des enseignants département de Mathématique qui ont participé dans notre formation.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

---

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

# NOTATIONS

$B(y_0, r)$	est la boule ouverte de centre $y_0$ et de rayon $r$ .
$B_f(y_0, r)$	est la boule fermée centrée en $y_0$ et de rayon $r$ .
$S(y_0, r)$	est la sphère de centre $y_0$ et de rayon $r$ .
$C^0(E, F)$	est l'ensemble des fonctions continues de $E$ dans $F$ .
$C_b^0(E, F)$	est l'ensemble des fonctions continues et bornées de $E$ dans $F$ .
$\varphi$	fonction inconnue.
$A$	opérateur linéaire.
$(a, b)$	intervalle ouvert $a < x < b$ .
$\partial\Omega$	la frontière de $\Omega$ .

# Table des figures

**Figure 01 : page 40**

**Figure 02 : page 42**

**Figure 03 : page 43**

**Figure 04 : page 45**

# Liste des tableaux

**Tableau 01 : page 40**

**Tableau 02 : page 41**

**Tableau 03 : page 43**

**Tableau 04 : page 44**

# Table des matières

<i>Remerciements</i>	ii
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS</b>	<b>2</b>
1.1 Espaces Fonctionnels . . . . .	2
1.1.1 Espace de Banach . . . . .	2
1.1.2 Espace de Hausdorff (espace séparé) . . . . .	3
1.2 Quelques notions de Topologie . . . . .	4
1.2.1 Compacité . . . . .	4
1.2.2 Opérateurs compacts . . . . .	5
1.2.3 Contraction . . . . .	7
1.2.4 Rétraction . . . . .	7
1.2.5 Différentiabilité . . . . .	8
<b>2 QUELQUES THÉORÈMES DU POINT FIXE</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction et définitions . . . . .	9
2.2 Quelques théorèmes du point fixe . . . . .	10
2.2.1 Théorème du point fixe de <b>Picard</b> . . . . .	10
2.2.2 Théorème du point fixe de <b>Schauder</b> . . . . .	11
<b>3 INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>	<b>15</b>
3.1 Définition . . . . .	15

---

3.2	Formulation des équations différentielles . . . . .	16
3.2.1	Équations différentielles ordinaires . . . . .	16
3.2.2	Équations aux dérivées partielles . . . . .	19
3.3	Classification des équations différentielles du premier ordre . . . . .	19
3.4	Le problème de Cauchy . . . . .	23
3.5	La relation entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra . . . . .	24
3.5.1	Équation intégrale . . . . .	24
<b>4</b>	<b>QUELQUES APPLICATIONS DES THEOREMES DU POINT FIXE AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES</b>	<b>28</b>
4.0.2	Introduction . . . . .	28
4.0.3	Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	29
4.0.4	Théorème de Cauchy-Arzela . . . . .	32
4.0.5	Théorème d’Inversion Locale . . . . .	34
<b>A</b>	<b>ANNEXE</b>	<b>37</b>
A.0.6	Résolution analytique des équations différentielles . . . . .	37
A.0.7	Résolution numérique des équations différentielles . . . . .	38
A.0.8	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte . . . . .	39
	<b>Conclusion générale</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Introduction

Les théorèmes du point fixe représentent d'importants outils mathématiques de base pour montrer l'existence et l'unicité de solutions pour divers types d'équations. La théorie du point fixe est donc au coeur de l'analyse non linéaire appliquée aux équations différentielles.

Le développement de la théorie du point fixe, qui est la branche cardinale de l'analyse non linéaire a donné un grand effets sur l'avancement de l'analyse non linéaire. L'analyse non linéaire comme une branche autonome des mathématiques à été élaboré dans les années 1950 par des mathématiciens, comme Browder, comme une combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

Cependant, les premiers résultats avaient déjà été obtenus dans les années 1920, les résultats non linéaires sont applicables à un large éventail domaines. Plusieurs problèmes en physique, chimie, biologie, économie à des modèles non linéaires. Les équations différentielles et intégrales, les problèmes d'optimisation générale.

La qualité ainsi que le montant de la recherche de la théorie des point fixe dans l'espace métrique a grandement augmenté dans les années 1970.

Les équations différentielles et les systèmes différentiels ont une importance fondamentale dans les problèmes pratiques. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre de lois et de relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme d'équations différentielles. Les équations différentielles constituent une des branches les plus fertiles des mathématiques, l'étude de ce type d'équations différentielles est liée à l'étude des phénomènes naturels.

Les descriptions des évolutions importantes dans cette période prouvée l'existence des théorème des point fixe en utilisant des applications.

Les descriptions des évolutions importantes dans cette période prouvée l'existence des théorème des point fixe en utilisant des applications.

Dans ce mémoire, nous avons considéré les théorèmes du point fixe et application aux équations différentielles. On a structuré ce mémoire en quatre chapitres comme suit:

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de l'analyse fonctionnelles: Espace de Banach, Espace de Hausdorff, compacité, opérateur compact, contraction et rétraction....

Le deuxième chapitre présente quelques théorèmes principales du point fixe: le théorème de Picard et théorème de Schauder.

Le troisième chapitre, nous rappelons les équations différentielles: formulation des équations différentielles, classification, problème de Cauchy et en dernier la relation entre équations différentielles et équation intégrale de Volterra.

Le Quatrième chapitre représente l'importance de ce mémoire, l'application de la théorie du point fixe sur les équations différentielles.

À la fin on a la résolution analytique et numérique des équations différentielles et comparaison les résultats des solutions approchées.

# Chapitre 1

## INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions topologiques importants de l'analyse fonctionnelles.

### 1.1 Espaces Fonctionnels

#### 1.1.1 Espace de Banach

**Définition 1.1.1** (*Espace de Banach*) *Un espace de Banach est un espace vectoriel complet, cette définition prend tout son sens dans le cas de la dimension infinie. En effet on a en dimension finis le résultat suivant,*

**Proposition 1.1.1** *Les espaces vectoriels normés de dimension finie sur  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  sont des Banach.*

**Proposition 1.1.2** *Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $B$  un Banach alors  $\mathcal{L}(E; B)$  est aussi un espace de Banach pour la norme des applications linéaires.*

**Proposition 1.1.3** *Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $V$  un sous espace vectoriel dense de  $E$ . soit  $B$  un Banach, alors toute application linéaire continue  $u : V \longrightarrow B$  a un prolongement unique en une application  $\bar{u} \in \mathcal{L}(E; B)$ .*

**Définition 1.1.2** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, une série de terme générale  $x_n \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est dite normalement convergente si et seulement si la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E$  est convergente.

**Proposition 1.1.4** Dans un Banach les séries normalement convergentes sont des séries convergentes.

## 1.1.2 Espace de Hausdorff (espace séparé)

En mathématiques, un espace séparé, dit aussi espace de Hausdorff, est un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints. Cette condition est aussi appelée axiome  $T_2$  au sein des axiomes de séparation.

**Définition 1.1.3** Soit  $(E, d)$  un espace métrique, on dit qu'il est séparable si et seulement si il existe un sous ensemble dense dénombrable.

Autrement dit il existe une suite de  $E$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que  $D = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$  soit dense dans  $E$ .

**Proposition 1.1.5** Si  $(E, d)$  est un espace métrique séparable alors pour tout  $F \subset E$ ,  $(F, d)$  est aussi un espace métrique séparable.

**Définition 1.1.4** Un espace topologique  $E$  est un espace  $T$  (ou Hausdorff) si pour tous  $x, y$ , points distincts de  $E$ , il existe deux ouverts,  $O_x$ , et  $O_y$  tels que  $x \in O_x$ ,  $y \in O_y$ , et  $O_x \cap O_y = \emptyset$ .

**Exemple 1.1.1** 1) Si  $E$  est muni de la topologie discrète alors  $\{x\}$  et  $\{y\}$  sont des ouverts, donc  $E$  est séparé,

2) Si  $E$  est muni de la topologie grossière et  $\#E \geq 2$ , alors  $E$  n'est pas séparé (pour tout  $x \in E$ ,  $E$  est le seul voisinage de  $x$ ).

3)  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle est séparé,  $\overline{\mathbb{R}}$  aussi.

## 1.2 Quelques notions de Topologie

### 1.2.1 Compacité

Un autre concept clé de l'analyse est celui de compacité. La compacité permet aussi d'obtenir des suites convergentes. L'exemple standard qu'il faut avoir en tête est celui des intervalles bornés de  $\mathbb{R}$ . En particulier on a vu au premier cycle que de toute suite numérique borné on peut extraire une suite qui converge. On a les définitions suivantes.

**Définition 1.2.1** *Un espace métrique  $(E, d)$  est compact si de tous recouvrement de  $E$  par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini. Autrement dit si  $\mathcal{S} \subset \theta$  est tel que  $E = \bigcup_{\theta \in \mathcal{S}} \theta$  alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  des ouverts de  $\mathcal{S}$  tels que*

$$E = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \dots \cup \theta_n.$$

L'espace est dit séquentiellement compact si de toutes suites on peut extraire une suite équivalentes.

- $(E, d)$  est compact.
- $(E, d)$  est séquentiellement compact.
- $(E, d)$  est précompact et complet.

**Proposition 1.2.1** *Un espace métrique compact  $(E, d)$ , est séparable.*

**Définition 1.2.2** *Soit  $X \subset E$  une partie d'un espace métrique  $(E, d)$ . On dit que  $X$  est relativement compact si sa fermeture  $\overline{X}$  est compact pour la distance induite  $d$ .*

**Proposition 1.2.2** *Soit  $X \subset E$  une partie d'un espace métrique  $(E, d)$ . On suppose que  $E$  est complet alors si  $X$  est précompact il est relativement compact.*

La proposition suivante peut s'énoncer ainsi: 'L'image d'un compact par une application continue est compact'.

**Théorème 1.2.1** *Soit  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques avec  $Y$  complet. Alors l'ensemble  $C_b^0(X, Y)$  est complet pour la distance uniforme  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \{d_Y(f(x), g(x))\}$*

## 1.2.2 Opérateurs compacts

### Opérateurs linéaires compacts:

Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $F$ .

Autrement dit, la fermeture  $\overline{A(G)}$  est compacte.

### Ensemble relativement compacts:

Un ensemble  $G \subset E$  est relativement compact si pour toute suite  $\{u_n\}$  de  $G$ , il existe une sous suite  $\{u_{n(k)}\}$  qui converge dans  $F$ .

### Théorème 1.2.2 (Critère de compacité)

Un opérateur linéaire  $A : E \longrightarrow F$  est compact si et seulement si pour toute suite bornée  $\varphi_n$  de  $E$ , la suite  $A\varphi_n$  contient une sous suite convergente de  $F$ .

**Démonstration:** Il suffit d'appliquer les définitions appropriées d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact.

**Théorème 1.2.3** Une combinaison linéaire  $A = \alpha A_1 + \beta A_2$  des opérateurs compacts est un opérateur compact.

