



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Approximation des équations fractionnaires intégró-différentielles

Présentée par : *ZOUAD Nabil*

Soutenu publiquement le : 14/06/2023

Devant le jury composé de:

Mr. SELT Omar

Prof

Université de M'sila

Mr. DILMI Mustapha

M.C.B

Université de M'sila

Mr. LAKHAL Aissa

M.A.A

Université de M'sila

Président.

Encadreur.

Examineur.

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout «**Allah** » le tout puissant de me donner le courage, la sagesse et la force pour réaliser ce travail. Mes profonds remerciements pour mon encadreur Mr.DILMI Mustapha qui m'a permise de profiter de son inestimable expérience et qui m'a aidée et soutenue tout au long de mon chemin. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance au Dr.Abdelkrim merzougui, et à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation tout au long de ma carrière universitaire. Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail. Un grand merci à ma famille, notamment à mes parents et mes frères et sœurs pour leur amour, leurs encouragements et leurs conseils. Merci d'être toujours à mes côtés. Je ne peux clôturer mes remerciements sans adresser ma profonde gratitude à mes amies avec qui j'ai partagé les bons et les durs moments pendant la réalisation de ce travail, merci de m'encourager et de faire partie de ma vie.

Enfin, Merci à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

Je dedie ma mémoire a mes chers parents, source de vie, d'amour et d'affection.

A mon encadreur Dr. DILMI. Mustapha et tout mes enseignement de faculté de
Mathématique.

A tout mes amies.

المخلص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو تقديم طريقة عددية لتقريب حل المعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتب الكسرية، ويتم ذلك باستخدام كثيرات حدود برنشتاين، باستعمال طريقة كثيرات الحدود من نوع برنشتاين وتم تقديم أمثلة عددية للتحقق من فعالية الطريقة المقترحة، والحلول التقريبية تضمن الدقة المطلوبة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات الكسرية التفاضلية التكاملية، كثيرات حدود برنشتاين.

Abstract

The main objective of this thesis is to present a numerical method for approximating the solution of integro-differential fractional equations. This is done using Bernstein polynomials and the Bernstein polynomials method. Numerical examples have been provided to verify the effectiveness of the proposed method, and the approximate solutions ensure the required accuracy.

Keywords: - Fractional integro-differential equations, Bernstein polynomials, Bernstein polynomials method.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter une méthode numérique d'approximation de la solution d'équations fractionnaires intégrées-différentielles, et Ceci est fait en utilisant les polynômes de Bernstein, avec l'utilisation de la méthode de polynôme de Bernstein. Des exemples numériques ont été présentés pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée, et des solutions approximatives garantissent la précision requise.

Mots clés : équations fractionnaires intégrées-différentielles, polynômes de Bernstein, méthode de polynôme de Bernstein.

Table des matières

Liste des tableaux	1
Notations	2
Introduction	3
1 Calcul fractionnairel	4
1.1 rappels sur les espaces	4
1.2 Les fonctions de base	5
1.3 L'intégrale fractionnaire	8
1.4 Dérivées fractionnaires	10
2 Existence et unicité des solutions pour les équations F.I.D	14
2.1 Équations fractionnaires intégr-différentielles	14
2.2 L'existence de la solution de l'équations F.I.D	15
2.3 L'unicité de la solution de l'équations F.I.D	17
2.4 méthodes numériques et approchée pour résoudre des équations F.I.D	17
2.4.1 Méthode de collocation	17
2.4.2 La méthode des moindres carrés	20
2.4.3 La méthode de décomposition d'Adomian	23
3 Solution approchée des l'équations fractionnaires intégr-différentielles	27
3.1 Polynômes de Bernstein	27
3.2 Solution approchée de l'équation F.I.D en utilisant les polynômes de Bernstein	28

3.3 Application numérique	29
Conclusion	37
Bibliographie	39

Liste des tableaux

1	Solutions exactes et approximatives de l'équation F.I.D. Exemple 3.3.1.....	30
2	Solutions exactes et approximatives de l'équation de F.I.D. Exemple 3.3.2	32
3	Solutions exactes et approximatives de l'équation de F.I.D. Exemple 3.3.3.....	33
4	Solutions exactes et approximatives de l'équation de F.I.D. Exemple 3.3.4.....	35

Notations

$C([a, b])$	espace des fonctions continues sur $[a, b]$
f	terme libre dans l'équation intégrale
A	opérateur linéaire
I	opérateur identique
$\ \cdot \ $	norme
\int	signe intégrale
\langle , \rangle	le produit scalaire
T	opérateur compact
$\Gamma(\cdot)$	La fonction Gamma d'Euler.
$\beta(\cdot, \cdot)$	La fonction Bêta.
I^n	L'intégrale itéré d'ordre entier.
D^n	La dérivation d'ordre entier
I_{a+}^α	L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite d'ordre α
I_{b-}^α	L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α
D_{a+}^α	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite d'ordre α
D_{b-}^α	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α
${}^c D_a^\alpha$	La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α
N	le terme non linéaire.
B	polynômes de Bernstein
$k(x, t)$	noyau de l'équation intégrale
$u(x)$	la fonction inconnue dans l'équation intégrale
u_{app}	solution approchée
λ	paramètre numérique
$E.F.I.D$	équations fractionnaires intégréo-différentielles

Introduction

ces dernières années, le calcul différentiel et intégral fractionnaire a attiré de nombreux chercheurs avec succès dans divers domaines des sciences et de l'ingénierie. L'un des principaux avantages du calcul fractionnaire est que les dérivées fractionnaires offrent une approche supérieure pour décrire la mémoire et les caractéristiques génétiques des différents matériaux et processus. Les équations fractionnaires intégro-différentielles sont utilisées pour modéliser de nombreux problèmes pratiques tels que les domaines d'isolation électrique, les ondes électromagnétiques, la viscosité et les équations de diffusion. En raison de leurs vastes applications dans de nombreux domaines, une grande attention a été accordée aux solutions précises et sensibles des équations fractionnaires intégro-différentielles, car l'approximation des dérivées fractionnaires de fonctions complexes est une tâche difficile et inattendue. Il est donc très important d'explorer des méthodes de résolution pour ces équations fractionnaires intégro-différentielles. Pour obtenir des solutions de haute précision, des méthodes numériques ont été proposées, notamment la méthode de collocation, la méthode des moindres carrés, et la méthode de décomposition d'Adomian.

Dans ce mémoire, l'objectif principal est d'utiliser les polynômes de Bernstein pour approximer la solution des équations fractionnaires intégro-différentielles linéaires, en utilisant la méthode de polynômes de Bernstein. Il est divisée en trois chapitres comme suit

Le premier chapitre dans ce chapitre, nous présentons quelques notions sur les espaces fonctionnelles et les fonctions de base gamma, bêta avec ses propriétés, et nous avons présenté quelques notions dans le calcul fractionnaire, en mentionnant également certaines propriétés importantes liées à ce type de calcul.

Le deuxième chapitre dans ce chapitre, on a étudié l'existence et l'unicité des équations fractionnaires intégro-différentielles, et nous présenterons quelques méthodes numériques et approchée importantes pour résoudre des équations fractionnaires intégro-différentielles

Dans le dernier chapitre représente le but de ce mémoire, où nous utiliserons les polynômes de Bernstein pour approximer la solution de l'équations fractionnaires intégro-différentielles, en utilisant la méthode de polynômes de Bernstein avec une application numérique.

Chapitre 1

Calcul fractionnairel

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions sur les espaces fonctionnelles, et quelques notions dans le calcul fractionnaire, en mentionnant également certaines propriétés importantes liées à ce type de calcul.

1.1 rappels sur les espaces

espace de banach

Définition 1.1.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telle que

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tous $x \in E$ et pour tous $\lambda \in \mathbb{k}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in E$.

