



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

SALMI SOMIA

Sujet

**Etude numérique d'une
Convection naturelle en 2D par la méthode
de volumes finis**

Devant le jury :

Mr. A. MEMOU	MCA. Univ de M'sila	Président
Mr. A. DJERAD	MAA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. T. HERAIZ	MAA. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2017 / 2018

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الحمل الحراري الطبيعي في لوحة معدنية ثنائية الأبعاد، ونحن على غرار حل هذه المشكلة عن طريق تحديد معادلة الحرارة.

تحقيق هذا الهدف يتطلب طريقة عددية، يتم استخدام طريقة الحجم المحدودة من اجل تجزئة معادلات النموذج الرياضي.

النتائج المتحصل عليها باستعمال الكود التجاري Fluent

الكلمات المفتاحية: الحمل الطبيعي، لوحة، معادلة الحرارة، طريقة الحجم المحدودة، Fluent

Abstract

The object of the present work is to study numerically the natural convection in a two-dimensional metal plate.

This problem has been modeled by the equation of heat.

Since the resolution requires a numerical method, the finite volume method is used to discretize the equations of the mathematical model.

The results obtained with the commercial code Fluent.

Key words: natural convection, a plaque, equation of heat, the finite volume method, Fluent

Résumé

L'objet du présent travail est d'étudier numériquement la convection naturelle dans une plaque métallique bidimensionnelle.

Ce problème a été modélisé par l'équation de la chaleur.

Comme la résolution exige une méthode numérique, la méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser les équations du modèle mathématique.

Les résultats obtenus avec le code commercial Fluent.

Mots clés: Convection naturelle, une plaque, équation de la chaleur, la méthode des volumes Finis, Fluent.

Remerciements

Avant tout, je remercie **DIEU** le tout puissant de m'avoir donnée la force et le courage afin que je puisse accomplir ce travail.

Je remercie mon encadreur Monsieur **Dr. Abdelkader Djerad** pour m'avoir suivi avec patience et intérêt et pour la confiance qu'il a placé en moi tout au long de ce travail, Ses conseils précieux et ses encouragements m'ont été d'une aide très précieuse dans la réalisation de ce projet.

Je remercie le jury de ce mémoire, Je remercie vivement toute les professeurs.

Enfin, j'exprime ma très grande reconnaissance à ma famille, mon père, ma Mère, mes sœurs et mes frères pour m'avoir encouragée et pour tous les soucis que je leur ai causés et surtout pour avoir été toujours à mes côtés

Table des matières

Nomenclature	IV
Liste des figures	VI
Introduction	1
1 Equations aux Dérivées Partielles	3
1.1 Introduction	3
1.1.1 Définition	4
1.1.2 Exemples	4
1.2 Classification des E.D.P	4
1.2.1 selon l'ordre	4
1.2.2 selon type	6
1.3 Les conditions aux limites	8
1.3.1 Dirichlet :	8
1.3.2 Newman :	9
1.3.3 Mixte :	9
1.4 Problèmes bien posés	9
1.5 Résolution des E.D.P	10
1.5.1 Méthodes générales d'analyse numérique	10
1.5.2 Méthode des différences finies	11
1.5.3 méthode des éléments finis	13
1.5.4 méthodes de volumes finis	19
1.6 Conclusion	24

2	Le transfert de chaleur	25
2.1	Introduction	25
2.2	Notions de base	26
2.2.1	La chaleur	26
2.2.2	Flux de chaleur	26
2.2.3	La Température	26
2.2.4	Unités de chaleur	27
2.2.5	Equation de la chaleur	27
2.3	les type de transfer de chaleur	27
2.3.1	la conduction	28
2.3.2	rayonnement	29
2.3.3	convection	29
2.4	Principe de la méthode des volumes finis	32
2.4.1	Discretisation de l'équation de la chaleur 1D	32
2.4.2	Discretisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire	34
2.5	Conclusion	37
3	Modèle physique et mathématique	38
3.1	Introduction	38
3.1.1	Qu'est-ce qu'un modèle ?	38
3.1.2	Pourquoi faut-il modéliser ?	38
3.1.3	De la modélisation à la simulation numérique	38
3.2	Modèle physique	39
3.3	Conditions limites et initiales	40
3.4	Equations gouvernantes	40
3.4.1	les équations de Navier-Stokes	41
3.4.2	Equation de continuité	41
3.4.3	Équation d'état	42
3.4.4	L'équation de transport	42

3.4.5	Equation de quantité de mouvement	42
3.4.6	Equation de chaleur	43
3.5	Conclusion	43
4	RESULTATS ET DISCUSSIONS	44
4.1	introduction	44
4.2	Simulation	44
4.3	codes de simulation	45
4.3.1	gambit	45
4.3.2	Fluent	47
4.3.3	Notice d'utilisation de fluent	48
4.4	Description du probleme	50
4.5	Maillage	51
4.6	Conclusion	54
	Conclusion	55
	Perspectives	56
	Bibliographie	57
	ANNEX	59

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents

À Mes frères et sœurs

À ma famille

À mes Amis

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Nomenclature

1. Liste des symboles

ΔY	longueur adimensionnelle d'un volume de contrôle dans la direction Y
ΔX	longueur adimensionnelle d'un volume de contrôle dans la direction X
ΔT	différence de température adimensionnelle
Δt	incrément de temps adimensionnel
T	température [$^{\circ}K$]
t	temps adimensionnel
A	Surface
m	masse
α	coefficient de diffusivité thermique [$m^2.s^{-1}$]
ρ	masse volumique [$kg.m^{-3}$]
μ	viscosité dynamique du fluide
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle
Γ	coefficient de diffusion
S_{ϕ}	Terme source
C_p	Chaleur spécifique du fluide à pression constante. J
P	Pression [Pa]
ξ, η	direction
ϕ	quantité dans fluid
F	forces de volume
δ_{ij}	la tenseur des vitesses

2. Indices

i	indice d'un point du maillage suivant x
j	indice d'un point du maillage suivant y
P	point au centre du volume fini
E	point à l'est du point P
N	point au nord du point P
W	point à l'ouest du point P
S	point au sud du point P

3. Abréviations

MDF	Méthode des différences finis
MVF	Méthode des volumes finis
MEF	Méthode des element finis
EDP	Equations aux dérivées partielles
EDO	Équations différentielles ordinaires

Liste des figures

Fig 1.1: Méthodes générales d'analyse numérique

Fig 1.2: Le maillage 1D de DF

Fig 1.3: Le graphe de la fonction φ_i

Fig 1.4: Graphe des fonctions $\psi_{i-\frac{1}{2}}, \psi_i$ et $\psi_{i+\frac{1}{2}}$

Fig 1.5: Schéma représentant Volume de contrôle bidimensionnel.

Fig 1.6: Discrétisation en volumes finis du domaine d'étude dans le cas bidimensionnel.

Fig 1.7: Description bidimensionnel d'un volume fini.

Fig 2.1: les type de transfert de chaleur

Fig 2.2: la conduction de la chaleur dans une barre

Fig 3.1: plaque métallique

Fig 4.1: Vue globale de Gambit.

Fig 4.2: Menu principale de Gambi

Fig 4.3: l'Entrée et le sortir de la chaleur dans le plaque

Fig 4.4: le maillage

Fig 4.5: contours de temperature total

Fig 4.6: contours de temperature static

Fig 4.7: energy total

Fig 4.8: histogramme de temperature total

Fig 4.9: histogramme de temperature static

Introduction générale

La plupart des problèmes scientifiques et les phénomènes physiques sont modélisés sous la forme des équations (EDO,EDP,. . . ,etc) linéaires ou non linéaires qui sont difficiles à résoudre dans la plupart des cas.

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et des composants électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleur des procédés industriels, etc.

L'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objet principal de plusieurs travaux, et pour se faire, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes régissant la convection, l'effet de la nature des systèmes dans lesquels elle a lieu (géométrie spécialement), et les propriétés des fluides impliqués (propriétés physico-chimiques).

La résolution de ces équations se fait par des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis, la méthode des différences finis et la méthode des volumes finis qui est la plus utilisée actuellement dans les codes de simulation CFD FLUENT.

L'objet de ce mémoire est l'étude numérique d'une convection naturelle en 2D par la méthode des volumes finis

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres:

Dans le premier chapitre nous donnons quelques définitions des bases et un rappel sur quelques techniques numériques telles que les volumes finis, les différences finies, et les éléments finis. Dans ce même chapitre nous avons comparé entre les trois méthodes

Dans le deuxième chapitre, nous proposons des types de transfert de chaleur et on expose brièvement de la méthode des volumes finis unidimensionnels, multidimensionnel et tridimensionnelle

Dans le Troisième chapitre est dédié à la représentation du modèle physique et la formulation des équations régissant l'écoulement et le transfert thermique, (équations de Naviers-Stokes et équation d'énergie) ainsi que les conditions aux limites associées.

Dans le dernier chapitre, l'ensemble des résultats de simulation sont obtenus à l'aide du codes de simulation Fluent et gambit

Enfin, une conclusion générale, qui résume les principaux résultats obtenus, est donnée à la fin de ce mémoire. Quelques recommandations pour les études futures sont également formulées.

Chapitre 1

Equations aux Dérivées Partielles

1.1 Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles.

D'une manière générale, la modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution d'équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP.

Ces équations correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique :

- mécanique des fluides : équations de Navier-Stokes
- électromagnétisme : équations de Maxwell
- thermique : équation de la chaleur
- mécanique quantique : équation de Schrödinger
-

1.1.1 Définition

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables $(x, y, \dots) \mapsto u(x, y, \dots)$ s'écrit sous la forme :

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^p u(x)) = 0$$

telle que: $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction inconnue avec n et p des entiers strictement positifs donnée et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^p}$ est une fonction donnée, l'entier p est appelé l'ordre de l' E.D.P

Une EDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u [1].

1.1.2 Exemples

- $\Delta u = 0$ équation de Laplace.
- $\Delta u - f = 0$ équation de Poisson.
- $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ équation de la chaleur, diffusion homogène.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ équation des ondes.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$ équation des télégraphistes.
- $\frac{\partial u}{\partial t} + cu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ équation de Korteweg-de Vries pour des vagues sur de l'eau peu profonde.
- $i\Psi_t + \Delta\Psi = V\Psi$ équation de Schrödinger.

1.2 Classification des E.D.P

1.2.1 selon l'ordre

Définition 1.2.1 On définit l'ordre d'une équation différentielle comme l'ordre de dérivation le plus grand des dérivées partielles [2].

E.D.P linéaire d'ordre 1

Définition 1.2.2 [2] On appelle E.D.P linéaire d'ordre 1 dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et d'inconnu $\Phi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une E.D.P de la forme :

$$F(x) \cdot \nabla \Phi(x) + g(x) \Phi(x) = h(x)$$

où $\nabla \Phi(x)$ est le vecteur gradient de Φ , ($(\nabla \Phi(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ et $F(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$).

Exemple 1.2.1 $u = u(x, y)$

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 1^{er} ordre linéaire.
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$ 1^{er} ordre non - linéaire.

E.D.P linéaires du second ordre

Définition 1.2.3 On appelle E.D.P. linéaire d'ordre inférieur ou égal à 2 dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et d'inconnue $\Phi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une équation du type [2]

$$\sum_{i, j=1}^N a_{ji}(x) \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + g(x) \Phi(x) = h(x)$$

Exemple 1.2.2

- l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

1.2.2 selon type

Les E.D.P proviennent de la modélisation mathématique, c'est à dire de la transcription en équations, de problèmes intervenant dans tous les domaines des sciences physique, chimie, biologie, finance...

On distingue trois grandes catégories d'équations aux dérivées partielles :

Considérons la forme générale d'une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) de second ordre suivant les deux variables indépendantes (x et y) :

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0 \quad (\text{I.1})$$

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sur la base des coefficients; associés aux dérivées d'ordre le plus élevé A, B et C . On calcule le déterminant défini par:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

L'équation (I.1) est dite de type

- elliptique si $\Delta < 0$.
- parabolique si $\Delta = 0$.
- hyperbolique si $\Delta > 0$.

Si $G = 0$, l'équation (I.1) est homogène, sinon l'équation est non homogène.[3]

L'EDP de nature elliptique

Définition 1.2.4 Les équations de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson donnée par:

$$-\Delta u(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x)$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, ou $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée. L'inconnue est la fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Cette catégorie d'EDP est associée aux problèmes de nature stationnaire ou d'équilibre tels que l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux, la répartition stationnaire du champ de température ou la distribution d'un potentiel.

La principale caractéristique de ce type d'équation elliptique est qu'une perturbation introduite en un point quelconque à l'intérieur du domaine de calcul influe sur la totalité du domaine. Ceci implique que pour résoudre un problème de type elliptique il est impératif de poser les conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine. Ici aussi une discontinuité dans les conditions aux limites est rapidement effacée (lissée) à l'intérieur du domaine de calcul [3].

Exemple 1.2.3 L'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ de type elliptique car :

$$\text{on a } \Delta = B^2 - 4AC$$

$$B = 0, A = 1, C = 1.$$

$$\Delta = -4 < 0$$

L'EDP de nature parabolique

Définition 1.2.5 Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \Delta T(x, t) = 0$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $t > 0$. L'inconnue est la fonction $T : \Omega \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

C'est le cas d'un problème de propagation associé à un mécanisme de dissipation tel que la conduction thermique non stationnaire

Exemple 1.2.4 [3] L'équation $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ liée aux conditions initiales : $\phi = \sin(\pi x)$ et aux conditions aux limites : $\phi(0, t) = \phi(1, t) = 0$, accepte la solution exacte suivante $\phi(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$ C'est une équation linéaire d'ordre 2, parabolique par rapport à la variable du temps t .

L'EDP de nature hyperbolique

Définition 1.2.6 [3] Les équations de type hyperbolique dont les prototypes sont

- l'équation de transport:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$, tout $t > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ est donné:

- l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

Cette catégorie d'EDP peut être considérée comme extension des équations elliptiques pour lesquels certaines valeurs critiques des paramètres doivent être déterminées en même temps que la distribution d'équilibre correspondante. La résonance de circuit électrique ou d'enceintes acoustiques ainsi que la détermination des fréquences propres des structures élastiques constituent des exemples de ce type d'équations.

Exemple 1.2.5 L'équation de propagation d'une onde suivante $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, t)$ représente un très bon exemple pour l'équation de type hyperbolique. Cette équation associée aux conditions initiales $\phi(x, 0) = \sin(\pi x)$, $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = 0$, et aux conditions aux limites $\phi(0, t) = \phi(1, t) = 0$ accepte la solution suivante : $\phi(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$.

1.3 Les conditions aux limites

Pour résoudre une équation différentielle régissant un domaine R , il nous faut connaître les conditions aux limites que l'on applique sur les frontières ∂R . Ces conditions aux limites peuvent être de différents types :

1.3.1 Dirichlet :

Dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul

$$\phi = f \quad \text{sur } \partial R$$

1.3.2 Newman :

La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée est bien définie

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = q \quad \text{sur } \partial R$$

1.3.3 Mixte :

Une combinaison linéaire des deux premières conditions est imposée sur la frontière

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k\phi = f, \quad k > 0 \quad \text{sur } \partial R$$

1.4 Problèmes bien posés

Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine Ω avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que le problème est bien posé si on a :

- existence d'une solution du problème.
- unicité de cette solution .
- stabilité par rapport aux données du problème.