**Démonstration:** Soit  $\{\varphi_n\}$  une suite bornée de  $E$  et soit  $\{A\varphi_n\}$  une suite de  $F$ , alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x),$$

avec  $\varphi_n \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$A_1$  et  $A_2$  étant compacts, on peut extraire de  $\{A_1\varphi_n\}$  et de  $\{A_2\varphi_n\}$  deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de  $\{A\varphi_n\}$ , donc  $A$  est compact.

**Théorème 1.2.4** Le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $\{\varphi_n\}$   $A$  et  $B$  est compact si l'un des opérateurs  $A$  ou  $B$  est compact.

**Théorème 1.2.5** Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, et soit  $\{A_n\}$  une suite d'opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ , convergente en norme vers l'opérateur linéaire  $A$  de  $E$  dans  $F$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors  $A$  est compact.

**Démonstration:** Soit  $\{\varphi_n\}$  une suite bornée de  $E$ , l'opérateur  $A_1$  étant compact, on peut extraire de la suite  $\{A_1\varphi_n\}$  une sous suite convergente; soit  $\{\varphi_n^1\}$  une sous suite de  $\{\varphi_n\}$  telle que,  $\{A_1\varphi_n^1\}$  soit convergente.

De la même façon, on peut extraire de la suite  $\{A_2\varphi_n^1\}$  une sous suite convergente, car  $A_2$  est compact; soit  $\{\varphi_n^2\}$  une sous suite de  $\{\varphi_n^1\}$  telle que, la suite  $\{A_2\varphi_n^2\}$  soit convergente.

Remarquons que, la suite  $\{A_1\varphi_n^2\}$  est une sous suite de la suite convergente  $\{A_1\varphi_n^1\}$  qui à son tour convergente.

En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs  $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$ , on détermine les suites  $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, \dots, \{\varphi_n^p\}, \dots$ . Il est à remarquer que la suite  $\{\varphi_n^p\}$  est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites  $\{A_k\varphi_n^p\}$  sont convergentes pour ( $k = 1, 2, \dots, p$ ).

Comme l'espace  $Y$  est complet, pour la compacité de l'opérateur  $A$  il suffit de montrer que la suite  $\{A\varphi_n^p\}$  est une suite Cauchy, alors

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| \leq \|A\varphi_n^p - A_n\varphi_n^p\| + \|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| + \|A_n\varphi_n^q - A\varphi_n^q\|.$$

Soit  $\|\varphi_n\| \leq M$ ; choisissons  $n$  de sorte que l'on a  $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3M}$ , ensuite choisissons  $N$  tel que, pour tous le  $p > N$  et  $q > N$ , on a la relation  $\|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}$  car la suite  $\{A_n\varphi_n^p\}$  est convergente.

Dans ces conditions, on aura pour tout  $p$  et  $q$  suffisamment grands,

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| < \varepsilon.$$

**Lemme 1.2.1** Soit  $G$  un sous espace fermé d'un espace normé  $E$  tel que,  $G \neq E$ , alors il existe un élément  $\varphi \in E$ , avec  $\|\varphi\| = 1$  tel que, pour tout  $\phi \in G$ , on a  $\|\varphi - \phi\| \geq \alpha$ , avec  $0 < \alpha < 1$ .

**Théorème 1.2.6** *L'opérateur identique  $I$  de  $E$  dans  $E$  est compact si et seulement si  $E$  est de dimension finie .*

**Corollaire 1.2.1** *La boule unité  $B(0,1)$  dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

### 1.2.3 Contraction

**Définition 1.2.3** *Soit  $X_1, X_2$  deux espaces de Banach et soit  $F : X_1 \longrightarrow X_2$  une application continue qui envoie les sous ensembles bornés de  $X_1$  dans ceux de  $X_2$ .*

(a)  $F$  est dite  $\beta$  – Lipschitzienne avec constante  $k$  (ou bien  $k$  – contraction d'ensemble) s'il existe une constante  $k \geq 0$  telle que  $\beta(F(A)) \leq k\beta(A)$ , pour tout ensemble borné  $A$  de  $X_1$ .

(b)  $F$  est une stricte  $k$  – contraction d'ensembles si  $0 < k < 1$ .

(c)  $F$  est dite  $\beta$  – condensante si  $\beta(F(A)) < \beta(A)$ , pour tout sous ensemble borné  $A$  de  $X_1$  vérifiant  $\beta(A) > 0$ .

**Remarque 1.2.1** *Dans la suite on va supposer que toute application  $k$ –contraction d'ensembles (ou condensante) est continue.*

### 1.2.4 Rétraction

**Définition 1.2.4** *On appelle **rétraction** de l'espace topologique  $E$  sur un fermé  $F$  de  $E$  toute fonction continue de  $E$  dans  $F$  qui est l'identité sur  $F$ .*

**Théorème 1.2.7** *Soit  $K$  un compact convexe dans un espace de Hilbert  $E$ . Alors, il existe une rétraction 1–Lipschitzienne*

$$\pi_k : E \longrightarrow K.$$

**Théorème 1.2.8** *Il n'existe pas de rétraction  $B_f(0,1)$  sur  $S(0,1)$ .*

**Démonstration:** ( $\implies$ ) Si une telle rétraction  $F$  existe alors  $-F : B_f(0,1) \longrightarrow B_f(0,1)$  n'a pas de point fixe. En effet, s'il existe  $x \in B_f(0,1)$  tel que  $F(x) = -x$ , alors  $x \in S(0,1)$  et donc  $x = -F(x) = -x$ , ce qui est impossible.

( $\Leftarrow$ ) Si  $f : B_f(0, 1) \longrightarrow B_f(0, 1)$  est continue et n'a pas de point fixe, alors

$$\begin{aligned} F : B_f(0, 1) &\longrightarrow S(0, 1) \\ x &\longmapsto x + t_z(x - f(x)) \end{aligned}$$

Où  $t_z$  est le seul  $t > 0$  tel que  $\|x - t(x - f(x))\|^2 = 1 = \|x\|^2 + 2t\langle x, x - f(x) \rangle + t^2\|x - f(x)\|^2$ .

On trouve  $t_z = \frac{-\langle x, z-f(x) \rangle + \sqrt{\langle z, x-f(x) \rangle^2 + \|x-f(x)\|^2(1-\|x\|^2)}}{\|x-f(x)\|^2}$ , donc  $F$  est continue. De plus, si  $x \in S(0, 1)$ , alors  $\|x\| = 1$ , donc  $t_z = \frac{-\langle x, x-f(x) \rangle + |\langle x, x-f(x) \rangle|}{\|z-f(x)\|^2}$ . Or  $\langle x, x - f(x) \rangle = \|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle \geq 1 - \|x\| \cdot \|f(x)\| \geq 0$ , d'où  $t_x = 0$  et  $\forall x \in S(0, 1)$ ,  $F(x) = x$ .

### 1.2.5 Différentiabilité

**Définition 1.2.5** Soient  $E, F$  deux espaces de Banach,  $U \subset E$  ouvert,  $\alpha \in U$ ,  $f : U \longrightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe  $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, F)$  (i.e.  $\varphi$  est linéaire et continue) telle que

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + \varphi(h) + o(\|h\|) \quad \text{lorsque } h \longrightarrow 0$$

Si  $\varphi$  existe, elle est unique et est appelée la différentielle de  $f$  en  $a$  et est notée  $df_\alpha$ .

Si  $f$  est différentiable en tout point de  $U$ , on dit que  $f$  est différentiable sur  $U$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} df : U &\longrightarrow \mathcal{L}_c(E, F) \\ \alpha &\longmapsto df_\alpha \end{aligned}$$

est appelée l'application différentielle de  $f$ . Si  $df$  est continue, on dit que  $f$  est de classe  $C^1(U)$ .

# Chapitre 2

## QUELQUES THÉORÈMES DU POINT FIXE

### 2.1 Introduction et définitions

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans lui-même. On appelle point fixe d'une application  $f$  tout élément  $u \in E$  tel que

$$f(u) = u$$

On voit que résoudre ce type d'équation est un cas particulier des équations numériques  $h(u) = f(u) - u = 0$ . De nombreux résultats affirment l'existence de points fixes. Lorsque l'ensemble  $E$  est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet), toute application contractante (i.e. toute application lipschitzienne de rapport  $k < 1$ ) de  $E$  dans lui-même admet un et un seul point fixe  $u$  telque

$$\forall x \in E, u = \lim_n f^n(x)$$

Dans ce partie, on étudier et représenter les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder, avec ses applications.

## 2.2 Quelques théorèmes du point fixe

### 2.2.1 Théorème du point fixe de Picard

Le théorème du point fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

**Théorème 2.2.1 (Picard)** Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $\varphi : E \longrightarrow E$  une application contractante (contraction), i.e. Lipschitzienne de rapport  $k < 1$ . Alors,  $\varphi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in E$ . De plus, pour tout point initial  $x_0 \in E$ , la suite itérée  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , avec  $x_0 \in E$  quelconque et  $x_{p+1} := \varphi(x_p)$  converge vers  $\alpha$ .

#### Démonstration:

On montre d'abord l'unicité d'un point fixe, puis son existence.

1. *Unicité:* Supposons qu'il existe  $a, b \in E$ ,  $a \neq b$ , tels qu'on ait  $\varphi(a) = a$  et  $\varphi(b) = b$ . Alors on a  $d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a, b)$  et donc  $\frac{d(\varphi(a), \varphi(b))}{d(a, b)} = 1 > k$  ce qui contredit le fait que  $f$  soit  $k$ -Lipschitzienne.

2. *Existence:* Soit  $x_0$  un point initial quelconque et  $(x_p)$  la suite itérée associée. On a

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p).$$

On va montrer par récurrence sur  $p$  que  $d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)$  (P):

– Initialisation: Evident pour  $p = 0$ .

– Généralisation: Supposons que pour un certain entier  $p$  quelconque mais fixé on ait la propriété (P). Alors

$$\begin{aligned} d(x_{p+1}, x_{p+2}) &= d(\varphi(x_p), \varphi(x_{p+1})) \\ &\leq kd(x_p, x_{p+1}) \\ &\leq k \cdot k^p d(x_0, x_1) \\ &\leq k^{p+1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On a alors  $\forall q > p$  :

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{i=p}^{q-1} d(x_i, x_{i-1}) \leq \left( \sum_{i=p}^{q-1} k^i \right) d(x_0, x_1)$$

De plus, pour tout  $p > q$ ,  $\sum_{i=p}^{q-1} k^i \leq \sum_{i=p}^{\infty} k^i = \frac{k^p}{1-k}$ , d'où  $d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1)$ . On en déduit alors que  $(x_p)$  est une suite de Cauchy. Comme  $(E, d)$  est complet, la suite  $(x_p)$  converge vers un point limite  $\alpha \in E$ . De plus on a  $\varphi(x_p) \rightarrow \varphi(\alpha)$  quand  $p \rightarrow \infty$  car  $\varphi$  est continue et  $\varphi(x_p) = x_{p+1}$ . Or  $x_{p+1} \rightarrow \alpha$  quand  $p \rightarrow \infty$ , d'où par unicité de la limite on a  $\varphi(\alpha) = \alpha$ .

**Contre-exemple (Picard)** les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1.  $X$  n'est pas stable par  $f : f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  sur  $X = [0, 1]$ .

