



**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique**

**Département de Mathématiques**



## **MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière**: Mathématiques

**Option** : Equation aux dérivées partielles  
et Application

**Par**

-OUADAH Asmea

-REDJEM Aicha

**Sujet**

**Quelques modèles mathématiques pour  
l'amélioration du contour de l'image**

**Devant le jury :**

Mr.Y. ARIOUA	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr.N.BENHAMIDOUCHE	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mm. N. BOUNAB	Prof. Univ de M'sila	Examinatrice

**Promotion : 2017 / 2018**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## Remerciements

*Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail, qu'il soit béni et glorifié.*

*Nous adressons également nos remerciements à Mr BEN HAMIDOUCHEN, pour avoir accepté d'être notre encadreur.*

*Nous le remercions aussi pour ses conseils, ses corrections et ses orientations.*

*Nous tenons aussi à exprimer nos remerciements les plus respectueux à messieurs les membres du jury.*

***Merci***

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappel sur les notions de traitement de l'image</b>	<b>3</b>
1.1 Définition de l'image numérique, mathématique et restaurée[2]	3
1.1.1 L'image numérique	3
1.1.2 L'image mathématique	4
1.1.3 L'image restaurée	4
1.2 Notion de filtrage en traitement de l'image	5
1.2.1 Principe de filtrage	5
1.2.2 filtrage du contour	6
1.3 Modèle mathématique de filtrage linéaire	8
1.3.1 Equation de la chaleur	8
1.4 Notion de contour en traitement de l'image	10
1.4.1 Méthode de détection du contour	11
1.4.2 Les différents filtres du gradient	15
<b>2 Quelques modèles de détection du contour</b>	<b>21</b>
2.1 Modèle de Perona-Malik	21
2.2 Modèle d'Alvarez	24
2.3 Modèle de Malladi-Sethian	24
2.4 Modèle de filtre du choc	26
2.4.1 Méthode des caractéristiques	28
2.5 L'équation de la chaleur inverse	31

<b>3 L'étude du modèle de-filtre du choc-</b>	<b>32</b>
3.1 Le principe du modèle de filtre du choc . . . . .	33
3.2 Construction de la solution avec la méthode des caractéristiques . . . . .	35
3.3 Amélioration du contour via les solutions dites auto-similaires . . . . .	42
3.3.1 Solutions auto-similaires pour le modèle de filtre du choc . . . . .	43
<b>Conclusion</b>	<b>50</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>50</b>

# *Introduction*

Le traitement d'image est un domaine très vaste qui a connu, et qui connaît encore, un développement important depuis quelques dizaines d'années. Le traitement d'image peut être défini comme l'ensemble des méthodes et techniques opérant sur l'image afin d'améliorer ou d'extraire les informations les plus pertinentes ou tout simplement pour fournir une image plus perceptible à l'oeil humain.

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle important dans le traitement de l'image, l'équation de la chaleur est un exemple typique du rôle que peut jouer une EDP, en effet il est connu que la solution de l'équation de la chaleur sous forme intégrale représente un lissage d'une image initiale c'est-à-dire une convolution d'une image initiale avec un filtre Gaussien, qui donne comme résultat une image filtré, mais une image floue. Ainsi plusieurs modèles basés sur les EDPs ont été proposés, le plus célèbre est connu sous le nom de Perona-Malik[12] et [13], dont le principe est d'améliorer les contours, ce modèle est non linéaire difficile à résoudre et qui souffre en plus d'une contrainte liée à l'existence de la solution elle même. D'autres modèles ensuite ont été proposés, pour améliorer les contours d'image, parmi ces modèles il ya le modèle connu sous le nom de Rudin-Osher[7] et [?], ce modèle est appelé également modèle de - filtre de choc- l'équation proposée est une forme plus générale de l'équation dite du transport, mais ce modèle n'a pas connu beaucoup de développement car mathématiquement c'est un problème mal posé. L'idée principale de ce modèle est que des singularités apparaissent au cours de l'évolution qui rend mathématiquement le problème mal posé, mais de point de vue traitement de l'image ceci représente en effet une amélioration du contour. Dans ce mémoire nous allons établir une étude détaillée sur ce modèle, pour mettre en claire le principe du modèle en traitement de l'image et proposer des solutions explicites et surtout son application dans l'opération

d'amélioration du contour d'image. ce modèle a été proposé par Rudin-Osher et développé dans [4]

Ce mémoire est organisé de la manière suivante

Le premier chapitre, est consacré à rappeler quelques définitions et des notions de base du domaine de traitement d'image comme la définition de l'image numérique, mathématique et le principe du restauration de l'image, le concept de filtrage, la solution de l'équation de la chaleur sous forme intégrale, nous avons présenté la définition du contour d'image de point de vue mathématique ainsi que les méthodes de détection du contour, différents filtres de détection du contour ont été présentés.

Dans le deuxième chapitre, nous avons essayé de présenter quelques modèles de détection du contour de l'image, notamment, modèle de Perona-Malik, modèle d'Alvarez [3] et [11], modèle de Malladi-Sethian[1] et enfin le modèle qui fait l'objet de notre étude à savoir le modèle de-filtre de choc-. Nous avons donc présenté d'abord la forme générale du modèle en dimension 1, ensuite deux formes particulières ont été également présenté pour être traité ensuite. Enfin dans ce chapitre nous avons détaillé le principe de la méthode des caractéristiques qu'on va utiliser ultérieurement dans le chapitre trois.

Finalement, dans le troisième chapitre, nous avons établi une étude détaillée sur le modèle de-filtre du choc- ainsi nous avons résolu ce modèle sous certaines conditions en appliquant la méthode des caractéristiques et illustrer le phénomène d'amélioration du contour via ce modèle. A la fin nous avons présenté une petite contribution par l'introduction des solutions dites -auto similaires- nous avons calculé explicitement des solutions auto-similaires intervenant dans l'opération d'amélioration du contour.

# Chapitre 1

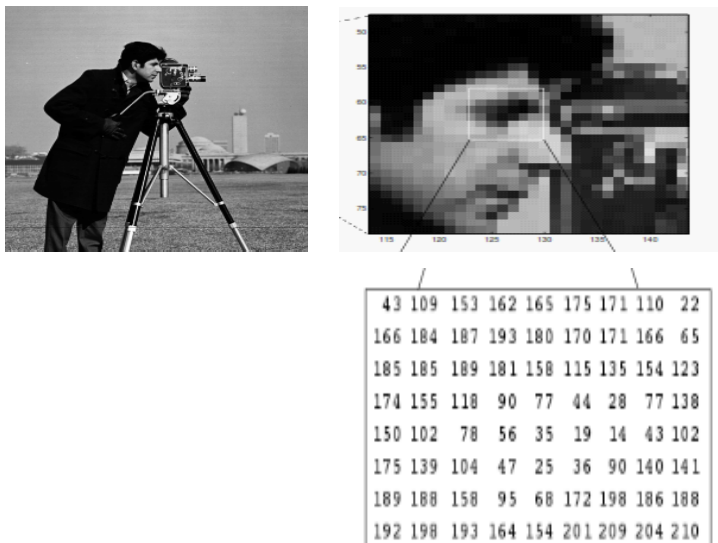
## Rappel sur les notions de traitement de l'image

### 1.1 Définition de l'image numérique, mathématique et restaurée[2]

#### 1.1.1 L'image numérique

**Définition 1.1.1** *Une image numérique est une matrice des pixels repérés par leur coordonnées  $(x, y)$ . S'il s'agit d'une image couleur, un pixel est codé par 3 composantes  $(R, V, B)$ . (chacune comprise au sens large entre 0 et 255), représentant respectivement les doses de rouge, du vert, et du bleu. Pour l'image de niveau de gris la composante des pixels est comprise entre 0 et 255, représentant la luminosité du pixel.*

### Exemple 1.1.1



### 1.1.2 L'image mathématique

**Définition 1.1.2** *En traitement d'image, la majorité du temps, on considère que l'image est une fonction mathématique de  $\mathbb{R} * \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  où le couple d'entrée est considéré comme une position spatiale, le singleton de sortie comme l'intensité (couleur ou niveaux de gris) du phénomène physique. Il arrive cependant que l'image soit dite "3D" donc la fonction de  $\mathbb{R} * \mathbb{R} * \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Les images couleurs peuvent être représentées soit par trois images représentant les trois couleurs fondamentales, soit par une image de  $\mathbb{R} * \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} * \mathbb{R} * \mathbb{R}$ .*

*Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , une image est définie comme une fonction*

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ pour une image niveau de gris}$$

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ pour une image couleur}$$

### 1.1.3 L'image restaurée

**Définition 1.1.3** *Le flou ou la dégradation, d'une image peut être causée par de nombreux facteurs:*

- *Mouvement au cours du processus de capture d'image, par l'appareil photo ou lorsque de longues durées d'exposition sont utilisés, par le sujet.*

- *Distorsion lumineuse dispersée en microscopie confocale.*

## 1.2 Notion de filtrage en traitement de l'image

**Définition 1.2.1** *Le filtrage dans le traitement d'image est un processus qui permet de nettoyer les apparences et permet de mettre en surbrillance sélective des informations spécifiques.*

**Définition 1.2.2** *Un filtre linéaire est souvent une transformation mathématique (appelée produit de convolution) permettant pour chaque pixel de la zone à laquelle il s'applique de modifier sa valeur en fonction des valeurs des pixels avoisinants, affectée des coefficients.*

*Le filtre est représenté par un tableau (matrice carrée), de dimension impaire (souvent 3 ou 5) qui se déplace sur l'image en remplaçant la valeur de chaque pixel de l'image par le résultat d'une transformation portant sur le pixel et ses voisins. Voici un exemple de filtre  $3 \times 3$*

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

### 1.2.1 Principe de filtrage

**Définition 1.2.3** (*convolution discrète*)

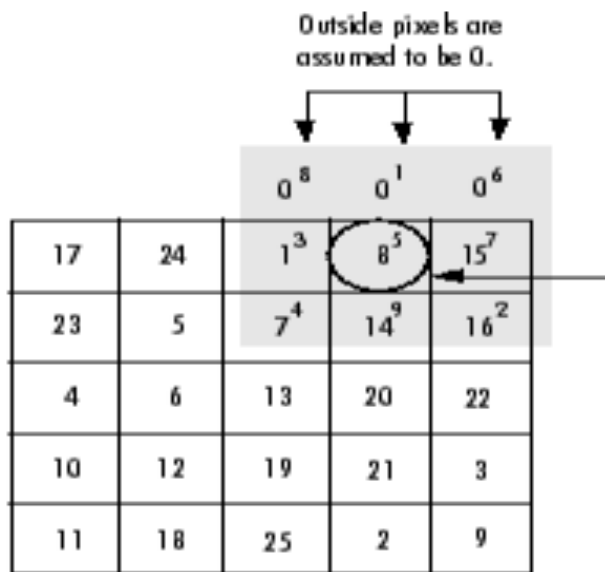
*Soit  $I$  une image numérique, soit  $h$  une fonction  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  à valeurs réelles, la convolution de  $I$  par  $h$  est définie par*

$$(I * h)[x, y] = \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} h(i, j)[x - i, y - j]$$

*tels que  $h$  est un noyau de convolution.*

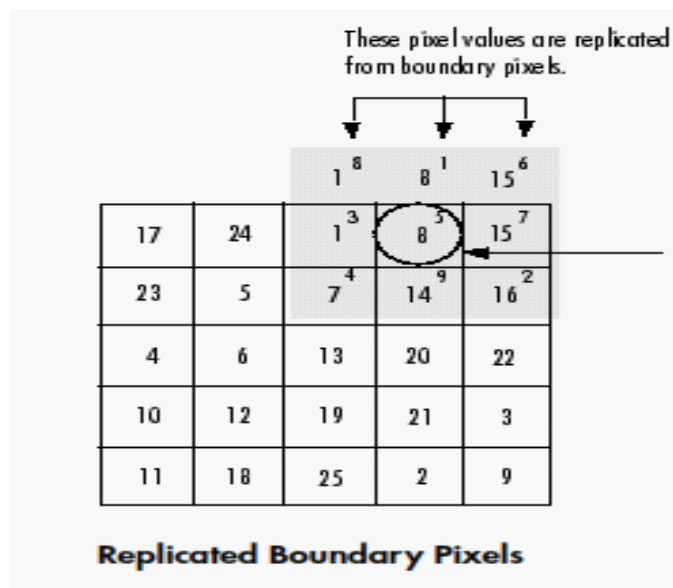
*Les nouvelles valeurs des pixels sont calculées par produit scalaire entre le noyau de convolution et le voisinage correspondant du pixels.*





**Fig1:** Remplissage du matrice

2. On peut extrapoler par un miroir



**Fig2:** Remplissage du matrice

## 1.3 Modèle mathématique de filtrage linéaire

### 1.3.1 Equation de la chaleur

Le modèle de filtrage linéaire le plus connu est l'équation de la chaleur

#### Définition 1.3.1 (*Equation de la chaleur sur $\mathbb{R}$* )

Soit le problème de la chaleur définie en 1 dimension comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, k > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

On sait que pour  $f(x)$  est continue, bornée, la solution du problème s'écrit comme

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp \frac{-(x-y)^2}{4kt} dy$$

Alors, la solution est écrit comme une convolution

$$u(x, t) = f * g_{\sigma}$$

Avec  $g_{\sigma}$  représente le filtre gaussien tel que

$$g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{-x^2}{2\sigma^2}$$

$\sigma$  : représente l'échelle de filtrage.

