

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE  
ELECTRIQUE

N° D'ORDRE :



DOMAINE : SCIENCE ET  
TECHNOLOGIE

FILIERE : GENIE ELECTRIQUE

OPTION : COMMANDE DES  
MACHINES TOURNANTES (CMT)

**Mémoire présenté pour l'obtention  
Du diplôme de Master professionnel**

**Par :**

HADJ HAFSI Mohammed

HADI Kouider

**Intitulé**

**Commande PI adaptative robuste des systèmes  
linaires**

**Soutenu devant le jury composé de:**

ZEMMIT	Abderrahim	Université M'sila	Président
IDIR	Abdelhakim	Université M'sila	Rapporteur
KHETTAB	Khatir	Université M'sila	Co-rapporteur
MEKKI	Hamza	Université M'sila	Examineur

**Année universitaire : 2019 /2020**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا بِاللَّهِ

*Dédicace*

A nos parents,

A nos frères et nos sœurs.

# *Remerciements*

Nos vifs remerciements vont d'emblée à Dieu tout puissant qui nous a doté d'une grande volonté et d'un savoir adéquat pour mener à bien cet humble travail.

Nous adressons nos remerciements tout particulièrement :

À nos chers parents, notre fierté bien sur , la source de notre réussite car ils se sont sacrifiés pour nous fournir une atmosphère de travail disposant de toutes les meilleures conditions, sans eux rien n'aurait pu être facile, que dieux nous les gardent et les protègent afin que l'on puisse leurs rendre un peu du beaucoup qu'ils nous ont procuré.

La rédaction de ce mémoire a été l'un des défis académiques les plus importants que nous ayons jamais rencontré dans notre poursuite universitaire. Néanmoins, sans le soutien, les conseils, les commentaires et les encouragements des personnes suivantes, ce mémoire n'aurait jamais été achevé. C'est donc à eux que nous devons notre plus profonde reconnaissance. Nous exprimons nos profondes gratitudees à notre encadreur Dr. IDIR Abdelhakim pour ses conseils, ses remarques et le temps qu'il nous a consacré.

Nous exprimons nos reconnaissances aux membres de Jury.

Enfin, nous tenons à remercier toute la promotion 2018-2019 Master 2 professionnel commande des machine tournantes.

Ainsi que tous nos enseignants et les membres du département Génie Electrique de Université Mohamed Boudiaf, M'sila.

## Résumé :

Le but principal de mémoire de fin d'étude est la commande PI adaptative robuste appliquée aux systèmes linéaires. Récemment un intérêt particulier à été donné aux correcteurs fractionnaires. L'intérêt des correcteurs PI fractionnalisés est justifié par une meilleure performances après la commande puisqu'il a deux paramètres en plus, les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Des simulations numérique ont été effectuées afin d'illustrer les développements théoriques présentés dans notre mémoire.

**Mots-clés :** MCC, Commande adaptative, *PI* adaptatif d'ordre entier, *PI* Adaptatif d'Ordre fractionnalisé.

## Abstract:

The primary purpose of this thesis is a robust adaptive PI control applied to linear systems. Recently a particular interest has been given to fractional controller. The interest of fractionalized PI controller is justified by better performance after the order since it has two additional parameters, fractional orders integration and Fractional order derivative. Numerical simulations were carried out in order to illustrate the theoretical developments presented in our thesis.

**Keywords:** DC motor, Adaptive Control, Adaptive PI, Adaptive Fractionalized Order PI.

## ملخص:

الغرض الأساسي من أطروحة التخرج هو التحكم الفعال في *PI* التكيفي المطبق على الأنظمة الخطية. في الآونة الأخيرة ، تم إيلاء اهتمام خاص للمصححات الكسرية. يتم تبرير مصلحة مصححات *PI* الجزأة من خلال الأداء الأفضل بعد الطلب نظرًا لأنه يحتوي على معلمتين إضافيتين ، أوامر مجزأة للتكامل وإجراءات الاشتقاق. تم إجراء عمليات محاكاة عددية لتوضيح التطورات النظرية المقدمة في أطروحتنا.

الكلمات الرئيسية: MCC ، التحكم التكيفي ، *PI* النظام الكامل التكيفي ، *PI* الترتيب الجزئي التكيفي.