Or  $X$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ , et complet car  $\mathbb{R}$  est complet. De plus,  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \implies \sup_{x \in X} |f'(x)| < 1 \implies f$  est contractante. Mais  $f$  n'a pas de point fixe car  $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}]$ , i.e.  $X$  n'est pas stable par  $f$ .

2.  $f$  n'est pas contractante:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  sur  $X = [0, +\infty[$ .

Or  $f : X \rightarrow X$ , et  $X$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{R}$  est complet donc  $X$  est complet. Mais  $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$  donc  $f$  n'est pas contractante.

3.  $X$  n'est pas complet:  $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$  sur  $X = ]0, \frac{\pi}{4}]$ .

Or  $f(]0, \frac{\pi}{4}]) = ]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset ]0, \frac{\pi}{4}]$ , et  $\sup_{x \in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$ ; donc,  $f$  est contractante.

Mais  $X$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$  donc pas complet.

### 2.2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de

Picard (par exemple, l'identité). Par contre, ce théorème ne donne aucun des avantages du théorème précédent.

**Théorème 2.2.2 (Schauder 1930)** *Soit  $C$  un sous ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach  $X$  et  $K:C \rightarrow C$  une application compacte. Alors  $K$  admet au moins un point fixe.*

**Démonstration:**

**1<sup>er</sup> étape:** On suppose  $C = B(0, R)$  la boule de rayon  $R$ .

S'il existe  $x_0 \in \partial C$  telque  $K(x_0) = x_0$ ; il n'ya rien à démontrer. Sinon, pour tout  $t \in [0, 1]$ , le degré  $\deg(K_t, C, 0)$ , où  $K_t = I - tK$ , est bien défini. En effet, s'il existe  $x \in \partial C$ ,  $tK(x) = x$ , alors  $R = \|x\| = t\|K(x)\| \leq Rt$  car  $K(C) \subset C$  et donc  $t = 1$ , ce qui conduit a une contraction avec  $\|K(x)\| = R = \|x\|$ . Le degré donc est bien défini et vaut, par homotopie,  $\deg(K, C, 0) = 1$ , d'où le resultat.

**2<sup>ème</sup> étape:**  $C$  est un convexe, fermé, borné, non vide.

On considère une rétraction continue  $r : X \rightarrow C$  et  $B$  une boule contenant  $C$ .

Soit le diagramme  $B \xrightarrow{r} C \xrightarrow{K} B$ . L'application  $(K \circ r)$  est compacte car  $K$  est compacte et  $r$  bornée. D'après la première étape, l'application  $K \circ r$  admet un point fixe  $x_0 \in B$ ,  $x_0 = (K \circ r)(x_0)$  On a  $r(x_0) \in C$  et par hypothèse,  $K(C) = C$ ; alors  $K(r(x_0)) \in C$  et donc  $x_0 \in C$ .

**Théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff**

**Théorème 2.2.3** *Toute ensemble compact et convexe dans l'espace de Hausdorff topologique, linéaire, et localement convexe, admet une propriété de point fixe.*

**Théorème 2.2.4 (Convergence des itérations de point fixe):** *On se donne  $x^{(0)}$  et on considère la suite  $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$ , pour  $k \geq 0$ . Si*

1.  $\forall x \in [a, b], f(x) \in [a, b]$ ,
2.  $f \in C^1([a, b])$ ,
3.  $\exists K < 1 : |f'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$ ,

alors  $f$  a un unique point fixe  $\alpha$  dans  $[a, b]$  et la suite  $\{x^{(k)}\}$  converge vers  $\alpha$  pour tout choix de  $x^{(0)} \in [a, b]$ . De plus, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = f'(\alpha) \quad (2.4.1)$$

**Démonstration:** L'hypothèse 1 et la continuité de  $f$  assurent que la fonction d'itération  $f$  a au moins un point dans  $[a, b]$ . L'hypothèse 3 implique que  $f$  est une contraction et assure l'unicité du point fixe.

Supposons en effet qu'il existe deux valeurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \in [a, b]$  telles que  $f(\alpha_1) = \alpha_1$  et  $f(\alpha_2) = \alpha_2$ . Un développement de Taylor donne

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = |f(\alpha_2) - f(\alpha_1)| = \left| f'(\eta)(\alpha_2 - \alpha_1) \right| \leq K |\alpha_2 - \alpha_1| < |\alpha_2 - \alpha_1|,$$

avec  $\eta \in ]\alpha_1, \alpha_2[$ , d'où on déduit  $\alpha_2 = \alpha_1$ .

On utilise à nouveau ce développement pour analyser la convergence de la suite  $\{x^{(k)}\}$ . Pour  $k \geq 0$ , il existe une valeur  $\eta^{(k)}$  entre  $\alpha$  et  $x^{(k)}$  telle que

$$x^{(k+1)} - \alpha = f(x^{(k)}) - f(\alpha) = f'(\eta^{(k)})(x^{(k)} - \alpha) \quad (2.4.2)$$

d'où on déduit que  $|x^{(k+1)} - \alpha| \leq K |x^{(k)} - \alpha| \leq K^{k+1} |x^{(0)} - \alpha| \rightarrow 0$  pour  $k \rightarrow \infty$ .

Ainsi,  $x^{(k)}$  converge vers  $\alpha$  et (2.4.2) implique que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} f'(\eta^{(k)}) = f'(\alpha).$$

D'où (2.4.1).

La quantité  $|f'(\alpha)|$  est appelée facteur de convergence asymptotique, et par analogie avec les méthodes itératives pour les systèmes linéaires, on peut définir le taux de convergence asymptotique par

$$R = -\log \left( |f'(\alpha)| \right) \quad (2.4.3)$$

Le théorème (2.4.2) assure la convergence, avec un ordre 1, de la suite  $\{x^{(k)}\}$  vers la racine  $\alpha$  pour tout choix d'une valeur initiale  $x^{(0)} \in [a, b]$ . Il constitue donc un exemple de résultat de convergence globale.

**Corollaire 2.2.1** *Si l'application continue est définie sur un domaine  $D$  dans l'espace de Hausdorff topologique linéaire localement convexe, et on prend les valeurs dans sous ensemble convexe et compact dans  $D$ , alors admet un point fixe.*

**Démonstration:** Soient  $F : D \longrightarrow K$ , où  $K$  un ensemble compact et convexe dans  $D$ . Alors la restriction de  $F$  vers  $K$  est un application continu de  $K$  vers  $K$ . D'après le théorème de Schauder-Tychonoff,  $F|_K$  admet un point fixe.

On va démontrer l'existence pour les solutions des équations différentielles.

On considère le problème avec la valeur initiale pour le système des équations différentielles de premier ordre:

$$\begin{cases} y'_i(x) &= f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), (1 < i < n) \\ y_i(0) &= 0, (1 < i < n) \end{cases}$$

Cette écriture compactement sous la forme

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

où  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  et  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ .

Malgré ça le choix des valeurs initiales  $y_i(0) = 0$  généralement sacrifie, cette valeurs initiales toujours on peut donne par changement de variable. On change  $x$  par  $x - \alpha$  un point initial, et on change  $y_i$  par  $y_i - c_i$  un valeurs iniales.

L'espace  $C_n[a, b]$  est consiste a  $n - ensembles$  des fonctions dans  $C[a, b]$ .

Si  $y = (y_1, \dots, y_n) \in C_n[a, b]$ , on écrit

$$\|y\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} \|(y_1(x), \dots, y_n(x))\|_1 = \sup_{a \leq x \leq b} \|y(x)\|_1$$

où  $\|\cdot\|_1$  désigne de la norme  $\ell^1$  de  $\mathbb{R}^n$ . C'est-à-dire

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i| \text{ si } u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION AUX

### ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les équation différentielles et les systèmes différentiels ont une importance fondamentale dans les problèmes pratiques. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre de lois et de relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme d'équations différentielles.

#### 3.1 Définition

Les équation différentielles et les systèmes différentiels ont une importance fondamentale dans les problèmes pratiques. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre de lois et de relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme d'équations différentielles. Les équations différentielles constituent une des branches les plus fertiles des mathématiques, l'étude de ce type d'équations différentielles est liée à l'étude des phénomènes naturels.

Une première approximation dans cette étude consiste en effet à simplifier les relations entre les fonctions représentant ces phénomènes et leurs dérivées, jusqu'à obtenir des équations différentielles linéaires, c'est-à-dire du premier degré par rapport aux fonctions et aux dérivées.

Dans le cas d'une seule fonction dépendant d'une seule variable la forme générale d'une telle équation est

$$y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \dots + A_n(x)y = d(x).$$

Une deuxième approximation consiste à prendre dans chacun des coefficients  $A_i(x)$  développés en série de Maclaurin le terme constant seul.

On obtient ainsi les équations à coefficients constants d'importance pratique considérable et que nous étudierons.

## 3.2 Formulation des équations différentielles

### 3.2.1 Équations différentielles ordinaires

**Définition 3.2.1** Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre  $n$  est une relation entre la variable réelle  $x$ , une fonction inconnue  $x \mapsto y(x)$  et ses dérivées  $y'$ ,  $y''$ , ...,  $y^{(n)}$  au point  $x$  définie par

$$F(x, y, y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

Où  $F$  n'est pas indépendante de sa dernière variable  $y^{(n)}$ . On prendra  $x$  dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  ( $I$  peut être  $\mathbb{R}$  tout entier).

La solution  $y$  en général sera à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  où  $N$  sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si  $F$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

#### Équations différentielles linéaires du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du *premier ordre*, une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Une telle équation est de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{3.2.1}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions données de  $x$ ,  $a(x)$ , et  $b(x)$  sont appelés coefficients et  $c(x)$  le second membre.

On associe à l'équation (3.2.1), l'équation sans second membre

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{3.2.2}$$

qui est à variables séparable.

#### Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire du *deuxième ordre* une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à ses deux premières dérivées ,soit

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \tag{3.2.3}$$

Où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes données et  $f$  une fonction donnée.

On associe à l'équation (3.2.3) l'équation sans second membre

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{3.2.4}$$

### Équations différentielles linéaires du n-ième ordre

On appelle équation différentielle linéaire du *n-ième ordre* , une relation de la forme  $f[x, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0$  reliant la variable  $x$ , une fonction inconnue  $y$  de la variable  $x$  et les dérivées successives  $y', \dots, y^{(n)}$  de cette fonction.

**Définition 3.2.2** On appelle équation différentielle d'ordre  $n$  dans un espace de Banach  $E$  une équation de la forme

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{3.3.1}$$

Où  $f$  est une application définie sur  $X \times Y \times Y_1 \times \dots \times Y_{n-1}$ ,  $X$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $Y, Y_1, \dots, Y_{n-1}$  des ouverts connexes de  $E$ . On appelle solution de (3.3.1) une application  $y$  de classe  $\zeta^n$  sur un intervalle  $J \subset X$ , telle que pour tout  $x \in J$ ,  $y(x) \in X$ ,  $y'(x) \in Y_1, \dots, y^{(n-1)}(x) \in Y_{n-1}$ . et

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

#### Cas particuliers:

- Lorsque  $E = \mathbb{R}$ , ll'équation différentielle est dite scalaire.
- Lorsque  $f$  est linéaire par rapport à  $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , l'équation différentielle est dite linéaire homogène (à coefficients constants si de plus  $f$  ne dépend pas de  $x$ ). Si  $f$  est de la forme

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + b(x)$$

avec  $g$  linéaire par rapport à  $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , l'équation différentielle est dite linéaire avec terme source.