Définition 1.1.2 Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.1.3 une suite (x_n) d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 1, \forall p, q \geq N, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

espaces complets

Définition 1.1.4 *On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Définition 1.1.5 *On appelle espace de Banach tout espace normé et complet.*

1.2 Les fonctions de base

Dans cette partie, nous fournissons les fonctions spéciales (gamma, bêta), qui sont considérées comme des fonctions essentielles et essentielles dans les théories de Arithmétique fractionnaire.

la fonction gamma

Définition 1.2.1 *Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$ la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$

(posant le changement de variable $t = \tau^2$)

Propriétés de base de la fonction gamma

Quelques propriétés de la fonction $\Gamma(\alpha)$ sont données par le théorème suivant

Théorème 1.2.1 *La fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes*

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma \alpha \tag{1.1}$$

On intègre par parties, et on obtient

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} t^{(\alpha+1)-1} e^{-t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \\
 &= [-t^\alpha e^{-t}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\
 &= \alpha \Gamma(\alpha)
 \end{aligned}$$

2. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n + 1) = n! \tag{1.2}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{2(n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)} (n-1)!} \\
 &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)} (n-1)!} \\
 &= \frac{2n(2n-1)}{2n} \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{2 \cdot 4^{(n-1)} (n-1)!} \\
 &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}, \quad n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

$$4. \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(-4)^n \sqrt{\pi}}{2n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$5. \Gamma(-t) = \frac{-\pi \cos(\pi t)}{\Gamma(t+1)}, \quad n \in \mathbb{N}, t > 0$$

$$6. \Gamma(nt) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{n^t}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(t + \frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Et en utilisant la propriété ci-dessus, nous obtenons les valeurs pour $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma\alpha = \alpha(\alpha - 1)! = \alpha!$$

$\Gamma(\alpha)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < t < 1$ et monotone et strictement croissante pour $t \geq 2$, donc, elle est convexe pour $t \in [0, +\infty[$. Voici quelques exemples fréquemment rencontrés de gamma fonctions pour différentes valeurs de t

$$: \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La fonction bêta

La fonction bêta est définie comme suit

Définition 1.2.2 Pour $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p > 0$ et $q > 0$, la fonction Bêta est la fonction définie par

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (1.3)$$

S'il est modifié p, q dans la définition précédente, alors

$$\beta(q, p) = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt \quad (1.4)$$

Si le $1-t = u$, alors : $dt = -du$, donc

$$\begin{aligned} \beta(q, p) &= \int_0^1 (1-u)^{q-1} u^{p-1} du \\ &= \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \end{aligned}$$

Et par rapport à (1.4) on trouve que

$$\beta(q, p) = \beta(p, q)$$

Remarque 1.2.1 La relation entre la fonction Bêta et Gamma est donnée par

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \quad q > 0$$

Corollaire 1.2.1 Voici quelques propriétés de la fonction Bêta

1. La fonction Bêta peut aussi être définie par: $\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(\theta) \cos^{2q-1}(\theta) d\theta$
2. $\beta(p, q) = \beta(q, p)$
3. Dérivation: $\frac{\partial}{\partial m} \beta(p, q) = \beta(q, p) \left(\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)} \right)$

1.3 L'intégrale fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann- Liouville.

L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Définition 1.3.1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$\begin{aligned} I^{(1)} f(x) &= \int_a^x f(t) dt. \\ I^{(2)} f(x) &= \int_a^x I^{(1)} f(t) dt \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t) dt \right) du \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du \right) f(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

En générale la $n^{\text{ième}}$ itération de l'opération I peut s'écrire

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(x) &= \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pour tout entier n .

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.3.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre ($\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > 0$) d'une fonction ($f \in L^1[a, b]$) est définie par

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \quad (1.6)$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre ($\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > 0$) est définie par

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \quad (1.7)$$

Et nous avons

$$I_a^{\alpha} f(x) := \begin{cases} I & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, & \alpha = n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (1.8)$$

Exemple 1.3.1 Soit la fonction f définie par: $f(x) = (x-a)^c$, $c > -1$

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^c dt$$

par changement de l'ordre d'intégration

$$(t = a + (x-a)\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 1) \quad (1.9)$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a + (x-a)\theta)^{\alpha-1} \theta^c (x-a)^{c+1} d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{c+\alpha} \int_0^1 (1-\theta)^{\alpha-1} \theta^c d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} \beta(\alpha, c+1) \\ I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c} \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1 si $f \in L^1[\alpha, b]$, $\alpha > 0$ alors que, $I_a^{\alpha} f(x)$ existe pour $x \in [a, b]$, Et ce sera $I_a^{\alpha} f(x) \in L^1[\alpha, b]$.

Proposition 1.3.1 soit $f \in L^1[\alpha, b]$ pour chaque $\alpha, \beta > 0$, il est

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x)$$

Proposition 1.3.2 Soit $\alpha > 0, \beta > 0$, et $f \in L^2([a, b])$. Alors

1. $I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$.
2. $I_a^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}$.
3. $\frac{d}{ds} (I_a^\alpha f(x)) = I_a^{\alpha-1} f(x)$.

1.4 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions pour la dérivée fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont plus utilisées dans les applications Riemann-Liouville et Caputo.

Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville

Définition 1.4.1 soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n-1 \leq \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha f(x) &= D^n I^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > \alpha \end{aligned} \tag{1.10}$$

Et nous avons

$$D_a^\alpha f(x) := \begin{cases} f(x), & \alpha = 0 \\ D^n f(x), & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemple 1.4.1 Soit la fonction f définie par: $f(x) = (x-a)^\mu$, $\mu > -1$, $a \geq 0$. D'après l'équation (1.9) on trouve

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= D^n I^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n \frac{\Gamma(\mu+1)}{n-\alpha+\mu+1} (x-a)^{n-\alpha+\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{n-\alpha+\mu+1} D^n (x-a)^{n-\alpha+\mu} \end{aligned}$$

pour $(\alpha - \mu) \in \mathbb{N}$ On trouve

$$D_{\alpha}^{\alpha} f(x) = 0, (\alpha - \mu) \in 1, 2, 3, \dots$$

Et dans le cas $(\alpha - \mu) \notin \mathbb{N}$, On a

$$D_{\alpha}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \mu + 1) (x - a)^{\mu - \alpha}}$$

Théorème 1.4.1 Soit la fonction $f(x) \in L^1[a, b]$, $\alpha > 0$, L'égalité est vraie pour $x \in [a, b]$

$$D_{\alpha}^{\alpha} I_{\alpha}^{\alpha} f(x) = f(x)$$

Proposition 1.4.1 Soit $\alpha, \beta > 0$, où $n - 1 \leq \alpha < n$, $m - 1 \leq \beta < m$, $\alpha > \beta > 0$, $n > m$, $(n, m \in \mathbb{N}^*)$

1. si $\alpha > \beta > 0$, et $f \in L^1[a, b]$

$$D_{\alpha}^{\beta} (I_{\alpha}^{\alpha} f)(x) = I_{\alpha}^{\alpha - \beta} f(x)$$

2. si $\beta \geq \alpha > 0$, et la dérivée fractionnaire $D_{\alpha}^{\beta - \alpha} f$ existe, alors

$$D_{\alpha}^{\beta} (I_{\alpha}^{\alpha} f)(x) = D^{\alpha - \beta} f(x)$$

3. D'un côté $\alpha > 0$, Si des dérivées fractionnaires existent $D^{\alpha - \beta} f$ et $D_a^{k + \alpha}$ où $k \in \mathbb{K}^*$ alors

$$D^k ((D_{\alpha}^{\alpha} f)(x)) = D_a^{k + \alpha} f(x)$$

Dérivées fractionnaires de type Caputo

Définition 1.4.2 soit $x > a$, $x, a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par

$$I_a^{n - \alpha} D^{\alpha} f(x) = {}^c D_a^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(t) dt, & n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x) & \alpha = n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (1.11)$$