# Table des matières

<i>Remerciements</i> .....	<b>i</b>
<b>Résumé :</b> .....	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b> .....	<b>iii</b>
<b>Liste des Figures</b> .....	<b>v</b>
<b>Liste des Tableaux</b> .....	<b>vi</b>
<b>Acronymes, Sigles et Abréviations</b> .....	<b>VII</b>
<b>Introduction générale</b> .....	<b>VIII</b>
<b>Chapitre I :</b> .....	<b>1</b>
<b>I.1 Introduction</b> .....	<b>6</b>
<b>I.2 L'informatique Industrielle</b> .....	<b>6</b>
<b>I.3 Commande des processus</b> .....	<b>6</b>
I.3.1 Définition d'un système .....	6
I.3.2 Structure générale d'un système automatisé .....	7
I.3.3 Définition d'un système de commande .....	8
I.3.4 Pourquoi commander un système .....	9
I.3.5 Système dynamique .....	9
<b>I.4 Les systèmes asservis</b> .....	<b>10</b>
I.4.1 Définition d'un système asservis .....	10
I.4.2 Information .....	11
I.4.3 Conceptutiles pour l'étude des systèmes asservis .....	11
I.4.4 La fonction de transfert .....	11
I.4.5 Système en boucle ouverte .....	12
I.4.6 Système en boucle fermée .....	13
I.4.7 La modélisation .....	13
<b>I.5 Régulateurs Classiques</b> .....	<b>13</b>
I.5.1 Correcteur proportionnel <b>P</b> .....	14
I.5.2 Correcteur proportionnel intégral <b>PI</b> .....	14
I.5.3 Correcteur proportionnel dérivé <b>PD</b> .....	15
I.5.4 Correcteur proportionnel intégral dérivé <b>PID</b> .....	15
I.5.5 Limite des correcteurs classiques : .....	16
<b>I.6 Conclusion</b> .....	<b>16</b>
<b>Chapitre II :</b> .....	<b>18</b>
<b>II.1 Introduction</b> .....	<b>19</b>
<b>II.2 Calcul fractionnaire</b> .....	<b>20</b>
II.2.1 Fonctions fondamentales du calcul fractionnaire .....	20
<b>a) La fonction Gamma</b> .....	<b>20</b>

b)	<b>Fonction de Mittag-Leffler .....</b>	<b>21</b>
<b>II.3</b>	<b>Définition et propriétés des opérateurs d'intégration et de dérivation non-entières</b>	<b>21</b>
II.3.1	Intégration non entière .....	21
II.3.2	Dérivation non entière.....	22
II.3.3	Définitions de Riemann-Liouville (R - L) .....	22
II.3.4	Définition de Caputo.....	22
II.3.5	Définition de Grunwald-Letnikov (G-L) .....	22
<b>II.4</b>	<b>Commande d'un <i>PID</i> classique.....</b>	<b>23</b>
<b>II.5</b>	<b>Contrôleur <math>PI\lambda D\mu</math> d'ordre fractionnaire.....</b>	<b>25</b>
<b>II.6</b>	<b>Les Méthodes de réglage des correcteurs fractionnaires .....</b>	<b>27</b>
II.6.1	Critères de performances .....	27
<b>II.7</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>28</b>
<b>Chapitre III :</b>	<b>.....</b>	<b>29</b>
<b>III.1</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>30</b>
<b>III.2</b>	<b>Contrôleur <i>PI</i> adaptatif d'ordre entier pour les systèmes linéaires .....</b>	<b>30</b>
<b>III.3</b>	<b>Stratégie de commande adaptative.....</b>	<b>32</b>
<b>III.4</b>	<b>Commande <i>PI</i> adaptatif d'ordre entier des systèmes linéaires .....</b>	<b>32</b>
III.4.1	Application à un moteur à courant continu .....	32
III.4.2	Application à un ensemble moteur tracteur et chariot .....	36
<b>III.5</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>39</b>
<b>Chapitre IV :</b>	<b>.....</b>	<b>40</b>
<b>IV.1</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>41</b>
<b>IV.2</b>	<b>Contrôleur <i>PI</i> adaptatif d'ordre Fractionalisé pour les systèmes linéaires .....</b>	<b>41</b>
<b>IV.3</b>	<b>Analyse de Robustesse .....</b>	<b>42</b>
<b>IV.4</b>	<b>La fractionalisation des Correcteurs <i>PI</i> et <i>PID</i>.....</b>	<b>43</b>
<b>IV.5</b>	<b>Approximation d'Oustaloup.....</b>	<b>44</b>
<b>IV.6</b>	<b>Commande <i>PI</i> adaptatif d'ordre fractionnaire des systèmes linéaires.....</b>	<b>44</b>
IV.6.1	Application à un moteur à courant continu.....	44
IV.6.2	Application à un ensemble moteur-tracteur et chariot.....	46
<b>IV.7</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>48</b>
<b>Conclusion général .....</b>	<b>.....</b>	<b>49</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>.....</b>	<b>51</b>
<b>ANNEXE .....</b>	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>	