- Lorsque  $f$  est indépendante de  $x$ , l'équation différentielle est dite autonome.

**Exemple 3.2.1 (Evolution temporelle des populations)** Les biologistes ont remarqué que si une population est suffisamment grande, la croissance de la population est proportionnelle à la population. Ceci revient à l'observation simple que la croissance de la population est proportionnelle au nombre de couples possible dans la population. Ces observations se traduisent par une équation différentielle simple:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p(t) \quad (3.2.1)$$

qui a une solution analytique de

$$p(t) = \exp(\alpha t) + Cte$$

Bien entendu, on sait que ce modèle est trop simpliste puisque qu'au fur et à mesure que la population grandit ses membres vont entrer en compétition les uns avec les autres pour des ressources limités. Un meilleur modèle qui tient compte de cette compétition est donc la suivante:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p(t) - bp^2(t) \quad (3.2.2)$$

La population humaine sur terre semble avoir suivi une évolution semblable à celle prédite par ce modèle pendant une bonne partie du 20ème siècle. Les biologistes estiment que la valeur de  $\alpha$  vaut 0,029. On sait que la population mondiale en  $t_0 = 1965$  valait  $p_0 \equiv p(t_0) = 3,34 \cdot 10^9$

et qu'elle augmentait de 2% par an à cette époque, i.e.  $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \Big|_{t=t_0} = 0,02$ . On peut donc déduire la valeur de  $b$  de l'équation différentielle et des valeurs de  $p_0$  et de  $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \Big|_{t=t_0}$ :

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \Big|_{t_0} = \alpha - bp(t_0) \implies 0,02 = 0,029 - b \times 3,34 \cdot 10^9$$

soit

$$b = 2,695 \cdot 10^{-12}$$

Utilise ‘**Isode**’ (‘**ODE45**’) afin de modéliser la population mondiale avec cette équation. Quelle est de population mondiale prévue par cette équation pour 2007? Est-ce que cette équation prévoit une limite à la population mondiale? et si c’est le cas, quelle limite prévoit-elle?

**Note:** On peut comparer nos résultats avec la solution analytique de l’équation (3.2.1):

$$p(t) = \frac{\alpha p_0}{bp_0 + (\alpha - bp_0) \exp(-\alpha(t - t_0))}$$

On voit ici que la valeur limite de la population mondiale prévu par le module est  $p(t \rightarrow \infty) = \frac{\alpha}{b}n$ .

### 3.2.2 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (noté EDP) est une relation entre une fonction de plusieurs variables (réelles)  $u$  et ses dérivées partielles et une fonction donnée  $f$  :

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2.2.1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $F$  est une fonction de plusieurs variables réelles. L’ordre de dérivation le plus élevé (noté ici  $m$ ) apparaissant dans (3.2.2.1) est appelé l’ordre de l’EDP. Notons que si  $n = 1$ , alors l’EDP est une équation différentielle ordinaire (EDO).

Si dans (3.2.2.1), la fonction  $f$  est nulle, on dit que l’équation est homogène.

On dit que l’EDP (3.2.2.1) est linéaire si  $F$  est linéaire par rapport à tous ses arguments (dans ce cas l’ensemble des solutions de l’équation homogène associée est un espace vectoriel, c’est la raison de l’application «linéaire»). Elle est dite nonlinéaire si elle n’est pas linéaire.

## 3.3 Classification des équations différentielles du premier ordre

Après avoir donné un aperçu des fondements de la théorie des équations différentielles, nous allons passer à la recherche des solutions de ces équations différentielles du premier ordre.

Il n'y a pas de méthode générale pour recherche des solutions. Tout dépend du type de l'équation.

Il faut donc les classer. On considère trois grandes classes principales d'équations du premier ordre:

- équations dont on peut séparer les variables;
- équations homogènes (où les termes sont du même degré);
- équations linéaires où  $y$  et  $y'$  sont au premier degré.

Ces trois types seront les plus utiles, car on les rencontre constamment en Physique, en Mécanique, en Thermodynamique, en Électricité, etc.

En dehors de ces types généraux, nous étudierons un certain nombre de types spéciaux comme les équations de Bernoulli, de Ricatti, de Clairaut et de Lagrange.

**Équation de Bernoulli:**

Ce sont des équations non linéaires du premier ordre qui peuvent se ramener facilement à une équation linéaire.

Elles sont de la forme

$$\alpha(x)y' + b(x)y + c(x)y^m = 0. \tag{3.3.2}$$

Les fonctions  $\alpha(x)$ ,  $b(x)$ , et  $c(x)$  sont continues sur un intervalle  $I$  et  $m$  est un exposant réel différent de 1.

En divisant **(3.3.2)** par  $y^m$ , ( $y \neq 0$ ), nous avons

$$\alpha(x) \frac{y'}{y^m} + \frac{b(x)}{y^{m-1}} = -c(x).$$

Effectuons le changement de fonctions

$$z = \frac{1}{y^{m-1}} \quad \text{et} \quad z' = -\frac{(m-1)y'}{y^m},$$

on obtient l'équation linéaire en  $z'$  et  $z$

$$\frac{\alpha(x)}{1-m} z' + b(x)z = -c(x).$$

Trouver la solution générale de

$$y' - 2xy + xy^2 = 0,$$

pour  $-\infty < x < +\infty$ . Divisons par  $y^2$ , avec  $y \neq 0$ , on a

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} + x = 0.$$

Posons  $\frac{1}{y} = u$ , il vient

$$-u'' - 2xu + x = 0.$$

L'équation homogène,

$$-u' - 2xu = 0$$

a pour solution générale

$$u = \kappa e^{-x^2}.$$

La solution particulière est évidente,  $u = \frac{1}{2}$ .

Par suite la solution générale en  $u$  est

$$u = \frac{1}{2} + \kappa e^{-x^2}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2} + \kappa e^{-x^2}}, \quad \text{pour } -\infty < x < +\infty.$$

### Équation de Ricatti:

Ce sont des équations de Bernoulli avec  $m = 2$  et second membre, soit des équations de la forme

$$\alpha(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = d(x),$$

Les fonctions  $\alpha(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  et  $d(x)$  étant continues sur un intervalle  $I$ .

La méthode de résolution d'une telle équation nécessite *la connaissance d'une solution particulière*.

Soit  $y_0$  cette solution particulière. On a

$$\alpha(x)y_0' + b(x)y_0 + c(x)y_0^2 = d(x).$$

### Équation de Lagrange:

C'est une équation linéaire en  $x$  et  $y$ , soit

$$y + \alpha(y')x + b(y') = 0. \tag{3.3.3}$$

On pose

$$y'(x) = s = \frac{dy}{dx}.$$

L'équation (3.3.3) s'écrit

$$\begin{aligned} y + \alpha(s)x + b(s) &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= s. \end{aligned}$$

En dérivant la première relation par rapport à  $x$ , nous avons

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha(s) - x\alpha'(s) \frac{ds}{dx} - b'(s) \frac{ds}{dx} = s,$$

soit

$$s + \alpha(s) + \left[ x\alpha'(s) + b'(s) \right] \frac{ds}{dx} = 0,$$

c'est -à-dire

$$[\alpha(s) + s] \frac{dx}{ds} + x\alpha'(s) + b'(s) = 0.$$

Si  $\alpha(s) \neq -s$  cette équation est linéaire en  $x$  et  $\frac{dx}{ds}$ .

On obtient d'une manière générale

$$x = \kappa z_1(s) + x_1(s),$$

avec

$$y = -\alpha(s)x - b(s).$$

La famille de courbes est donnée sous forme paramétrique.

Si  $\alpha(s) = -s$  on a l'équation de Clairaut.

### Équation de Clairaut

On appelle équation de Clairaut toute équation de Lagrange avec  $f \equiv Id$  (où  $Id$  est la fonction identité, c'est à dire  $Id(y) = y$ ), autrement dit elle est de la forme

$$y = xy' + g(y'),$$

où  $g$  est définie, dérivable sur un certain intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ .

### 3.4 Le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy (aussi appelé problème aux valeurs initiales) consiste à trouver la solution d'une EDO, scalaire ou vectorielle, satisfaisant des conditions initiales. Par exemple, dans le cas scalaire, si  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant le point  $x_0$ , le problème de Cauchy associé à une EDO du premier ordre s'écrit:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in I \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Où  $f(x, y)$  est une fonction donnée à valeur réelle définie sur le produit  $S = I \times ]-\infty, +\infty[$  et continue par rapport aux deux variables. Si  $f$  ne dépend pas explicitement de  $x$  (i.e.  $f(x, y) = f(y)$ ), l'équation différentielle est dite autonome.

On obtient en intégrant (3.4.1) entre  $x_0$  et  $x$

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.4.2)$$

La solution de (3.4.1) est donc de classe  $C^1$  sur  $I$  et satisfait l'équation intégrale (3.4.2). Inversement, si  $y$  est définie par (3.4.1), alors elle est continue sur  $I$  et  $y(x_0) = y_0$ . De plus, en tant que primitive de la fonction continue  $f(\cdot, y(\cdot))$ ,  $y \in C^1(I)$  et satisfait l'équation différentielle  $y'(x) = f(x, y(x))$ .

Ainsi, si  $f$  est continue, le problème de Cauchy (3.4.1) est équivalent à l'équation intégrale (3.4.2). Nous verrons plus loin comment tirer parti de cette équivalence pour les méthodes numériques.

Rappelons maintenant deux résultats d'existence et d'unicité pour (3.4.1).

**1. Existence locale et unicité:** On suppose  $f(x, y)$  localement Lipschitzienne en  $(x_0, y_0)$  par rapport à  $y$ , ce qui signifie qu'il existe une boule ouverte  $J \subseteq I$  centrée en  $x_0$  de rayon  $r_J$ , une boule ouverte  $\Sigma$  centrée en  $y_0$  de rayon  $r_\Sigma$  et une constante  $L > 0$  telles que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall x \in J, \forall y_1, y_2 \in \Sigma \quad (3.4.3)$$

Sous cette hypothèse, le problème de Cauchy (3.4.1) admet une unique solution dans une boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r_0$  avec  $0 < r_0 < \min(r_J, r_\Sigma/M, 1/L)$ ,

où  $M$  est le maximum de  $|f(x, y)|$  sur  $J \times \Sigma$ .

Cette solution est appelée solution locale.

Remarquer que la condition (3.4.3) est automatiquement vérifiée si la dérivée de  $f$  par rapport à  $y$  est continue: en effet, dans ce cas, il suffit de prendre pour  $L$  le maximum de  $|\partial f(x, y) / \partial y|$  sur  $\overline{J \times \Sigma}$ .