1.5 Résolution des E.D.P

1.5.1 Méthodes générales d'analyse numérique

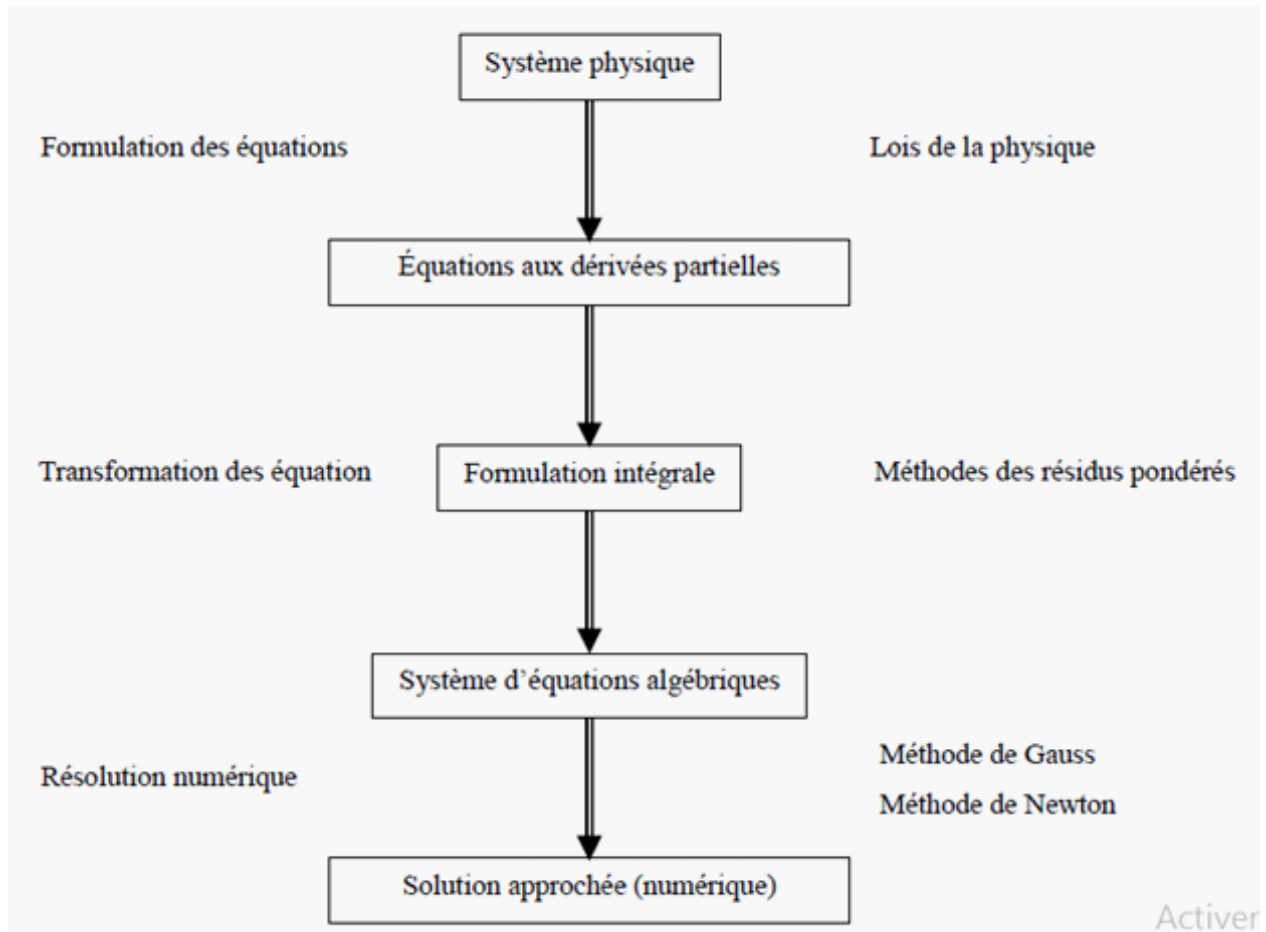


Figure 1.1: Méthodes générales d'analyse numérique

Actuellement, trois grandes méthodes numériques sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations à dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur, de masse, etc., ce sont les méthodes des différences finies, des éléments finis, spectrale et des volumes finis.

1.5.2 Méthode des différences finies

Principe de méthode

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

Soit $u(x, y, z, t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x + \Delta x, y, z, t)$ au voisinage de x donne:

$$u(x + \Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y, z, t) + \dots$$

En tronquant la série au premier ordre en Δx , on obtient :

$$\frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + O(\Delta x)$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature $O(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx . la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée l'ordre de la méthode.[4]

Notation indicielle-cas1D

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un

maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas Δx . Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les noeuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents noeuds du maillage.

Notation 1.5.1 on note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i , on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i$.

Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicelle:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{Ce schéma est dit "avant"}$$

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad [4]$$

Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

où f est une fonction continue. Le maillage est construit en introduisant $N + 1$ noeuds x_i avec $i = 0, 1, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas $\Delta x = h = \frac{1}{N+1}$. La quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au noeud x_i .

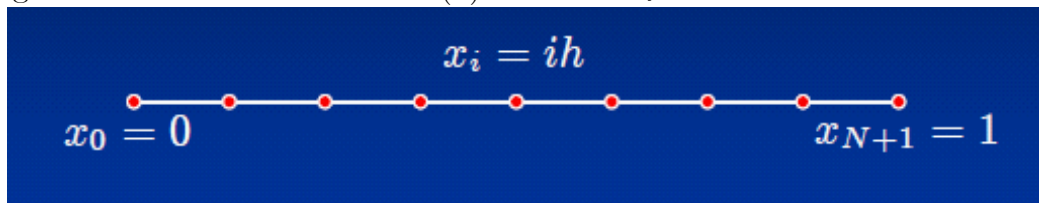


Figure1.2: Le maillage 1D de DF

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque noeud x_i :

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = f(x_i) = f_i$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

L'équation discrétisée est ainsi :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i$$

pour i variant de 1 à $N - 1$; Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes :

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \frac{\beta}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

1.5.3 méthode des éléments finis

Principe de méthode [5]

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. On a une EDP ou EDO à résoudre sur un domaine Ω . On écrit la formulation variationnelle de cette EDP ou EDO, et on se ramène donc à un problème du type

$$(P) \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \Omega \end{cases}$$

On va chercher une approximation de u par approximation interne. Pour cela, on définit un maillage du domaine Ω , grâce au quel on va définir un espace d'approximation

V_h , sous espace vectorielle de V de dimension finie N_h (par exemple V_h sera l'ensemble des fonctions continues sur Ω et affines sur chaque maille). Le problème approché est alors

$$(P_h) \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad , \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$ une base de V_h : En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$$

le problème (P_h) devient

$$\begin{cases} \text{trouver } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tels que} \\ \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h) \quad , \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

ou encore par linéarité de a et l :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tels que} \\ \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j) \quad , \quad \forall j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

c'est à dire résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_N, \varphi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_N) & \dots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\varphi_1) \\ \vdots \\ l(\varphi_N) \end{pmatrix}$$

ou simplement

$$Au = b$$

Exemple en dimension 1

On considère le problème de Dirichlet sur le domaine $\Omega =]0, 1[$: Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La présentation très succincte faite sur cet exemple simple a pour but de donner les idées de base et ne constitue qu'une première introduction à la méthodes des Eléments Finis. L'approche repose sur la méthode de Galerkin qui permet d'écrire le système différentiel sous forme variationnelle dans un espace de dimension finie.

Soit une fonction $v(x) \in C^1([0, 1])$, nulle en 0 et 1. On peut écrire :

$$-\int_0^1 u''(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx \quad \forall v \in V$$

avec $V = \{v \in C^0([0, 1]); v(0) = v(1) = 0; v' \text{ continue par morceaux}\}$ un sous-espace vectoriel de $C^1([0, 1])$.

Une solution de la forme variationnelle s'appelle solution faible du problème différentiel de départ.

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Soit V_h un sous-espace vectoriel de V de dimension N finie. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de V . Ces fonctions constituent une base du sous-espace V_h . Ainsi, toute fonction u_h de V_h peut se décomposer selon :

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$$

Résoudre le problème différentiel de départ revient alors à chercher une solution $u_h \in V_h$ telle que :

$$\int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h$$

C'est-à-dire chercher N réels u_1, u_2, \dots, u_N vérifiant :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \varphi_j'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h$$

Ou encore :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \quad \forall \varphi_i \in V_h$$

Soient A la matrice $N \times N$ d'éléments courants a_{ij} et B le vecteur à N composantes b_i définies par :

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx \quad \text{et} \quad b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

Par définition, la matrice A est symétrique. Notons U le vecteur des N inconnues u_1, u_2, \dots, u_N .

Le problème différentiel se ramène finalement à la résolution du système linéaire :

$$A.U = B$$

Il reste maintenant à choisir les N fonctions φ_i de façon à ce que le système soit simple à résoudre numériquement.

Choix des fonctions φ_i

Méthode d'éléments finis de degré 1 Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $N + 1$ parties (N étant un entier positif) et posons $h = 1/(N + 1)$, $x_i = ih$ avec $i = 1, 2, \dots, N$. On définit, pour $i = 1, 2, \dots, N$, les fonctions suivantes [5] :

$$\varphi_i(x) \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

Le graphe de la fonction φ_i est représenté dans la Figure 1.3 clairement la fonction φ_i est telle que

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad 0 \leq j \leq N + 1$$

$\varphi_i|_{[x_{j-1}, x_j]}$ est un polynôme de degré $1 \leq j \leq N + 1$

Ainsi la fonction φ_i appartient à V . Les fonction $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont linéairement indépendantes et nous les choisissons pour engendrer l'espace V_h . Nous dirons ainsi que:

- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$ sont les noeuds de la discrétisation ,
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$ sont les éléments géométriques,
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont les fonctions de base du sous-espace V_h de type éléments finis de degré 1 associées aux noeuds intérieurs x_1, x_2, \dots, x_N .

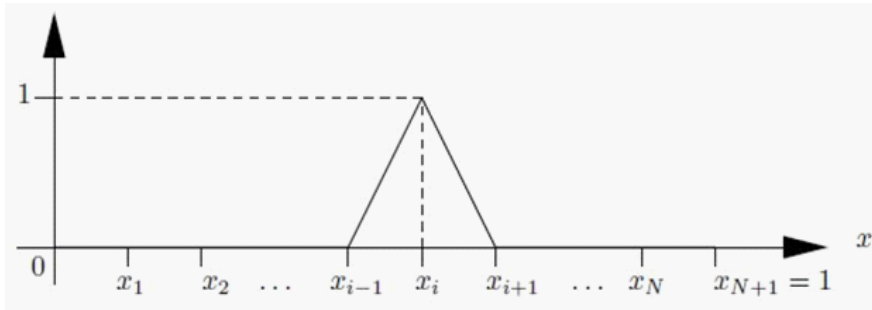


Figure1.3: Le graphe de la fonction φ_i

Méthode de éléments finis de degré 2

Divisons l'intervalle $[0, l]$ en $N + 1$ parties égales(N étant un entier positif) et posons $h = l/(N + 1), x_i = ih$ avec $i = 0, 1, 2, \dots, N$.et $x_{i+1/2} = x_i + h/2$,avec $i = 1, 2, \dots, M$, On définit pour $i = 1, 2, \dots, N$, les fonctions suivantes [5] :

$$\varphi_i(x) \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})\left(x-x_{i-\frac{1}{2}}\right)}{(x_i-x_{i-1})\left(x_i-x_{i-\frac{1}{2}}\right)}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{(x-x_{i+1})\left(x-x_{i+\frac{1}{2}}\right)}{(x_i-x_{i+1})\left(x_i-x_{i+\frac{1}{2}}\right)}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

et pour $i = 0, 1, 2, \dots, N$, les fonctions suivantes

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}}(x) \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{\left(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i\right)\left(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1}\right)}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

Le graphe des fonctions φ_i et $\varphi_{i+1/2}$ est représenté dans la Figure 1.4. Clairement les fonctions φ_i et $\varphi_{i+1/2}$ sont telles que :

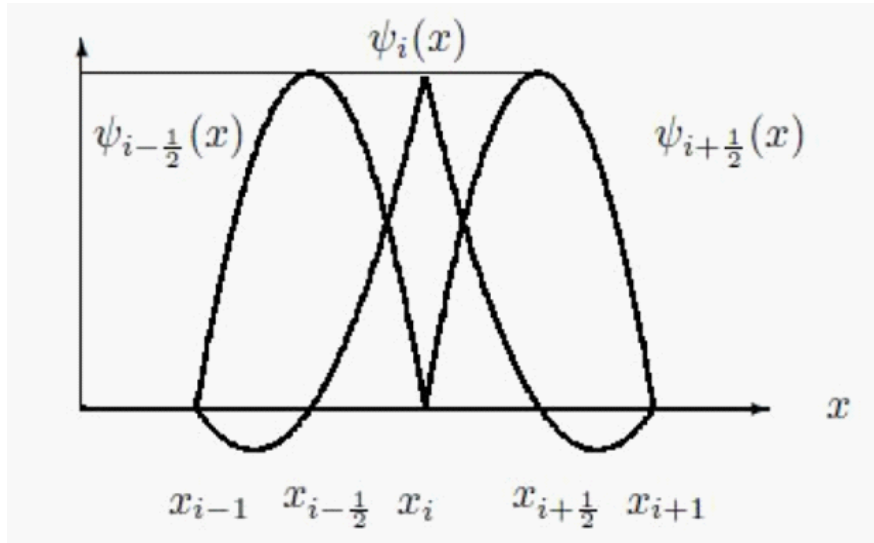
$$\begin{cases} \varphi_i(x_j) = \delta_{ij} & 0 \leq j \leq N+1 \\ \varphi_i\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = 0 & 0 \leq j \leq N \\ \varphi_{i+\frac{1}{2}}|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ est un polynome de degré } 2, 1 \leq j \leq N+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{i+\frac{1}{2}}\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = \delta_{ij} & 0 \leq j \leq N \\ \varphi_{i+\frac{1}{2}}(x_j) = 0 & 0 \leq j \leq N+1 \\ \varphi_{i+\frac{1}{2}}|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ est un polynome de degré } 2, 1 \leq j \leq N+1 \end{cases}$$

Si nous posons maintenant $M = 2N + 1, \psi_1 = \varphi_{\frac{1}{2}}, \psi_2 = \varphi_1, \psi_3 = \varphi_{\frac{3}{2}}, \psi_4 = \varphi_2, \psi_5 = \varphi_{\frac{5}{2}}, \psi_6 = \varphi_3, \dots, \psi_{2N} = \varphi_N, \psi_{2N+1} = \varphi_{N+\frac{1}{2}}$, alors les fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$ appartiennent à V et sont linéairement indépendantes.

Nous choisissons pour engendrer l'espace V_h que nous appelons ici encore espace de type éléments finis. Nous dirons ainsi que [5] :

- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$ sont les noeuds principaux de la discrétisation
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$ sont les éléments géométriques,
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont les fonctions de base du sous-espace V_h de type éléments finis de degré 1 associées aux noeuds intérieurs x_1, x_2, \dots, x_N .

Figure1.4: Graphe des fonctions $\psi_{i-\frac{1}{2}}, \psi_i$ et $\psi_{i+\frac{1}{2}}$

- $x_{1/2}, x_{3/2}, x_{5/2}, \dots, x_{N+1/2}$ sont les noeuds intérieurs aux éléments géométriques,
- $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$ sont les fonctions de base du sous-espace V_h de type éléments finis de degré deux associées aux noeuds de la discrétisation.

Remarque 1.5.1 *la méthode des éléments finis en 2D est complexe donc on utilise la méthode de volumes finis car elle est facilement utilisable avec des maillages .*

1.5.4 méthodes de volumes finis

Principe de méthode [6]

Dans la simulation par la méthode des volumes finis, le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volumes de contrôle. La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles, décrites au chapitre précédent, sur chaque volume de contrôle. Chacun de ces derniers (volumes de contrôle) contenant un noeud dit: "noeud principal". Un exemple de volume de contrôle est montré dans la figure ci-dessous. Pour un noeud principal (P'), les points E et W (E: Est, W: West) sont des voisins dans la direction ξ , tandis que N et S (N: Nord, S: Sud) sont ceux dans la direction η . Le volume de contrôle entourant (P') est montré par les lignes discontinues. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points (e) et (w) dans la direction ξ , (n) et (s) dans la direction η .