Exemple 1.4.2 Soit la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = (x-a)^\gamma, \gamma > -1, (0 < \alpha \leq 1)$,

on utilisons le changement de variable on trouve

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\alpha f(x) &= I_a^{1-\alpha} f'(x) = \gamma I_a^{1-\alpha} (x-a)^{\gamma-1} \\
 &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^\gamma dt \\
 &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{\gamma-\alpha} \int_0^1 \theta^{\gamma-1} (1-\theta)^{-\alpha} d\theta \\
 &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{\gamma-\alpha} \beta(\gamma, 1-\alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (x-a)^{\gamma-\alpha}
 \end{aligned}$$

La relation entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Leuville et Capito

Théorème 1.4.2 soit $\alpha \geq 0, n = [a] + 1$, Si la fonction f Contient $n - 1$ dérivée alors

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \quad \text{pour } x \in [a.b] \quad (1.12)$$

Propriétés générales des dérivées fractionnaires

Linéarité

Définition 1.4.3 La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t) \quad (1.13)$$

pour n'importe quelle approche de la dérivation. La linéarité de la dérivation fractionnaire découle de la définition correspondante.

Par exemple, pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α ($k-1 \leq \alpha \leq k$), on a

$$\begin{aligned}
 D_a^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha-1} (\lambda f(t) + \mu g(t)) \\
 &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau + \\
 &\quad \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha-1} g(\tau) d\tau \\
 &= \lambda D_a^\alpha f(t) + \mu D_a^\alpha g(t)
 \end{aligned}$$

La règle de Leibniz

Définition 1.4.4 Pour un entier n , on a

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \quad (1.14)$$

La généralisation de cette formule est donnée par

$$D^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) g^{(\alpha-k)}(t) + R_n^\alpha(t)$$

ou $n \geq \alpha + 1$, et

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi) d\xi$$

Avec $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\alpha(t) = 0$ Si f et g sont continues dans $[a, b]$, ainsi que toutes leurs dérivées, alors la formule devient

$$D^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t)$$

D^α est la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville.

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions pour les équations F.I.D

2.1 Équations fractionnaires intégrro-différentielles

Considérons l'équations fractionnaires intégrro-différentielles linéaire

$${}^c D_*^\alpha u(x) = f(t) + I^\alpha u(x), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.1)$$

$$u(0) = u_0 \quad (2.2)$$

où ${}^c D_*^\alpha$ est l'opérateur dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre α , qui est défini par l'équation.(1.11).

$${}^c D_*^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(t) dt$$

pour $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, X]$, et I^α désigne l'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α . qui est défini par l'équation.(1.6).

$$I^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt$$

Alors l'opérateur de l'équations fractionnaires intégr-différentielles (2.1), devient

$$Au(x) = f(x) \quad (2.3)$$

où

$$Au(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt \quad (2.4)$$

ces dernières années, l'étude des équations fractionnaires intégr-différentielles en tant que partie théorique de base de certaines applications est étudiée par de nombreux auteurs et, par conséquent, il y a eu un intérêt pour l'étude des équations fractionnaires intégr-différentielles du type

$${}^c D_*^\alpha u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) u(t) dt, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Avec condition initiale $u(0) = u_0$. Où $f(x)$, $k(x,t)$ sont des fonctions donnés, u_0 est une constante réelle positive, et ${}^c D_*^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo.

tandis que dans cet partie nous intéressons à l'existence et à l'unicité des solutions des équations (1.1) et (2.2) avec différents ordres fractionnaires α , et nous utiliserons le théorème du point fixe de Schauder pour prouver l'existence de la solution, tandis que l'inégalité de Grounwall a été utilisée pour obtenir l'unicité des solutions de l'équations fractionnaires intégr-différentielles.

De plus , l'opérateur des l'équations fractionnaires intégr-différentielles (2.1) et (2.2) , devient

$$Au(x) = f(x) \quad (2.3)$$

où

$$Au(x) = {}^c D^\alpha u(x) - I^\alpha u(x) \quad (2.4)$$

2.2 L'existence de la solution de l'équations F.I.D

Avant de prouver l'existence et les théorèmes d'unicité des équations fractionnaires intégr-différentielles, il faut d'abord donner quelques concepts de base et fondamentaux nécessaires à ce travail.

Définition 2.2.1 *A un sous-ensemble S de $C[0, X]$, est dit être uniformément continu, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que: $|x - x_1| < \delta$ et $u \in M$ impliquent $\|u(x) - u(x_1)\|_{C[0, X]} < \varepsilon$*

Ensuite, les équations. (2.1) et (2.2) peuvent être écrits sous une forme équivalente, comme dans le lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *La solution du problème de la valeur initiale donnée par les équations.(1.1) et (2.2) la forme*

$$u(x) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-v)^{\alpha-1} u(v) dv \right\} dt$$

De plus, les théorèmes suivants sont utilisés plus tard

Théorème 2.2.1 Schauder point fixe: *Soit X un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe de l'espace de Banach B et $T : X \rightarrow X$ est un opérateur compact. Alors T admet au moins un point fixe en X .*

Théorème 2.2.2 Théorème d'Arzela-Ascoli : *Supposons que F soit un espace de Banach et E un espace métrique compact. Pour qu'un sous-ensemble H de l'espace de Banach $TF(E)$ soit relativement compact, il faut et il suffit que H soit uniformément continu et que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $H(x) = \{f(x) \text{ teq } f \in H\}$ être relativement compact dans F .*

Théorème 2.2.3 Inégalité de Groundwall *Soient $u(x)$ et $b(x)$ des fonctions continues non négatives pour $t \geq \alpha$*

et soit

$$u(x) \leq a + \int_a^x b(t)u(t)dt, \quad x \geq \alpha$$

où α est une constante non négative, alors

$$u(x) \leq ae^{\int_a^x b(t)dt}, \quad x \geq \alpha$$

Théorème 2.2.4 (Le théorème d'existence): *Soit u et $u^{(m)}$ une fonction réelle non négative dans $C[0, X]$, et que $x \in [0, X], 0 < \alpha \leq 1$. Alors les équations (2.1) et, (2.2) admet une solution u .*

Démonstration. Voir [16]. ■

2.3 L'unicité de la solution de l'équations F.I.D

Théorème 2.3.1 (Le théorème d'unicité) :

Le problème de valeur initiale donné par les équations (2.1) et (2.2) a une solution unique sur l'intervalle $[0, X]$ si u et $u^{(m)}$ sont des fonctions continues dans la région:

$$D = \{(x, u) \mid 0 < x < X, |x - x_0| \leq b\}, \quad \text{et } u(0) = u_0$$

et remplir les conditions

$$\int_0^x \left| \frac{1}{\Gamma(q)} (x - \sigma)^{q-1} u(\sigma) - \frac{1}{\Gamma(q)} (x - \sigma)^{q-1} y(\sigma) \right| d\sigma \leq L |u - y|$$

pour une constante positive L

Démonstration. Voir [16]. ■

2.4 méthodes numériques et approchée pour résoudre des équations F.I.D

Dans certains cas, la solution analytique peut être si difficile à résoudre, par conséquent, des méthodes numériques et approximatives peuvent être nécessaires à utiliser qui couvrent le problème considéré. Par conséquent, dans ce chapitre, certaines méthodes approximatives sont considérées pour résoudre des équations fractionnaires intégral-différentielles. Ces méthodes sont la méthode de collocation, et la méthode des moindres carrés et la méthode de décomposition d'Adomian.