**2. Existence globale et unicité:** Le problème de Cauchy admet une solution globale unique si on peut prendre dans (3.4.3)

$$J = I, \quad \Sigma = \mathbb{R},$$

C'est-à-dire, si  $f$  est uniformément Lipschitzienne par rapport à  $y$ .

En vue de l'analyse de stabilité du problème de Cauchy, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) + \delta(x), & x \in I \\ z(x_0) = y_0 + \delta_0, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Où  $\delta_0 \in \mathbb{R}$  et où  $\delta$  une fonction continue sur  $I$ .

Le problème (3.5.1) est déduit de (3.4.1) en perturbant la donnée initiale  $y_0$  et la fonction  $f$ . Caractérisons à présent la sensibilité de la solution  $z$  par rapport à cas perturbations.

## 3.5 La relation entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

Réduction d'une équation différentielle à une équation intégrale. Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale.

### 3.5.1 Équation intégrale

**Définition 3.5.1** On appelle équation intégrale toute équation de la forme

$$\int_E K(x, y, \varphi(y)) dy = \lambda \varphi(x) + f(x) \quad (3.5.1.1)$$

où  $E$  est un espace mesuré,  $f(x)$  une fonction mesurable donnée sur  $E$ ,  $\lambda$  un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et  $K(x, y, \varphi(y))$  une fonction mesurable  $E \times E$  appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction  $\varphi$  qui satisfait l'équation (3.5.1.1).

**Définition 3.5.2** On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x).$$

à coefficient continue  $a_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}.$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y &= F(x), \\ y(0) &= c_0, \quad y'(0) = c_1. \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x).$$

D'où, vu les conditions initiales, on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + c_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + c_1 x + c_0.$$

Nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x f(x) dx}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz.$$

Compte tenu de mettons l'équation différentielle sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t) dt + c_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x-t)\varphi(t) dt + c_1 x a_2(x) + c_0 a_2(x) = F(x).$$

ou

$$\varphi(x) + \int_0^x \left[ a_1(x) + a_2(x)(x-t) \right] \varphi(t) dt = F(x) - c_1 a_1(x) - c_2 x a_2(x) - c_0 a_2(x).$$

Posant

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) \varphi(t) dt.$$

i.e. Nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

**Exemple 3.5.1** Soit l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0,$$

et aux conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Posons

$$y'' = \varphi(x),$$

Alors

$$y' = \int_0^x \varphi(t) dt + y'(0) \implies y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + 1,$$

portons dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x \varphi(t) dt + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + 1 = 0$$

ou

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t) \varphi(t) dt.$$

**Remarque 3.5.1** 1. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(x, y(x)), & x \geq 0 \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

qui peut être converti à l'équation intégrale non linéaire

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t)) dt. \quad (3.5.2)$$

2. Les propriétés de l'équation (3.5.1), comme l'existence et l'unicité de la solution sont équivalentes aux propriétés de l'équation (3.5.2).

# Chapitre 4

## QUELQUES APPLICATIONS DES THEOREMES DU POINT FIXE AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES

### 4.0.2 Introduction

On applique dans cette partie les théorèmes cités ci-dessus au problème de Cauchy: étant données une condition initiale  $(x_0, y_0)$  et une équation différentielle  $\frac{d}{dx}y = f(x, y)$ , existe-il une solution, et est-elle unique? Les réponses à ces questions sont données par le théorème de Cauchy-Lipschitz (si  $f$  est localement Lipschitzienne) et de Cauchy-Arzela (si  $f$  est seulement continue). On retrouve que ces comportements différents résultent des différences entre les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder.

Une autre application du théorème de Picard est la démonstration du théorème d'Inversion Locale. En effet, on montre qu'une certaine fonction est une bijection en utilisant le théorème de Picard pour montrer l'existence (surjectivité) et l'unicité (injectivité) d'un point fixe. Dans ce Cas, il était possible de construire une contraction; par contre, on ne pourrait pas appliquer le théorème de Schauder car on a besoin de l'unicité.

Maintenant on va présenter quelques applications du principe du théorèmes de Picard et Schauder.

### 4.0.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Ce théorème est une application du théorème (Picard). En effet, nous verrons qu'une façon de le démontrer est d'appliquer le théorème précédent avec  $E$  un ensemble de fonction et  $\varphi$  une application bien choisie.

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue. On introduit le problème de Cauchy (C) suivant:

Etant donné  $(x_0, y_0) \in U$ , Trouver une solution  $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$  de l'équation différentielle (E)  $y' = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in U$  telle que  $x_0 \in I$  et  $y(x_0) = y_0$ .

**Définition 4.0.3** Soient  $T > 0$  et  $r_0 > 0$ , on dit que  $C = [x_0 - T, x_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$  est un cylindre de sécurité pour (C) si toute solution  $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$  du problème de Cauchy  $y(x_0) = y_0$  avec  $I \subset [x_0 - T, x_0 + T]$  reste continue dans  $B_f(y_0, r_0)$ .

**Définition 4.0.4**  $f$  est **localement Lipschitzienne** par rapport à la variable  $y$  sur  $U$  si  $\forall (r_0, y_0) \in U$ , il existe un voisinage  $V$  de  $(r_0, y_0)$  dans  $U$ , et une constante  $k = k(V)$  telle que  $\forall (x, y_1, y_2) \in V$ , on ait

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

**Théorème 4.0.1** (Cauchy-Lipschitz). Si  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$  est continue et localement Lipschitzienne par rapport à  $y$  sur  $U$ , alors pour tout cylindre de sécurité  $C = [x_0 - T, x_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ , le problème de Cauchy admet une unique solution  $y : [x_0 - T, x_0 + T] \longrightarrow U$ . De plus, si on pose  $\Phi(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que la suite itérée  $\Phi^p(z)$  converge uniformément vers la solution exacte.

**Démonstration:** On commence par construire un cylindre de sécurité pour (C).

soit  $V$  un voisinage de  $(x_0, y_0)$  sur lequel  $f$  est  $k$ -Lipschitzienne par rapport à  $y$ , et soient  $T_0 > 0$  et  $C_0 = [x_0 - T_0, x_0 + T_0] \times B_f(y_0, r_0) \subset V$  cylindre.

$C_0$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^{m+1}$  donc compact, et on en déduit alors que  $f$  est bornée sur  $C_0$ .

Soit  $M = \sup_{(x,y) \in C_0} \|f(x, y)\|$ . On pose  $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$ .

On va montrer que  $C = [x_0 - T, x_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$  est un cylindre de sécurité pour (C).

4. QUELQUES APPLICATIONS DES THEOREMES DU POINT FIXE AUX  
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

---

Soit  $y : I \subset [x_0 - T_0, x_0 + T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $y(x_0) = y_0$  et  $y' = f(x, y)$ ,  $\forall x \in I$ .  
Supposons qu'il existe  $\tau \in [x_0, x_0 + T]$  tel que  $y(\tau)$  n'appartient pas à  $B_f(y_0, r_0)$ . De plus,  
supposons que  $J = \{x \in [x_0, x_0 + T] : y(x) \notin B_f(y_0, r_0)\}$  soit non vide.

On pose  $\tau = \inf J$ . Alors  $\forall x \in [x_0, \tau]$  on a  $y(x) \in B_f(y_0, r_0)$ , et de plus  $d(y_0, y(\tau)) = r_0$ .  
Comme  $(x, y(x)) \in C_0$ ,  $\forall x \in [x_0, \tau]$  et  $y' = f(x, y)$  on a, par le théorème des Accroissements  
finis,

$$r_0 = \|y_0 - y(\tau)\| = \|y(x_0) - y(\tau)\| \leq |x_0 - \tau| \sup_{x \in [x_0, \tau]} |y'(x)| < M, \quad T \leq r_0.$$

donc par passage à la limite ( $B_f(y_0, r_0)$  étant fermé) on a  $y(x) \in B_f(y_0, r_0) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + T] \cap I$ .

De même on montre que  $y(x) \in B_f(y_0, r_0) \quad \forall x \in I$ .

Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. On remarque que par construction on a  $\sup_C |f| = M$  et  $f$  est  $k$ -Lipschitzienne par rapport à  $y$  sur  $C$ . On note  $F = C^0([x_0 - T, x_0 + T])$ ,  $B_f(y_0, r_0)$  muni de la distance  $d = \|\cdot\|_\infty$ .

$\forall y \in F$  on associe  $\Phi(y)$  définie par:

$$\Phi(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du$$

On montre d'abord l'équivalence suivante:

$$y \text{ est solution de } (E) \iff y \text{ est un point fixe de } \Phi :$$

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $y$  est un point fixe de  $\Phi$ . Alors  $\forall y \in F$  on a  $\Phi(y) = y$  d'où  
 $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du$ .

Or  $f$  est continue sur  $U$  donc  $y$  est continue sur  $U$ . De plus,  $y$  est dérivable sur  $[T_0 - x, T_0 + x]$  et sa dérivée égale  $f(x, y(x))$ , i.e.

$y'(x) = f(x, y(x))$ . On a aussi  $y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(u, y(u)) du = y_0$ . Donc  $f$  est solution  
du problème de Cauchy ( $C$ ).

$\Rightarrow$ ) Supposons maintenant que  $y$  est solution de ( $E$ ). on a alors  $y'(x) = f(x, y(x))$  et  
 $y(x_0) = y_0$ .

On peut intégrer  $y'$  par rapport à  $u$  car  $y'(u) = f(u, y(u))$  et  $u \mapsto f(u, y(u))$  est continue sur un segment et donc intégrable sur ce même segment. Alors on obtient:

$$\int_{x_0}^x y'(u) du = \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du = [y(u)]_{u=x_0}^{u=x} = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0.$$

Donc, on a bien  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du = \Phi(y)(x)$  et donc  $y$  est point fixe de  $\Phi$ . On veut appliquer le théorème de point fixe à  $\Phi^p$  (pour  $p$  bien choisi).

1. On montre d'abord que  $\Phi$  est une application de  $F$  dans  $F$ . Pour cela on montre que  $\Phi(y)(x) \in B_f(y_0, r_0) \quad \forall x \in [x_0 - T, x_0 + T]$ . Soit  $y \in F$ . On remarque que si  $x \in [x_0 - T, x_0 + T]$ ,

$$\begin{aligned} \|\Phi(y)(x) - y\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du \right\| \\ &\leq \int_{x_0}^x \|f(u, y(u))\| du \\ &\leq M \int_{x_0}^x du \\ &\leq M|x - x_0| \\ &\leq M.T \leq r_0 \end{aligned}$$

Donc  $\forall x \in [x_0 - T, x_0 + T]$ ,  $\Phi(y)(x) \in B_f(y_0, r_0)$  d'où  $\Phi(y) \in F$  et on a évidemment la stabilité de  $F$  par  $\Phi^p$ .

2. On montre maintenant que  $\Phi^p$  est contractante. Soient  $y, z \in F$ . On note  $y_p = \Phi^p(y)$  et  $z_p = \Phi^p(z)$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ . Par récurrence sur  $p$  on montre qu'on a:

$$\|y_p(x) - z_p(x)\| \leq k^p \frac{|x - x_0|}{p!} d(y, z) \tag{4.3}$$

Initialisation: C'est évident dans le cas  $p = 0$ .