# Liste des Figures

<b>Figure I.1 Représentation d'un système.</b> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
<b>Figure I.2 Actionneur.</b> .....	8
<b>Figure I.3 Capteur.</b> .....	8
<b>Figure I.4 Les deux parties d'un système automatisé.</b> .....	8
<b>Figure I.5 Représentation d'un système dynamique.</b> .....	9
<b>Figure I.6 Fonction transfert.</b> .....	12
<b>Figure I.7 Schéma bloc de système en boucle ouverte.</b> .....	12
<b>Figure I.8 Schéma bloc de système en boucle fermée.</b> .....	13
<b>Figure I.9 Système de commande à retour unitaire classique.</b> .....	14
<b>Figure II.1 Système de commande à retour unitaire classique.</b> .....	23
<b>Figure II.2 <math>PI^\lambda D^\mu</math> et PID</b> ,(a) :ordre entier,(b) :ordre fractionnaire.....	26
<b>Figure III.1</b> Contrôleur adaptatif PI d'ordre entier.....	31
<b>Figure III.2</b> Schéma équivalent d'un moteur à courant continu.....	33
<b>Figure III.3</b> Réponse indicielle d'un MCC en BO .....	34
<b>Figure III.4</b> résultats (a) réponse du système en BO, (b) : sortie du système en BF (PI adaptatif), (c) : signal de commande, (d) : erreur statique, (e) : paramètre de réglage k1, (f) : paramètre du commande k2. ....	35
<b>Figure III.5</b> Schéma représentatif de l'ensemble.....	36
<b>Figure III.6</b> Diagramme des corps libres et la loi de newton. ....	36
<b>Figure III.7</b> résultats (a) réponse du système en BO, (b) : sortie du système en BF (PI adaptatif), (c) : signal de commande, (d) : erreur statique, (e) : paramètre de réglage k1, (f) : paramètre du commande k2. ....	39
<b>Figure IV.1</b> Contrôleur adaptatif PI fractionnalisé. ....	42
<b>Figure IV.2</b> Fractionalisation d'un intégrateur. ....	43
<b>Figure IV.3</b> Réponse indicielle d'un MCC en BO.....	45
<b>Figure IV.4</b> Résultats : (a) réponse du système en BO, (b) : sortie du système en BF (PI adaptatif fractionnalisé), (c) : signal de commande, (d) : erreur statique, (e) : paramètre de réglagek1, (f) : paramètre de la commande k2. ....	46
<b>Figure IV.5</b> Commande PI adaptative et PI adaptative fractionnalisé d'un MCC.....	46
<b>Figure IV.6</b> résultats : (a) réponse du système en BO, (b) : sortie du système en BF (PI adaptatif fractionnalisé), (c) : signal de commande, (d) : erreur statique, (e) : paramètre de réglagek1, (f) : paramètre du commande k2.....	47
<b>Figure IV.7</b> Commande PI adaptative et PI adaptative fractionnalisé d'un MCC.....	48

# Liste des Tableaux

*Tableau I.1 Représentation des structures des régulateur PID.* ..... 15

## Acronymes, Sigles et Abréviations

<i>N</i>	:	vitesse (tr/min)
<i>MCC</i>	:	Machine à Courant Continu.
<i>MLI</i>	:	Modulation de Largeur d'Impulsion.
<i>Matlab</i>	:	Matrix Laboratory.
<i>FTBF</i>	:	Fonction de Transfert en Boucle Fermée
<i>FTBO</i>	:	Fonction de Transfert en Boucle Ouverte.
<i>PID</i>	:	Proportionnel Intégral Dérivé

# **Introduction générale**

## Introduction générale

L'idée du calcul fractionnaire a été proposée il y a plus de 300 ans. Cependant, la première application réussite du calcul fractionnaire remonte aux années 1960 [1]. Dans les dernières décennies, le calcul fractionnaire a été vraiment développé et largement utilisé dans différents domaines de la science et de l'ingénierie [2].

Récemment, un intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par ses applications dans les différents domaines des systèmes et de la commande. Certains premiers travaux ont été effectués par Bode qui a proposé une fonction de transfert d'ordre fractionnaire en boucle ouverte pour maintenir un fonctionnement stable des amplificateurs à boucle de retour pour une grande variation du gain [3].