2.4.1 Méthode de collocation

La méthode de collocation peut être considérée comme l'une des méthodes les plus couramment utilisées pour approximer la solution des équations différentielles et des équations intégrales [5, 15]. Cette méthode est basée sur l'approximation de la solution du problème sous la forme d'une combinaison linéaire d'une certaine séquence complète de fonctions, puis en résolvant le système algébrique linéaire résultant de la substitution de cette solution approximative dans l'équation principale à un ensemble fini de points du domaine

de définition. Ici, cette méthode sera utilisée pour résoudre des équations fractionnaires intégral-différentielles de la forme suivante

$$\begin{aligned} {}^c D_*^\alpha u(x) &= f(x) + I^\alpha u(x) \\ u(0) &= 0, \quad x \in [0, X] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Soit $u(x)$ la solution approchée de l'équation.(2.5), définie par

$$u(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \quad (2.6)$$

Où $\psi(x)$ est une fonction qui satisfait la non-homogène conditions et $\{\varphi_i(x)\}$ est une séquence complète de fonctions qui satisfait les conditions homogènes. Pour trouver la solution approximative $u(x)$, substituer $u(x)$ dans l'opérateur donné par l'équation.(2.5) et donc le problème est réduit au problème déterminer des constantes a_i , pour tout $i = 1, 2, \dots$; Comme suit

$${}^c D_*^\alpha \left[\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] = f(x) + I^\alpha \left[\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] \quad (2.7)$$

et par conséquent, l'erreur résiduelle $R(u, x)$ sera

$$R(u, x) = {}^c D_*^\alpha \left[\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] - I^\alpha \left[\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] - f(x) \quad (2.8)$$

il est clair que $R(u, x)$ devient une fonction des inconnues a_1, a_2, \dots, a_n et donc $R(u, x)$ peut être réécrit comme $R(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$. Et dans ce but nous faisons

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n; x) \cong 0, \quad \forall x \in [0, X] \quad (2.9)$$

Pour trouver les coefficients $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, évaluer l'équation. (2.8) à n -points distincts $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, X]$, ce qui produira la système linéaire suivant

$$\begin{aligned} R(a_1, a_2, \dots, a_n; x_1) &= 0 \\ R(a_1, a_2, \dots, a_n; x_2) &= 0 \\ &\vdots \\ R(a_1, a_2, \dots, a_n; x_n) &= 0 \end{aligned}$$

qui peut s'écrire sous forme matricielle, comme suit

$$Aa = B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} a_{11} &= {}^c D_*^\alpha \varphi_1(x_1) - I^\alpha \varphi_1(x_1) \quad , \quad a_{12} = {}^c D_*^\alpha \varphi_2(x_1) - I^\alpha \varphi_2(x_1), \dots \\ a_{n1} &= {}^c D_*^\alpha \varphi_n(x_1) - I^\alpha \varphi_n(x_1) \quad , \quad a_{21} = {}^c D_*^\alpha \varphi_1(x_2) - I^\alpha \varphi_1(x_2), \\ a_{22} &= {}^c D_*^\alpha \varphi_2(x_2) - I^\alpha \varphi_2(x_2) \quad , \quad a_{2n} = {}^c D_*^\alpha \varphi_n(x_2) - I^\alpha \varphi_n(x_2), \dots, \\ a_{n1} &= {}^c D_*^\alpha \varphi_1(x_n) - I^\alpha \varphi_1(x_n) \quad , \quad a_{n2} = {}^c D_*^\alpha \varphi_2(x_2) - I^\alpha \varphi_2(x_n), \dots, \\ a_{nn} &= {}^c D_*^\alpha \varphi_n(x_n) - I^\alpha \varphi_n(x_n) \end{aligned}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} f(x_1) - [{}^c D_*^\alpha - I^\alpha] \psi(x_1) \\ f(x_2) - [{}^c D_*^\alpha - I^\alpha] \psi(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) - [{}^c D_*^\alpha - I^\alpha] \psi(x_n) \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Il est remarquable que la matrice A soit non singulière puisque φ_i , pour tout $i = 1, 2, \dots, n$; sont sélectionnés à partir d'une séquence complète de fonctions, c'est-à-dire ψ_i sont linéairement indépendants et le vecteur B n'est pas identique au vecteur nul si l'une ou l'autre des équations fractionnaires intégrées-différentielles (2.5) a des valeurs non nulles condition initiale ou si les équations. (2.5) sont non homogènes ou les deux.

De plus, la méthode peut être utilisée pour l'équations fractionnaires intégrées-différentielles non linéaire

$$\begin{aligned} {}^c D_*^\alpha(x) &= f(x) + I^\alpha N(u(x)) \\ u(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

où, $N(u)$ est le terme non linéaire, soit $u(x)$ la solution approchée de l'équation. (2.10), définie par des équations (2.6)

$$u(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$$

où $u(x)$ est une fonction qui satisfait les conditions non homogènes et $\{\varphi_i(x)\}$ est une suite complète de fonctions, qui satisfait la conditions homogènes. Pour trouver la solution approchée $u(x)$, substituer $u(x)$ dans l'opérateur donné par l'équation (2.10) et donc le problème est réduit au problème de déterminer des constantes a_i , pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. Comme suit

$${}^c D_*^\alpha \left[\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] = f(x) + I^\alpha N \left[\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] \quad (2.11)$$

et par conséquent, l'erreur résiduelle $R(u, x)$ sera

$$R(u, x) = {}^c D_*^\alpha \left[\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] - I^\alpha N \left[\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] - f(x) \quad (2.12)$$

il est clair que $R(u, x)$ devient une fonction des inconnues a_1, a_2, \dots, a_n et donc $R(u, x)$ peut être réécrit comme $R(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$, et dans ce but nous faisons

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n; x) = 0, \quad \forall x \in [0, X] \quad (2.13)$$

Pour trouver les coefficients $a_i, i = 1, 2, \dots, n$; évaluer l'équation.(2.12) à n-points distincts $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, X]$, qui produira par la système algébriques du équations non-linéarité, résolues à l'aide méthode de Newton-Raphson.

2.4.2 La méthode des moindres carrés

L'une des méthodes les plus largement utilisées pour approximer la solution des équations intégrales-différentielles, en général, et des équations fractionnaires intégro-différentielles, en particulier, est celle qui consiste à minimiser le carré de l'erreur résiduelle, appelée méthode des moindres carrés. Pour illustrer cette méthode, considérons l'équation (2.5).

$${}^c D_*^\alpha u(x) = f(x) + I^\alpha u(x), \quad u(0) = u_0, \quad x \in [0, X]$$

et la solution approcher par

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.14)$$

Où $a_i, i = 1, \dots, n$, des constantes sont définies. Donc, Remplacer l'équation (2.14) dans l'équation (2.5) et réduire le carré L'erreur résiduelle est définie comme

$$\begin{aligned} E(a_1, \dots, a_n) &= \int_0^x \{ {}^c D_*^\alpha \varphi_n(x) - I^\alpha \varphi_n(x) - f(x) \}^2 dx \\ &= \int_0^x \left\{ {}^c D_*^\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right) - I^\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right) - f(x) \right\}^2 dx \end{aligned} \quad (2.15)$$

Par conséquent, le problème est maintenant réduit pour trouver les coefficients $a_i, i = 1, 2, \dots, n$. Une condition nécessaire pour les coefficients a_i , qui minimise, est-ce que

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \quad \text{pour chaque } j = 1, 2, \dots, n$$

Ce qui donnera un système linéaire de n-équations, ou l'erreur résiduelle donnée par l'équation.(2.15) peut être minimisée en utilisant la minimisation directe techniques.