Généralisation: Supposons que pour un certain entier  $p$  quelconque mais fixé on ait (4.3).

Alors

$$\begin{aligned}
 \|y_{p+1}(x) - z_{p+1}(x)\| &\leq \left| \int_{x_0}^x k \|y_p(u) - z_p(u)\| du \right| \\
 &\leq \left| \int_{x_0}^x k \cdot k^p \frac{|u-x_0|^p}{p!} d(y, z) du \right| \text{ par (4.3)} \\
 &\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) \left| \int_{x_0}^x |u-x_0|^p du \right| \\
 &= \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) \left[ \frac{|u-x_0|^{p+1}}{p+1} \right]_{u=x_0}^{u=x} = k^{p+1} \frac{|x-x_0|^{p+1}}{(p+1)!} d(y, z)
 \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

Comme  $|x - x_0| \leq T$ . On a  $d(y_p, z_p(x)) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(y, z)$ , donc  $\Phi$  est Lipschitzienne de rapport  $k^p \frac{T^p}{p!}$ . Et il existe un  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$  (car  $\lim_{p \rightarrow +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$ ). Donc, pour  $q \geq p$ ,  $\Phi^q$  est contractante.

3. Complétude de  $F$ .

On déduit du théorème de Picard que  $\Phi^q$  admet un unique point fixe  $y$ . De plus  $\Phi^q(\Phi(y)) = \Phi(\Phi^q(y)) = \Phi(y)$  donc  $\Phi(y)$  est un point fixe de  $\Phi^q$ , et par unicité du point fixe de  $\Phi^q$  on a  $\Phi(y) = y$ . Comme les points fixes de  $\Phi$  sont des points fixes de  $\Phi^q$  on en déduit que  $y$  est l'unique point fixe de  $\Phi$ .

Finalement,  $y$  est l'unique solution de  $(E)$ .

#### 4.0.4 Théorème de Cauchy-Arzela

On reprend maintenant le problème de Cauchy pour l'équation  $y' = F(x, y(x))$ , mais ici on ne sait pas si  $F$  est Lipschitzienne. Le théorème de Schauder nous donnera l'existence d'une solution, mais pas nécessairement l'unicité.

**Théorème 4.0.2** (*Cauchy-Arzela*). *Soient:*

- $E$  un espace normé de dimension finie ,
- $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$ ,
- $F$  une fonction continue de  $U$  dans  $E$ , et
- $(x_0, y_0)$  un point de  $U$

Alors l'équation différentielle  $y' = F(x, y)$  a une solution au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , i.e. il existe un nombre  $\rho > 0$  et une fonction  $f : [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \longrightarrow E$  de classe  $C^1$  avec  $f(x_0) = y_0$ , telle que pour tout  $x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ ,

1.  $(x, f(x)) \in U$
2.  $f'(x) = F(x, f(x))$

**Démonstration:** Soit  $M > \|F(x_0, y_0)\|$ . Quitte à remplacer  $U$  par l'ensemble ouvert  $\{(x, y) \in U : \|F(x, y)\| < M\}$ . On peut supposer que  $F$  est majorée en norme par  $M$  sur  $U$ .

Il existe donc  $r > 0$  et  $h > 0$  tels que  $U \supset [x_0 - h, x_0 + h] \times B_f(y_0, r)$ , et on choisit  $\rho = \min\left(h, \frac{r}{M}\right) > 0$ .

On considère l'ensemble  $K$  des fonctions  $M$ -Lipschitziennes de l'intervalle  $J = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$  dans  $E$  qui valent  $y_0$  en  $x_0$ , que l'on munit de la norme uniforme. Si  $f$  et  $g$  sont dans  $K$  et  $s \in [0, 1]$ , alors  $sf + (1-s)g \in K$ , donc  $K$  est convexe. Si  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $K$  pour la norme uniforme, alors d'après le théorème 7 il existe une fonction continue  $f : J \longrightarrow E$  telle que  $f_i$  converge uniformément vers  $f$ .

On a alors  $f(x_0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_i(x_0) = y_0$  et  $\forall x, x' \in J, \|f(x) - f(x')\| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \|f_i(x) - f_i(x')\| \leq M|x - x'|$ , et donc  $f \in K$ . On en déduit que  $K$  est fermé pour la norme uniforme dans  $C^0(J, E)$ .

De plus, pour tout  $x \in J$  et tout  $f \in K$ , on a

$$\|f(x) - y_0\| = \|f(x) - f(x_0)\| \leq M|x - x_0| \leq M\rho \leq r.$$

Ci qui montre que  $K(x) = \{f(x) : f \in K\}$  est contenu dans la boule  $B_f(y_0, r)$ , et donc  $K(x)$  est relativement compact. Et puisque  $K$  est uniformément équicontinu,  $K$  est compact.

On peut alors définir une application  $\Phi : K \longrightarrow C^1(J, E)$ , en posant

$$\Phi(f)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(s, f(s)) ds$$

En effet, si  $f \in K$ , alors  $f(s) \in B_f(y_0, r)$  pour tout  $s \in J$ , ce qui montre que la fonction  $s \longmapsto F(s, f(s))$  est bien définie et continue sur  $J$ , à valeurs dans  $E$ , et possède une primitive  $\Phi(f)$  de classe  $C^1$ , valent  $y_0$  en  $x_0$ . Puisque la fonction  $g := \Phi(f)$  vérifie

$g'(x) = F(x, f(x))$ , on a que  $\|g'(x)\| \leq M$ , c'est-à-dire que  $g$  est  $M$ -Lipschitzienne sur  $J$ . De plus,  $g(x_0) = y_0$ . Donc,  $\Phi(K) \subset K$ . Enfin, comme  $F$  est uniformément continue sur le compact  $J \times B_f(y_0, r)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $(s, y)$  et  $(s', y')$  appartenant à  $J \times B_f(y_0, r)$ , on ait

$$\max\left(\left|s - s'\right|, \left\|y - y'\right\|\right) < \delta \Rightarrow \left\|F(s, y) - F(s', y')\right\| < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Alors, si  $f$  et  $f_1$  appartiennent à  $K$  et si  $\|f - f_1\| < \delta$ , on a  $\forall s \in J, \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| < \frac{\varepsilon}{\rho}$ .

Donc,

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)(x) - \Phi(f_1)(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x [F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))] ds \right\| \\ &\leq |x - x_0| \sup_{s \in J} \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| \\ &\leq \rho \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in J$ . Ceci montre que  $\|\Phi(f) - \Phi(f_1)\| \leq \varepsilon$ , i.e.  $\Phi : K \longrightarrow K$  est une application continue. Donc, d'après le théorème de Schauder, il existe un point fixe  $f \in K$  de  $\Phi$ , c'est-à-dire que  $f$  est une solution au problème de Cauchy.

### 4.0.5 Théorème d'Inversion Locale

Ici encore ce théorème est une application du théorème (Picard) qu'on appliquera à une certaine fonction dans une partie de la démonstration.

**Théorème 4.0.3** (*Inversion Locale*). *Soient:*

- $E, F$  deux espaces de Banach
- $U \subset E$  ouvert
- $f : U \longrightarrow F$  une application de classe  $C^1$
- $\alpha \in U$  tel que  $df_\alpha$  soit continue et inversible (et donc  $df_\alpha^{-1}$  est continue)

Alors, il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $\alpha$  et un voisinage ouvert  $W$  de  $f(\alpha)$  tels que:

1. La restriction  $f|_V$  de  $f$  à  $V$  est une bijection de  $V$  sur  $W$ .
2. L'application inverse  $g : W \longrightarrow V$  est continue.
3.  $g$  est de classe  $C^1$  et  $\forall x \in W, dg_{f(x)} = df_x^{-1}$ .

**Démonstration:** On munit  $\mathcal{L}_c(E, F)$  de la norme  $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ . Quitte à remplacer  $f$  par la fonction  $x \mapsto df_z^{-1}[f(\alpha + x) - f(\alpha)]$ , on peut se remanier au cas où  $\alpha = 0$ ,  $f(\alpha) = 0$ , et  $df_0 = df_\alpha = Id_E$  (et donc  $E = F$ ).

Comme  $f$  est de classe  $C^1$ , il existe  $r > 0$  tel que

$$B(0, r) \subset U \text{ et } \|df_z - df_0\| = \|df_z - Id_E\| \leq \frac{1}{2}$$

Pour tout  $x \in B(0, r)$ . On désigne  $u := Id_E - df_x$ , donc  $df_x = Id_E - u$  avec  $\|u\| \leq \frac{1}{2}$ . Alors,  $df_x$  est un isomorphisme bicontinuu qui, vérifie  $df_x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ , et donc

$$\|df_x^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u\|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 2.$$

1. On va montrer que la restriction de  $f$  à un voisinage ouvert de 0 dans  $B(0, r)$  est une bijection sur  $B(0, \frac{r}{2})$ .

Soit  $y \in B(0, \frac{r}{2})$ . On considère la fonction  $h$  :

$$\begin{aligned} h : B_f(0, r) &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto y + x - f(x) \end{aligned}$$

Il est clair que  $h$  est de classe  $C^1$ , de plus,  $\forall x \in B(0, r)$ ,  $\|dh_x\| = \|Id_E - df_x\| \leq \frac{1}{2}$ . Donc, d'après le théorème des Accroissements Finis,

$$\forall x, x' \in B_f(0, r), \quad \|h(x) - h(x')\| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\| \dots (1)$$

En particulier, pour  $x' = 0$ , on a  $\|x - f(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leq \frac{1}{2} \|x\|$ , donc

$$\forall x \in B(0, r), \|h(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2} \|x\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Ainsi,  $h$  est une fonction de  $B_f(0, r)$  dans  $B(0, r) \subset B(0, 1)$ .

Comme de plus  $h$  est  $\frac{1}{2}$ -Lipschitzienne d'après (1), d'après le théorème (Picard),  $\exists! x \in B_f(0, r)$  tel que  $h(x) = x$ , c'est-à-dire tel que  $f(x) = y$ . Comme  $x = h(x)$  et que  $h$  est à valeurs dans  $B(0, r)$ , on en déduit que  $x \in B(0, r)$ .

Alors, pour tout  $y \in B_f(0, \frac{r}{2})$ ,  $\exists! x \in B(0, r)$  tel que  $f(x) = y$ . On définit  $V := f^{-1}(B(0, r)) \cap B(0, r)$ .  $V$  est un voisinage de 0 car  $f(0) = 0$  et  $f$  est continue sur  $B(0, r)$ . En notant  $W := B(0, r)$ , on a alors  $f|_V : V \longrightarrow W$  est une bijection.

2. On note  $g : W \longrightarrow V$  l'application inverse. On utilise de nouveau  $h$ , cette fois-ci avec  $y = 0$ , et donc  $\forall x \in U, x = h(x) + f(x)$ . Alors,  $\forall x, x' \in B(0, r)$ ,

$$\|x - x'\| \leq \|h(x) - h(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|.$$

Donc,  $\|x - x'\| \leq 2 \|f(x) - f(x')\|$ . On en déduit que

$$\forall y, y' \in W, \|g(y) - g(y')\| \leq 2 \|f(g(x)) - f(g(x'))\| = 2 \|y - y'\| \dots (2)$$

$g$  est donc Lipschitzienne et par conséquent continue.