L'application des concepts du calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de commande automatique remonte au début des années soixante [1]. Mais, ce n'est que dans les dernières décennies que les contrôleurs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire gagnent de plus en plus d'intérêts de la communauté de commande [4-6]. Dans ce domaine de la recherche, tous les contrôleurs d'ordre fractionnaire développés impliquent des opérateurs et / ou des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur structure ou implémentation. Ces contrôleurs ont été introduits dans les applications de commande dans un effort continu pour améliorer les performances du système de commande et de la robustesse.

Le premier qui a vraiment introduit un contrôleur d'ordre fractionnaire était Oustaloup qui a développé le contrôleur CRONE (commande robuste d'ordre non entier) et il à appliquer dans divers domaines des systèmes de commande [7]. Podlubny a proposé un contrôleur  $PI\lambda D\mu$  d'ordre fractionnaire, comportant une action d'intégration d'ordre  $\lambda$  et action de différentiation d'ordre  $\mu$  [6]. Dans [8], on peut trouver un très bon résumé sur le calcul fractionnaire dans le domaine de la commande ; les définitions de base du calcul fractionnaire, des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire et la commande d'ordre fractionnaire a également été présentée, en plus, plusieurs contrôleurs d'ordre fractionnaire typiques connus ont été présentés et commentés.

La commande adaptative s'est avérée être une bonne commande due à son potentiel application dans les systèmes avec de grande complexités et incertitudes. Le but de la commande adaptative est de concevoir un contrôleur pouvant atteindre les objectifs de commande pré-spécifiés pour une classe donnée de systèmes.

Ce n'est que dans la dernière quinzaine d'années que les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire ont été introduits dans les schémas de la théorie de commande adaptative. En 2002, Vinagre et al [9] ont introduit pour la première fois l'idée de la commande d'ordre fractionnaire dans la commande adaptative conventionnelle. Ils ont utilisé une règle d'ajustement de paramètre d'ordre fractionnaire et un modèle de référence d'ordre fractionnaire dans la commande adaptative à modèle de référence conventionnelle (MRAC). En 2006, Ladaci et Charef [10] ont utilisé une règle d'ajustement des paramètres d'ordre fractionnaire et un modèle de référence d'ordre fractionnaire différent de celui dans [9] dans le MRAC classique. Ils ont également introduit un dérivateur fractionnaire à la sortie du système avec un ordre fractionnaire approprié lié au modèle de référence d'ordre fractionnaire proposé dans la règle d'ajustement de paramètres du MRAC classique. Suárez et al [11] ont proposé un schéma de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour une commande latérale d'un véhicule autoguidé combinant une approche du modèle de référence et une règle d'ajustement d'ordre fractionnaire pour l'ajustement du gain direct. Dans [12], Ladaci et Charef ont également introduit un contrôleur adaptatif  $PI^{\square}D^{\square}$  d'ordre fractionnaire basé sur un algorithme classique d'ordre entier. Dans tous les travaux mentionnés ci-dessus, l'avantage du comportement du système et la robustesse des schémas de commande introduits ont été présentés par des exemples illustratifs. Mais la faiblesse de ces travaux réside dans le manque d'arguments théoriques pouvant garantir la stabilité de ces schémas de commande particuliers. C'est pour cela que la preuve analytique de la stabilité pour les systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire est jusqu'à présent considérée comme un problème ouvert.

Récemment, quelques travaux théoriques ont été effectués pour prouver analytiquement la stabilité de quelques schémas de commande adaptative. Dans [13], Li et al ont étudié la stabilité asymptotique de trois systèmes scalaires d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode de stabilisation adaptative universelle. Les résultats obtenus sur la stabilisation adaptative universelle d'ordre fractionnaire dans [13] ont été également étendus au système MIMO par Li et Chen dans [14]. Dans [15], Ladaci et al ont montré qu'un contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire basé sur un grand gain à retour de sortie peut stabiliser n'importe quel système linéaire, invariant dans le temps, à phase minimale, avec une seule entrée, une seule sortie (SISO) et de degré relatif unité. Dans [16], ils ont également introduit un feedforward

d'ordre fractionnaire dans l'algorithme MRAC pour obtenir une nouvelle stratégie de commande adaptative où la preuve de la stabilité robuste de ce schéma de commande a été dérivée. Par cette gamme de techniques de conception et d'applications, mais assez loin de viser la perfection, il est clair que la commande d'ordre fractionnaire est devenue un sujet de recherche important. La généralisation à l'ordre non-entier des contrôleurs traditionnels ou des schémas de commande se traduit par plusieurs paramètres de réglage et plusieurs réponses fréquentielles et temporelles réglables du système de commande, permettant l'achèvement des performances robustes.