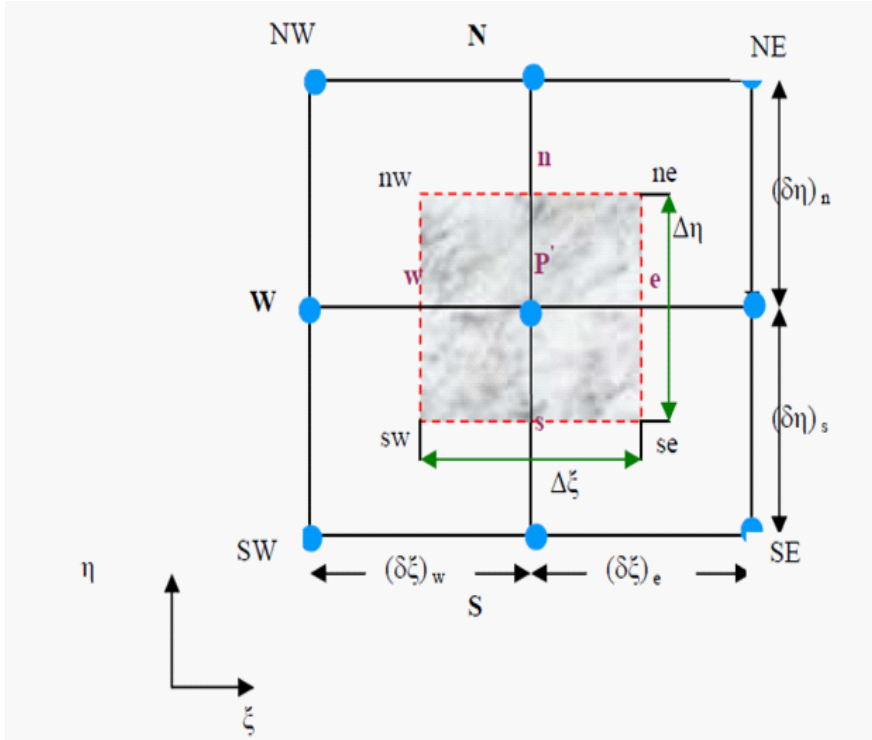


Figure1.5 Schéma représentant Volume de contrôle bidimensionnel.

Formulation Bidimensionnelle de l'Equation de Poisson par la MVF

La formulation monodimensionnelle ci-dessus de la méthode des volumes finis peut être étendue au cas bidimensionnel[6]. La formulation bidimensionnelle consiste à subdiviser le domaine d'étude (Ω) en un nombre d'éléments finis. Chaque élément contient quatre nœuds. Un volume fini entoure chaque nœud (Figure1.6)

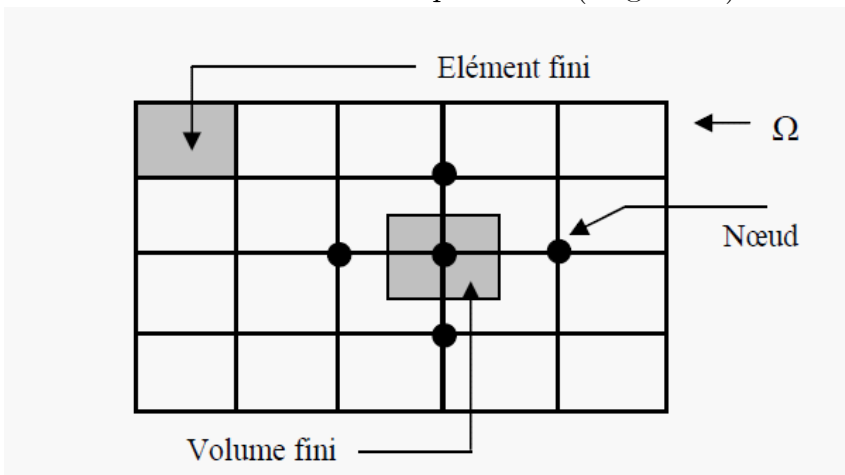


Figure1.6: Discrétisation en volumes finis du domaine d'étude dans le cas bidimensionnel.

Le noeud principal "P" est entouré par quatre noeuds voisins celui du Nord "N", celui du Sud "S" (dans la direction y) et celui de l'Ouest "W", celui de l'Est "E" (dans la direction x). les points (e : est, w : west, n : nord, s : sud).

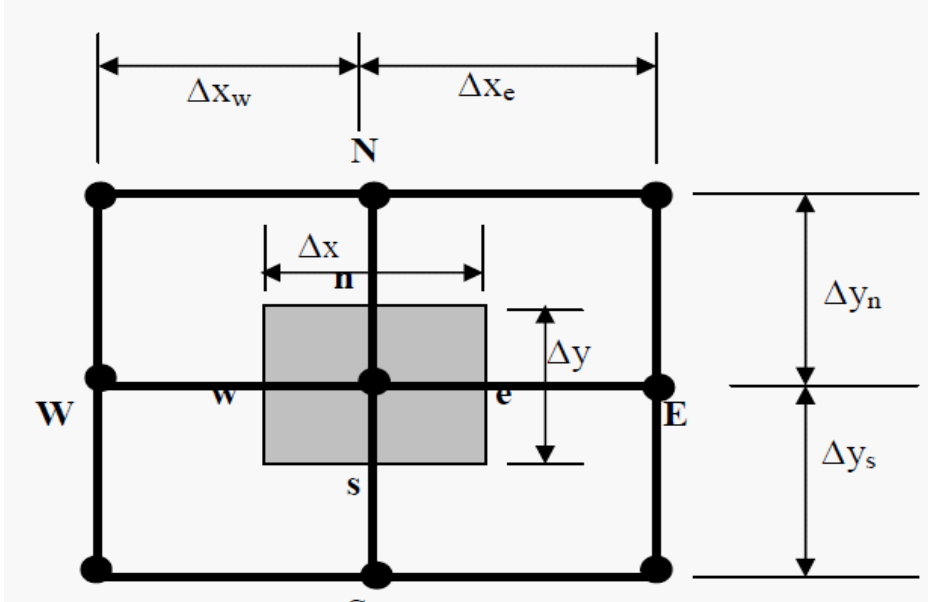


Figure 1.7: Description bidimensionnel d'un volume fini.

L'équation de Poisson dans le cas bidimensionnel est [6] :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -\rho$$

Cette équation est projetée sur une fonction de projection égale à l'unité. Elle est ensuite intégrée sur le volume fini correspondant au noeud P, on obtient :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial X} \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) dX dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dX dy = \int_w^e \int_s^n -\rho dX dy \quad (I.2)$$

L'intégration de la partie gauche de l'égalité (I.2) sur le volume fini limité par (e, w, s, n) est :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial X} \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) dX dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dX dy = \left[\left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta y + \left[\left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta X$$

Un profil linéaire a été choisi pour exprimer la variation de potentiel ϕ entre les noeuds voisins. Le résultat obtenu est constitué uniquement par les valeurs nodales.

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_e &= \varepsilon_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta X_e}\right) \\ \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_w &= \varepsilon_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta X_w}\right) \\ \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n &= \varepsilon_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y_n}\right) \\ \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_s &= \varepsilon_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta X_s}\right) \end{aligned}$$

L'intégral de la partie droite de l'égalité (I.2) donne

$$\int_w^e \int_s^n \rho dX dy = \rho_p \Delta X \Delta y$$

Ainsi l'équation algébrique finale s'écrit sous la forme :

$$a_P \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S$$

avec :

$$\begin{aligned} a_E &= \varepsilon_e \frac{\Delta y}{\Delta X_e} \\ a_W &= \varepsilon_w \frac{\Delta y}{\Delta X_w} \\ a_S &= \varepsilon_s \frac{\Delta y}{\Delta X_s} \\ a_N &= \varepsilon_n \frac{\Delta y}{\Delta X_n} \\ a_P &= a_E + a_W + a_S + a_N \\ S &= \rho_p \Delta X \Delta y \end{aligned}$$

Le résultat obtenu représente une équation algébrique reliant l'inconnue au noeud principal "P" aux inconnues aux noeuds voisins "W", "E", "S" et "N".

la table de compareson entre les méthode

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la définition de l'équations aux dérivées partielles et de ses Classifications et les méthodes numériques de resolution des E.D.Ps. Dans le prochain chapitre nous présenton les types de transfert de chaleur et la principe de la méthode des volumes finis .

Chapitre 2

Le transfert de chaleur

2.1 Introduction

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et des composantes électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs des procédés industriels, etc. L'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objet principal de plusieurs travaux, et pour se faire, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes gérant la convection, l'effet de la nature des systèmes dans lesquels elle a lieu (géométrie spécialement), et les propriétés des fluides impliqués (propriétés physico-chimiques).

2.2 Notions de base

2.2.1 La chaleur

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. Cette équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité: le joule [7].

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température

2.2.2 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur[8]:

$$\varphi = \frac{1}{S} * \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Où S est l'aire de la surface.

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps:

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

2.2.3 La Température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu. Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température [7].

2.2.4 Unités de chaleur

On a vu qu'en physique, la quantité de chaleur est exprimée dans les mêmes unités que l'énergie et le travail, à savoir en joules (J).

On utilise également la calorie (Cal), définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de 14,5 °C à 15,5 °C sous une pression de 1 atm.

L'énergie mécanique peut être convertie en chaleur par frottement, et le travail mécanique nécessaire pour produire une calorie s'appelle «l'équivalent mécanique de la calorie»[7].

On a : $1 \text{ Cal} = 4,1855 \text{ J}$

2.2.5 Equation de la chaleur

Définition 2.2.1 *On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux de type paraboliques*

$$u_t(x, t) - k\Delta u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t) = 0,$$

pour u défini sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$ et $k > 0$.

C'est l'équation de la chaleur qui modélise des phénomènes d'évolution : diffusion de chaleur.

2.3 les type de transfer de chaleur

Le transfert de chaleur est défini par la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de températures.

Le transfert de chaleur est régi, non seulement par une relation unique, mais, plutôt par une combinaison de différentes lois physique indépendantes.

On distingue, généralement, trois modes de transfert [10]:

1. Conduction : transfert dans la masse.
2. Rayonnement : transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée.

3. Convection : transfert par transport.

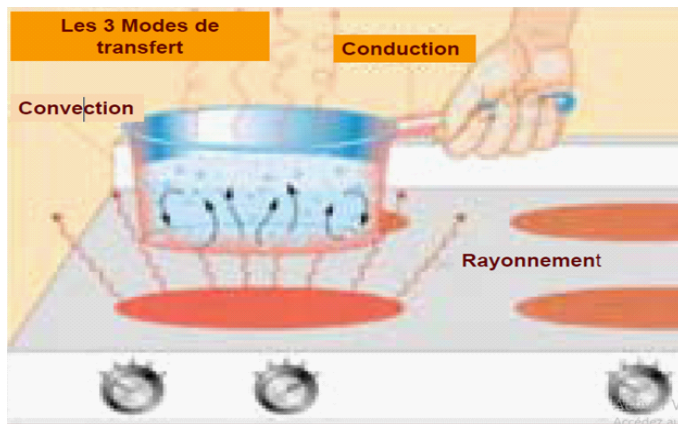


Figure2.1: les type de transfer de chaleur

2.3.1 la conduction

La conduction est définie comme tant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne). Provoquée par une différence de température entre deux milieu solides, en contact physique. Ainsi, le corps à température plus élevée donne de l'énergie thermique à celui dont la température est plus faible, sans qu'il y ait transfert de matière. La différence de température entre deux corps provoque les transferts thermiques à l'intérieur même de chacun des corps. On obtient un système dynamique dans la conduction, l'énergie (chaleur) se propage par contact direct des molécules sans un déplacement appréciable des molécules[9].

Applications

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc .

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur [10]

Si les faces intérieure et extérieure d'une vitre d'une maison sont à des températures différentes il y a conduction thermique dans l'épaisseur de la vitre. En hiver par exemple, si la température de la face extérieure est de - 10 OC et celle de la face intérieure est de 20OC, le transfert de chaleur se fait de l'intérieur v

2.3.2 rayonnement

C'est un mode de transfert de chaleur qui nous est familier: l'hiver devant un bon feu ou l'été sur la plage au soleil. La chaleur passe d'un corps à haute température vers un corps à basse température sous forme d'un rayonnement électromagnétique (photon); les deux corps devant être dans un milieu transparent (comme l'air ou le vide).

Applications

Le rayonnement infrarouge est appliqué dans de très nombreux procédés industriels. Son action sur la matière est essentiellement thermique et les applications principales concernent [10]:

- le séchage (papiers, cartons, textiles, etc.);
- la cuisson (teintures, apprêts, enductions...) ;
- le chauffage (avant formage de matériaux divers, traitements thermiques, soudage, chauffage de postes de travail...) ;
- les polymérisations (encres, revêtements, emballages...) ;
- la stérilisation (flacons pharmaceutiques, produits alimentaires divers...).

2.3.3 convection

Généralités – Définition

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz

[9]. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes, L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. La quantité de chaleur échangée par unité de temps dépend de plusieurs paramètres:

- la différence de température entre la paroi et le fluide.
- la vitesse du fluide.
- la capacité thermique massique du fluide.
- la surface d'échange.
- l'état de surface du solide.
- sa dimension...etc.

Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide, on distingue :

1. la convection naturelle
2. la convection forcée

Applications

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur .

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud [10].

Type de convection

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement Aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte.

La différence entre ces deux modes de convection est essentielle dans la mesure où, dans le cas de la convection forcée, la température ou la concentration peuvent être des scalaires passifs, advectés par un écoulement imposé par ailleurs. Dans la convection naturelle au contraire, les gradients de masse volumique sont le terme moteur de l'écoulement du fluide, qui transfère par ailleurs chaleur ou soluté avec son environnement. Il y a donc fondamentalement couplage entre le champ de vitesse et les différents champs scalaires[6].

convection naturelle En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité due au non uniformité du champ de température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions a température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants des cendants se produits pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud.

Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle. En outre et selon les conditions aux limites, les études relatives à la convection sont souvent menés dans les cavités. On peut distinguer plusieurs types de problèmes dans les cavités[6]

2.4 Principe de la méthode des volumes finis

La méthode des Volumes Finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, contrairement aux Eléments Finis, et est ainsi très utilisée en mécanique des Fluides.

2.4.1 Discrétisation de l'équation de la chaleur 1D

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de $1m$ de longueur.

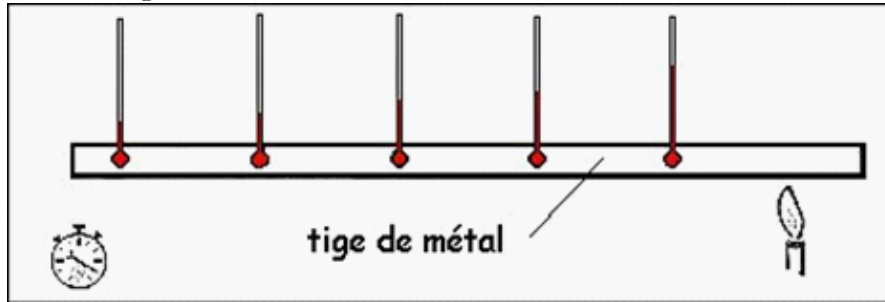


Figure 2.2: la conduction de la chaleur dans une barre

Le champ de température $T(x; t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où α est la diffusivité thermique que l'on supposera égale à 1. A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre $T(0; t) = T_g$ et $T(1; t) = T_d$ ainsi qu'une condition initiale $T(x; 0) = T_0$.

L'intervalle $[0, 1]$ est discrétisé en N mailles de centre x_i (i variant de 1 à N), de taille $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ constante.

Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt . A chaque instant, la température $T(x; t)$ est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne sur la maille considérée. On notera T_i^n cette valeur dans la i -ème maille de centre x_i à l'instant $t = n\Delta t$.

La discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille l'EDP du problème, soit pour la i -ème maille [4] :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial T}{\partial t} dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

Nous utilisons un schéma d'Euler implicite pour évaluer la dérivée temporelle, il vient :

$$\Delta x \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}}^n - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}}^n \right]$$

Les termes de dérivée première aux interfaces $x_{i+1/2}$ sont évalués en considérant la valeur moyenne de $\frac{\partial T}{\partial x}$ sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$, soit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}$$

Cette formulation n'est pas valable dans la maille N à l'extrémité droite de la barre. Dans cette maille, on considère la valeur moyenne calculée sur l'intervalle $[x_N, 1]$. D'où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{N+1/2}}^n = \frac{2}{\Delta x} \int_{x_N}^1 \frac{\partial T}{\partial x} dx = 2 \frac{T_d^n - T_N^n}{\Delta x}$$

De même, les termes de dérivée première aux interfaces $x_{i-1/2}$ sont évalués en considérant la valeur moyenne de $\frac{\partial T}{\partial x}$ sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$, soit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}$$

Avec un problème dans la première maille à l'extrémité gauche de la barre. Dans cette maille, on considère la valeur moyenne calculée sur l'intervalle $[0, x_1]$. D'où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{1/2}^n = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{x_1} \frac{\partial T}{\partial x} dx = 2 \frac{T_1^n - T_g^n}{\Delta x}$$

En posant $\lambda = \frac{\Delta T}{\Delta x^2}$, la température à l'itération $n + 1$ est donnée par :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n \quad i \text{ variant de } 2 \text{ à } N - 1$$

$$T_1^{n+1} = 2\lambda T_g^n + (1 - 3\lambda) T_1^n + \lambda T_2^n$$

$$T_N^{n+1} = \lambda T_{N-1}^n + (1 - 3\lambda) T_N^n + 2\lambda T_d^n$$

Soit sous forme matricielle [4]:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1-3\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-3\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + 2\lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

2.4.2 Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Le champ de température $T(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & , \quad (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ T(0, y) = T_g \text{ et } T(L_x, y) = T_d & 0 < y < L_y \\ T(x, 0) = T_b \text{ et } T(x, L_y) = T_h & 0 < x < L_x \end{cases}$$

Le domaine de calcul est discrétisé en $N \times P$ mailles de centre (x_i, y_j) (i variant de 1 à N et j variant de 1 à P). On supposera que les pas d'espace dans chaque direction $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ et $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ sont constants.

La température $T(x, y)$ est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne sur la maille considérée. On notera T_{ij} cette valeur dans la maille (i, j) .

La discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille l'EDP du problème, soit pour la maille (i, j) de centre $(x_i; y_j)$:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$$

Il vient

$$\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}} \right] dy + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_{j+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_{j-1/2}} \right] dx = 0$$

Le terme de dérivée première $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}}$ à l'interface $x_{i+1/2}$ est évalué en calculant une valeur moyenne sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{T_{i+1,j} - T_{ij}}{\Delta x}$$

De même, le terme $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}}$ à l'interface $x_{i-1/2}$ est évalué en calculant une valeur moyenne sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}} \right] dy &= \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\frac{T_{i+1,j} - T_{ij}}{\Delta x} - \frac{T_{ij} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right] dy \\ &= \Delta y \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{ij}}{\Delta x} \end{aligned}$$

En opérant identiquement pour les termes $\frac{\partial T}{\partial y}$ aux interfaces $y_{j+1/2}$ et $y_{j-1/2}$, on aboutit à l'expression suivante valable pour i variant de 2 à $N - 1$ et j variant de 2 à $P - 1$:

$$\Delta y^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) T_{ij} = 0$$

Cette relation n'est pas valable aux bords du domaine pour lesquels les termes de dérivées premières sont évalués en considérant une valeur moyenne sur une demie-maille. Par exemple, pour la dérivée $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{1/2}}$, la valeur moyenne sera calculée sur l'intervalle $[0, x_1]$ et fera intervenir les conditions aux limites (la température T_g au bord gauche) :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{1/2}} = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{x_1} \frac{\partial T}{\partial x} dx = 2 \frac{T_{1j} - T_g}{\Delta x}$$

Ainsi pour les cellules adjacentes au bord gauche ($i = 1$, j variant de 1 à P), la formulation est :

$$\Delta y^2 (T_{2,j} + 2T_g) + \Delta x^2 (T_{1,j+1} + T_{1,j-1}) - (2\Delta x^2 + 3\Delta y^2) T_{1j} = 0 \quad ; \quad j = 2 \text{ à } p - 1$$

$$\Delta y^2(T_{2,1} + 2T_g) + \Delta x^2(T_{12} + 2T_b) - 3(\Delta x^2 + \Delta y^2)T_{11} = 0 \quad ; j = 1$$

$$\Delta y^2(T_{2,p} + 2T_g) + \Delta x^2(2T_h + T_{1,p-1}) - 3(\Delta x^2 + \Delta y^2)T_{1p} = 0 \quad ; j = p$$

On aura une formulation équivalente pour les cellules adjacentes aux 3 autres bords du domaine.[4]

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 3$,

en posant $A = \Delta x^2 + \Delta y^2$, $B = 3\Delta x^2 + 2\Delta y^2$ et $C = 2\Delta x^2 + 3\Delta y^2$:

$$\begin{bmatrix} -3A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta y^2 & -B & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & -3A & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x^2 & 0 & 0 & -c & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -C & 0 & 0 & \Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & -3A & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -B & \Delta y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -3A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_b \\ \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_d \\ \Delta y^2 T_g \\ 0 \\ \Delta y^2 T_d \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_h \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_d \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les pas d'espace sont identiques $\Delta x = \Delta y$, la formulation matricielle, pour $N = P = 3$ devient :

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{bmatrix}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les types de transfert de chaleur et le principe de la méthode des volumes finis. Dans le prochain chapitre nous présentons le modèle physique et mathématique de notre phénomène physique.

Chapitre 3

Modèle physique et mathématique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique. Les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées

3.1.1 Qu'est-ce qu'un modèle ?

Le principe d'un modèle est de remplacer un système complexe en un objet ou opérateur simple reproduisant les aspects ou comportements principaux de l'original (ex : modèle réduit, maquette, modèle mathématique ou numérique, modèle de pensée ou raisonnement).

3.1.2 Pourquoi faut-il modéliser ?

Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux (la météorologie, la turbulence des fluides...).

3.1.3 De la modélisation à la simulation numérique

Les différentes étapes pour modéliser un système complexe :

- ▶ Recherche d'un modèle mathématique représentant la physique. Mise en équation.
- ▶ Elaboration d'un maillage. Discrétisation des équations de la physique.

- ▶ Résolution des équations discrètes (souvent systèmes linéaires à résoudre).
- ▶ Transcription informatique et programmation des relations discrètes.
- ▶ Simulation numérique et exploitation des résultats.

3.2 Modèle physique

Un fer à repasser électrique est constitué d'une semelle métallique de masse $m = 1\text{kg}$ ($\rho = 7840\text{ kg/m}^3$; $C_p = 450\text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$; $\lambda = 70\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$). Cette plaque métallique a une surface de $A = 0,025\text{ m}^2$ et est chauffée par la face interne au fer par une résistance chauffante de 250 W . Initialement le fer est à la température uniforme $T_i = 293,15\text{ }^\circ\text{K}$. Au temps $t = 0$, le fer est branché. La semelle dissipe alors de la chaleur par convection avec l'air ambiant par la face extérieure (face opposée à la face chauffée). La température de l'air ambiant est $T_a = 293,15\text{ }^\circ\text{K}$, le coefficient d'échange convectif métal/air est $h_c = 50\text{W/m}^2\cdot\text{K}^1$.

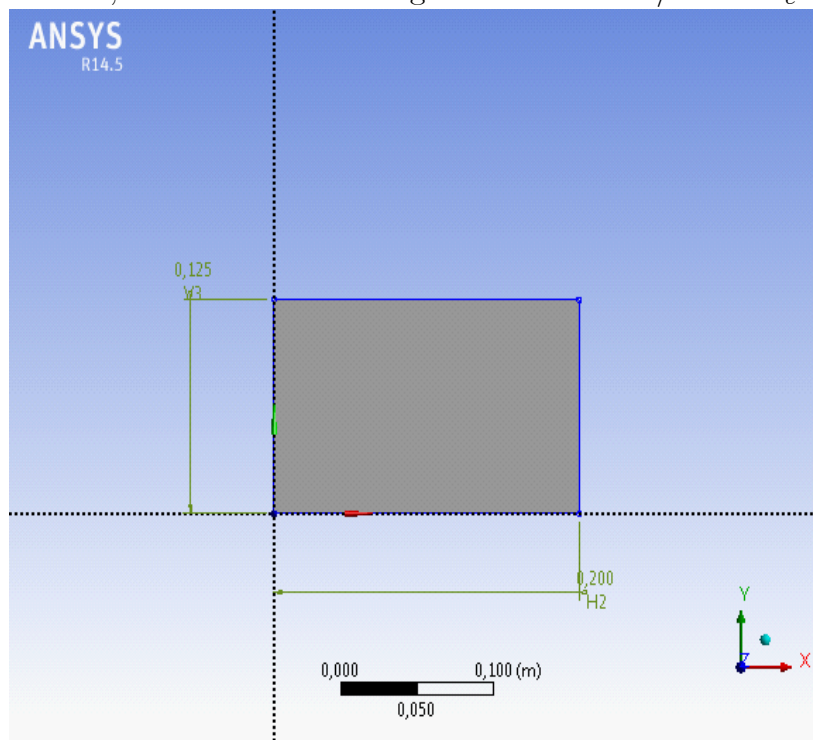


Figure 3.1: plaque métallique

3.3 Conditions limites et initiales

Le problème s'intéresse à la répartition en température au sein d'une plaque métallique en régime stationnaire pour les conditions aux limites suivantes:

Pour l'approximation numérique spatiale selon x , $h = dx$ est le pas de subdivision uniforme $(x_i)_{i \in [0, N]}$ de l'intervalle $[0, 0.20]$: $x_i = i.h$

Pour l'approximation numérique spatiale selon y , $k = dy$ est le pas de subdivision uniforme $(y_j)_{j \in [0, N]}$ de l'intervalle $[0, 0.125]$: $y_j = j.k$

On considère les conditions initiales suivantes: $0 \leq x \leq 0.20$ (m) ; $0 \leq y \leq 0.125$ (m)

$$\begin{cases} T(x, 0) = 293.15^\circ K \\ T(x, 0.0.125) = 373.15^\circ K \end{cases}$$

On considère les conditions limites suivantes:

$$\begin{cases} T(0, y) = 373.15^\circ K \\ T(x, 0) = 293.15^\circ K \\ T(0.20, y) = 293.15^\circ K \\ T(x, 0.125) = 293.15^\circ K \end{cases}$$

3.4 Equations gouvernantes

La formulation mathématique des phénomènes de convection repose sur les équations liant les différents paramètres à savoir: la vitesse, la pression et la température. Ces équations proviennent de la prise de la moyenne dans le temps des équations de Navier Stokes. On obtient en conséquence les équations de Reynolds(RANS) données ci-dessous et exprimant[11]

- la loi de conservation de masse (équation de continuité).
- la loi de conservation de la quantité de mouvement.
- la loi de conservation de l'énergie (équation de l'énergie).

3.4.1 les équations de Navier-Stokes

les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (donc des gaz et de la majeure partie des liquides). La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase est difficile. La cohérence mathématique de ces équations non linéaires n'est pas démontrée. Mais elles permettent souvent, par une résolution approchée, de proposer une modélisation de nombreux phénomènes, comme les courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologues, le comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs, ou encore celui des avions, trains ou voitures à grande vitesse pour leurs bureaux d'études concepteurs, mais aussi le trivial écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides.

Ces équations sont nommées ainsi pour honorer les travaux de deux scientifiques du XIX^e siècle : le mathématicien et ingénieur des Ponts Henri Navier, qui le premier a introduit la notion de viscosité dans les équations d'Euler en 1823, et le physicien George Gabriel Stokes, qui a donné sa forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 1845. Entre temps, divers scientifiques ont contribué à l'avancement du sujet : Augustin Louis Cauchy et Siméon Denis Poisson en 1829 et Adhémar Barré de Saint-Venant en 1843. La résolution mathématiquement rigoureuse des équations de Navier-Stokes constitue l'un des problèmes du prix du millénaire [12].

3.4.2 Equation de continuité

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_k)}{\partial x_k} = 0$$

Où : ρ la masse volumique

$U_k = u, v, w$ ($k = 1, 2, 3$) les trois composantes du vecteur vitesse [12]

3.4.3 Équation d'état

C'est un fait d'expérience que l'état d'un système thermostatique simple (nous excluons les mélanges) est déterminé uniquement par deux paramètres, dits variables d'état. La pression P et la masse volumique ρ sont des variables d'état. Toutes les autres variables d'état (la température Θ ou l'enthalpie h , par exemple) sont ainsi fonctions de ces deux paramètres d'état, et les relations qui les lient sont appelées équations d'état. L'état d'un système peut donc être représenté par une relation de la forme

$$P = P(\rho, \Theta)$$

Les équations d'état sont soit obtenues à partir d'observations expérimentales, soit déduites d'une théorie cinétique [12].

3.4.4 L'équation de transport

Définition 3.4.1 *L'équation de transport générale d'une quantité quelconque ϕ dans un fluide en mouvement peut s'écrire comme suit [13] :*

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j=1} \frac{\partial}{\partial X_j}(\rho u_j \phi)}_{(2)} = \underbrace{\sum_{j=1} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right)}_{(3)} + \underbrace{S_\phi}_{(4)} \quad (4)$$

- (1) : Terme temporel. (2) : Terme convectif. (3) : Terme de diffusion.
 (4) : Terme source. Γ : Coefficient de diffusion.

3.4.5 Equation de quantité de mouvement

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à un domaine matériel que nous suivons dans son mouvement, exprime que la dérivée particulaire du tenseur de quantité de mouvement est égale au tenseur des forces extérieures appliquées à ce domaine [12].

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial(\mu \delta_{ij})}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_k}{\partial U_k} \right)$$

Où :

t : le temps

F : les forces de volume

P : la pression

μ : la viscosité dynamique

δ_{ij} : le tenseur des vitesses de déformations quivaut par définition

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 2, 3$$

3.4.6 Equation de chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \\ T(0, y) = 100^\circ C \\ T(x, 0) = 20^\circ C \\ T(0.20, y) = 20^\circ C \\ T(x, 0.125) = 200^\circ C \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} ; 0 \leq y \leq 0.125 \\ ; 0 \leq x \leq 0.20 \end{array}$$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le modèle physique de notre problème, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites de notre problème physique. Dans le prochain chapitre, nous présentons la résolution numérique de notre modèle mathématique par la code simulation fluent.

Chapitre 4

RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 introduction

Les outils de simulation numérique occupent une place prépondérante dans les études en physique du bâtiment. La démarche de conception optimale qui résulte de l'épuisement des ressources énergétiques et du souci de préservation de l'environnement, n'a fait qu'amplifier leur utilisation.

La simulation se définit comme l'utilisation ou la résolution de modèles correspondant à un système donné pour étudier le comportement de ce dernier dans un contexte précis. Elle est la suite logique de la modélisation qui est la première approche d'une simulation.

La simulation se définit comme l'utilisation ou la résolution de modèles correspondant à un système donné pour étudier le comportement de ce dernier dans un contexte précis. Elle est la suite logique de la modélisation qui est la première approche d'une simulation.

De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo, elsA...

4.2 Simulation

les étapes nécessaires pour réussir une simulation d'un problème en mécanique des fluides à l'aide du code Fluent est:

1. Choix du solveur

2. Choix du modèle de turbulence
3. Définition des caractéristiques du fluide
4. Operating conditions
5. Conditions aux limites
6. Choix des critères de convergence
7. Initialisation des calculs
8. Sauvegardes
9. Lancement de la simulation

4.3 codes de simulation

4.3.1 gambit

GAMBIT est un logiciel qui permet de créer des maillages pouvant être utilisés en particulier sous *FLUENT*.