En traitement de l'image, on considère l'équation de la chaleur en 2 dimension définie comme suit

#### Définition 1.3.2 (*Equation de la chaleur sur $\mathbb{R}^2$* )

Soit l'image définie par  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , et soit l'équation de la chaleur donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x, y, t), & t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \end{cases}$$

Pour  $f$  continue, bornée, la solution est donnée par

$$u(x, y, t) = (f * g_\sigma)(x, y)$$

Avec

$$g_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|X|^2}{\sigma^2}, \quad X = (x, y)$$

$\sigma$  : indique la position du contour de l'image en fonction de  $\sigma$ .

Le principe est donc de filtrer l'image initiale  $f(x, y)$  par le filtre Gaussien, pour obtenir une image filtrée  $u(x, y)$  qui est la solution du problème de la chaleur.

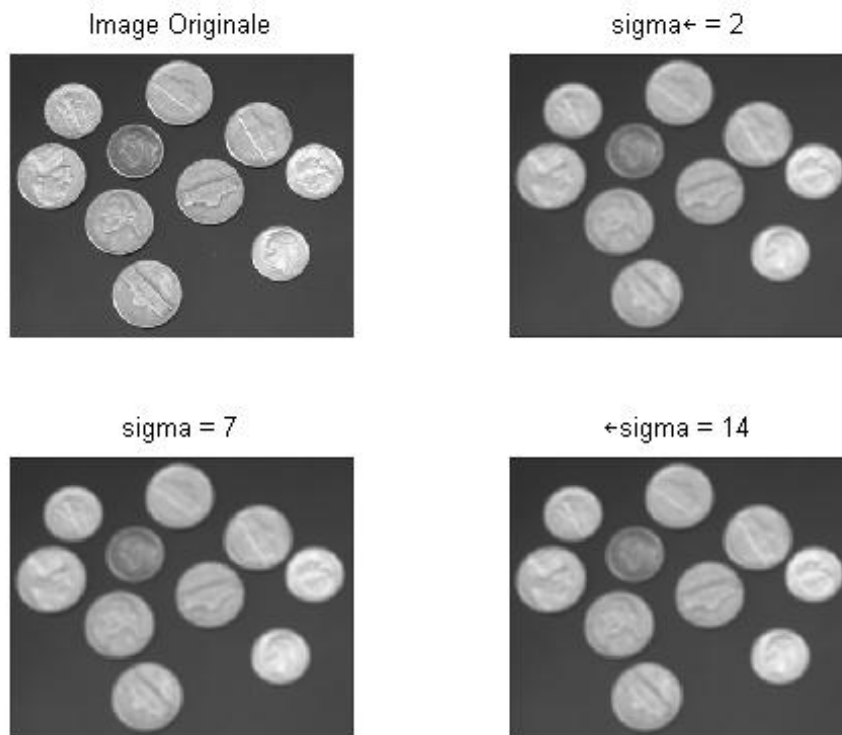
**Définition 1.3.3** (*Filtre Gaussien*)

*Le filtre Gaussien est un filtre linéaire spéciale avec des propriétés mathématiques bien précises. Elle est définie par la fonction*

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-x^2}{\sigma^2}$$

Voici quelques exemples de filtrage des images par le filtre gaussien.[10]

**Exemple 1.3.1**



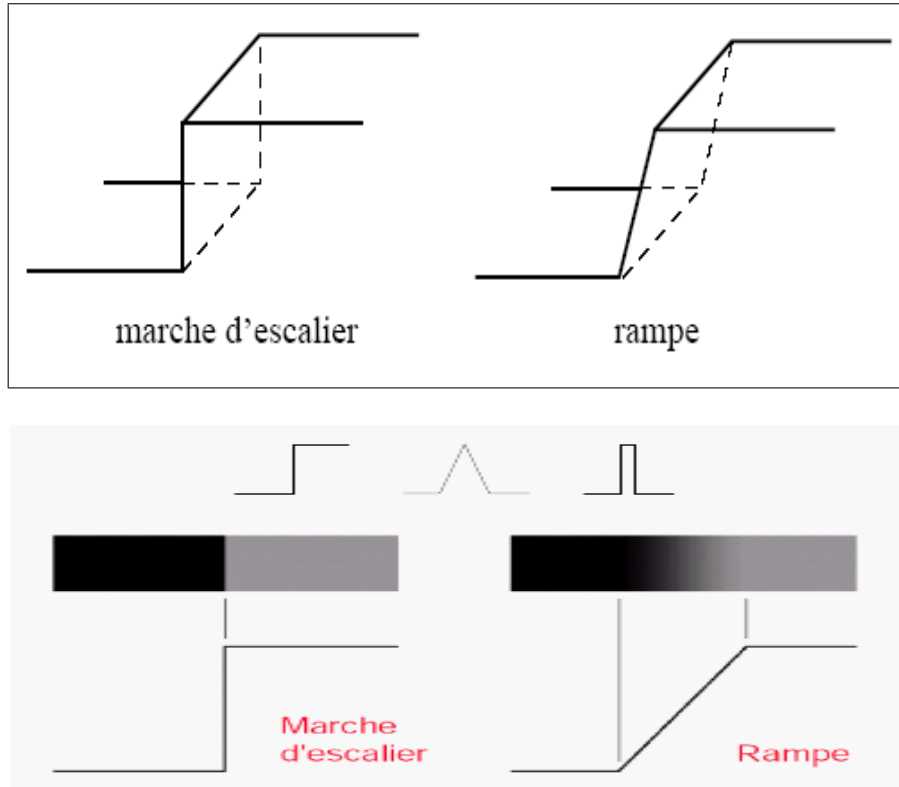
**Fig3:** Les résultats de filtre Gaussien

## 1.4 Notion de contour en traitement de l'image

**Définition 1.4.1** *Le contour est définie en tant que variation (ou discontinuité) de l'intensité d'image, si  $f(x;y)$  une image, le contour est le lieu des fortes variations de  $f$ , et qui peut être aussi décrit par le zéros Laplacien.*

On distingue deux types de contour simple

1. **Marche d'escalier** : le contour est net (contour idéal).
2. **Rampe** : le contour est plus flou.



### 1.4.1 Méthode de détection du contour

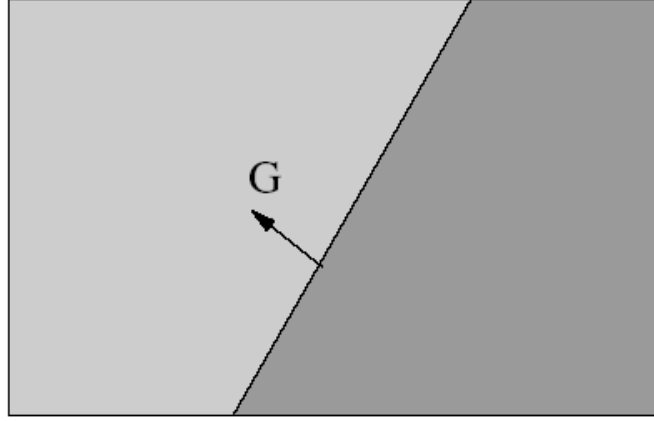
**Définition 1.4.2** *La détection de contour est une étape préliminaire à de nombreuses applications de l'analyse d'image. Les contours constituent en effet des indices riches, au même titre que les points d'intérêts. Pour toute interprétation ultérieure de l'image. Les contours sont caractérisés par des discontinuités de la fonction d'intensité dans les images. Le principe de la détection de contours repose donc sur l'étude des dérivées de la fonction d'intensité dans l'image : les extrêmes locaux du gradient de la fonction d'intensité et les passages par zéro du laplacien.[2]*

#### Modèles du détection du contour

Dans une image  $f(x, y)$ , un contour apparaît comme une ligne où sont localisées les très fortes variations de  $f$ .

Soit  $\vec{G}$  le gradient de  $f$

$$G = \vec{\nabla}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T \quad (1.4.1)$$



On associe à  $f$  une image du module de gradient de  $f$

$$G = |\vec{\nabla}f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \quad (1.4.2)$$

Ainsi qu'une image des directions du gradient à partir de

$$\vec{g} = \frac{\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f|} \quad (1.4.3)$$

Un contour est alors défini comme le lieu des maximums du gradient dans la direction  $\vec{g}$  du gradient. Un point de contour vérifie donc

$$\frac{\partial G}{\partial g} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial g^2} \leq 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial g} = \vec{g} \cdot \vec{\nabla} \quad (1.4.4)$$

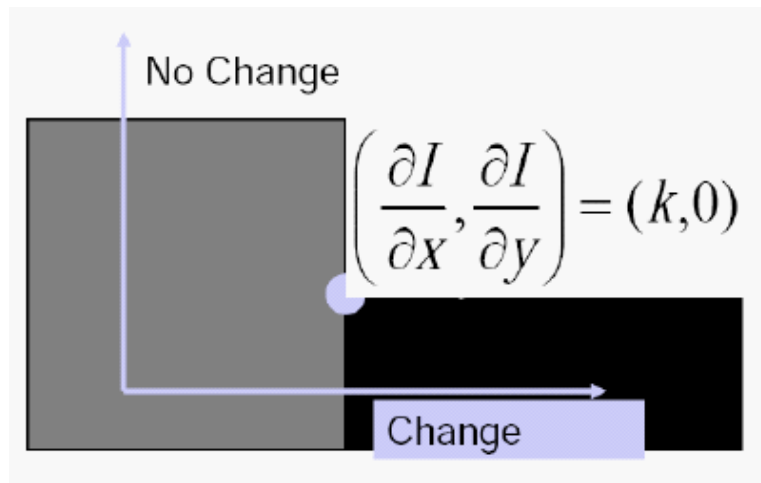
L'équation obtenue est complexe et non linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = 0$$

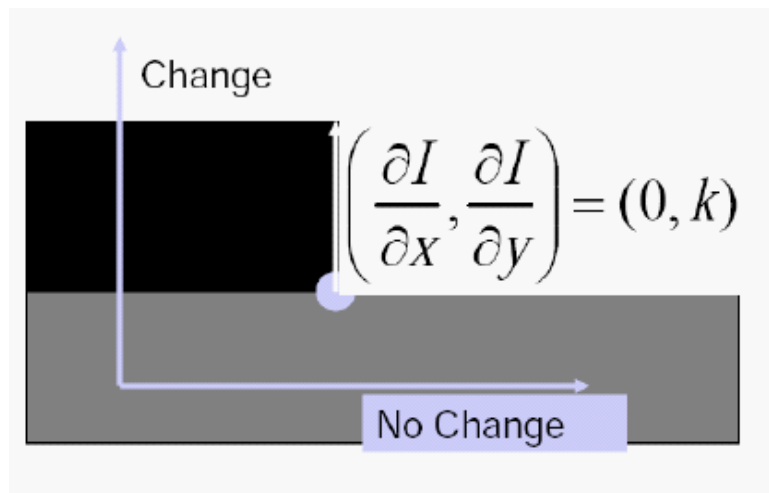
Lieu des maximums du gradient dans la direction  $\vec{g}$  du gradient