Considérons l'équations fractionnaires intégro-différentielles (2.15), qui prendra la forme

$$E(a_1, \dots, a_n) = \int_0^x \left\{ {}^c D_*^\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right) - I^\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right) - f(x) \right\}^2 dx \quad (2.16)$$

et donc

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 2 \int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^n [{}^c D_*^\alpha (a_i x^i) - I^\alpha (a_i x^i)] - f(x) \right\} \{ {}^c D_*^\alpha x^j - I^\alpha x^j \} dx$$

ce qui est équivalent à

$$\int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^n [{}^c D_*^\alpha (a_i x^i) - I^\alpha (a_i x^i)] \right\} \{ {}^c D_*^\alpha x^j - I^\alpha x^j \} dx = \int_0^x f(x) ({}^c D_*^\alpha x^j - I^\alpha x^j) dx \quad (2.17)$$

pour tout $j = 1, \dots, n$, qui donnent un système linéaire algébrique de n-équations en n-inconnues a_1, a_2, \dots, a_n , qui peut être résolu à l'aide de n'importe quel nombre Méthode de résolution de systèmes linéaires.

De plus, la méthode peut être utilisée pour résoudre les Ce qui donnera un système linéaire de n-équations, ou l'erreur résiduelle donnée par l'équation.(2.15) peut être minimisée en utilisant la minimisation directe techniques.

Considérons l'équations fractionnaires intégró-différentielles (2.15), qui prendra la forme non linéaires (2.10).

$${}^c D_*^\alpha u(x) = f(x) + I^\alpha(N(u(x))), \quad u(0) = u_0, \quad x \in [0, X]$$

où, $N(x)$ est le terme non linéaire, soit $u(x)$ la solution approchée d'équations (2.10), définie par des équations (2.14).

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad n \in \mathbb{N}$$

Où $a_i, i = 1, \dots, n$, sont des constantes à déterminer. Donc en remplaçant l'équation (2.14) par l'équation (2.10) et en minimisant le carré de la erreur résiduelle définie comme

$$\begin{aligned} E(a_1, \dots, a_n) &= \int_0^x \{ {}^c D_*^\alpha \varphi_n(x) - I^\alpha N[\varphi_n(x)] - f(x) \}^2 dx & (2.18) \\ &= \int_0^x \left\{ {}^c D_*^\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right) - I^\alpha N \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right) - f(x) \right\}^2 dx \end{aligned}$$

Par conséquent, le problème est maintenant réduit pour trouver les coefficients $a_i, i = 1, 2, \dots, n$. Une condition nécessaire pour les coefficients ai, qui minimise, est-ce que

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \quad \text{pour chaque } j = 1, 2, \dots, n$$

Ce qui donnera un système linéaire de n-équations, ou l'erreur résiduelle donnée par l'équation.(2.18) peut être minimisée en utilisant la minimisation directe techniques.

Considérons l'équations fractionnaires intégró-différentielles (2.18), qui prendra la forme

$$E(a_1, \dots, a_n) = \int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^n [{}^c D_*^\alpha (a_i x^i) - I^\alpha N[(a_i x^i)]] - f(x) \right\}^2 dx \quad (2.19)$$

et donc

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 2 \int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^n [{}^c D_*^\alpha (a_i x^i) - I^\alpha N[(a_i x^i)]] - f(x) \right\} \{ {}^c D_*^\alpha x^j - I^\alpha N[a_j x^j] \} dx$$

ce qui est équivalent à

$$\int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^n [{}^c D_*^\alpha (a_i x^i) - I^\alpha N [(a_i x^i)]] \right\} \{ {}^c D_*^\alpha x^j - I^\alpha x^j \} dt = \int_0^x f(x) ({}^c D_*^\alpha x^j - I^\alpha a_j x^j) dx \quad (2.20)$$

Pour tout $j = 1, 2, \dots, n$; on obtient un système non linéaire d'équations algébriques. Pour trouver a_1, a_2, \dots, a_n , soit en minimisant E par rapport à a_1, a_2, \dots, a_n , ou évaluer le système non linéaire obtenu à partir de

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n;$$

qui sera résolu ensuite en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

2.4.3 La méthode de décomposition d'Adomian

L'analyse de l'ADM

L'ADM sera examiné en suivant la procédure de Un domaine donné en 1988 et amélioré en 1991. Cependant, le même techniques peuvent être appliquées à d'autres systèmes d'équations [1, 2]. Pour introduire cette méthode, considérons d'abord l'équation. (2.5) est linéaire, c'est-à-dire que l'équations fractionnaires intégro-différentielles (2.5) est de la forme

$$\begin{aligned} {}^c D_*^\alpha u(x) &= f(x) + I^\alpha u(x) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

ou équivalent

$$\begin{aligned} {}^c D_*^\alpha u(x) &= f(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

où $0 < \alpha < 1$, $f(x)$ est supposée bornée. $\forall x \in [0, X]$ Opérant avec I^α des deux côtés de l'équation. (2.1), on obtient

$$I^\alpha {}^c D_*^\alpha u(x) = I^\alpha f(x) + I^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right]$$

Donc

$$u(x) = u(0) + I^\alpha f(x) + I^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right] \quad (2.22)$$

La méthode d'Adomian définit la solution $u(x)$ par la série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.23)$$

Et de l'équation (2.22) on obtient

$$u_0 = u(0) + I^\alpha f(x) \quad (2.24)$$

$$u_1 = I^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u_0(t) dt \right) \quad (2.25)$$

⋮

$$u_{n+1} = I^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u_n(t) dt \right) \quad (2.26)$$

où les composantes $u_n(x)$ seront déterminées, récursivement. De plus, la méthode peut être utilisée pour l'équation intégral-différentielle non linéaire de ordre fractionnaire (2.10)

$$\begin{aligned} {}^c D_*^\alpha u(x) &= f(x) + I^\alpha N(u(x)), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

ou équivalent

$$\begin{aligned} {}^c D_*^\alpha u(x) &= f(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} N(u(t)) dt \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Où $0 < \alpha < 1$, $f(x)$ est supposée bornée pour tout $x \in [0, X]$ et

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right| \leq M, \text{ pour tout } 0 \leq x \leq t \leq X$$

où M est une constante finie. Le terme non linéaire pour $N(u)$ est lipschitzien avec

$$|N(u) - N(z)| \leq L |u - z|$$

et peut se décomposer sous la forme

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \quad (2.28)$$

où A_n sont les polynômes adomiens, donnés par

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \right) \right]_{\lambda=0} \quad (2.29)$$

Alors $N(u)$ sera une fonction de λ, u_0, u_1, \dots . Maintenant, en remplaçant l'équation.(2.28) dans l'équation.(2.27), donne

$${}^c D_*^\alpha u(x) = f(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \right) dt \quad (2.30)$$

En opérant avec I^α de part et d'autre de l'équation.(2.30), donner

$$u(x) = u(0) + I^\alpha f(x) + I^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \right) dt \right) \quad (2.31)$$

Les composantes u_0, u_1, \dots sont déterminées récursivement par

$$u_0 = u(0) + I^\alpha f(x) \quad (2.32)$$

$$u_{k+1} = I^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} A_k(t) dt \right) \quad (2.33)$$

Les polynômes d'Adomian peuvent être générés à partir du développement de Taylor de $N(u(x))$ autour de la première composante u_0 , ce qui signifie que

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u-u_0)^n}{n!} N^{(n)}(u_0)$$

Dans, les polynômes d'Adomian sont arrangés pour avoir la forme

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 f^{(1)}(u_0) \\ A_2 &= u_2 f^{(1)}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} f^{(2)}(u_0) \\ A_3 &= u_3 f^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 f^{(2)}(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} f^{(3)}(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Modification des polynômes d'Adomian