Le mailleur est un prétraitement au logiciel de simulation. Il permet de générer un maillage structuré ou non structuré en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques ou axisymétriques. Il peut réaliser des maillages complexes en deux ou trois dimensions avec des mailles de type rectangle ou triangle.

Construction d'un maillage

Pour construire un maillage, il est bon de suivre la démarche suivante:

- définir la géométrie.
- réaliser le maillage.
- définir les paramètres des zones de calcul.

La géométrie comprend les positions physiques de points caractéristiques définissent la zone que l'on a à mailler: coordonnées spatiales des quatre sommets d'un carré; du point de

départ et du point d'arrivée d'une ligne; du centre et de l'ouverture angulaire d'un arc de cercle. Il faut pouvoir représenter la zone à étudier par un ensemble de figures géométriques simples raccordées les unes aux autres.

Pour des maillages structurés, on peut faire la liaison entre la géométrie et le maillage, Aussi, avant de réaliser le maillage, il faut spécifier par écrit d'une part la géométrie adoptée pour définir la zone à mailler, d'autre part les numéros des mailles correspondant aux points caractéristiques de la géométrie. Un noeud pourra alors être repéré par ces coordonnées physiques x et y ou indices I et J .

Par ailleurs, il peut être avantageux de définir des points intermédiaires qui ne sont pas indispensables à la définition de la géométrie mais qui permettent de délimiter les zones dans lesquelles les mailles seront adaptées pour raffiner le maillage près des parois par exemple ou bien pour épouser au mieux la forme des obstacles, parois ou autres...

Notice d'utilisation de gambit

Ce logiciel est utilisé pour définir et créer le modèle d'étude (surface ou volume) et de le mailler suivant le bon vouloir de l'utilisateur. Les différentes étapes d'utilisation de GAMBIT sont définies dans la notice suivante.

Vue globale Après avoir lancé le logiciel, l'interface d'utilisation apparaît

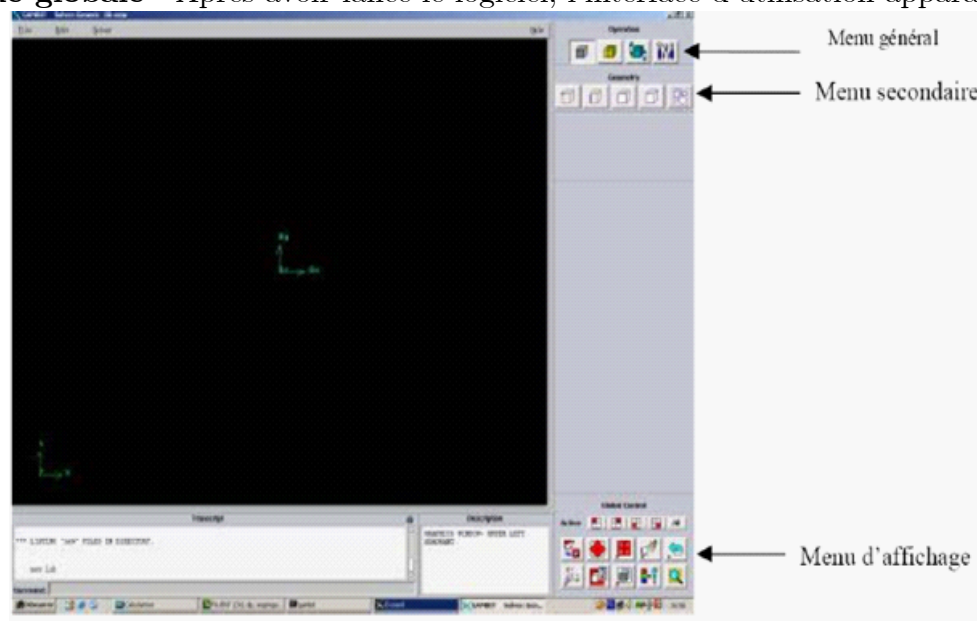
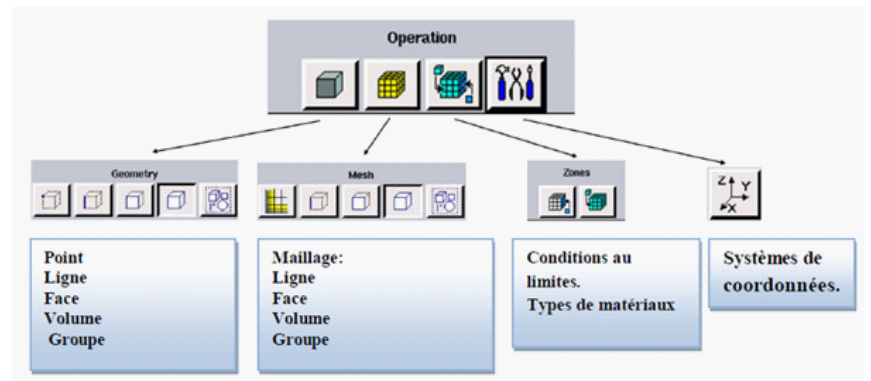


Figure 4.1: Vue globale de Gambit.

Astuce La première chose à faire quand on entre sur Gambit est de nommer le système qu'on va construire de telle manière de ne pas le perdre bêtement.

L'utilisation de Gambit est simple : principalement il faut prendre les menus en haut à droite et effectuer les tâches en partant du menu de gauche pour aller jusqu'à celui de droite (où normalement on doit avoir fini notre maillage).

Important Avant même de créer la géométrie il faut choisir le type de solver ; c'est-à-dire le type de logiciel (ici fluent) qu'on va utiliser par la suite (choisir la bonne version du logiciel dans notre cas choisir Fluent 5/6)



Détail des principaux menus

Figure 4.2: Menu principale de Gambit.

4.3.2 Fluent

La simulation en Mécanique des Fluides Numérique (Computational Fluid Dynamics : CFD), est utilisée pour la modélisation, la visualisation et l'analyse des écoulements fluides et transferts thermiques. Elle permet aux utilisateurs d'optimiser les performances des nouveaux concepts, tout en réduisant le cycle de commercialisation, les risques associés et les coûts.

Depuis plus de 10 ans, Fluent, leader mondial en Simulation numérique des écoulements Fluides logiciels et services. S'emploie à offrir la solution de simulation la plus adaptée, que ce soit pour l'ensemble de l'industrie, la recherche ou la formation des ingénieurs de demain.

Cette solution passe par des services d'assistance technique, d'études à façon, et par des formations personnalisées.

Le siège du groupe Fluent est situé à Lebanon, New Hampshire, USA, et compte des filiales en Belgique, Angleterre, France, Allemagne, Inde, Italie, Japon et Suède. Ses logiciels sont aussi vendus à travers le monde grâce à des joint-ventures, des partenariats et des distributeurs en Corée, Australie, Brésil, Chine, Taïwan, République Tchèque, Moyen Orient et dans la plupart des pays européens.

4.3.3 Notice d'utilisation de fluent

Fluent est un code CFD commercial très utilisé dans l'industrie. Il permet de résoudre les écoulements fluides (champs de vitesses, de température...), c'est la raison pour laquelle on la choisi pour réaliser notre simulation.

Ensuite l'utilisation de Fluent est simple, il suffit de suivre l'ordre des menus en partant de la gauche pour aller vers la droite. Le premier menu que nous allons étudier est le menu GRID. La première chose à faire est d'utiliser l'option check afin de vérifier si le maillage importé comporte des anomalies comme des problèmes de jointure entre les différentes surfaces du maillage. Pour choisir l'échelle d'étude du maillage et par conséquent réfléchir en nombres adimensionnels, il faut utiliser l'option scale (choix est très important car souvent suivant les dimensions du domaine, les phénomènes mis en jeu ne sont pas les même).

Remarque 4.3.1 *il est possible de vérifier tout de suite la forme de la grille en cliquant sur DISPLAY et ensuite sur grid. On peut de cette façon vérifier que la géométrie correspond bien à ce que l'on veut.*

Le second menu que l'on va utiliser est le menu DEFINE. La démarche à suivre est de partir des options du haut du menu secondaire et de descendre au fur et à mesure. Nous trouvons donc l'option Models qui se décompose aussi en un autre menu. solve permet de choisir le type de solveur que l'on souhaite utiliser (implicite, explicite, stationnaire, 2D...). viscous permet de choisir le modèle de turbulence que l'on va prendre pour résoudre le problème (laminaire, $k - \epsilon$, $k - \omega$, LES...). Energy permet de choisir si oui ou non on doit faire intervenir l'équation de l'énergie dans la résolution du système (dès qu'un gradient de

température intervient dans les phénomènes il faut utiliser cette équation pour d'une part observer une solution réaliste mais aussi souvent pour faciliter la convergence).

Dans le menu Models radiation qui sont à utiliser en fonction de l'énoncé du problème. Vient ensuite le sous menu Materials qui permet de choisir le fluide gravity et entrer la valeur voulue de la gravité. On peut aussi entrer, et cela est souhaitable, la valeur initiale de la densité et lui donner une valeur sous Fluent (ceci montre que même si l'on a fait une erreur de condition sous Gambit, on peut encore tout modifier sous Fluent).

Pour une entrée de fluide, on fixe la vitesse ainsi que le niveau de turbulence ; pour un mur on peut fixer soit un flux constant, soit une température constante et bien d'autres possibilités (telles que la rugosité du mur par exemple).

Maintenant que la géométrie est en place, nous pouvons paramétrer et initialiser le solver de Fluent dans le menu suivant : le menu SOLVE. Le premier sous-menu est le menu Control qui comprend tout d'abord l'option solution. C'est grâce à cette option que l'on va pouvoir entrer les différents facteurs de sous-relaxation du système : pression, température etc... Ces facteurs peuvent être modifié au cours de la résolution. Leur principal intérêt est de forcer la solution a convergé : en les baissant, on diminue la vitesse de convergence mais on l'améliore (encore que ces constatations soient valables en générales, mais pas nécessairement dans tous les cas).

Dans ce menu, on peut à la façon de discrétiser chaque variable (pression, moment...). d'autre sous-menu de SOLVE est Initialise. Ce menu permet de fixer les conditions initiales du système d'itérations que l'on veut faire pour résoudre le système et aussi la valeur limite des résidus que l'on veut se fixer.

Une fois que l'on estime que la convergence est atteinte, on peut visualiser les résultats grâce au post-traitement de Fluent. Principalement, on utilise le menu DISPLAY et les sous-menus contours et velocity vectors. Dans le premier, on observe les variations des variables (vitesse, température...) avec les iso-surfaces. Dans le second, les valeurs sont traduites par des vecteurs ; ceci est surtout utile pour la visualisation des vecteurs vitesses. Il est également possible dans ces menus d'observer les résultats sur les faces de la géométrie et pour les vecteurs de faire des projections.

Pour visualiser des zones précises du maillage (lignes, plans...), le menu SURFACE permet de créer des lignes ou de plans dans la géométrie à partir de points. Ensuite on peut pour les plans, les choisir pour visualiser les contours ou les vecteurs, et pour les lignes, on utilise le menu PLOT, qui offre la possibilité de faire des graphes en 2D de toutes les variables sur les lignes créées par l'utilisateur. Pour exporter des images, on peut, soit faire une copie d'écran (de loin le plus simple), soit cliquer dans FILE, hardcopy et choisir TIFF pour créer une image Tiff de la fenêtre actuellement affichée (l'utilisateur peut choisir diverse options comme couleur ou noir et blanc...).

4.4 Description du probleme

Nous étudierons numériquement la convection naturelle dans une plaque rectangulaire de longueur $L = 0.20m$ et largeur $h = 0.125m$

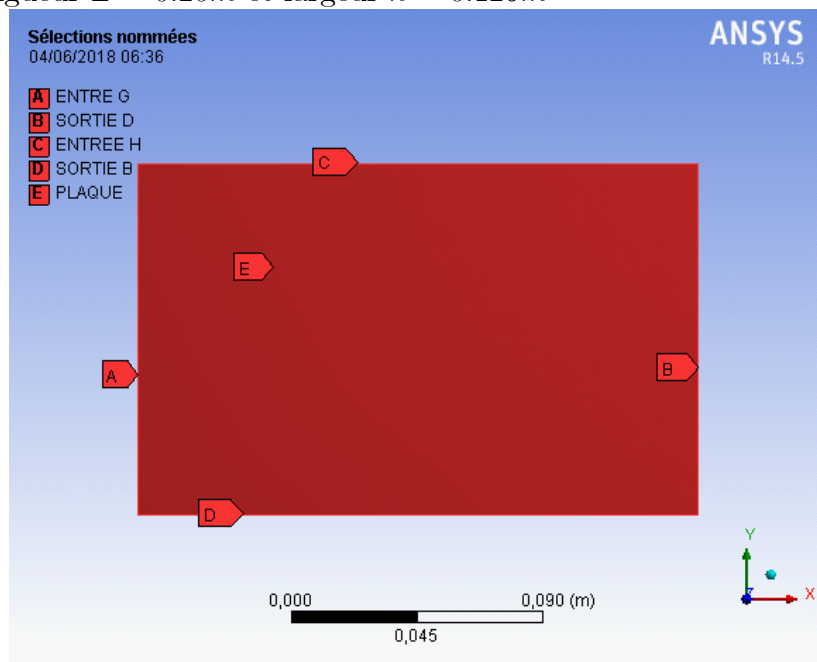


Figure 4.3: l'Entrée et le sortir de la chaleur dans le plaque

- A: entre à gauche ($T(0, y) = 373.15^\circ K$)
- B: sortie à droite ($T(0.20, y) = 293.15^\circ K$)
- C: Entrer du haut ($T(x, 0.125) = 293.15^\circ K$)
- D: Entrer du bas ($T(x, 0) = 293.15^\circ K$)
- E: la plaque

4.5 Maillage

La seule manière d'établir l'indépendance des solutions du maillage est de faire plusieurs maillages pour voir s'il y a des différences majeures dans les résultats obtenus. Pour ce faire, plusieurs maillages sont faits afin de chercher la limite de l'indépendance de la solution par rapport au raffinement du maillage. Après chaque simulation, on contrôle l'un des paramètres qui nous intéresse le plus, la vitesse par exemple. Donc, le maillage utilisé est raffiné avec un nombre des noeuds variable de 33785 .