Où  $\vec{g}$  la normale à la surface définie pour  $f(x, y)$

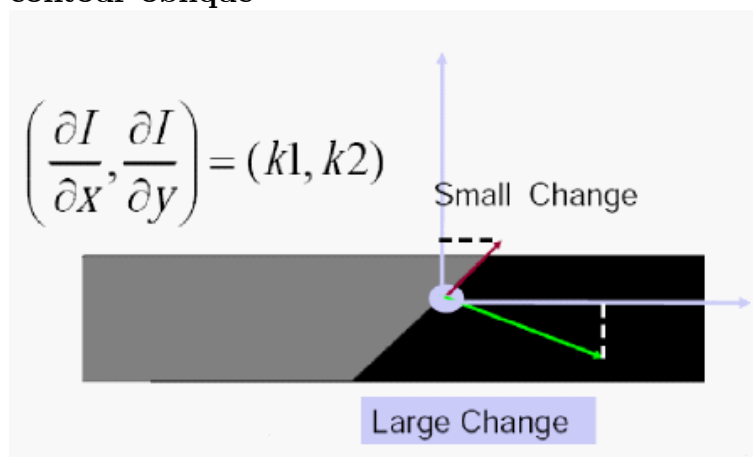
contour verticale



Contour horizontale



contour oblique



- Afin de garantir la double dérivation même en présence de discontinuités de type marche d'escalier, on prétraite l'image  $f$  par convolution avec une fonction au moins deux fois dérivables. On a utilisé pour cela la gaussienne.

On peut également se placer dans les axes locaux définis par la tangente  $\vec{t}$  et la normale  $\vec{g}$  à la surface  $f(x, y)$ ,

Ce repère est tournée d'un angle  $\theta$  par rapport au repère  $\{x, y\}$

$$\theta = \arctg \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right) \quad (1.4.5)$$

On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

et les équations (1.4.4) donnent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial g^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta$$

Cette équation n'est pas plus simple à résoudre que la précédente, cependant elle se relie à l'équation du laplacien de  $f$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Par un changement de repère euclidien (le repère  $\{t, g\}$ )

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

On néglige la composante tangentielle ( $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ ), c'est-à-dire le contour a une courbure très faible, alors

$$\Delta f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial g^2} = 0.$$

### **Le but de détection du contour**

Le but de la détection de contour est de repérer les points d'une image numérique qui correspondent à un changement de l'intensité lumineuse. La détection des contours d'une

image réduit de manière significative la quantité des données et élimine les informations qu'on peut juger moins pertinentes, tout en préservant les propriétés structurelles importantes de l'image. Il existe un grand nombre des méthodes de détection de l'image. Dans ce qui suit quelques méthodes seront exposées .

## 1.4.2 Les différents filtres du gradient

### Méthode de Sobel

Le principe de ce filtre est que l'opérateur calcule le gradient de l'intensité de chaque pixel. Ceci indique la direction de la plus fort variation du claire au sombre, ainsi que le taux de l'échangeement dans cette direction. On connaît alors les points de changement soudain de liminosité, correspondant probablement à des bords, ainsi que l'orientation de ces bords.

L'opérateur utilise des matrices de convolution, la matrice (généralement de taille  $3 \times 3$  ).[2]

Soit  $A$  image source,  $G_x$  et  $G_y$  deux images qui en chaque point contiennent des approximations respectivement de la dérivée horizontale ou verticale de chaque point. Ces images sont calculées comme suite :

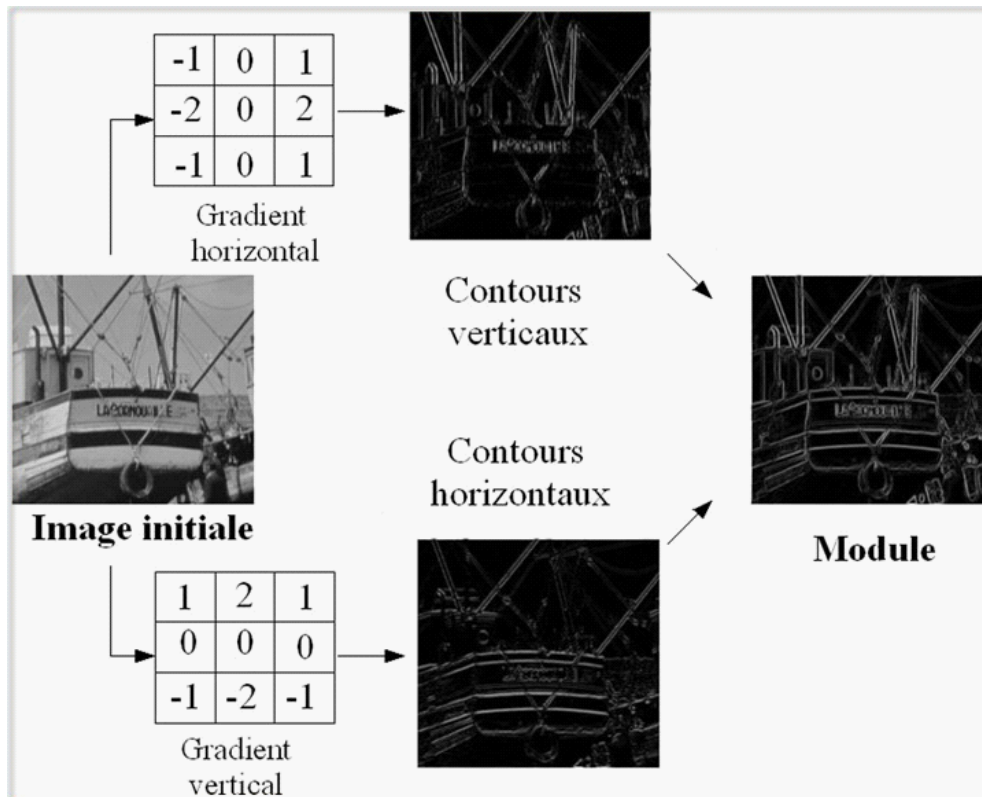
$$G_x = \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} * A \quad \text{Et} \quad G_y = \begin{matrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} * A$$

En chaque point, les approximations des gradient horizontaux et verticaux peuvent être combinées comme suit pour obtenir une approximation de la norme du gradient

$$|G| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

Alors, la méthode de Sobel trouve des bords en utilisant l'approximation Sobel de la dérivée. Il renvoie des bords à ceux où le gradient de  $A$  est maximal.

## Exemple 1.4.1



*Fig4: les résultats pour le filtre de Sobel*

## Méthode de Prewitt

La matrice qui correspond au filtrage horizontal, faisant ressortir essentiellement les contours verticaux, selon l'opérateur de Prewitt, s'écrit  $H_x = [-1 \ 0 \ 1]$  tandis que la matrice verticale  $H_y$  est sa transposée. Les deux convolutions avec le tableau de valeurs initiales créent deux tableaux  $G_x$  et  $G_y$  à l'origine du tableau  $G$  sur lequel on peut localiser les maximums.

**Exemple 1.4.2**



*Fig5: les résultats pour le filtre de Prewitt*

**Méthode de Roberts**

Le détecteur de Roberts permet de calculer le gradient bi-dimensionnel d'une image de manière simple et rapide, il amplifie les zones où la norme de gradient qui correspond souvent au contour. L'opérateur cherche les dérivés selon des directions diagonales et est constitué de 2 masques  $2 \times 2$  de convolution. Cet opérateur calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial G}{\partial x} = G(X + 1, Y + 1) - G(X, Y)$$

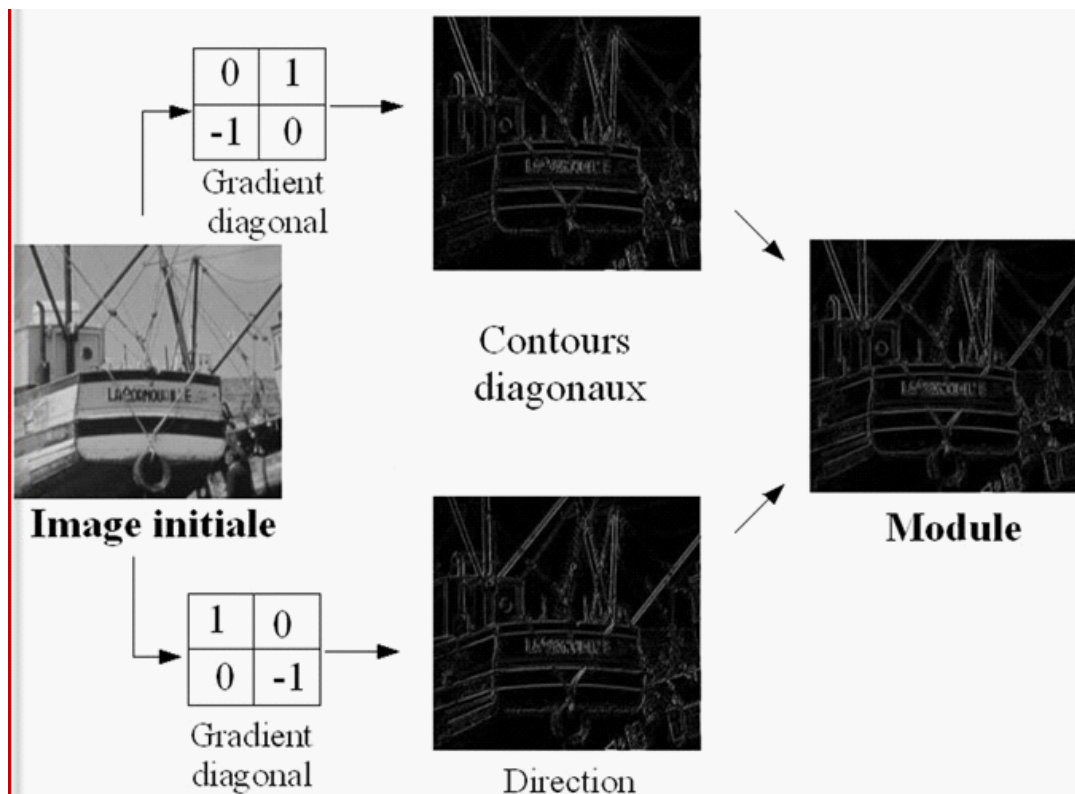
$$\frac{\partial G}{\partial y} = G(X, Y + 1) - G(X + 1, Y)$$

Cette dérivation est obtenue à l'aide d'une convolution de l'image  $G$  avec des masques  $2 \times 2$  suivants

$$R_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Exemple 1.4.3



*Fig6: Les résultats de filtre Roberts*

### Méthode de Canny

Le filtre de Canny (ou détecteur de Canny) est utilisé en traitement d'image pour la détection des contours. L'algorithme de Canny est un algorithme qui cherche les contours en testant à la fois la norme et la direction du gradient de l'image en un point. Il a plusieurs avantages

1. **Détection** : bon détection des points de contour faibles.
2. **Localisation** : localisation faible des points de contours.

3. **Unicité de la détection** : pour un contour on a un point de contour.