En réarrangeant les termes dans les polynômes obtenus dans l'équation (2.34), Retour à

$$\begin{aligned}\bar{A}_0 &= N(u_0) \\ \bar{A}_1 &= u_1 N^{(1)}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} N^{(2)}(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} N^{(3)}(u_0) + \dots \\ \bar{A}_2 &= u_2 N^{(1)}(u_0) + \frac{1}{2!} (u_2^2 + 2u_1 u_2) N^{(2)}(u_0) + \frac{1}{3!} N^{(3)}(3u_1^2 + 3u_1 u_2^2 + u_3^2) N^{(3)}(u_0) + \dots \\ \bar{A}_3 &= u_3 N^{(1)}(u_0) + \frac{1}{2!} (u_3^2 + 2u_1 u_3 + 2u_2 u_3) N^{(2)}(u_0) + \frac{1}{3!} (u_3^3 + 3u_3^2 (u_1 + u_2)^2) N^{(3)}(u_0) + \dots\end{aligned}$$

On définit la somme partielle

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i(x)$$

du réarrangé polynômes, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}\bar{A}_0 &= N(u_0) = N(x_0) \\ \bar{A}_0 + \bar{A}_1 &= N(u_0) + u_1 N^{(1)}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} N^{(2)}(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} N^{(3)}(u_0) + \dots \\ &= N(u_0 + u_1) = N(s_1)\end{aligned}$$

De la même manière

$$\bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = N(u_0 + u_1 + u_2) = N(s_2)$$

et par récurrence, on obtient la somme

$$\bar{A}_n = N(s_n) - \sum_{i=0}^{n-1} A_i \quad (2.35)$$

Chapitre 3

Solution approchée des l'équations fractionnaires intégrro-différentielles

Dans cette chapitre, nous dériverons la solution approchée de l'équation fractionnaires intégrro-différentielle en utilisant les polynômes de Bernstein comme suit :

3.1 Polynômes de Bernstein

La forme générale des polynômes de Bernstein de degré n sur l'intervalle $[a, b]$ est défini par

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, \quad a \leq x \leq b, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Notez que chacun de ces $n + 1$ polynômes de degré n satisfait les conditions suivantes

$$1) B_{i,n}(x) = 0, \text{ si } i < 0 \text{ ou } i > n$$

$$2) \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) = 1$$

$$3) B_{i,n}(a) = B_{i,n}(b) = 0, \quad 1 \leq i \leq n - 1$$

Les premiers polynômes de Bernstein sur l'intervalle $[a, b]$, sont donnés ci-dessous

$$\begin{aligned}
 B_{0,10}(x) &= (b-x)^{10}/(b-a)^{10} \\
 B_{1,10}(x) &= 10(b-x)^9(x-a)/(b-a)^{10} \\
 B_{2,10}(x) &= 45(b-x)^8(x-a)^2/(b-a)^{10} \\
 B_{3,10}(x) &= 120(b-x)^7(x-a)^3/(b-a)^{10} \\
 B_{4,10}(x) &= 210(b-x)^6(x-a)^4/(b-a)^{10} \\
 &\vdots \\
 B_{10,10}(x) &= x^{10}
 \end{aligned}$$

3.2 Solution approchée de l'équation F.I.D en utilisant les polynômes de Bernstein

Considérons l'équation fractionnaire intégral-différentielle de la forme [13].

$${}^c D_*^\alpha u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t) u(t) dt, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.1)$$

où ${}^c D_*^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α , et $f(x)$, $k(x,t)$ sont des fonctions donnés. Notre approche commence par multiplier l'intégrale fractionnaire des deux côtés de l'équation (3.1), et nous obtenons

$$u(x) = u(0) + I^\alpha f(x) + I^\alpha \left(\int_a^b k(x,t) u(t) dt \right) \quad (3.2)$$

Pour déterminer la solution approchée de l'équation (3.1), On utilise la base des polynômes de Bernstein sur $[a, b]$ c'est-à-dire

$$u(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) \quad (3.3)$$

où $a_i (= 0, 1, \dots, n)$ sont des constantes inconnues à déterminer. En substituant l'équation (3.3) à l'équation (3.2), on obtient

$$\sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) = u(0) + I^\alpha f(x) + I^\alpha \left(\int_a^b k(x,t) \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(t) dt \right)$$

Donc

$$\sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) - I^a \left(\sum_{i=0}^n a_i \phi(x) \right) = u(0) + I^a f(x)$$

où

$$\phi(x) = \int_a^b k(x,t) \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(t) dt$$

ainsi, nous avons

$$\sum_{i=0}^n a_i [B_{i,n}(x) - I^a \phi(x)] = u(0) + I^a f(x) \quad (3.4)$$

Maintenant, on pose $x = x_j$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, n$, dans l'équation (3.4), On obtient le système linéaire suivant

$$\sum_{i=0}^n a_i a_{i,j} = f_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

où

$$a_{i,j} = B_{i,n}(x_j) - I^a \phi(x_j),$$

et

$$f_j = u(0) + I^a f(x_j)$$

Le système linéaire (3.5) peut être facilement résolu par des méthodes standard pour l'inconnu constantes a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), Ces a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sont ensuite utilisés dans l'équation (3.3) pour obtenir la fonction inconnue $u(x)$ approximativement.

3.3 Application numérique

Dans cette section, nous allons donner quelques exemples illustratifs afin de clarifier notre approche.

Exemple 3.3.1 *Considérez l'équation fractionnaire intégral-différentielle*

$$\begin{aligned} {}^c D_*^\alpha u(x) &= \frac{1}{2}x - e^x + \int_0^1 xt u(t) dt \\ u(0) &= 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

En prenant l'intégration fractionnaire pour les deux côtés de l'équation ci-dessus, (pour $\alpha = 1$), nous obtenons

$$u(x) = u(0) + I^1 \left(\frac{1}{2}x - e^x \right) + I^1 \left(\int_0^1 xt u(t) dt \right)$$

Et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u_{ex}(x) = 1 - e^x$$

Tableau 1. Nous présentons la solution exacte $u_{ex}(x)$ et la solution approchée $u_{app}(x)$ obtenues par la méthode de polynôme de Bernstein, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $n = 10$.

x	solution ex u_{ex}	solution appr u_{app}	Erreur
0.0	-0.0	-0.000000	0.00000000
0.1	-0.1	-0.105170	$2.761680e - 15$
0.2	-0.2	-0.221402	$6.022960e - 15$
0.3	-0.3	-0.349858	$4.829470e - 15$
0.4	-0.5	-0.491824	$2.220446e - 15$
0.5	-0.6	-0.648721	$2.775555e - 15$
0.6	-0.8	-0.822118	$6.883383e - 15$
0.7	-1.0	-1.013752	$1.221245e - 14$
0.8	-1.2	-1.225540	$1.487699e - 14$
0.9	-1.5	-1.459603	$1.154632e - 14$
1	-1.7	-1.718281	$4.440892e - 14$

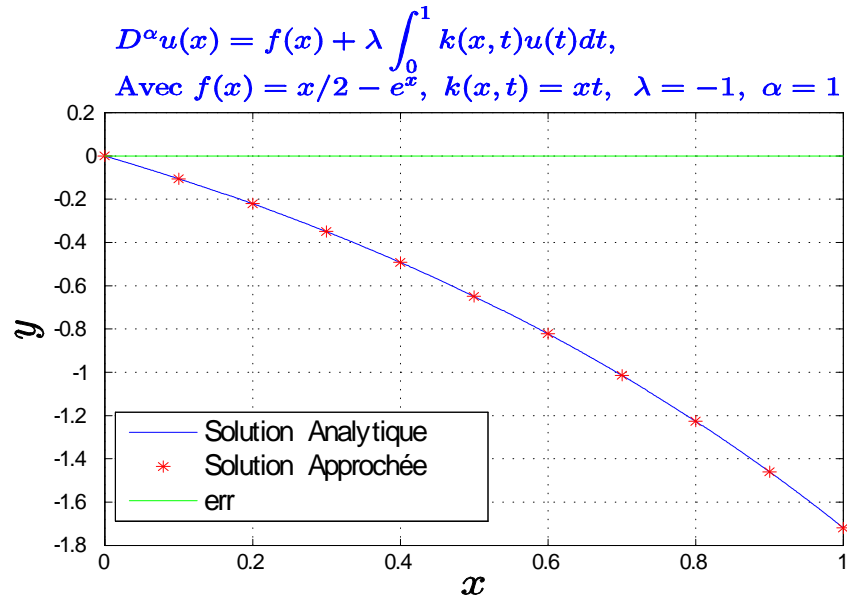


Figure 3.3.1: la solution exacte et la solution approchée de l'exemple(3.3.1)