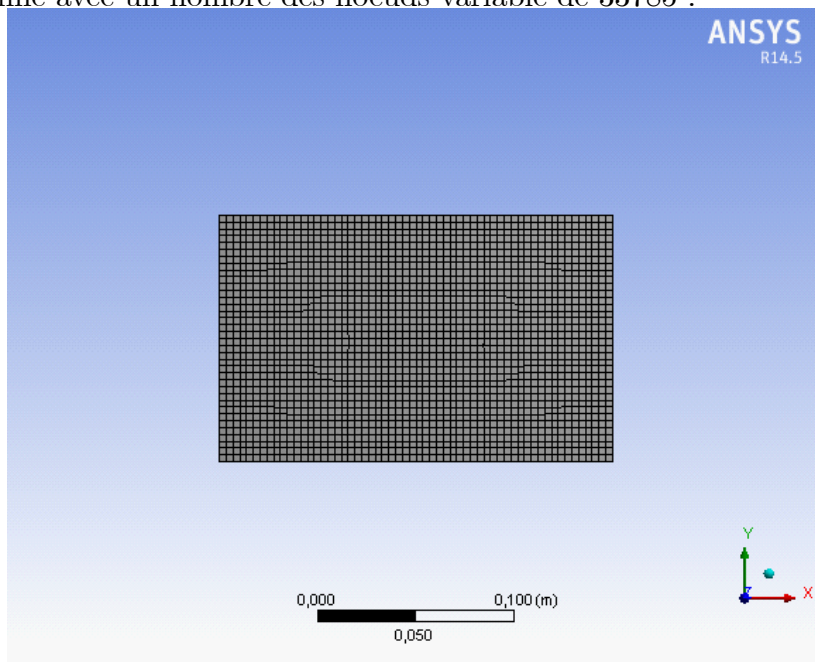
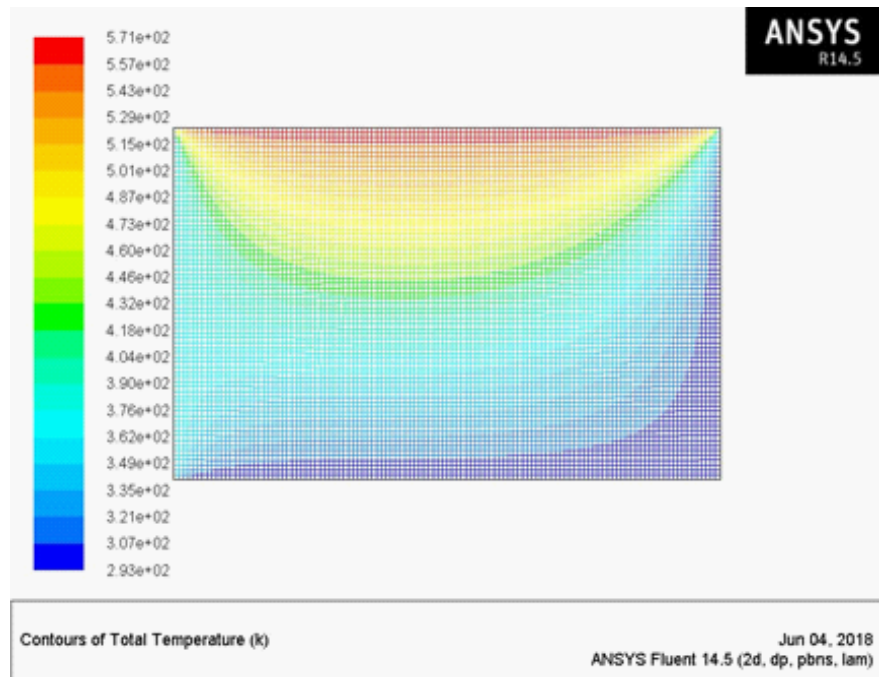


Figure 4.4: le maillage

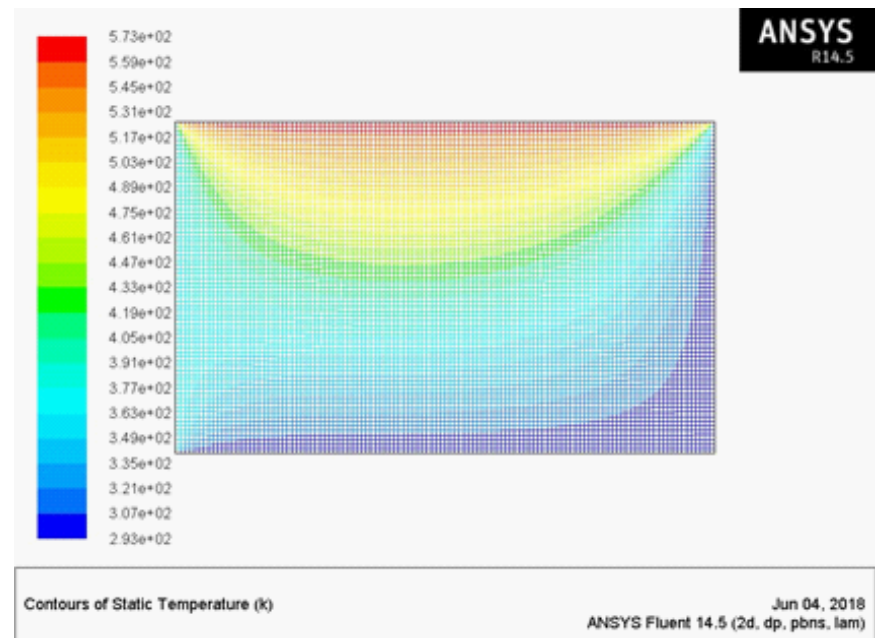
Les résultats obtenus pour :

Temperature



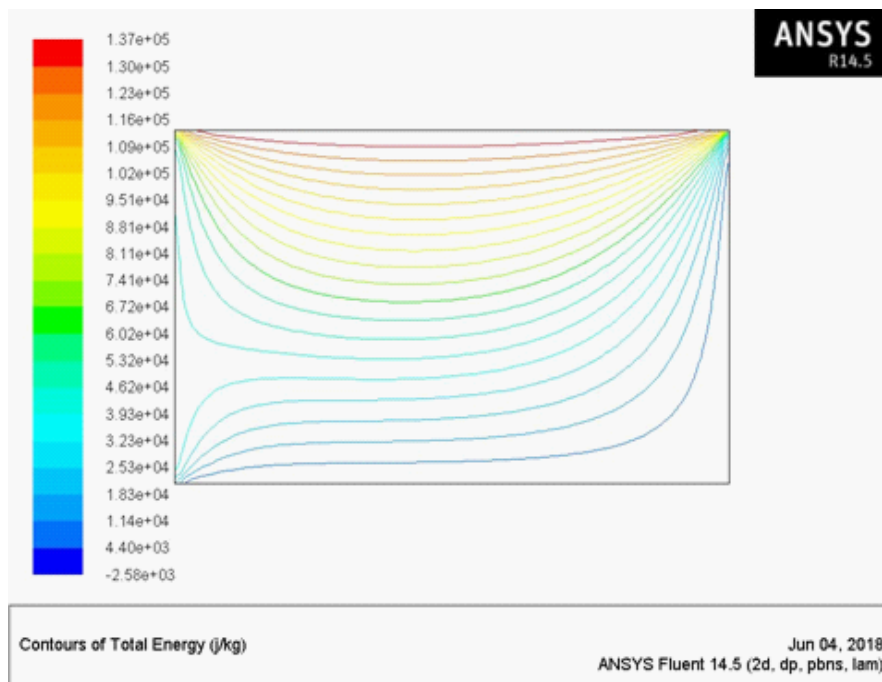
Temperature Total

Figure 4.5: contours de temperature total



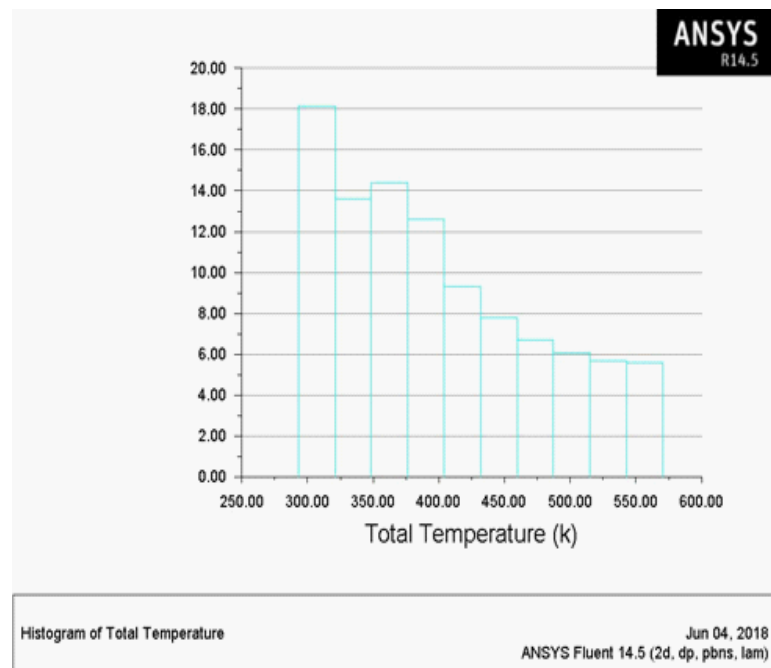
Temperature static

Figure 4.6: contours de temperature static



Energy total

Figure 4.7: energy total



Histogramme de temperature

Figure 4.8: histogramme de temperature total

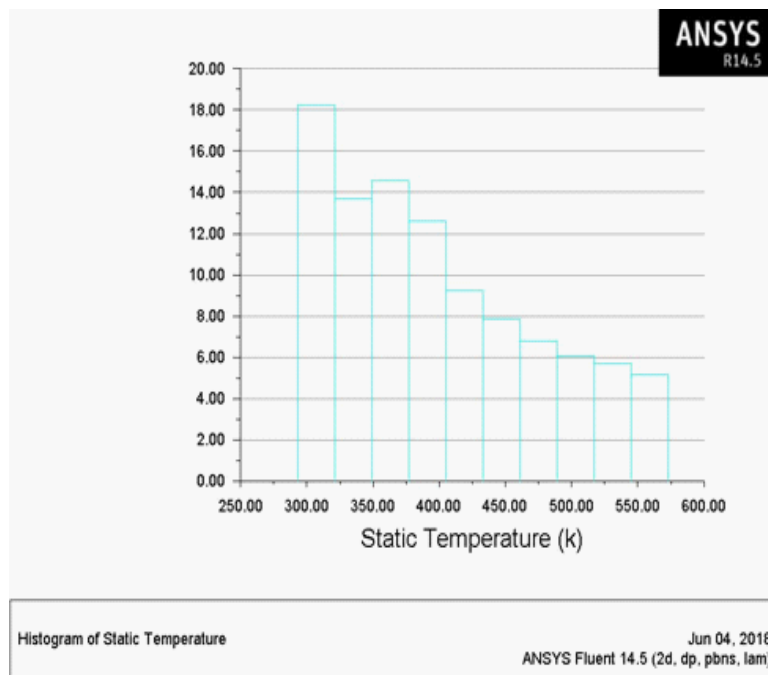


Figure 4.9: histograme de temperature static

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les codes de simulation GAMBIT et FLUENT et le résultat de simulation obtenu.

Conclusion générale

On a obtenu une solution numérique d'un problème thermophysique très général englobant un grand nombre de cas de convection de la chaleur. Appliquant la méthode des volumes finis, on a intégré une équation de convection thermique aux dérivées partielles non-homogène. Des conditions aux limites homogènes et une condition initiale exprimant la non-uniformité spatiale de la température sont appliquées à différentes géométries. En utilisant une approche généralisée, on a mis au point un modèle mathématique pour la détermination du champ de température en régime stationnaire et de la durée de refroidissement (ou de chauffage) de corps de diverse configuration. L'étude porte sur le corps bidimensionnel classiques (plaque finie). (Comme il est accepté dans la théorie de transfert thermique, le corps ayant un champ de température bidimensionnel.). Le résultat obtenu montre la distribution des températures initiale et la température de la plaque sont considérées comme des fonctions arbitraires de la variable d'espace et du temps. On a proposé un algorithme effectif destiné à un logiciel de simulation numérique Fluent. Le modèle est également applicable à d'autres processus de transfert, on conclure que grâce a l'approche de la méthode des volumes finie, le code de calcule peut donne des résultats fiables avec la possibilité de faire des changements rapides a fin d'entamiez notre but.

Perspectives

Pour les travaux futurs, on suggère les propositions suivantes :

- Une étude tridimensionnelle expérimentale et numérique de ce phénomène, avec changement de métal d'aluminium afin de réaliser une comparaison générale entre la conductivité sur les différents métaux.

Bibliographie

- [1] M.H. Vignal. Cours équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques en Master 1 "Mathématiques fondamentales", 2003-2008.
- [2] Aude Rondepierre & Adeline Rouchon. "Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles Étude théorique", 2012-2013.
- [3] Azzi Abbés. "Méthodes numériques appliquées au calcul des écoulements et du transfert de chaleur". USTO MB. Université de Oran ,2003.
- [4] Eric Goncalvès. "resolution numerique,discretisation des EDP et EDO", septembre 2005
- [5] Alexandre Ern. "Aide-mémoire Éléments finis". Paris, 2005.
- [6] Salhi Hicham. "etude numerique de la convection naturelle dans les enceintes nano fluide",2015
- [7] Pierre Cormault. "Cours de Thermique théorique et pratique", Janvier 1999.
- [8] Yves Jannot. "transferts thermiques". Ecole des Mines Nancy 2ème année, 6, 5, 2012.
- [9] Arif Ali. "Thèse de Magister : Modélisation d'une installation a plasma inductif basse fréquence". Université de Biskra.
- [10] René Leleu. "Transferts De Chaleur J 1 080, Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences fondamentales", 2,4, 10.
- [11] Souadi Lyès. Memoire " La Convection mixte dans un canal horizontal muni de blocks chauffes". universite kassdi merbah - OUARGLA, 2013

- [12] Boukerma Karima. Mémoire "étude de l'écoulement laminaire accompagné du transfert de chaleur dans une conduite rectangulaire présentant un changement de section". l'Université 20 Août 55. Skikda, 2007

- [13] Bouguerra yasser. "Mémoire Simulation numérique de la convection naturelle thermosolutale avec effet Soret". Université Kasdi Merbah Ouargla, 2014.

- [14] L.C.Demartni, H.A.Vielmo and S.V.Moller. "Numeric and experimental analysis of the turbulent flow through a channel with baffle plates ". J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. Eng., Vol. XXVI, No. 2, p (153-159), 2004.

ANNEX

Architecture de logiciel

Comme tout logiciel de CFD, il est composé de trois éléments : le préprocesseur, le solveur et le postprocesseur.

- La définition du problème à résoudre s'effectue à l'aide du préprocesseur GAMBIT. Il permet de représenter la géométrie du système, de définir le type de conditions limites aux frontières du domaine, de spécifier le type de matériau (fluide ou solide). Il fournit aussi la possibilité de discrétiser le domaine.

- Le solveur permet de définir numériquement les conditions opératoires (gravité, pression) dans lesquelles est effectuée la simulation, ainsi que la spécification des conditions aux limites. Enfin, il permet de choisir le processus itératif, en proposant notamment plusieurs schémas numériques pour la discrétisation spatiale et temporelle, et pour le couplage de la vitesse et de la pression. Il offre également une interface permettant de contrôler à tout moment l'état d'avancement des calculs.

- Le postprocesseur est l'élément qui permet de visualiser la géométrie et le maillage du domaine, mais surtout d'afficher les résultats obtenus. Il est ainsi possible de visualiser les champs du vecteur de vitesse, les champs de pression, de turbulence ainsi que toutes les autres grandeurs calculées sur un segment, une section du domaine ou sur tout le volume. Il offre aussi la possibilité de tracer des courbes et de visualiser les lignes de courant ou la trajectoire de particules [14].

Préprocesseur GAMBIT:

C'est un préprocesseur intégré pour l'analyse en CFD (Computational Fluid Dynamics). Il peut être utilisé pour construire une géométrie et lui générer un maillage. Eventuellement,

une géométrie d'un autre logiciel de CAO peut être importée dans ce préprocesseur. Les options de génération de maillage de gambit offrent une flexibilité de choix. On peut décomposer la géométrie en plusieurs parties pour générer un maillage structuré. Sinon, gambit génère automatiquement un maillage non structuré adapté au type de géométrie construite. Avec les outils de vérification du maillage, les défauts sont facilement détectés [14].

Procédure de Résolution

Créer la Géométrie dans GAMBIT

Étape 1:

- Choix du solveur

Préciser que le maillage à être créé est destiné à être utilisé avec FLUENT 6:

Menu > Solver > FLUENT 5 / 6

- Création des points

Geometry Command Button  > Vertex Command Button  > Create Vertex 

Créer le premier point (0,0,0)

Suite à x:, entrez la valeur 0. Suite à y:, entrez la valeur 0. Suite à z:, entrez la valeur 0(ces

valeur doivent être par défaut). Cliquez sur Apply. Cela crée le point (0,0,0) qui est affiché

dans la fenêtre graphique.

Répétez ce processus pour créer les points restants.