3. On fixe  $x \in V$  et on pose  $y = f(x) \in W$ . Il existe  $r' > 0$  tel que  $B(y, r') \subset W$ , et pour tout  $\omega \in B(0, r)$ , on pose  $v = g(y + \omega) - g(y)$ . Donc, d'après (2),  $\|v\| \leq 2 \|\omega\|$ , et

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= g(y + \omega) - g(y) - df_x^{-1}(\omega) \\ &= v - df_x^{-1}[f(x + v) - f(x)] \\ &= -df_x^{-1}[f(x + v) - f(x) - df_x(v)]. \end{aligned}$$

Comme  $\|df_x^{-1}\| \leq 2$ , on obtient  $\|\Delta(\omega)\| \leq 2 \|f(x + v) - f(x) - df_x(v)\| = 2 \|v\| \varepsilon(v)$  avec  $\lim_{v \rightarrow 0} \varepsilon(v) = 0$ . Donc,

$$\|\Delta(\omega)\| \leq 4 \|\omega\| \varepsilon(g(y + \omega) - g(y)) = 4 \|\omega\| \varepsilon'(\omega).$$

Comme  $g$  est continue,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon'(\omega) = 0$ . Alors,  $\|\Delta(\omega)\| = o(\|\omega\|)$ . Donc,  $g$  est différentiable en  $y$  et  $dg_y = df_x^{-1}$ . Enfin, comme  $df_x^{-1}$  est continue (car  $f$  est de classe  $C^1$  et que  $L \in GL(E) \longmapsto L^{-1} \in GL(E)$  est continue), la fonction  $dg : y \longmapsto dg_y$  est continue. Ainsi,  $g$  est de classe  $C^1$ .

# Appendice A

## ANNEXE

Dans cette partie, on va résoudre les équations différentielles analytiquement et numériquement c'est-à-dire trouver une solution approchée à la solution exacte de cette équation.

### A.0.6 Résolution analytique des équations différentielles

#### Méthode de Taylor

La méthode de Taylor est basée sur la relation

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2!}y''(x)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x)h^3 + \dots + \frac{1}{m!}y^{(m)}(x)h^m + E(x,h)$$

où  $E$  est l'erreur de troncature due aux termes omis et qui s'écrit comme

$$E(x,h) = \frac{1}{(m+1)!}y^{(m+1)}(\xi)h^{m+1} \quad \text{pour } x < \xi < x+h.$$

Cette relation prédit  $E(x,h)$  à partir de  $y(x)$ , ainsi elle permet d'écrire une formule d'intégration numérique. En effet,  $y'(x) = \varphi(x, y(x))$  et l'on peut calculer  $y''(x)$  en itérant le processus  $(y'(x))' = (\varphi(x, y(x)))' = \partial_x \varphi(x, y(x)) + \partial_y \varphi(x, y(x)) \varphi(x, y(x))$  etc. Le dernier terme  $\frac{1}{m!}y^{(m)}(x)h^m$  indique l'ordre de la méthode et on peut approcher l'erreur de troncature par

$$E(x,h) \simeq \frac{h^m}{(m+1)!} (y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x)).$$

### A.0.7 Résolution numérique des équations différentielles

On va utiliser les méthodes suivantes pour résoudre numériquement les équations différentielles et comparer les différences pour cette méthode.

#### Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est de loin la méthode la plus simple de résolution numérique des équations différentielles ordinaires. Elle possède une belle interprétation géométrique et son emploi est facile.

#### Algorithme:

1. Étant donné un pas de temps  $h$ , une condition initiale  $(x_0, y_0)$  et un nombre maximal d'itération  $N$ .

2. Pour  $0 \leq n \leq N$  :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Écrire  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$

3. Arrêt  $\square$

#### Algorithme: Méthode d'Euler modifiée

1. Étant donné un pas de temps  $h$ , une condition initiale  $(x_0, y_0)$  et un nombre maximal d'itérations  $N$ .

2. Pour  $0 \leq n \leq N$  :

$$\hat{y} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}))$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Écrire  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$

3. Arrêt  $\square$

#### Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2)

Rappelons la méthode d'Euler

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

La méthode d'Euler permet ainsi de calculer  $y(x_n + h)$  en fonction  $y(x_n)$  et la dérivée en  $y(x_n)$ .

Cette méthode n'est pas symétrique par rapport à l'intervalle puisqu'il ne fait pas intervenir l'information sur la dérivée en fin l'intervalle, i.e.  $f(x_n, y(x_{n+1}))$  l'intervient pas.

La méthode Runge-Kutta est plus symétrique puisqu'elle revient à évaluer numériquement la dérivée au centre de l'intervalle. les équations de cette méthode sont:

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv hf(x_n, y(x_n)) \\ k_2 &\equiv hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y(x_n) + \frac{1}{2}k_1\right) \\ y(x_{n+1}) &= y(x_n) + k_2 + O(h^3). \end{aligned}$$

#### Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

La formule Runge-Kutta à l'ordre 4 est de loin la plus utilisée. Elle a une forme assez symétrique:

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv hf(x_n, y(x_n)) \\ k_2 &\equiv hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y(x_n) + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &\equiv hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y(x_n) + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &\equiv hf(x_n + h, y(x_n) + k_3) \\ y(x_{n+1}) &= y(x_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^3). \end{aligned}$$

### A.0.8 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

L'exemple suivant qui représente et appliqué l'exemple (3.2.1)

**Exemple A.0.2** Soit l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 + y(x) \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

avec la solution exacte est donnée par

$$y(x) = \exp(x) - 1$$

x	exacte	erreur (Euler)	erreur (Runge-Kutta 2)	erreur (Runge-Kutta 4)
0	0	0	0	0
0.1	0,1052	0.0052	0.0002	0
0.2	0,2214	0.0114	0.0004	0
0.3	0,3499	0.0189	0.0007	0
0.4	0,4918	0.0277	0.0009	0
0.5	0,6487	0.0382	0.0013	0
0.6	0,8221	0.0505	0.0017	0
0.7	1,0138	0.0651	0.0022	0
0.8	1,2255	0.0819	0.0027	0
0.9	1,4596	0.1017	0.0034	0
1	1,7183	0.1246	0.0042	0

Tableau 01

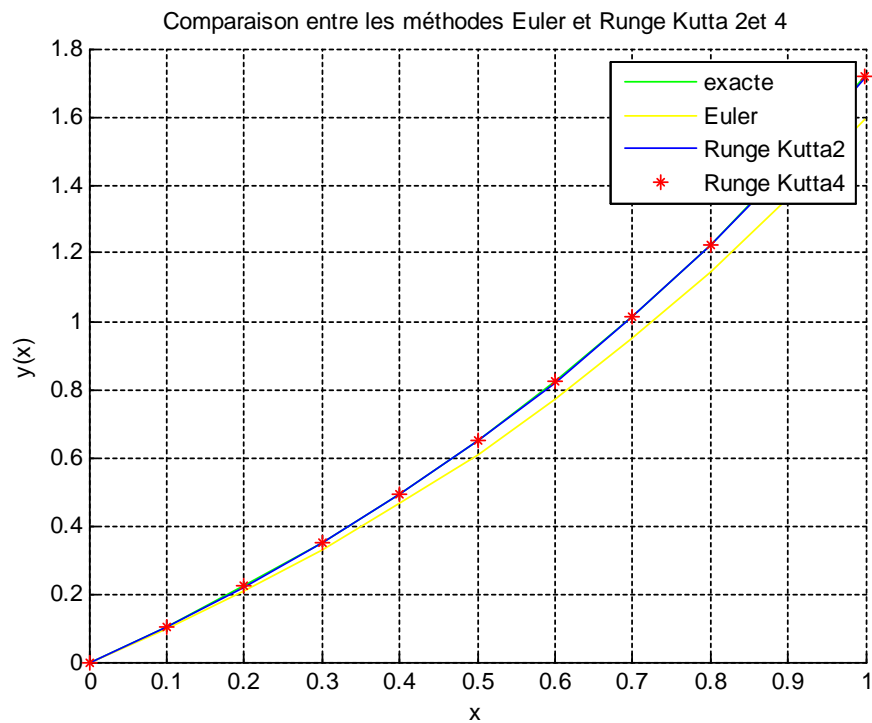


Figure 01

**Exemple A.0.3** Soit l'équation différentielle

$$\begin{aligned}y' &= (\cos(y))^2 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

avec la solution exacte est donné par

$$y(x) = \tan^{-1}(x).$$

x	exacte	erreur (Euler)	erreur (Runge-Kutta 2)	erreur(Runge-Kutta 4)
0	0	0	0	0
0.1	0.1974	0.0026	0.0006	0
0.2	0.3805	0.0116	0.0007	0
0.3	0.5404	0.0225	0.0002	0
0.4	0.6747	0.0312	0.0005	0
0.5	0.7854	0.0364	0.0012	0
0.6	0.8761	0.0384	0.0017	0
0.7	0.9505	0.0385	0.0018	0
0.8	1.0122	0.0372	0.0019	0
0.9	1.0637	0.0353	0.0019	0
1	1.1071	0.0332	0.0018	0

Tableau 02

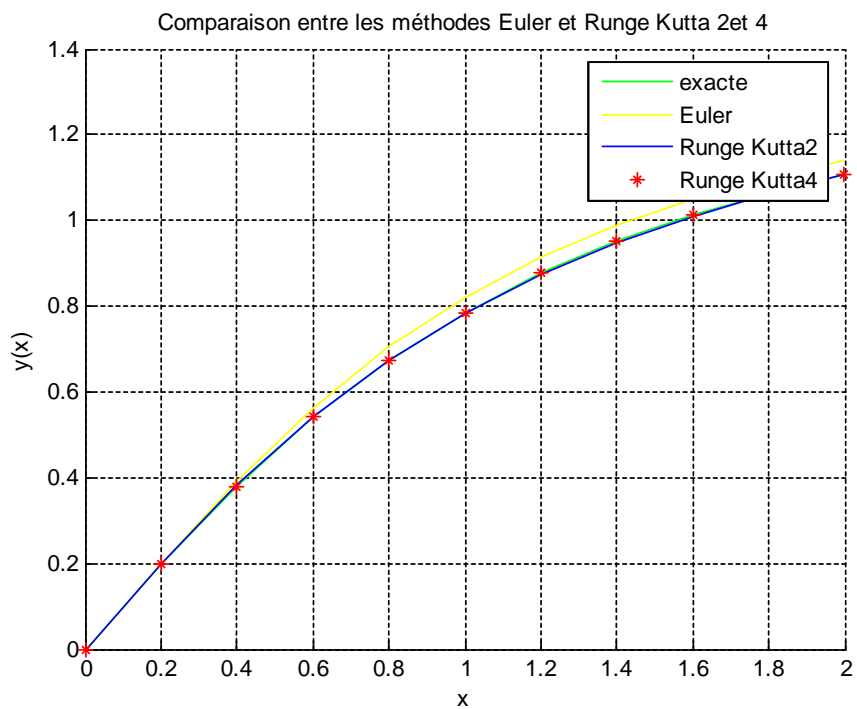


Figure 02

**Exemple A.0.4** Soit l'équation différentielle

$$y' = \frac{10}{(1+x^2)} - 2y^2$$

$$y(0) = 0$$

avec la solution exacte donnée par

$$y(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$$

x	exacte	erreur (Euler)	erreur (Euler modifié)
0	0	0	0
0.1	0.0990	0.001	0.0005
0.2	0.1923	0.0047	0.001
0.3	0.2752	0.0102	0.0015
0.4	0.3448	0.0161	0.0019
0.5	0.4000	0.021	0.003
0.6	0.4412	0.0244	0.0023
0.7	0.4698	0.0041	0.0023
0.8	0.4878	0.0259	0.0022
0.9	0.4972	0.0247	0.002
1	0.5000	0.0227	0.0019