Exemple 3.3.2 Considérez l'équation fractionnaire intégral-différentielle

$${}^c D_*^{0.5} u(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} x + \int_0^1 xt u(t) dt, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

En prenant l'intégration fractionnaire pour les deux côtés de l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$u(x) = u(0) + I^{0.5} \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} x \right) + I^{0.5} \left(\int_0^1 xt u(t) dt \right)$$

Et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u_{ex}(x) = x^2 - x$$

Tableau 2. Nous présentons la solution exacte $u_{ex}(x)$ et la solution approchée $u_{app}(x)$ obtenues par la méthode de polynôme de Bernstein, en certains points arbitraires, l'erreur

est calculée pour $n = 10$.

x	solution exacte u_{ex}	solution approchée u_{app}	Erreur
0.0	0.00000	-0.00000	0.000000
0.1	-0.0900	-0.0900	$5.967449e - 16$
0.2	-0.1600	-0.1600	$2.720046e - 15$
0.3	-0.2100	-0.2100	$7.244205e - 15$
0.4	-0.2400	-0.2400	$1.140754e - 14$
0.5	-0.2500	-0.2500	$1.251776e - 14$
0.6	-0.2400	-0.2400	$1.049161e - 14$
0.7	-0.2100	-0.2100	$7.216450e - 15$
0.8	-0.1600	-0.1600	$3.830269e - 15$
0.9	-0.0900	-0.0900	$1.110223e - 15$
1	0.00000	-0.00000	$6.938894e - 18$

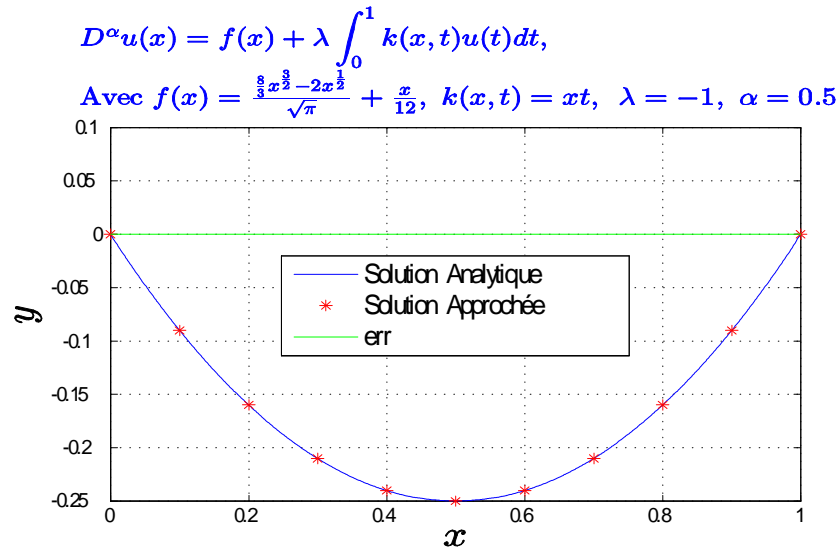


Figure 3.3.2: la solution exacte et la solution approchée de l'exemple(3.3.2)

Exemple 3.3.3 *Considérez l'équation fractionnaire intégré-différentielle*

$${}^c D_*^{0.5} u(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3x\sqrt{\pi}}{4} - \frac{9}{10} - \int_0^1 u(t) dt, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

En prenant l'intégration fractionnaire pour les deux côtés de l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$u(x) = u(0) + I^{0.5} \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3x\sqrt{\pi}}{4} - \frac{9}{10} \right) - I^{0.5} \left(\int_0^1 u(t) dt \right)$$

Et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u_{ex}(x) = xe^x$$

Tableau 3. *Nous présentons la solution exacte $u_{ex}(x)$ et la solution approchée $u_{app}(x)$ obtenues par la méthode de polynôme de Bernstein, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $n = 10$.*

x	solution exacte u_{ex}	solution approchée u_{app}	Erreur
0.0	0.00000	0.000000e + 00	0.000000e + 00
0.1	0.1	1.316484e - 01	2.571244e - 05
0.2	0.3	2.894790e - 01	3.636288e - 05
0.3	0.5	4.643613e - 01	4.453525e - 05
0.4	0.7	6.530336e - 01	5.142487e - 05
0.5	0.9	8.536108e - 01	5.749476e - 05
0.6	1.1	1.064820e - 00	6.298235e - 05
0.7	1.3	1.285730e - 00	6.802871e - 05
0.8	1.5	1.515614e - 00	7.272575e - 05
0.9	1.8	1.753892e - 00	7.713731e - 05
1	2.0	2.000081e - 00	8.130986e - 05

$$D^\alpha u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x,t)u(t)dt,$$

$$\text{Avec } f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3x\sqrt{\pi}}{4} - \frac{9}{10}, \quad k(x,t) = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \lambda = -1$$

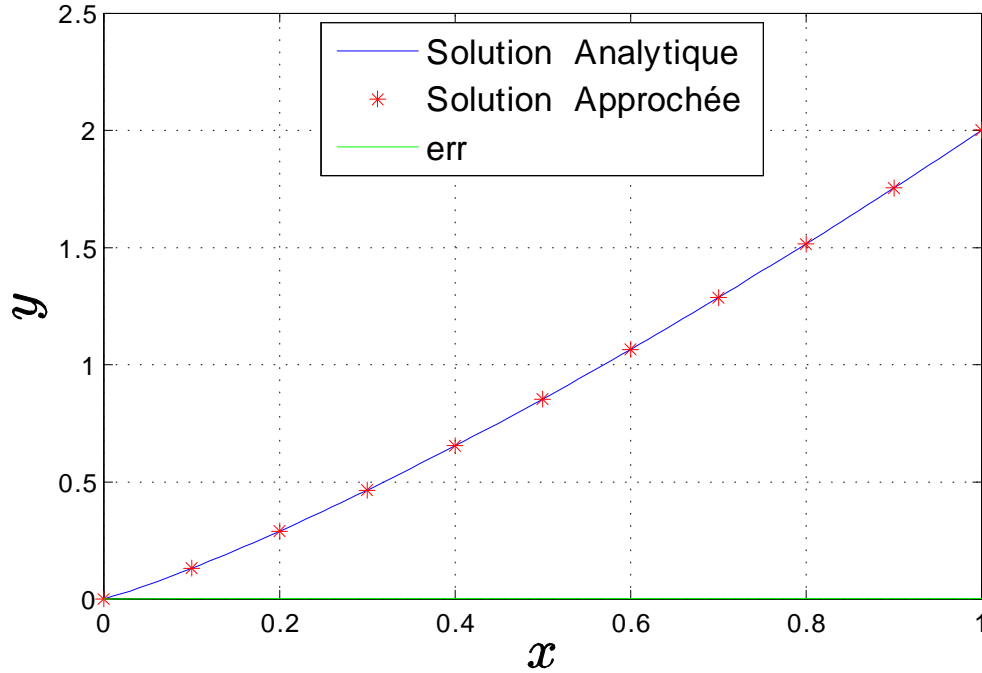


Figure 3.3.3: la solution exacte et la solution approchée de l'exemple(3.3.3)

Exemple 3.3.4 Considérez l'équation fractionnaire intégral-différentielle

$${}^c D_*^{\frac{1}{3}} u(x) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\Gamma(\frac{13}{6})} x^{\frac{7}{6}} - \frac{2}{63} x^{\frac{9}{2}} (9 + 7x^2) + \int_0^x (xt + x^2 t^2) u(t) dt, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