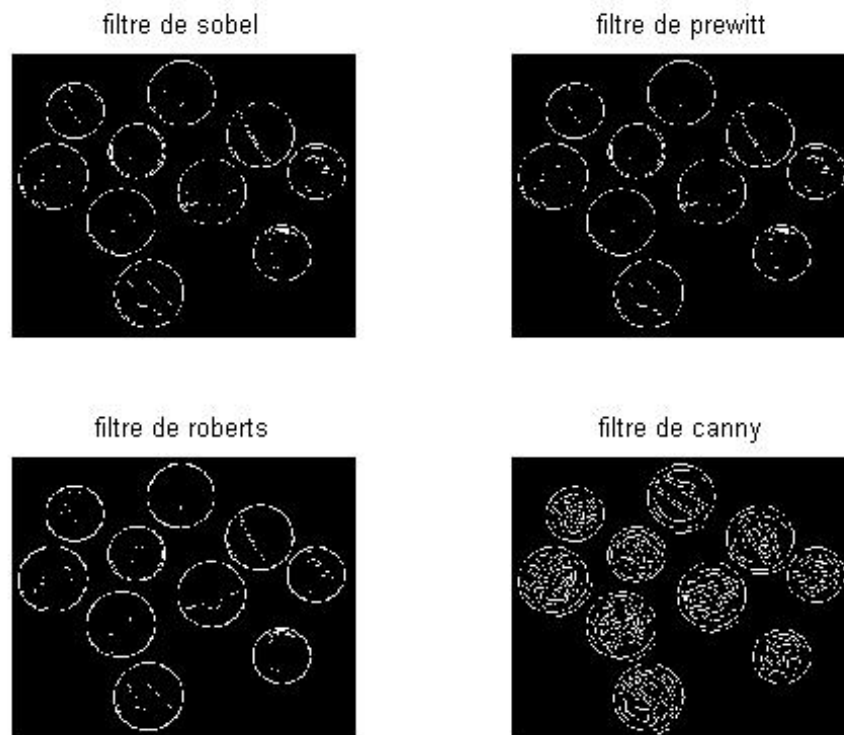
**Exemple 1.4.4**



*Fig7: Les résultats de filtre Canny*

**Exemple 1.4.5**

*Cet exemple représente les différents méthodes de détection du contour.*



**Fig8:** Les différentes méthodes de détections du contour

# Chapitre 2

## Quelques modèles de détection du contour

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques modèles mathématiques de détection du contour, les modèles les plus connus sont, Perona-Malik [1], Modèle d'Alvarez [3] et [11], Malladi Sethian [1], le modèle de filtre du choc [?], [7] et [16]. Nous allons commencer par le modèle de Perona-Malik (P-M).

### 2.1 Modèle de Perona-Malik

Pour améliorer les résultats obtenus par l'EDP de la chaleur, Perona-Malik (P-M) ont proposé de modifier l'équation de la chaleur en y intégrant le processus de détection des bords, comme suit:

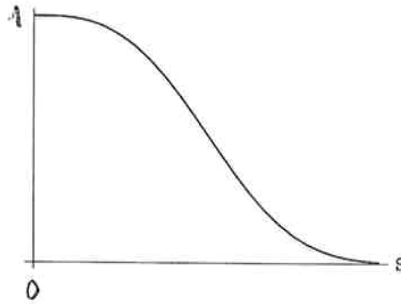
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Où  $\operatorname{div}$  et  $\nabla$  indiquent l'opérateurs de divergente et de gradient par rapport aux variables spatiales respectivement et  $g$  est une fonction décroissante de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ , on peut choisir par exemple :

$$g(|\nabla u|) = \exp(-|\nabla u|^2 / \delta^2) \quad (2.1.2)$$

$$g(|\nabla u|) = 1/(1 + |\nabla u|^2/\delta^2) \tag{2.1.3}$$

Si  $g = 1$ , on retrouve l'équation de la chaleur. On impose souvent  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ ,  $g(0) = 1$



La fonction de diffusivité  $g(\cdot)$

$g$  est la fonction de diffusivité joue un rôle critique dans l'exécution du filtrage par diffusion non linéaire. Et  $\delta$  est le paramètre qui appelé "seuil ou barrière de diffusion". Ainsi, différentes fonctions de diffusivité ont été proposées. La période d'affaiblissement, en particulier, d'une fonction de diffusivité effectue sa capacité du perfectionner des bords. Les fonctions de diffusivités les plus utilisées généralement sont :

Les fonctions de diffusivité les plus utilisées généralement	
$g_1(x) = 1/(1 + x^2/\delta^2)$	
$g_2(x) = \exp(-x^2/\delta^2)$	
$g_3(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-3.5/(x/\delta)^4), & \text{pour } x > 0 \\ 1 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$	
$g_4(x) = 0.5 \cdot ((\tanh(0.2 \cdot (\delta - x))) + 1)$	
$g_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - (1 - (x/\delta)^2)^2, & \text{pour }  x  > \delta \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$	

**Les inconvénients de modèle de Perona-Malik :**

Cette méthode possède plusieurs inconvénients dont le premier est son inefficacité dans les zones où le bruit présente de grosses discontinuités. Le second inconvénient est d'ordre

théorique pour les fonctions  $g(\cdot)$  précédentes car on peut montrer qu'il n'existe pas de solution à l'équation (2.1.1). En effet, pour obtenir en même temps l'existence et l'unicité d'une solution pour une telle EDP, il a été montré que la fonction  $g(|\nabla u|)$  doit respecter la condition que  $|\nabla u|g(|\nabla u|)$  soit non décroissante. Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut observer une solution instable se former, impliquant la génération des résultats qui peuvent être très différents si de petits changements affectent l'image originale. Plus précisément, on peut démontrer que cette méthode agit comme une équation de la chaleur inverse près de très fortes discontinuités ( $|\nabla u| > \delta$  pour l'équation (2.1.3) et  $|\nabla u| > \frac{\delta}{\sqrt{2}}$  pour l'équation (2.1.2)), ce qui rend le processus instable même si l'image initiale est assez lisse.

Une solution pour résoudre le problème de l'instabilité est de travailler avec une version régularisée de l'équation impliquant le gradient  $g(|\nabla G_\delta * u|)$  en lieu et place de  $g(|\nabla u|)$ . Cette solution rend le problème bien posé et les résultats stables. Ceci a été indépendamment proposé dans [3] et [11]. Toutefois, on peut noter que cette nouvelle EDP possède aussi quelques inconvénients. On plus du fait qu'il est difficile de lui trouver une interprétation géométrique, la stabilité de ce modèle n'est généralement pas garantie quand le paramètre  $t$  tend vers 0.

### Exemple 2.1.1



*Image originale*



*Image filtrée par un  
filtre linéaire*



*Image filtrée par un filtre  
non linéaire (PM)*

## 2.2 Modèle d'Alvarez

Une amélioration de cette idée de diffusion anisotrope qui prend en compte ses remarques a été ainsi proposée par Alvarez, Lions et Morel dans [3] qui ont étudié une classe d'EDP paraboliques non linéaires qui généralise l'idée de diffusion anisotrope initialement proposée par Perona-Malik dans [12] et [13] et améliorée dans [3] et [11].

le schéma proposée est un schéma issu de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla G_\delta * u|) |\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où  $u_0(x, y)$  constitue l'image initiale à traiter,  $u(x, y, t)$  est l'image lissée à l'échelle référencé par le paramètre  $t$  et  $g(|\nabla u|)$  une fonction non croissante de variable  $|\nabla u|$  qui tend vers 0 quand la variable  $|\nabla u|$  tend vers l'infini. En remarquant que le terme  $|\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$  correspond à la dérivée second de  $u$  dans la direction orthogonale au gradient  $\nabla u$ , l'équation (2.2.1) peut s'interpréter comme un lissage anisotrope conditionnel mais seulement le long des courbes de niveau de l'image  $u(x, y, t)$ . Le terme impliquant la fonction  $g(|\nabla u|)$  permet de contrôler la vitesse de diffusion. Dans des zones où le gradient est faible, ce terme est grand et permet une diffusion anisotrope le long de la rirection orthogonale au gradient alors que dans les zones où le gradient est fort, la pondération est faible et annule la diffusion d'où le nom de lissage sélectif donné par les auteurs à ce schémas. On peut remarquer que si  $g(|\nabla u|) = \frac{1}{|\nabla u|}$ , ce modèle tend vers une version simplifiée  $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$  quand  $\delta$  tend vers 0, qui peut être interprétée comme un cas particulier de l'approche de Perona-Malik.

## 2.3 Modèle de Malladi-Sethian

Une technique approprié du traitement d'image se base sur la formation d'EDP de type d'évolution pour l'intensité d'image  $u(x, y)$ , ou brièvement (l'image), cette fonction est également appelée le niveau de gris, prend des 0 et 1,  $u \in [0, 1]$ , et elle définie sur un domaine bidimensionnel de l'image.

Le modèle habituel d'évolution mène à une équation non linéaire de type parabolique, probablement dégénérée ou singulière, la non linéarité est créée par la loi rapportant le flux d'intensité d'image par l'intensité d'image.

Il a été observé par Perona et Malik, que pour un choix approprié de cette non linéarité fondamentale, est apparu un effet de perfectionnement des bords d'image qui a un grand intérêt dans l'application au traitement, au bruitage, et au débruitage des images.

Le modèle de diffusion anisotrope de Perona et Malik a une influence profonde dans le domaine, étant la source de beaucoup de derniers développements, dont : le modèle proposé par Malladi et Sethian [1], ce modèle mène après la graduation appropriée à l'équation suivante pour l'intensité d'image :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}} k$$

où  $\nabla u$  dénote le gradient spatiale de  $u$ ,  $k$  dénote la courbure de la surface  $z = u(x, y)$  tel que :

$$k = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$$

L'équation représente le mouvement par la courbure (écoulement de la courbure) peut être écrite comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \\ &= \sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2} \operatorname{div} \left( \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}} \right) \\ &= \frac{1 + u_x^2 + u_Y^2}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}} \left( \frac{u_{xx} \sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2} - \frac{u_x u_{xx} + u_x u_y u_{xy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}} - \frac{u_{yy} \sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2} - \frac{u_y u_{yy} + u_x u_y u_{xy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2} (u_{xx} + u_{yy}) - \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_Y^2}} \\ &= \frac{(1 + u_Y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy}}{1 + u_x^2 + u_Y^2} \end{aligned}$$

Ce modèle décrit donc le filtrage du contour basé sur cette approche géométrique.

Il existe une forme plus générale de ce modèle basé sur la même technique, de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{1-2\gamma}{2}} k,$$

Où  $\gamma \succ \frac{-1}{2}$  est un paramètre constante, qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(1 + u_Y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{(1 + u_x^2 + u_Y^2)^{1+\gamma}}$$

Si  $\gamma = 0$  on retrouve le modèle précédent. Pour le autres valeur de  $\gamma$ , on connaît pas grand chose sur ce modèle, car aucune étude n'a été abordée pour le cas de  $\gamma > 0$ .

## 2.4 Modèle de filtre du choc

On présente d'autres approches développées dans le cadre du problème de la restauration d'images et qui font appel à un schéma aux EDP plus directement inspiré des travaux menés dans le domaine de la mécanique des fluides, la solution  $u(x, y, t)$ , qui a comme condition initiale l'image à restaurer  $u_0(x, y)$ , développe des discontinuités assimilées à des chocs.

L'utilisation des concepts et des techniques développés dans le cadre du solution d'EDP hyperboliques non-linéaires pour des problèmes de traitement des images a été proposée par L.Rudin [?], qui a été le premier à introduire dans ce domaine la notion de filtre de choc. Ces filtres sont des opérateurs dont l'application permet le développement dans le signal restauré de phénomènes analogues aux ondes de choc connues en mécanique des fluides.

Le premier modèle 1D que Rudin a considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + F(u_{xx}) |u_x| = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Où la fonction  $F$  joue le rôle d'un détecteur des contours : elle doit respecter les conditions  $F(0) = 0$  et  $F(s) \cdot \text{sign}(s) \geq 0$ . Du choix de  $F$  dépend la qualité du rehaussement obtenu. On prenant  $F(u_{xx}) = u_{xx}$  l'interprétation du (2.4.1) est immédiate : dans le voisinage d'un point d'inflexion du signal (équation) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -|u_x| u_{xx} \quad (2.4.2)$$

A une constante près, (2.4.2) représente l'équation de diffusion inverse de la chaleur dans le cas 1D (équation de diffusion avec le temps inversé). Par analogie avec la diffusion de la chaleur qui introduit du flou au fur et à mesure de son évolution, l'évolution inverse le flou en rehaussant les contours.