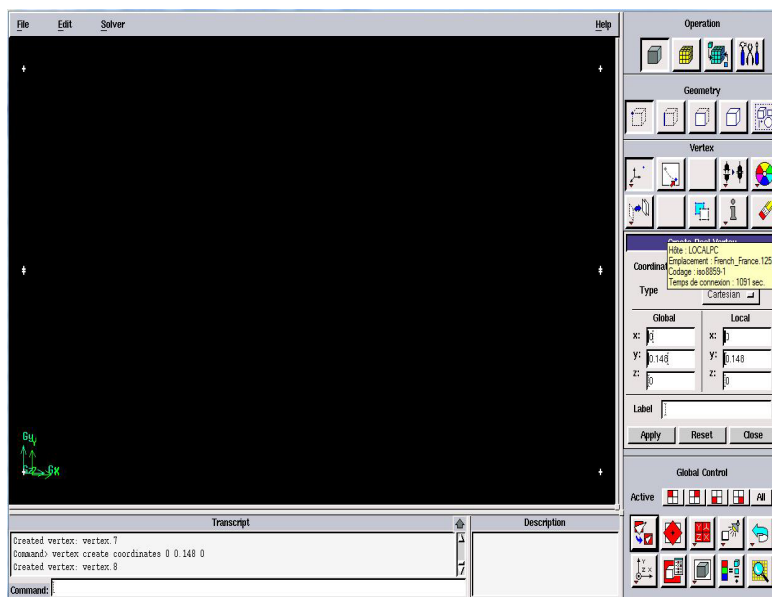


Figure A.1 : Création des points

- Création des lignes

Geometry Command Button  > Edge Command Button  > Create Edge 

Sélectionnez deux points en maintenant enfoncée la touche Shift et en cliquant sur les points. Comme chaque point est choisi, il apparaîtra en rouge dans la fenêtre graphique. Ensuite, relâchez la touche **Shift** et cliquez sur **Apply** dans la partie Créer Straight Edge

fenêtre pour créer cette ligne.

Répétez ce processus pour créer les lignes restantes

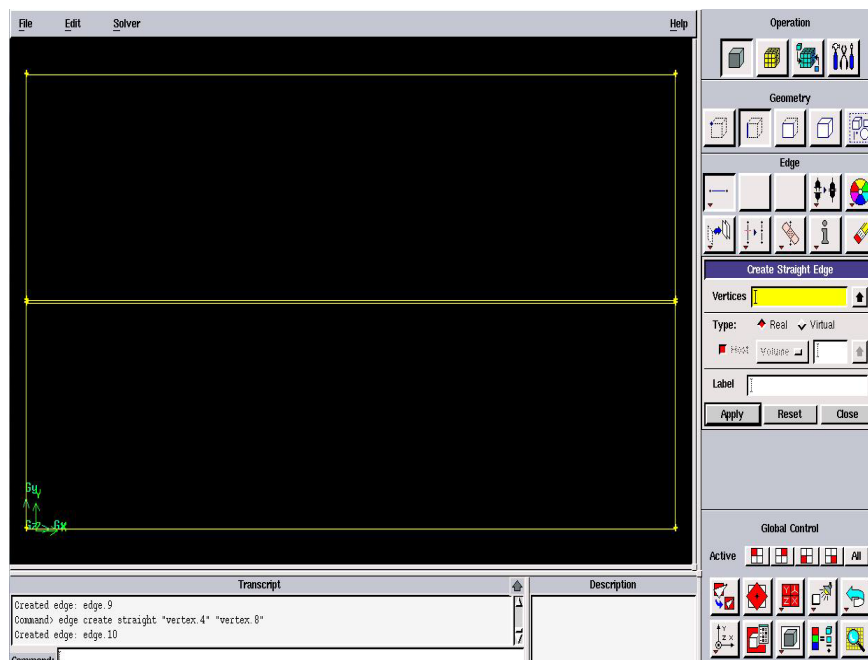


Figure A.2 : Création des lignes

- Création des faces

Geometry Command Button  > Face Command Button  > Form Face 

On a trois faces : absorbeur, isolant et la face intermédiaire (air) Pour former une face de l'absorbeur, nous avons besoin pour sélectionner les lignes qui entourent ce domaine. Cela peut se faire en maintenant la touche **Shift**, en cliquant sur chaque ligne (notez que la ligne actuellement sélectionnée apparaît en rouge), puis relâcher la touche **Shift** après tous les lignes ont été sélectionnées et cliquez sur **Apply**. Répétez ce processus pour créer les faces restantes [14].

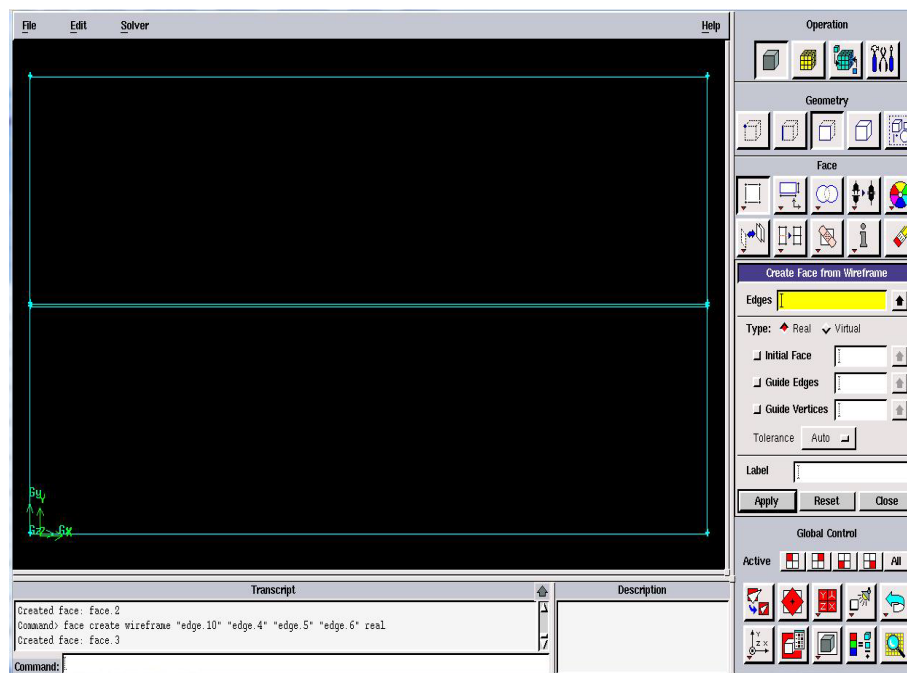


Figure A.3 : Création des faces

Étape 2 : Maillage géométrie dans **GAMBIT**

- Maillage des parois

Mesh Command Button  > Edge Command Button  > Mesh Edges 

Sélectionnez les lignes verticales, sélectionnez **Interval count** dans la liste découlant qui dit **Interval Size** du maillage des bords de fenêtres, entre les nombres des noeuds pour l'intervalle compter et cliquez sur **Apply**. Répétez le même processus pour les lignes horizontales.

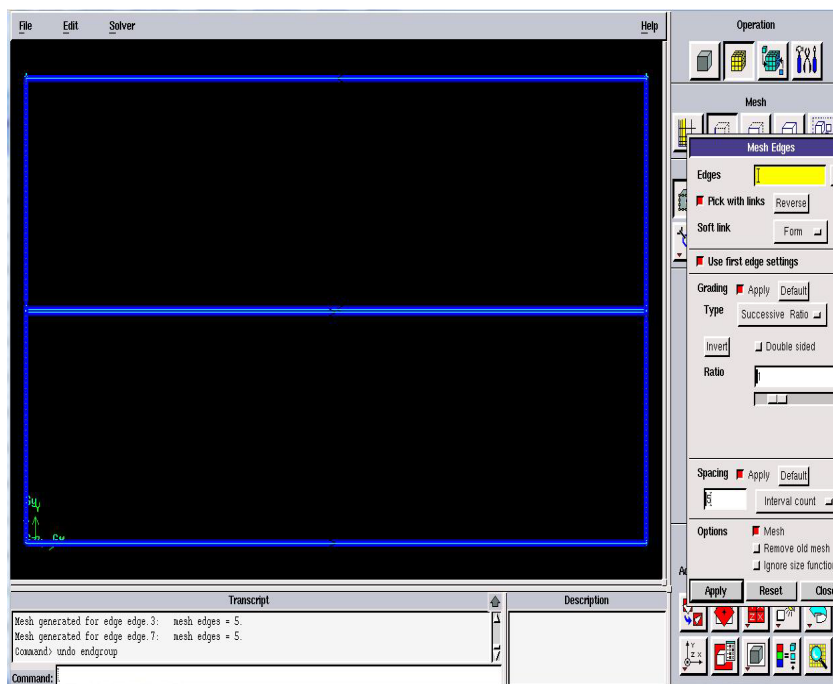


Figure A.4 : Maillage des parois

- Maillage des surfaces

Mesh Command Button  > Face Command Button  > Mesh Faces 

Sélectionnez la première surface et cliquez sur **Apply**. Répétez le même processus pour les autres surfaces

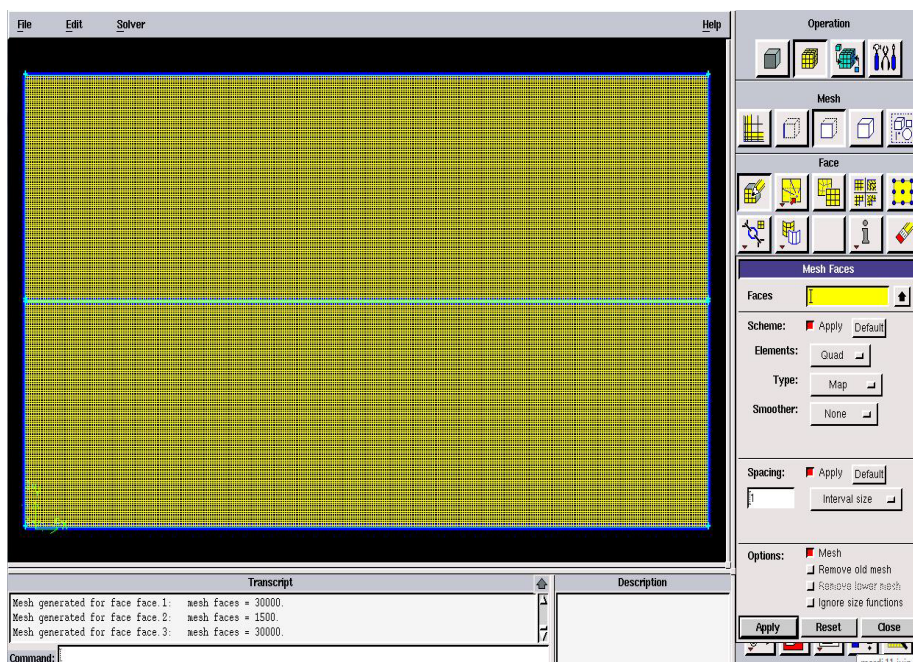


Figure A.5 : Maillage des surfaces

Étape 3 : les conditions aux limites dans GAMBIT

Zones Command Button  > Specify Boundary Types Command Button 

Sélectionnez la ligne gauche (entré de fluide). Ecrire à côté de **Nom:**, entrer Pour le **type:** sélectionnez **Mass_Flow_Inlet**. Cliquez sur **Apply**. Répétez le même processus pour les autres lignes.

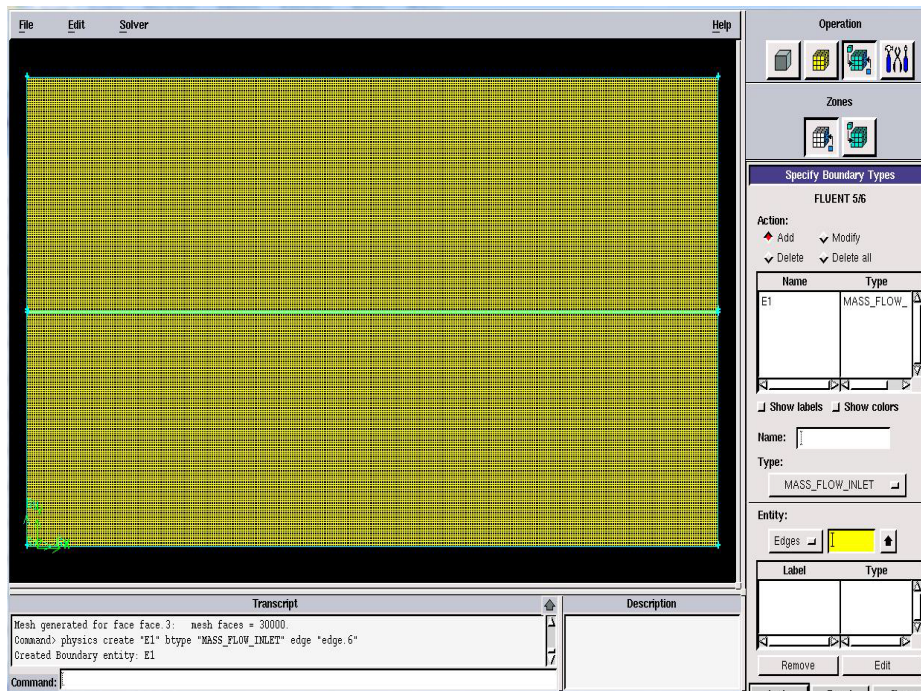


Figure A.6: les conditions aux limites

Exporter le maillage et sauvegarder le fichier

Une fois que la géométrie a été créée, que les conditions aux limites ont été définies, il faut exporter le maillage, en point .msh (mesh = maillage en anglais) pour que Fluent soit capable de le lire et de l'utiliser.

On peut ensuite fermer Gambit et lancer Fluent.

File > Export > Mesh

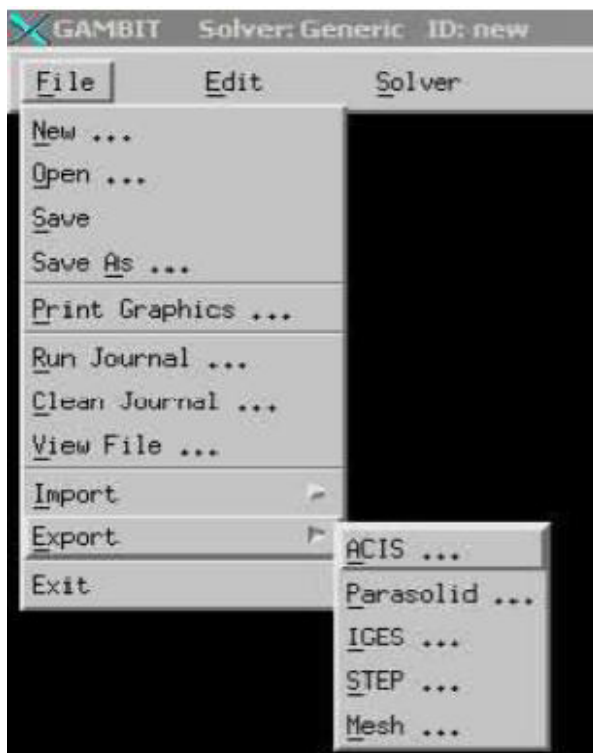


Figure A.7 : Exporter le maillage

Code FLUENT :

Fluent est un programme informatique conçu pour la simulation des écoulements de fluide et du transfert de chaleur dans des géométries complexes. Il présente une grande flexibilité d'adaptation avec n'importe quel type de maillage. Il permet le raffinement du maillage en fonction des conditions aux limites, des dimensions et même des résultats déjà obtenus. Cela est très utile dans les régions à gradients importants (couches limites, couches à cisaillement libre).

Fluent est écrit en langage C. il emploie toute la flexibilité et la puissance qu'offre ce langage. Il a une architecture serveur client nécessaire au calcul parallèle sur plusieurs machines.

Fluent dispose d'un outil de graphisme pour l'affichage des résultats et leur exploitation. On peut aussi exporter les résultats vers un autre logiciel de graphisme.