Tableau 03

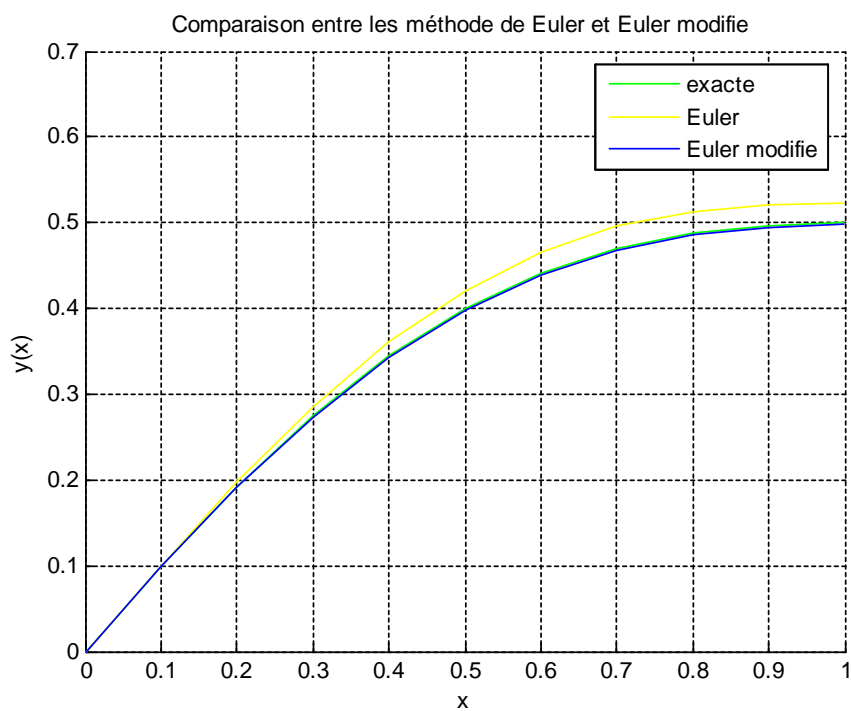


Figure 03

**Exemple A.0.5** Soit l'équation différentielle

$$\begin{aligned}y' &= -y^2 \\ y(1) &= 1\end{aligned}$$

avec la solution exacte donnée par

$$y(x) = \frac{1}{x}$$

x	exacte	erreur (Euler)	erreur (Euler modifié)
1	1.0000	0	0
1.1	0.9091	0.0091	0.0004
1.2	0.8333	0.0143	0.0007
1.3	0.7692	0.0173	0.0008
1.4	0.7143	0.0189	0.0008
1.5	0.6667	0.0197	0.00005
1.6	0.6250	0.0198	0.0008
1.7	0.5882	0.0197	0.0008
1.8	0.5556	0.0194	0.0007
1.9	0.5263	0.0188	0.001
2	0.5000	0.0183	0.0007

Tableau 04

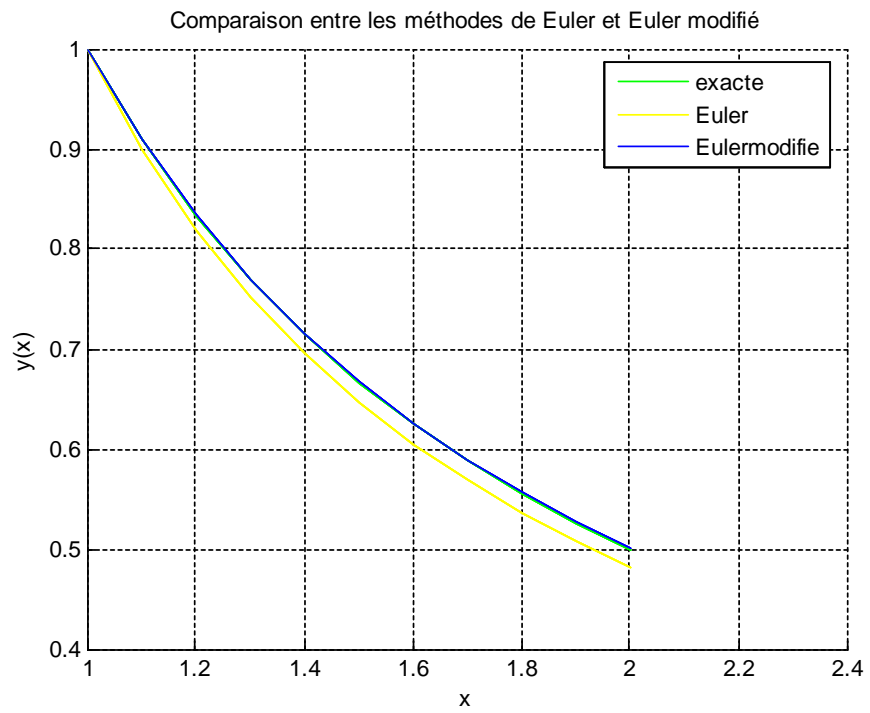


Figure 04

### **Conclusion générale**

Dans ce mémoire , on a étudié les théorèmes du point fixe et applications aux équations différentielles.

On a commencé par une introduction et généralités sur l'analyse fonctionnel et quelques notions de Topologie, puis on a traité deux théorèmes du point fixe celui de Picard, et Schauder dans les espaces des fonctions continues.

Après, on a rappelons les équations différentielles, et énoncer la relation avec l'équation intégrale de Volterra, dans addition, nous représenterons quelques théorèmes principes pour appliquée les deux théorèmes présidents sur les équations différentielles.

En fin, on a montrer quelques méthodes de résolution analytique et numérique, puis on a comparé entre les méthodes avec des exemples proposés.

# Bibliographie

- [1] **E. AUBRY** : Reppels de topologie pour la licence.
- [2] **A. AOUANE** : Conditions aux Bords et Conditions Intérieures en Théorie du Point Fixe, Mémoire de Magister, Département de Mathématiques ENS-Kouba, Alger, 27/06/2015.
- [3] **K. ATKINSON WEIMIN HAN** : Elementary Numerical Analysis, University of Iowa, May 2003.
- [4] **I. BELKHEIR** : Théorèmes du point fixe et ses applications, Mémoire, Université des sciences et de technologie d'Oran, Juin 2010.
- [5] **S. BRAIN** : Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles, Université de Provence, Institut Fresnel, Case 161 Faculté de St Jérôme, Merseille, France, Fevrier 2007.
- [6] **W. CHENEY** : Graduate Texts in Mathematics, Analysis for Applied Mathematics, University of Texas at Austin. Austin, TX 78712-1082, USA, 1929.
- [7] **G. FACCANOUNI**: Équations différentielles ordinaires, Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire, 2015-2016;
- [8] **P. FLORENT, G.LAUTON, M.LAUTON** : Outils et Modèles Mathématiques. Équations et Systèmes Différentiels, 1978.
- [9] **A. FORTIN** : Analyse numérique pour ingénieurs, Editions de l'école polytechnique de Montréal

- [10] **C. GILORMINI et G. HIRSCH** : Équation Différentielle. Université de Nancy I, 1975.
- [11] **M. GUESBA** : Sur Quelques Équations Intégrales non Linéaires, Mémoire de Magister, Université KASDI Merbah Ouargla, 04/07/2012.
- [12] **F. JEDRZEJEWSKI** : Introduction aux Méthodes Numériques pour Deuxième , p 172-259. **Springer**: Pris, Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, Londres, Milan, Tokyo.
- [13] **A. KHELLADI** : Introduction a l'analyse mathématique, EDITION : 1.01.4683, ISBN : 9961.0.0798.0, Office des Publications Universitaires, 1, Place centrale de Ben-Aknoun(Alger), 2004.
- [14] **A. KHIRANI** : Resolution des Équations Intégrales non Linéaires Type Volterra, Mémoire de Magister, Université Mohamed BOUDIAF de M'sila, 30/06/2011.
- [15] **C. MINAZZO- K.RIDER-E.AUBRY** : Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Équations Différentielles, Université de Nice-Sophia Antipolis, Mémoire de Master 1, 2006-2007.
- [16] **M. MOUSSAÏ** : Sur les Solutions des Équations Intégrales et Différentielles, Mémoire de Magister, Université Mohamed BOUDIAF de M'sila, 2009-2010.
- [17] **F. POUPAUD** : Analyse Fonctionnelle pour la Licence.
- [18] **L. PUJO-MENJOUET** : Équations différentielles ordinaires et partielles, Université Claude Bernard, Lyon I, 69622 villeurbanne cedex, France, 43, boulevard 11 novembre 1918.
- [19] **A. QUARTERONI, R. SACCO, F. SALERI** : Méthodes Numériques, Algorithmes, Analyse et Applications, Springer-Verlag Italia Via Decembrio 28, 20137 MILANO,ITALIA , p 143, 2007.
- [20] **Z. RICHARD** : Cours de topologie, Master 1, 2010-2011.

- [21] **SYLVIE-BENZONI-GAVAGE** : Calcul Différentiel et Équations Différentielles, Université Lyon 1, Dunod, Paris, 2010.

## Résumé

Les théorèmes du point fixe sont des outils très importants dans l'analyse fonctionnelle, on les utilise afin de démontrer l'existence des solutions des différents genres d'équations.

Le but de ce travail est de faire une étude large sur la théorie du point fixe et ses applications, en particulier ses applications aux équations différentielles.

**Mots clés** : Théorème de point fixe, équations différentielles.

## Abstract

Fixed-point theorems are very important tools in functional analysis, they are used to demonstrate the existence of solutions of different kinds of equations.

The aim of this work is to make a broad study of fixed point theory and its applications, in particular its applications to differential equations.

**Key words**: Fixed-point, differentials equations.

## ملخص

النظريات من نقطة ثابتة هي أدوات هامة جدا من التحليل الوظيفي، وتستخدم لإثبات وجود حلول من أنواع مختلفة من المعادلات.

والغرض من هذا العمل هو إجراء دراسة واسعة لنظرية النقطة الثابتة وتطبيقاتها، وخاصة وتطبيقاتها على المعادلات التفاضلية.

**الكلمات المفتاحية**: النقطة الثابتة، المعادلات التفاضلية.