L'équation classique des filtres de choc s'obtient en prenant  $F(u_{xx}) = \text{sign}(u_{xx})$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{sign}(u_{xx}) |u_x| \quad (2.4.3)$$

La généralisation pour les cas 2D, en terme des dérivées secondes directionnelles est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{sign}(u_{\eta\eta}) |\nabla u| \quad (2.4.4)$$

(2.4.4) introduit des discontinuités tout en gardant les points d'inflexions de l'image originale ( $u_{\eta\eta} = 0$ ), le résultat est une image constante par morceaux séparés par des discontinuités aux points d'inflexions.

Les équations des filtres de choc, telle qu'elle ont été proposées par Osher et Rudin sont efficace pour l'élimination du flou; dans les cas des images bruitées, le bruit peut introduire une infinité des points d'inflexions, perturbant le processus du rehaussement. La sensibilité au bruit limite l'utilisation de ces filtres de choc pour des applications pratiques.

**a- Image originale**      **b-Image floue**      **c-Résultat de(2.4.3)appliquée à(b)**



Dans la suite de notre travail nous allons nous concentrer et étudier en détail le modèle de Rudin-Osher (filtre de choc).

Pour étudier ce modèle, nous allons utiliser la méthode des caractéristiques, commencer par la présentation de cette méthode

### 2.4.1 Méthode des caractéristiques

**Définition 2.4.1** *La méthode des caractéristiques est une technique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Elle est utilisée dans des nombreux domaines tels que la mécanique des fluides ou le transport des particules.*

*Dans certains cas particulières, la méthode des caractéristiques peut permettre la résolution purement analytique de l'équation aux dérivées partielles. Dans les cas plus complexes, la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème.*

#### Principe de la méthode

Pour une équation aux dérivées partielles, la méthode des caractéristiques cherche des courbes (appelées lignes caractéristiques, ou plus simplement caractéristique) le long desquelles l'équation aux dérivées partielles se réduit à une simple équation différentielle ordinaire. La résolution d'équation différentielle ordinaire le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème originale.[4]

#### Notation

La dérivée totale est la dérivée d'une fonction  $u \in C^1(\Omega)$  en un point  $x \in \Omega$  est notée  $Du(x)$ . Par définition, la dérivée totale est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Cette application linéaire peut être identifiée à un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  qu'on appelle aussi le gradient de  $u$  en  $x$ , noté :  $\nabla u(x)$ . On a :

$$\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Considérons une EDP générale de premier ordre suivant :

$$\begin{cases} F(x, u(x), Du(x)) = 0 & \text{dans } U \\ u = g & \text{sur } \Gamma, \Gamma \subset \partial U \subset \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Supposons que la courbe est paramétrée comme

$$x(s) = (x_1(s), \dots, x_N(s))$$

- on définit

$$\begin{cases} z(s) = u(x(s)) \\ p(s) = \nabla u(x(s)) \end{cases} \quad (2.4.6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z(s) = u(x_1(s), \dots, x_N(s)) \\ p(s) = \nabla u(x_1(s), \dots, x_N(s)) \end{cases}$$

- Afin d'éliminer le terme dérivée seconde, on défini  $x(s)$  comme une solution du système EDO

$$\dot{x}_j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s))$$

Maintenant, la question est de choisir une bonne courbure  $x(s)$  d'une manière qu'on peut calculer  $z(s)$  et  $p(s)$ . Pratiquement, nous devons trouver les équations satisfaites par  $x(s)$ ,  $z(s)$  et  $p(s)$  et les résoudre.

- On dérive la 1<sup>ère</sup> équation de (2.4.6) par rapport à  $s$

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \dot{x}_1(s)u_{x_1} + \dot{x}_2(s)u_{x_2} + \dots + \dot{x}_N(s)u_{x_N} \\ &= \sum_{j=1}^N u_{x_j} \dot{x}_j(s) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s)) \dot{x}_j(s) \\ &= \sum_{j=1}^N p_j(x(s)) \dot{x}_j(s) \\ &= \sum_{j=1}^N p_j(x(s)) \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)) \end{aligned}$$

- On simplifie la 2<sup>ème</sup> équation de (2.4.6)

$$\begin{aligned}
 p(x(s)) &= \nabla u(x(s)) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(s)) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(s), x_2(s), \dots, x_N(s)) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1(s), x_2(s), \dots, x_N(s)) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1(s), x_2(s), \dots, x_N(s)) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- On dérive la 2<sup>ème</sup> équation de(2.4.6) par rapport à  $s$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_i &= \dot{x}_1(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_1} + \dot{x}_2(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_2} + \dots + \dot{x}_N(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_N} \\
 &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x(s)) \dot{x}_j(s), \quad i = 1, \dots, N \\
 &= \sum_{j=1}^N u_{x_i x_j}(x(s)) \dot{x}_j(s), \quad i = 1, \dots, N \quad \left( \dot{p}_i = \frac{dp_i}{ds} \right).
 \end{aligned}$$

- On dérive (2.4.5) par rapport à  $x_i$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial F}{\partial p_j}(x, u, Du) u_{x_j x_i} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, u, Du) u_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, u, Du) = 0.$$

- On évalue l'équation ci-dessus à  $x(s)$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)) u_{x_j x_i}(x(s)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x(s), z(s), p(s)) p_i(s) + \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(s), z(s), p(s)) = 0$$

Alors,

$$\dot{p}_i(s) = - \frac{\partial F}{\partial z}(x(s), z(s), p(s)) p_i(s) - \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(s), z(s), p(s))$$

- Finalement, on a

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = D_p F(x(s), z(s), p(s)), \\ \dot{z}(s) = D_p F(x(s), z(s), p(s))p(s), \\ \dot{p}(s) = -D_x F(x(s), z(s), p(s)) - D_z F(x(s), z(s), p(s))p(s). \end{cases}$$

## 2.5 L'équation de la chaleur inverse

Nous avons constatés dans le 1<sup>er</sup> chapitre que faire une convolution par un noyau gaussien revient à résoudre une équation de la chaleur. Le temp final joue le rôle de l'écart type de la gaussienne. Pour faire l'opérateur inverse, la déconvolution on peut donc imaginer de résoudre une équation de la chaleur "rétrograde" en partant de l'état "final" qui est l'image floutée et en ajustant le temp final au rapport signal sur bruit.

Considérons l'équation de la chaleur inverse en dimension 2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \Delta u(x, t) = 0 \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

Où  $u_0$  est l'image original, cette équation est notoirement mal posée.

### • Qu'est ce qu'un problème mal posée ?

Dans un livre célèbre d'Hadamard[6] a introduit la notion de problème bien posée. Il s'agit d'un problème dont :

1. la solution existe;
2. elle est unique;
3. elle dépend continûment des données "stabilité".

Un problème qui n'est pas bien posée au sens de la définition ci-dessus est dite problème mal posée qui ne vérifie pas l'une de les conditions si-dessus.

# Chapitre 3

## L'étude du modèle de-filtre du choc-

On a déjà expliqué dans le deuxième chapitre que Rudin et Osher [16] ont proposé une méthode d'amélioration du contour par EDP pour les images scalaires. Maintenant, nous allons étudier ce modèle appelé -filtre du choc- cette étude détaillée concerne le cas unidimensionnel.

Le modèle générale s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} u_t = -|u_x| F(u_{xx}), x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.0.1)$$

telle que  $F$  est une fonction continue lipshtizienne satisfaisant

$$\begin{cases} F(0) = 0, \\ \text{sign}(s)F(s) > 0, s \neq 0. \end{cases}$$

Deux exemples typiques pour le choix de la fonction  $F$ , de (3.0.1), apparaissent:

- Le premier exemple typique de(3.0.1) est le cas  $F(u_{xx}) = u_{xx}$  :

$$\begin{cases} u_t = -|u_x| u_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.0.2)$$

Qui peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} \text{sign}(u_x))u_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.0.3)$$

l'équation(3.0.3) peut être considérée comme une équation de transport, dont la vitesse de propagation est donnée localement par  $c(x) = \text{sign}(u_x)u_{xx}$ . En plus, puisque les contours sont définis comme des points maximums de  $|u_x|$ , alors, dans ces points nous avons nécessairement  $u_{xx} = 0$ , et localement qui change le sign et ainsi la vitesse  $c(x)$  joue le rôle d'un détecteur des contours, mathématiquement ce type de l'équation est mal posée (type chaleur inverse).

- Le deuxième exemple typique de (3.0.1) est le cas  $F(u_{xx}) = \text{sign}(u_{xx})$

$$\begin{cases} u_t = -|u_x| \text{sign}(u_{xx}), x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.0.4)$$

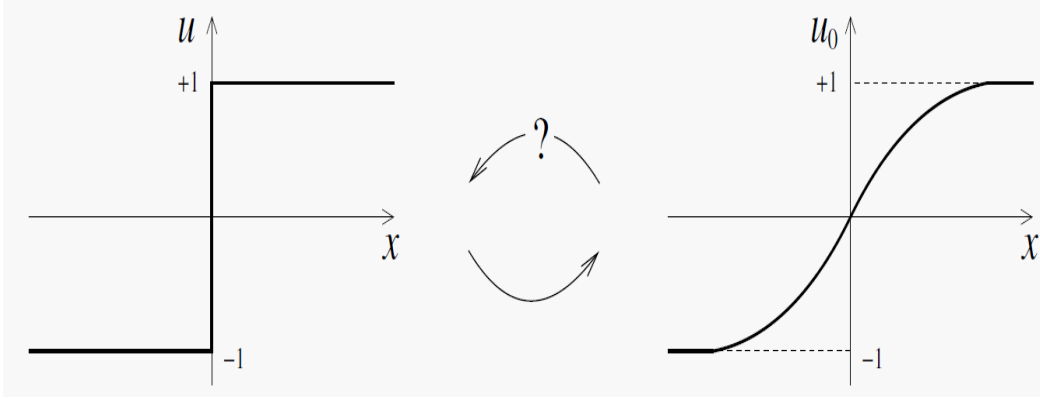
### 3.1 Le principe du modèle de filtre du choc

Nous allons voir tout d'abord comment obtenir l'amélioration du contour via le modèle proposé par Rudin et Osher [16] appelé aussi - filtres de choc-

Dans le cas unidimensionnel, le contour peut être défini comme la variation de l'intensité de l'image, les points du maximum de la dérivée sont les points du contour, on a donc une amélioration significative si la fonction est discontinue, ainsi le contour peut être modifié par la fonction de pas :

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x > 0, \\ -1 & \text{Si } x < 0. \end{cases}$$

Imaginons qu'un processus (une convolution, par exemple) a brouillé ce contour, de sorte que nous avons une version lisse  $u_0(x)$  de  $u(x)$  (voir la figure). Le problème est de restaurer  $u(x)$  à partir de  $u_0(x)$



**Fig9:** Illustration du cas unidimensionnel

D'une certaine manière, l'amélioration et le lissage sont des processus opposés.