En prenant l'intégration fractionnaire pour les deux côtés de l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$u(x) = u(0) + I^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4\Gamma(\frac{13}{6})} x^{\frac{7}{6}} - \frac{2}{63} x^{\frac{9}{2}} (9 + 7x^2) \right) + I^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^x (xt + x^2 t^2) u(t) dt \right)$$

Et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u_{ex}(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

Tableau 4. Nous présentons la solution exacte $u_{ex}(x)$ et la solution approchée $u_{app}(x)$ obtenues par la méthode de polynôme de Bernstein, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $n = 10$.

x	solution exacte u_{ex}	solution approchée u_{app}	Erreur
0.0	0.00000	0.00000	0.000000
0.1	0.031623	0.031623	$2.378452e - 08$
0.2	0.089443	0.089443	$5.171354e - 08$
0.3	0.164317	0.164317	$9.291980e - 08$
0.4	0.252982	0.252982	$1.344626e - 08$
0.5	0.353553	0.353554	$1.864872e - 08$
0.6	0.464758	0.464758	$2.386414e - 07$
0.7	0.585662	0.585662	$3.116627e - 07$
0.8	0.715542	0.715542	$3.662679e - 07$
0.9	0.853815	0.853816	$5.753314e - 07$
1	1.000000	1.000000	$2.593745e - 07$

$$D^\alpha u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt,$$

Avec $f(x) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\Gamma(\frac{13}{6})}x^{\frac{7}{6}} - \frac{2}{63}x^{\frac{5}{2}}(9 + 7x^2)$, $k(x,t) = xt + x^2t^2$, $\lambda = 1$, $\alpha = \frac{1}{3}$

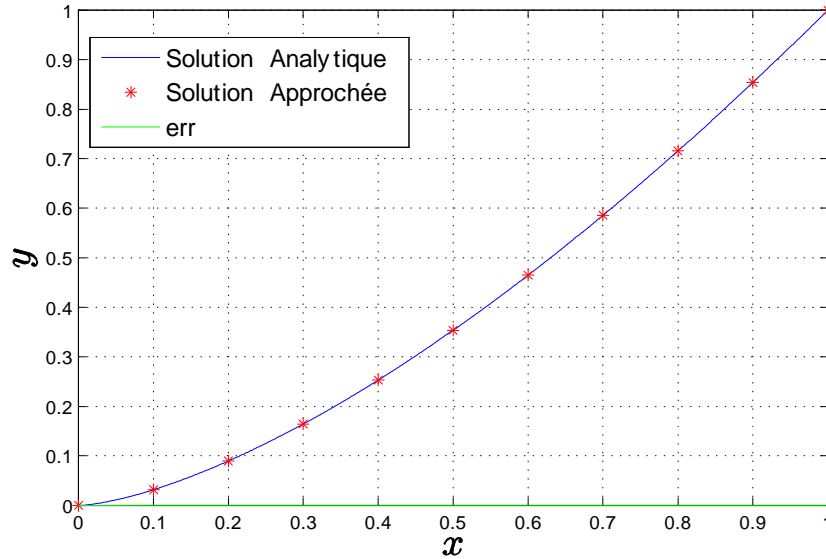


Figure 3.3.4: la solution exacte et la solution approchée de l'exemple(3.3.4)

Conclusion

Dans cette mémoire, nous avons utilisé des polynômes de Bernstein pour approximer la solution des l'équations fractionnaires intégró-différentielles linéaires, pour déterminer la solution approchée nous avons utilisé la méthode de polynômes de Bernstein. Où nous avons donné quelques exemples dans la solution exacte est connue et nous avons obtenu les résultats et les solutions à l'aide du logiciel MATLAB. Pour tester l'efficacité de la méthode et estimer la précision à travers nos résultats, nous avons remarqué que les résultats sont bonne, c'est-à-dire que plus le degré de N était grand, plus les résultats étaient proches de la précision, et plus la méthode était efficace.

Bibliographie

- [1] Abbaoui K., Pujol M. J., Cherruault Y., Himoun N. and Grimalt P., "A New Formulation of Adomian Method, Convergence Result", *Kybernetes*, Vol. 30, No. (9/10), pp. 1183-1191, 2001.
- [2] Adomian G., "On the Solution of Algebraic Equations by the Decomposition Method", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 105, pp.141-166, 1985.
- [3] Cherruault Y. and Adomian G., "Decomposition Methods: A New Proof of Convergence", *Math, Comput. Modeling*, Vol.18, pp.103- 106, 1993.
- [4] Dieudonne J. 1960." *Foundation of Modern Analysis*", Academic Press,New York.
- [5] Delves L. M. and Mohammed J. L., "Computational Methods for Integral Equations", Cambridge University Press, 1985.
- [6] Ibrahim L. El-Kalla, "Error Analysis of Admian Series Solution to a Class of Nonlinear Differential Equations", *Applied Math.*, Vol. 7, pp. 214-221, 2007.
- [7] I. Podlubny, *Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering*, vol. 198. New York/London:Springer;1999.
- [8] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order*. Academic Pressé Inc.
- [9] Momani S., "Local and Global Existence Theorems on Fractional Integro-Differential Equations", *J. Fract. Calc.*, Vol. 18, pp. 81-86, 2000.

- [10] Momani S., Jamee A. 1 and Al-Azawi S.. October 2007. "Local Global Uniqueness Theorems on Fractional Integro -Differential Equations Via Biharis and Grunwalls Inequalities", *Soochow J. of Mathematics*, V.33, No.4,pp: 619-627.
- [11] Mohammed S..2010, "Some Approximate Solutions of Fractional Integro-Differential Equations", M.Sc. Thesis, College of Science, Al-Nahrain University.
- [12] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [13] Osama H. Mohammed ,Sarmad A. Altaie ,Approximate Solution of Fractional Integro-Differential Equations by Using Bernstein Polynomials ,Eng. Tech. Journal, Vol.30, No.8, 2012.
- [14] Rao M. R. ,1980, "Ordinary Differential Equations", East-West Private PVT Limited.
- [15] Rawashdeh E. A., "Numerical Solution of Fractional Integro- Differential Equations by Collocation Method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 176, No. 1, pp. 1-6, 2005.
- [16] Seema'a A. Al-Fayadh,"Proving The Existence and the Uniqueness Solutions of fractional Integro- Differential Equations", *Iraqi Journal of Science*. Vol 54.No.2.2013.Pp 368-373.

المخلص:

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو تقديم طريقة عددية لتقريب حل المعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتب الكسرية، ويتم ذلك باستخدام كثيرات حدود برنشتاين، باستعمال طريقة كثيرات الحدود من نوع برنشتاين وتم تقديم أمثلة عددية للتحقق من فعالية الطريقة المقترحة، والحلول التقريبية تضمن الدقة المطلوبة. الكلمات المفتاحية: المعادلات الكسرية التفاضلية التكاملية، كثيرات حدود برنشتاين.

Résumé :

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter une méthode numérique d'approximation de la solution d'équations fractionnaires intégro-différentielles, et Ceci est fait en utilisant les polynômes de Bernstein, avec l'utilisation de la méthode de polynômes de Bernstein. Des exemples numériques ont été présentés pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée, et des solutions approximatives garantissent la précision requise.

Mots clés: équations fractionnaires intégro-différentielles, polynômes de Bernstein.

Abstract :

The main objective of this thesis is to present a numerical method for approximating the solution of integro-differential fractional equations. This is done using Bernstein polynomials and the Bernstein polynomials method. Numerical examples have been provided to verify the effectiveness of the proposed method, and the approximate solutions ensure the required accuracy.

Keywords: Fractional integro-differential equations, Bernstein polynomials.