Étape 4 : Mise en place problème dans FLUENT :

- Démarrer la version 2ddp de **FLUENT**
- Lire le fichier échangeur.msh

File > Read > Case

- Vérifier maillage

Grid > Check

- Contrôler la taille

Grid > Info > Size

- Vérifier unité

Grid > Scale

- Afficher le maillage

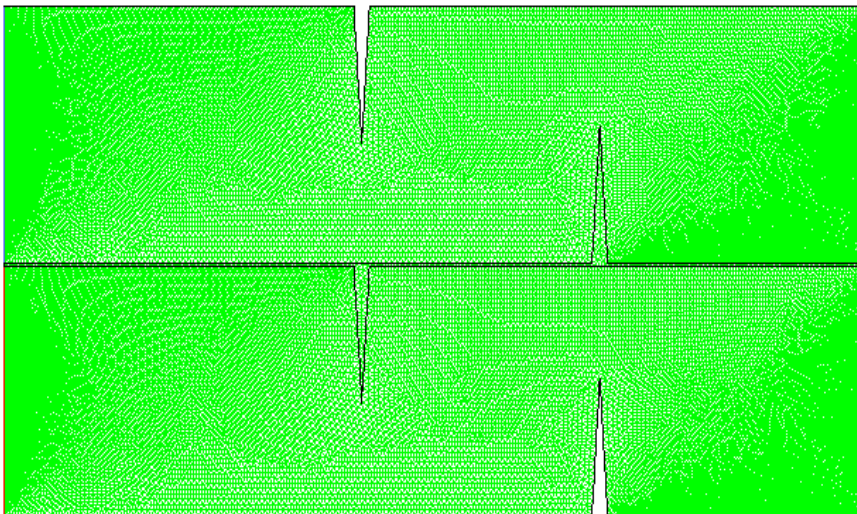
Display > Grid

Figure A.8: Affichage du maillage

- Préciser le solveur de propriétés

Define > Models > Solver

Pour notre cas, c'est un solveur découplé avec une formulation implicite pour un cas 2D et un écoulement stationnaire et une vitesse absolue, valider en cliquant sur OK. D'autres équations peuvent être rajoutées selon les phénomènes étudiés (transfert de chaleur, combustion, multi phases ...).

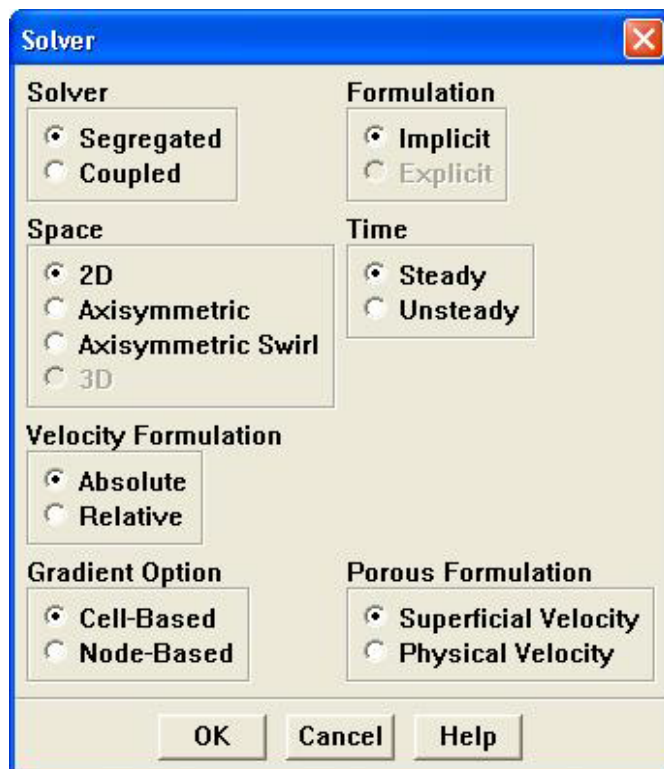


Figure A.9 : Définition du modèle

Define > Models > Energy

Formulation de l'équation d'énergie.

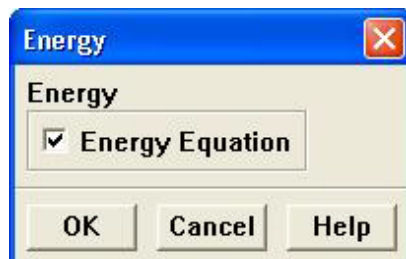


Figure A.10: Définie équation d'énergie

Define > Models > Viscous

À flux laminaire est l'option par défaut. Nous n'avons donc pas besoin de changer quoi que ce soit dans ce menu. Cliquez sur **Cancel**.

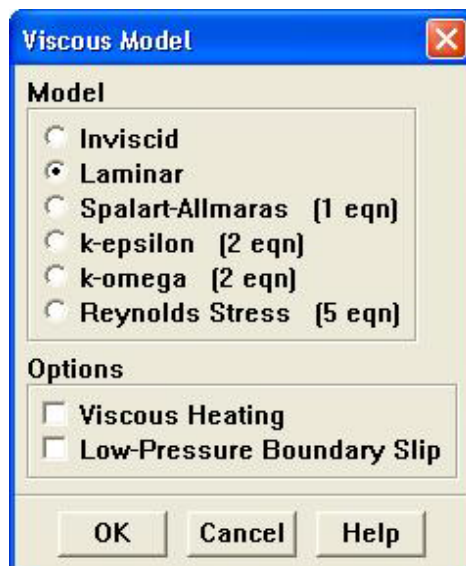


Figure A.11 : Définition le model d'écoulement

- Définir les propriétés des matériaux

Define > Materials...

C'est le choix du fluide ou solide utilisé avec l'introduction des données concernant les propriétés physiques.

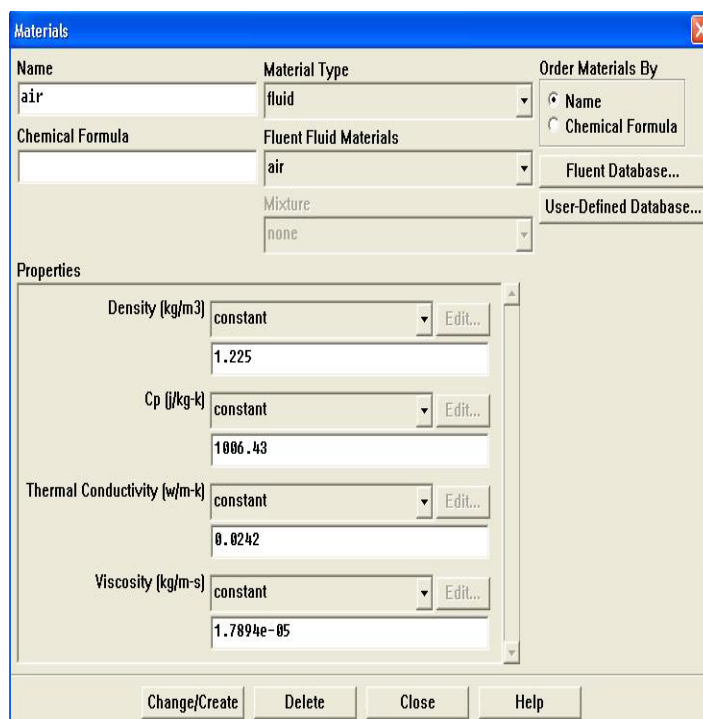


Figure A.12: Définition des propriétés des matériaux

- Définir les conditions aux limites:

Define > Boundary Conditions...

Les conditions aux limites pour chaque frontière seront définies avec la fenêtre Boundary condition, après avoir sélectionné chaque fois, la frontière concernée et faire rentrer les conditions aux limites de cette dernière ensuite valider.

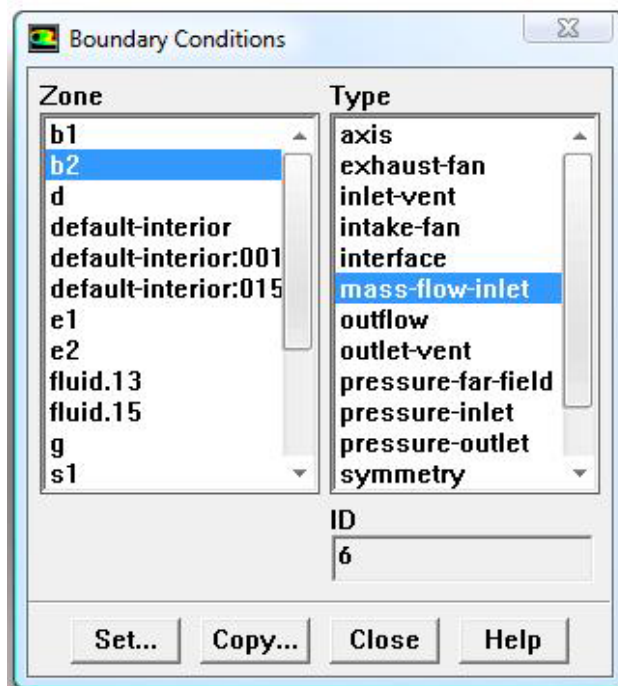


Figure A.13: Définition des conditions aux limites

Étape 5 : solution

Solve > Controls > Solution...

On doit choisir les équations à résoudre, les schémas de discrétisation, les facteurs de sous-relaxations, les critères de convergence et les algorithmes pour le couplage pression-vitesse.

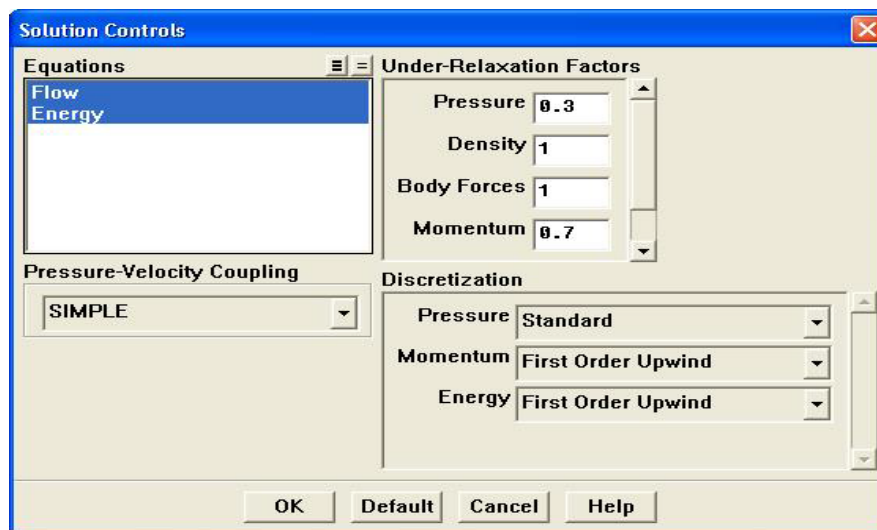


Figure A.14: Control la solution

Solve > Initialize > Initialize...

Initialiser le champ d'écoulement pour la valeur à l'entrée :

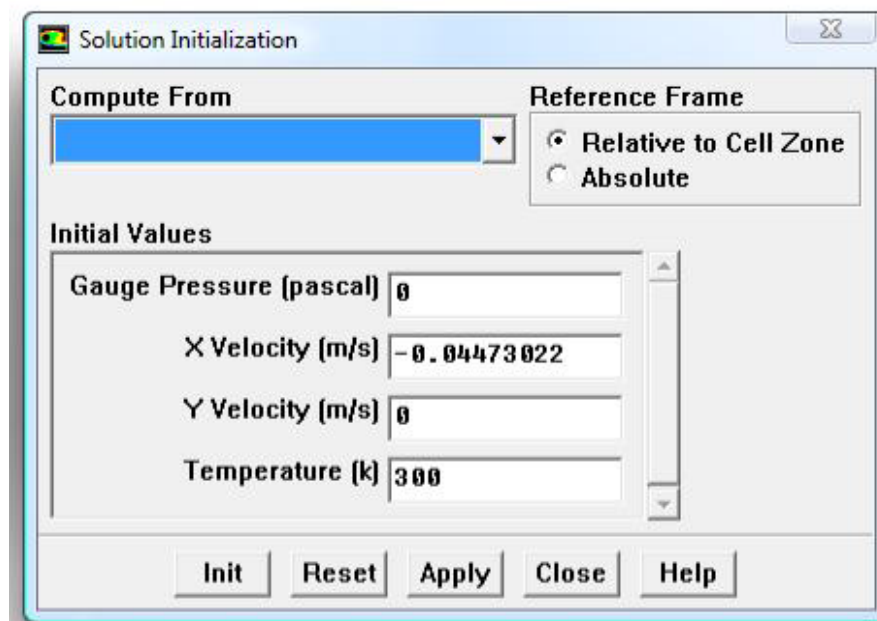


Figure A.15 : Initialisation la vitesse et la température à l'entrée

Solve > Monitors > Residual...

Faire activer l'option plot dans la fenêtre residual monitor. Lancement des itérations jusqu'à la convergence (Solve > Iterate...), enregistrer les résultats pour entamer ensuite la phase sortie graphique.

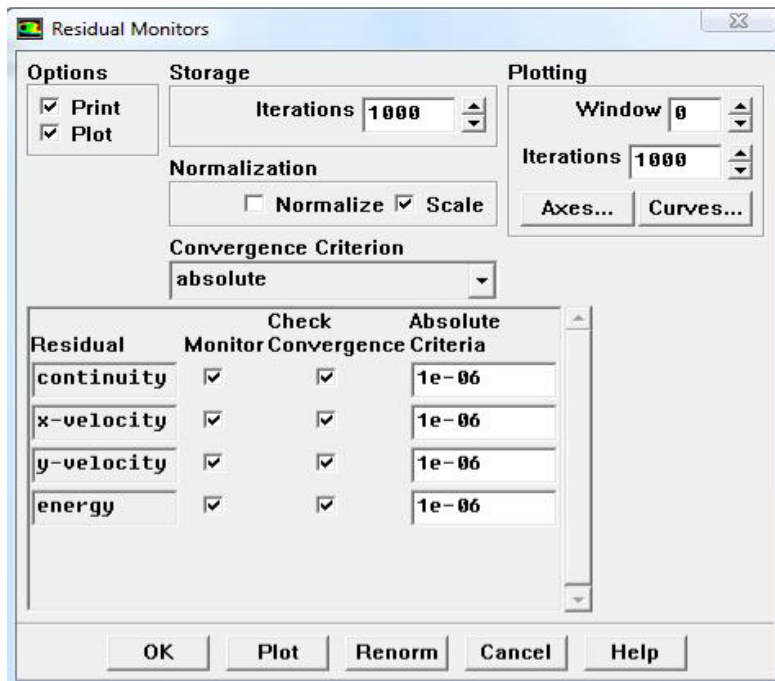


Figure A.16 : Les résidus des calculs

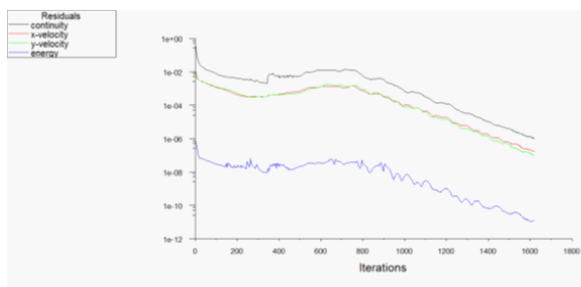


Figure A.17: Tracé des courbes des résidus cas simple.

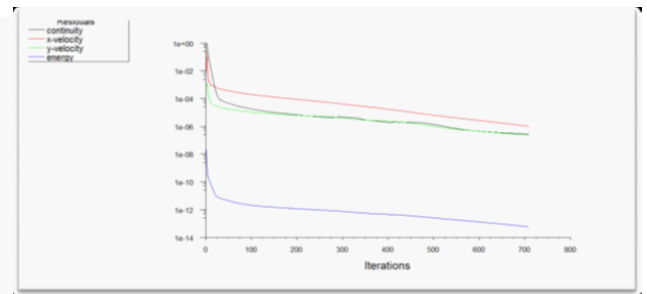


Figure A.18 : Tracé des courbes des résidus cas avec ailettes.