Pour l'illustration, nous considérons la condition initiale suivante

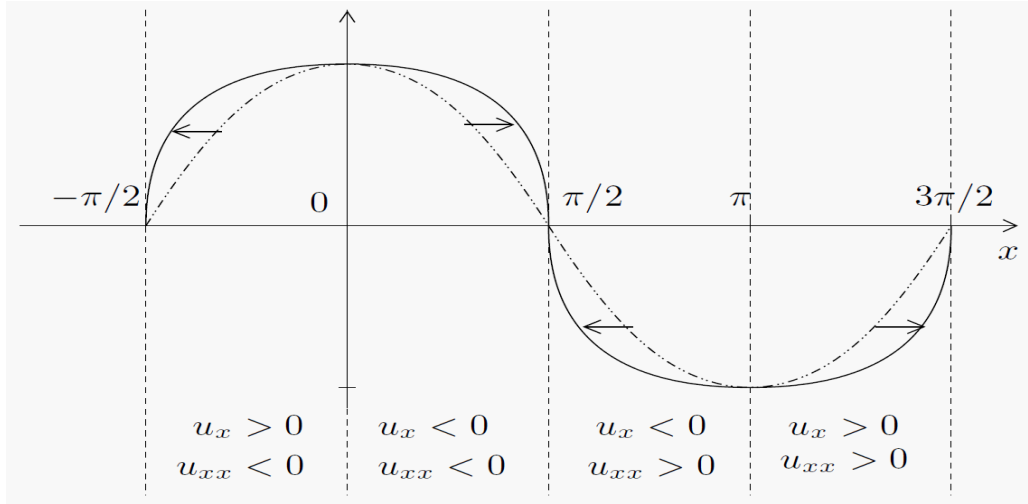
$$u_0(x) = \cos(x)$$

Pour le problème proposé par Rudin et Osher [16]. Pour cette condition, nous l'avons représentée dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  :

Nous pouvons observer, que la direction du mouvement de  $u(x, t)$  est une fonction de  $x$  et dépend du signe du produit  $u_x(x, t)u_{xx}(x, t)$ . On a

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -|u_x(x, t)| \operatorname{sign}(u_{xx}(x, t)), \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Où  $\operatorname{sign}(u) = 1$  si  $u > 0$ ,  $\operatorname{sign}(u) = -1$  si  $u < 0$ ,  $\operatorname{sign}(0) = 0$ . Par exemple, aux points où  $u_x(x, t) > 0$  et  $u_{xx}(x, t) > 0$ , nous pouvons vérifier que (3.1.1) se comporte comme  $u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0$ , c'est l'équation de transport avec la vitesse +1.



**Fig10:** Illustration de la procédure débrouitage, la ligne pointillée représente la condition initiale, et la ligne continue, représente la fonction après un certain temp, et les flèches indiquent la direction du déplacement.

Dans la suite nous allons étudier ces deux modèles pour illustrer le phénomène d'amélioration du contour d'image.

Nous allons rechercher des solutions par la méthode des caractéristiques (détaillé dans le chapitre deux) et cela pour le modèle (3.0.4)

## 3.2 Construction de la solution avec la méthode des caractéristiques

Nous allons construire donc une solution du modèle de filtre du choc par la méthode des caractéristiques, le but est de montrer comment on obtient l'amélioration du contour.

Considérons le modèle suivant:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -|u_x(x, t)| \operatorname{sign}((u_0)_{xx}(x, t)), \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Pour adapter le problème à la méthode des caractéristique faisant le changement de variable suivant :  $x = x_1, t = x_2$ . Alors, (3.2.1) devient

$$\begin{cases} u_{x_2} + \text{sign}(u_0)_{x_1 x_1} |u_{x_1}| = 0 & \text{dans } U \\ u(x_1, 0) = u_0(x_1) & \text{sur } \Gamma, u_0(x_1) = \cos(x_1) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Avec

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, z, p) &= u_{x_2} + \text{sign}(u_0)_{x_1 x_1} |u_{x_1}| \\ F(x_1, x_2, z, p) &= p_2 + \text{sign}(u_0)_{x_1 x_1} |p_1| \\ U &= \left] -\frac{pi}{2}, \frac{3pi}{2} \right[ \times \mathbb{R}^+ \\ \Gamma &= \left\{ (x_1, x_2), x_1 \in \left] -\frac{pi}{2}, \frac{3pi}{2} \right[ , x_2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

on choisit  $u_0(x_1) = \cos(x_1)$ , ainsi  $(u_0(x_1))_{x_1 x_1} = -\cos(x_1)$

**Le 1<sup>er</sup> cas :** L'équation est étudiée sur  $\left] -\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2} \right[ \times \mathbb{R}^+$  :

d'après **Fig10** on trouve :  $\text{sign}(\cos(x_1))_{x_1 x_1} = -1$

Et

$$\begin{cases} D_{p_1} F = -\frac{p_1}{|p_1|} \left( \begin{array}{l} \text{Car } F(x_1, x_2, z, p) = p_2 - |p_1| \text{ et } |p_1| = \sqrt{(p_1)^2} \\ \text{alors , } F(x_1, x_2, z, p) = p_2 - \sqrt{(p_1)^2} \end{array} \right), \\ D_{p_2} F = 1, \\ D_z F = D_{x_1} F = D_{x_2} F = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = D_{p_1} F = -\frac{p_1}{|p_1|}, \\ \dot{x}_2(s) = D_{p_2} F = 1, \\ \dot{p}_1(s) = -D_{x_1} F - D_z F \cdot p_1 = 0, \\ \dot{p}_2(s) = -D_{x_2} F - D_z F \cdot p_2 = 0, \\ \dot{z}(s) = D_p F \cdot p = p_2(s) - |p_1(s)|. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Pour  $s = 0$  , on suppose les conditions suivantes

$$x_1(0) = a \in \left] -\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2} \right[ \text{ et } x_2(0) = 0 \text{ et } z(0) = \cos(a).$$

Par intégration de (3.2.3) par rapport à  $s$  , on obtient quelques constantes  $p_1^0$  et  $p_2^0$ ,

$$\begin{cases} x_1(s) = -\frac{p_1^0}{|p_1^0|}s + a, \\ x_2(s) = s, \\ p(s) = (p_1^0, p_2^0), \\ z(s) = (p_2^0 - |p_1^0|)s + \cos(a). \end{cases}$$

- Il reste à déterminer  $(p_1^0, p_2^0)$  :

depuis  $u(x_1, x_2) = \cos(x_1)$  sur  $\Gamma$ , (en utilisant l'EDP  $u_{x_2} + \text{sign}(u_0)_{x_1 x_1} |u_{x_1}| = 0$ ) on a :

$$\begin{cases} p_1^0 = u_{x_1}(x_1(0), x_2(0)) = u_{x_1}(a, 0) = -\sin(a) \\ p_2^0 = u_{x_2}(x_1(0), x_2(0)) = u_{x_2}(a, 0) = |u_{x_1}(a, 0)| = |\sin(a)| \end{cases}$$

- Donc, on obtient les lignes caractéristiques suivantes:

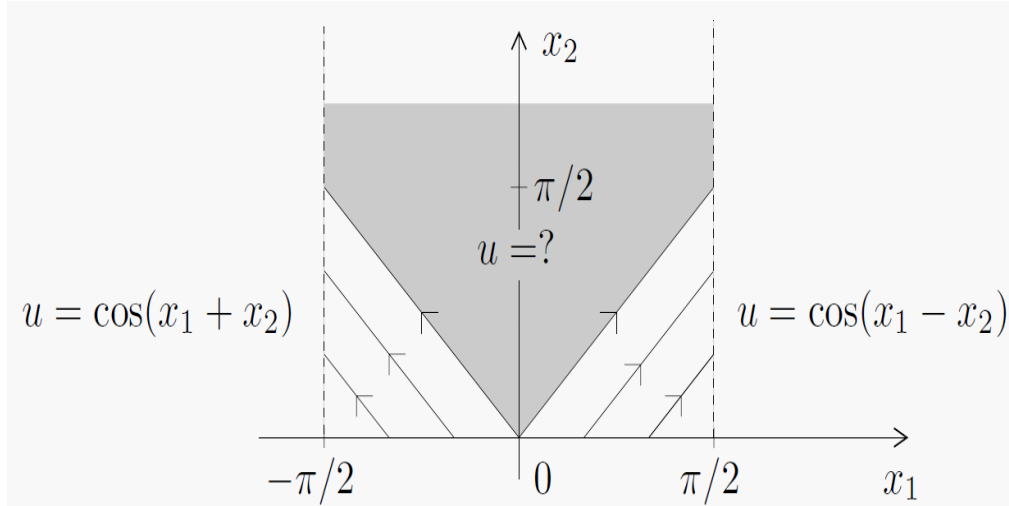
$$\begin{cases} x_1(s) = \frac{\sin(a)}{|\sin(a)|}s + a, \\ x_2(s) = s. \end{cases}$$

Alors, la solution s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} u(x_1(s), x_2(s)) &= z(s) \\ &= (|\sin(a)| - |\sin(a)|)s + \cos(a) \\ &= \cos(a) \end{aligned}$$

Donc  $u$  est une solution constante selon les caractéristiques.

Cette figure représente les lignes caractéristiques sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \times \mathbb{R}^+$



Les lignes caractéristiques sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Si :  $\sin(a) > 0$  ; ie:  $a \in [0, \frac{\pi}{2}[$ , donc  $\begin{cases} x_1(s) = s + a \\ x_2(s) = s \end{cases}$  et les caractéristiques sont des lignes droites. Alors, dans ce cas, la solution de (3.2.2) est  $u(x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2)$  avec  $x_2 < x_1 < \frac{\pi}{2}$

Si :  $\sin(a) < 0$  ; ie:  $a \in [-\frac{\pi}{2}, 0[$ , donc  $\begin{cases} x_1(s) = -s + a \\ x_2(s) = s \end{cases}$  et  $u(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)$  avec  $-\frac{\pi}{2} < x_1 < -x_2$

**Le 2<sup>ème</sup> cas :** L'équation est étudiée sur l'intervalle  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \times \mathbb{R}^+$  :

d'après **Fig10**. On trouve :  $\text{sign}(\cos(x_1))_{x_1 x_1} = 1$ , et,

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{p_1} F = \frac{p_1}{|p_1|} \left( \begin{array}{l} \text{Car } F(x_1, x_2, z, p) = p_2 + |p_1| \text{ et } |p_1| = \sqrt{(p_1)^2} \\ \text{alors, } F(x_1, x_2, z, p) = p_2 + \sqrt{(p_1)^2} \end{array} \right), \\ D_{p_2} F = 1, \\ D_z F = D_{x_1} F = D_{x_2} F = 0. \end{array} \right.$$

Alors,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = D_{p_1}F = \frac{p_1}{|p_1|}, \\ \dot{x}_2(s) = D_{p_2}F = 1, \\ \dot{p}_1(s) = -D_{x_1}F - D_zF.p_1 = 0 \\ \dot{p}_2(s) = -D_{x_2}F - D_zF.p_2 = 0, \\ \dot{z}(s) = D_pF.p = p_2(s) + |p_1(s)|. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Pour  $s = 0$ , on a les mêmes conditions

$$x_1(0) = a \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \text{ et } x_2(0) = 0 \text{ et } z(0) = \cos(a).$$

Par intégration de (3.2.4) par rapport à  $s$ , on arrive à :

$$\begin{cases} x_1(s) = \frac{p_1^0}{|p_1^0|}s + a, \\ x_2(s) = s, \\ p(s) = (p_1^0, p_2^0), \\ z(s) = (p_2^0 + |p_1^0|)s + \cos(a). \end{cases}$$

- La détermination de  $(p_1^0, p_2^0)$

depuis  $u(x_1, x_2) = \cos(x_1)$  sur  $\Gamma$ , (en utilisant  $u_{x_2} + \text{sign}(u_0)_{x_1 x_1} |u_{x_1}| = 0$ ) on obtient

:

$$\begin{cases} p_1^0 = u_{x_1}(x_1(0), x_2(0)) = u_{x_1}(a, 0) = -\sin(a) \\ p_2^0 = u_{x_2}(x_1(0), x_2(0)) = u_{x_2}(a, 0) = -|u_{x_1}(a, 0)| = -|\sin(a)| \end{cases}$$

- Donc, on obtient les lignes caractéristiques

$$\begin{cases} x_1(s) = -\frac{\sin(a)}{|\sin(a)|}s + a, \\ x_2(s) = s. \end{cases}$$

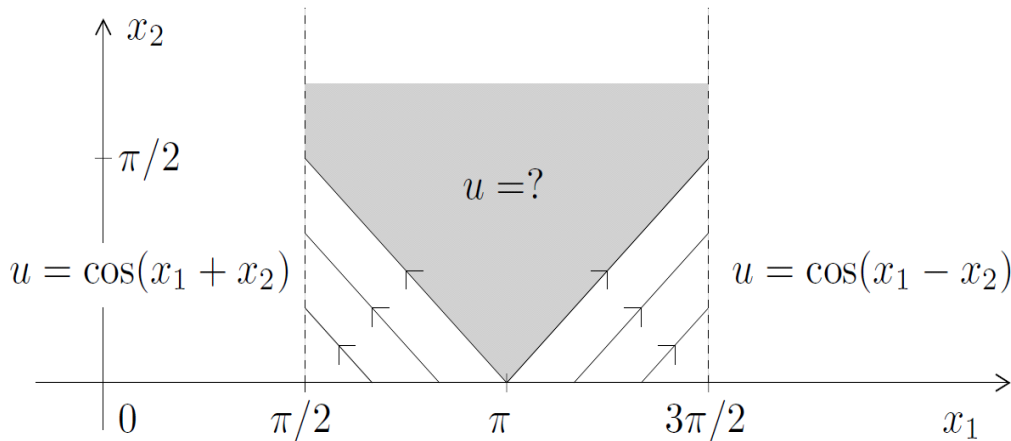
Alors, la solution peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 u(x_1(s), x_2(s)) &= z(s) \\
 &= (-|\sin(a)| + |-\sin(a)|)s + \cos(a) \\
 &= (-|\sin(a)| + |\sin(a)|)s + \cos(a) \\
 &= \cos(a)
 \end{aligned}$$

On peut remarquer que : Si :  $\sin(a) > 0$  ; ie:  $a \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ , donc  $\begin{cases} x_1(s) = -s + a \\ x_2(s) = s \end{cases}$   
 et les caractéristiques sont des lignes droites. Alors, dans ce cas, la solution de (3.2.2) est  $u(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)$   
 avec  $\frac{\pi}{2} < x_1 < \pi - x_2$ .

Si :  $\sin(a) < 0$  ; ie:  $a \in [\pi, \frac{3\pi}{2}[$ , donc  $\begin{cases} x_1(s) = s + a \\ x_2(s) = s \end{cases}$  et  $u(x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2)$  avec  $\pi + x_2 < x_1 < \frac{3\pi}{2}$

Cette figure représente les lignes caractéristiques de la solution sur l'intervalle  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \times \mathbb{R}^+$



Les lignes caractéristiques sur l'intervalle  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

Grace à ces calculs, nous pouvons observer que

1. La fonction  $u(x_1, x_2)$  est discontinue (ce qui représente un choc) selon le ligne  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ , ie : à un point où l'intersection des caractéristiques.

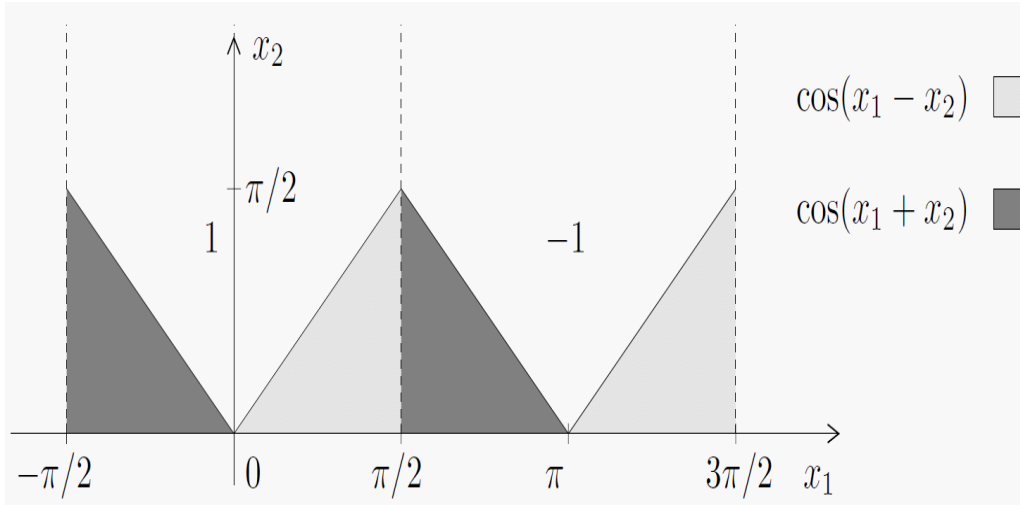
2.  $u(x_1, x_2)$  n'est pas définie pour  $-x_2 < x_1 < x_2$  et  $\pi - x_1 < x_2 < x_1 - \pi$  (la solution non définie dans la zone grise)
3. Si nous ne voulons pas créer d'autres discontinuités que celles décrites ci-dessus, il faut poser

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } -x_2 < x_1 < x_2 \\ -1 & \text{si } \pi - x_1 < x_2 < x_1 - \pi \end{cases}$$

Par conclusion, nous proposons comme une solution  $u(x, t)$  du problème

$$\begin{cases} u_{x_2} + \text{sign}(-\cos(x_1)) |u_{x_1}| = 0 & \text{dans } ]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x_1, 0) = \cos(x_1) \end{cases} \quad (3.2.5)$$

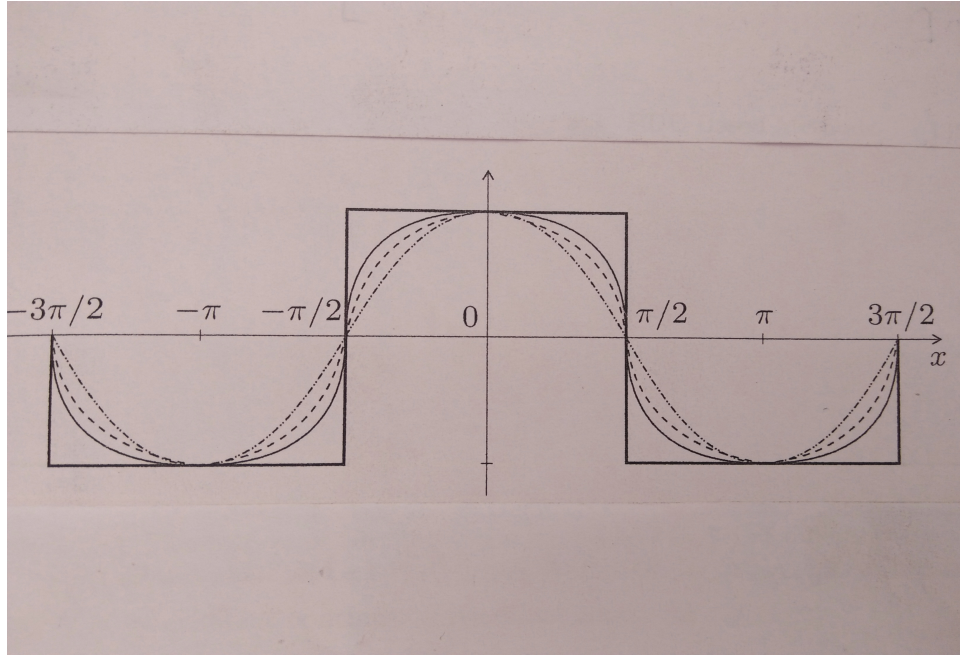
la fonction régulière par morceaux représentée en la figure suivante. Il est facile de voir, par symétrie, que si  $U = R \times R^+$ , alors on peut construire une solution de (3.2.5). Où la discontinuité se développe seulement sur les points  $x_1 = (2k + 1)\pi/2$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



**Fig11:** La solution de l'équation( 3.2.5 )

Cet exemple montre pourquoi les équations comme (3.2.2) agissent comme des filtres d'amélioration des contours. à partir d'une condition initiale  $u_0(x) = \cos(x)$ , nous avons construit une famille des fonctions  $\{u(x, t)\}_{t>0}$  pour  $t$  croissant.

Nous illustrons dans la figure suivante la solution finale à différents moments, nous pouvons observer que la formation des contours se produisent à l'endroit où  $(u_0)_{xx} = 0$ .



**Fig12:** Illustration de la fonction u la solution finale de (3.2.1) aux différents moments

### 3.3 Amélioration du contour via les solutions dites auto-similaires

Maintenant nous allons étudier le modèle donné par (3.0.2), en utilisant les solutions dites "auto similaires", commençant par définir ce type des solutions.

**Définition 3.3.1** Une solution des EDPs est dite auto-similaire si elle est invariante par échelle, c'est à dire:

$$u(x, t) = a^\lambda u(a^s x, a^\gamma t), \quad a > 0$$

**Théorème 3.3.1** Soit  $P(x, t, u, u_x, \dots) = 0$  une EDP alors  $P$  admet une solution auto-similaire si et seulement si elle est invariante sur l'action de dilatation (invariance d'échelle).

C'est-à-dire, si l'on remplace  $u$  par  $a^\lambda u$ ,  $x$  par  $a^s x$  et  $t$  par  $a^\gamma t$ . On aura :

$$P(a^s x, a^\gamma t, a^\lambda u, \dots) = 0$$

En d'autre terme : si  $u(x, t)$  est une solution de  $P$  alors  $a^\lambda u(a^s x, a^\gamma t)$  est également une solution de  $P$  sous conditions sur  $\lambda$ ,  $s$  et  $\gamma$ .

Avec les règles de dérivations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial a^\lambda u}{\partial a^\gamma t} &= a^{\lambda-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial a^\lambda u}{\partial a^s x} &= a^{\lambda-s} \frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$

Les formes des solutions auto-similaires les plus utilisées sont :

$$\begin{cases} u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right) \\ u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right) \\ u(x, t) = t^\alpha \varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \end{cases}$$

tel que  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sont des exposants à déterminer.

### 3.3.1 Solutions auto-similaires pour le modèle de filtre du choc

Soit l'équation de filtre du choc suivante

$$u_t(x, t) = -|u_x| u_{xx} \quad (3.3.1)$$

Alors

$$u(x, t) \rightarrow a^\lambda u(a^s x, a^\gamma t)$$

Implique

$$\frac{\partial a^\lambda u}{\partial a^\gamma t} = a^{\lambda-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial a^\lambda u}{\partial a^s x} = a^{\lambda-s} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 (a^\lambda u)}{\partial (a^s x)^2} = a^{\lambda-2s} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On remplace dans (3.3.1)

$$a^{\lambda-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = - \left| a^{\lambda-s} \frac{\partial u}{\partial x} \right| a^{\lambda-2s} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Alors l'équation devient

$$a^{\lambda-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = -a^{2\lambda-3s} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Car

$$a^{\lambda-\gamma} = a^{2\lambda-3s}$$

Ainsi la condition de similarité sera

$$\lambda - \gamma = 2\lambda - 3s$$

Donc

$$\gamma = 3s - \lambda$$

**On veut chercher la solution sous la forme**  $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right)$

- On dérive l'équation par rapport à  $t$  on obtient

$$u_t(x, t) = \beta \frac{x}{(T-t)^{\beta+1}} \varphi'\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right)$$

On pose  $\xi = \frac{x}{(T-t)^\beta}$ , alors

$$u_t(x, t) = \beta \xi (T-t)^{-1} \varphi'(\xi)$$

- On dérive l'équation par rapport à  $x$  on obtient

$$u_x(x, t) = (T-t)^{-\beta} \varphi'(\xi)$$

- On dérive l'équation par rapport à  $x$  deux fois on obtient

$$u_{xx}(x, t) = (T-t)^{-2\beta} \varphi''(\xi)$$

On remplace dans (3.3.1)

$$\begin{aligned} \beta \xi (T-t)^{-1} \varphi'(\xi) &= - |(T-t)^{-\beta} \varphi'(\xi)| (T-t)^{-2\beta} \varphi''(\xi) \\ &= - |\varphi'(\xi)| \varphi''(\xi) (T-t)^{-3\beta} \end{aligned}$$

On divise par  $(T - t)^{-1}$  on obtient

$$\beta \xi \varphi'(\xi) = -|\varphi'(\xi)| \varphi''(\xi) (T - t)^{-3\beta+1}$$

Cela implique que

$$-3\beta + 1 = 0 \implies \beta = \frac{1}{3}$$

L'équation différentielle correspondante est

$$\frac{1}{3} \xi \varphi'(\xi) = -|\varphi'(\xi)| \varphi''(\xi)$$

On a

$$|\varphi'(\xi)| = \begin{cases} \varphi' & \text{si } \varphi' > 0 \\ -\varphi' & \text{si } \varphi' < 0 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{3} \xi \varphi'(\xi) = \pm \varphi'(\xi) \varphi''(\xi)$$

$$\frac{1}{3} \xi = \pm \varphi''(\xi)$$

On intègre par rapport à  $\xi$

$$\varphi'(\xi) = \pm \frac{1}{6} \xi^2 + K_1$$

On intègre une deuxième fois, on obtient

$$\varphi(\xi) = \pm \frac{1}{18} \xi^3 + K_1 \xi + K_2$$

Alors la solution est

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi \left( \frac{x}{(T - t)^{\frac{1}{3}}} \right) \\ &= \pm \frac{1}{18} \left( \frac{x}{(T - t)^{\frac{1}{3}}} \right)^3 + K_1 \left( \frac{x}{(T - t)^{\frac{1}{3}}} \right) + K_2 \end{aligned}$$

Si on pose les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

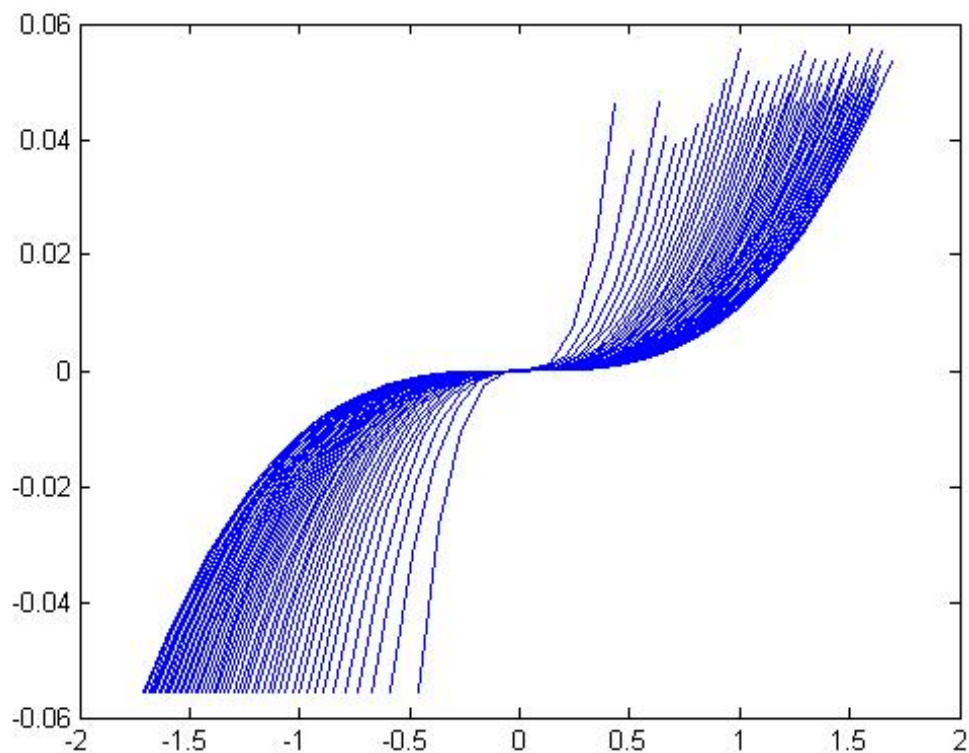
cela implique

$$\begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = 0 \end{cases}$$

Donc la solution s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \pm \frac{1}{18} \left( \frac{x}{(T-t)^{\frac{1}{3}}} \right)^3 \\ &= \pm \frac{1}{18} \frac{x^3}{(T-t)} \end{aligned}$$

La figure suivante représente cette solution



**Fig13:** La solution au différents temps

## Discussion des résultats:

On peut remarquer les points suivants :

- Les solutions auto-similaires obtenus sont régulières.
- Les solutions obtenus nous expliquent que l'amélioration du contour est interprétée via l'évolution du profile initiale, d'où la dérivée tend vers l'infinie (contour net) si  $t$  tend vers  $T$ ,

en d'autre termes la largeur du support de la solution tend vers zéro, qui correspond à une amélioration du contour. Donc on a ici une autre interprétation de phénomène d'amélioration du contour.

$$\lim_{t \rightarrow T} u_x = \infty$$

Pour généraliser encore de point de vue comportement en temps de la solution, On veut chercher maintenant la solution sous la forme générale  $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right)$  :

- On dérive l'équation par rapport à  $t$  on obtient

$$u_t(x, t) = -\frac{\dot{a}(t)x}{a^2(t)}\varphi'\left(\frac{x}{a(t)}\right)$$

on pose  $\xi = \frac{x}{a(t)}$ , alors

$$u_t(x, t) = -\frac{\dot{a}(t)\xi}{a(t)}\varphi'(\xi)$$

- On dérive l'équation par rapport à  $x$  on obtient

$$u_x(x, t) = \frac{1}{a(t)}\varphi'(\xi)$$

- On dérive l'équation par rapport à  $x$  deux fois on obtient

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{a^2(t)}\varphi''(\xi)$$

On remplace dans (3.3.1)

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\xi\varphi'(\xi) &= -\left|\frac{1}{a(t)}\varphi'(\xi)\right|\frac{1}{a^2(t)}\varphi''(\xi) \\ &= -|\varphi'(\xi)|\varphi''(\xi)\frac{1}{a^3(t)} \end{aligned}$$

On multiplie par  $a^3(t)$ , on obtient

$$a^2(t)\dot{a}(t)\xi\varphi'(\xi) = |\varphi'(\xi)|\varphi''(\xi)$$

On dévise par  $\xi\varphi'(\xi)$

$$a^2(t)\dot{a}(t) = \frac{|\varphi'(\xi)|\varphi''(\xi)}{\xi\varphi'(\xi)} = k$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} a^2(t)\dot{a}(t) &= k \\ \frac{|\varphi'(\xi)|\varphi''(\xi)}{\xi\varphi'(\xi)} &= k \end{aligned}$$

On intègre la première équation par rapport à  $t$

$$\begin{aligned} a^2(t)\frac{da}{dt} &= k \\ a^2(t)da &= kdt \\ \frac{1}{3}a^3 &= kt + k_0 \end{aligned}$$

Alors

$$a(t) = (3kt + k_0)^{\frac{1}{3}}$$

Si  $a(t) = 0$  Alors,  $t = \frac{-K_0}{3K}$

On a

$$K\xi\varphi'(\xi) = -|\varphi'(\xi)|\varphi''(\xi)$$

On a

$$|\varphi'(\xi)| = \begin{cases} \varphi' & \text{si } \varphi' \succ 0 \\ -\varphi' & \text{si } \varphi' \prec 0 \end{cases}$$

Donc

$$K\xi\varphi'(\xi) = \pm\varphi'(\xi)\varphi''(\xi)$$

$$K\xi = \pm\varphi''(\xi)$$

On intègre par rapport à  $\xi$

$$\varphi'(\xi) = \pm\frac{K}{2}\xi^2 + K_1$$

On intègre une deuxième fois, on obtient

$$\varphi(\xi) = \pm\frac{K}{6}\xi^3 + K_1\xi + K_2$$

Donc la solution est

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi\left(\frac{x}{(3kt + k_0)^{\frac{1}{3}}}\right) \\ &= \pm\frac{K}{6}\frac{x^3}{(3kt + k_0)} + K_1\frac{x}{(3kt + k_0)^{\frac{1}{3}}} + K_2 \end{aligned}$$

Ceci nous donne donc un comportement similaire que précédemment.

# Conclusion

Dans ce travail, on s'est intéressé aux modèles mathématiques qui sont utilisés pour améliorer le contour de l'image. Nous avons présenté notamment le modèle de Perona-Malik, Modèle de Malladi-Sethian et on a étudié particulièrement dans ce mémoire le modèle de Rudin-Osher, appelé également -filtre de choc -

Nous avons détaillé la recherche d'une solution par la méthode des caractéristiques, la solution du problème montre la notion d'amélioration du contour via ce modèle. C'est partir d'une fonction initiale régulière qu'on obtient à la fin une solution discontinue en des points qui représentent les points du contours. Nous avons illustré ces résultats par des graphes. Une autre idée a été également présentée pour l'étude de ce modèle à partir des solutions auto-similaires, une petite contribution basée sur la notion des frontières libres a été élaborée dans ce mémoire. Nous avons enfin illustré cette idée graphiquement.

# Bibliographie

- [1] CHOUDER RAFAA. *Auto-similarité et contour d'image*, thèse de doctorat, Université Mohamed Boudiaf M'sila, 2018.
- [2] *Cours de traitement d'image Master EDPs et Application*, Université de M'sila. BEN-HAMIDOUCHE.N,2017.
- [3] F.CATTE,T.COLLA,P.L.LIONS AND J.M.MOREL. *Image selective smoothing and edge detection by non linear diffusion(i)*. SIAM J, Numer Annual, 29(1):182-193, February 1992.
- [4] G.AUBERT AND P.KORNPROBST. *Mathematical problems in image processing partial differential equations and the calculus of variations*. Springer Second Edition.
- [5] GILLES BUREL, *Introduction au traitement d'images-simulation sous matlab*19 October 2001de.
- [6] J.HADAMARD. *lectures on Cauchy's Problem in linear Partial differential Equations*. Yale University Press, 1923.
- [7] L.RUDIN. *Images, numerical analysis of singularities and shock filters*. DH.D.thesis, computer science departement,technical peport5250, caltech, pasadena,CA,1987.
- [8] L.RUDIN. *Shock filters*. Rockwell International Science Center Annual DARPA T.R, 1984.
- [9] MATLAB USER'S GUIDE . *The math works Inc*, 1995.0

- [10] M.MOKHTARI ET A.MESBAH *Apprendre et maitriser Matlab*, Springer Verlag, 1997.
- [11] M.NITZBERG AND T.SHOITA. *Non linear image filtring with edge and corner enhancement*. IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine intelligente, 14(8):826-832,1992.
- [12] P.PERONA AND J.MALIK. *Scale space and edge detection using anisotropic diffusion*.IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine intelligente, 12(7):629-639,1990.
- [13] P.PERONA, T.SHOITA AND J.MALIK. *Anisotropic Diffusion*. in *Bart M.terhaar Romeny*, Editor, Geometry-driven diffusion in computer Vision, pages 71-79. Kluwer Academic, 1994.
- [14] R.DERRICHE ET O.FAUGERAS. (Novembre 1995). *Les EDP en traitement d'image et vision par ordinateur*. Papport de recherche n 2697.
- [15] R.MALLADI, J.A.SETIAN, *Image Processing : Flows under Min/Max curvature and Mean Curvature*, *Graphical Models and Image Processing*, S8, 2(1996), 127-141.
- [16] S.OSHER AND L.RUDIN. *Feature oriented image enhancement usinh shock filter*. SIAMJ. Numer. Anal, 27(4):919-940,1990.

## المخلص:

الهدف من هذه الدراسة هو التوضيح بالتفصيل مفهوم تحسين حواف الصورة باستعمال نموذج مرشح الصدمة لرودين-اوشار لكشف الحواف.

فاصبحنا مهتمين بمعالجة و تحسين حواف الصورة باستعمال نماذج رياضية.

**الكلمات المفتاحية:** صورة, مرشح خطي, تحسين الحواف, كشف الحواف.



## Abstract

The objective of this study is to illustrate in detail the notion of image edge enhancement using filter shock model of Rudin-Osher for the detection of contours.

So we were interested in processing and enhancing the edges of image by mathematical models.

**Key words:** Image, linear filter, edge enhancement, edge detecting



## Résumé

L'objectif de cette étude est d'illustrer en détail le concept de l'amélioration de contour de l'image en utilisant le modèle de filtre du choc de Rudin-Osher pour la détection des contours.

On s'est intéressé à traiter et améliorer les contours de l'image par des modèles mathématiques.

**Mots clés:** Image, filtrage linéaire, amélioration du contour, détection du contour