### **Objectif du mémoire :**

Au cours de notre travail, nous essayons de dégager nous les notions principales de la commande des processus et les systèmes asservis, aussi les notions de la théorie de la commande  $PI$  d'ordre Fractionnaire. L'exemple d'application que nous avons donné dans ce travail est celui à deux systèmes linéaires différents (un moteur à courant continu et un moteur+ tracteur + chariot).

L'essentiel du travail par la suite est d'arriver à dégager une étude comparative entre la commande  $PI$  adaptative d'ordre fractionnalisée et la commande  $PI$  adaptative d'ordre entier.

Ce mémoire sera organisé comme suit :

### **Le premier chapitre :**

L'objectif dans ce chapitre c'est l'explication des différentes définitions qu'on a utilisé dans la commande des processus et aussi ses constituants essentielles à utiliser dans la commande adaptative, et la présentation de matériels destinés à l'industrie, et plus particulièrement à l'automatisation des procédés industriels de fabrication et / ou d'exploitation donnera une idée générale sur les techniques de la commande des systèmes.

### **Le deuxième chapitre :**

Dans ce chapitre, dans la première partie, nous allons commencer par la présentation des fonctions les plus utilisées qui permettront de fournir des solutions aux problèmes de calcul fractionnaire et les opérateurs non entier (une définition unique de l'intégration et plusieurs définitions de la dérivée), puis nous donnerons les transformées de Laplace de ces opérateurs non entier, et dans la deuxième partie, nous présenterons la commande  $PI$  d'ordre fractionnaire et quelques techniques d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.

**Le troisième chapitre :**

Dans le troisième chapitre, nous avons parlé de la notion de commande adaptative PI de l'ordre entiers, et fait sa simulation sur un moteur (MCC) et un moteur + tracteur + chariot puis analyser les résultats de la simulation sous l'environnement de Matlab/Simulink

**Le quatrième chapitre :**

Nous allons présenter deux exemples de simulation, en utilisant les algorithmes de commande PI adaptatifs d'ordre entier et d'ordre fractionnaire appliqués à un moteur à courant continu et un chariot. Nous montrons aussi que la méthode PI adaptative fractionalisée donne des résultats très appréciables.

# **Chapitre I :**

## **Généralité sur la**

### **commande des systèmes**

## I.1 Introduction

Les techniques de commande sont de plus en plus sophistiquées avec une complexité croissante. Cela s'explique par le besoin de systèmes plus performants, sûrs et fiables. Dans beaucoup d'applications industrielles, la commande de *PID* est toujours la plus utilisée. C'est en raison de sa simplicité, de son exécution facile et de ses outils disponibles pour accorder et calibrer les systèmes. Il y a plusieurs méthodes d'accorder un contrôleur de *PID*[4].

Dans ce chapitre, nous avons défini les notions principales de la commande des processus et les systèmes asservis, en fin, nous avons déterminé les notions de régulateur classique **PID**.

## I.2 L'informatique Industrielle

L'informatique industrielle concerne l'ensemble des matériels et logiciels informatiques destinés à l'industrie, et plus particulièrement à l'automatisation des processus industriels de fabrication et/ou d'exploitation, elle regroupe les programmes dont les variables représentent des grandeurs physiques comme la position d'un bras de robot... ainsi qu'un matériel adapté et spécifique (capteur, actionneur, régulateur.)

L'informatique industrielle établit des concepts, spécifie des modèles, élabore des méthodes, développe des outils en vue de la conception et de la réalisation matérielle et logicielle des systèmes informatisés de commande. [8]

## I.3 Commande des processus

### I.3.1 Définition d'un système

On appelle système un dispositif qui, à un signal d'entrée  $x(t)$ , fait correspondre un signal de sortie  $y(t)$ . Considérons un ensemble de signaux d'entrée  $\{x_m(t)\}$  auxquels correspond un ensemble de signaux de sorties  $\{y_m(t)\}$ .

Le système est dit linéaire si toute combinaison linéaire finie à coefficients constants en entrée correspond la même combinaison linéaire en sortie [10] :

$$x_m(t) \rightarrow y_m(t) \iff \sum_m a_m x_m(t) \rightarrow \sum_m a_m y_m(t) \quad (\text{I.1})$$

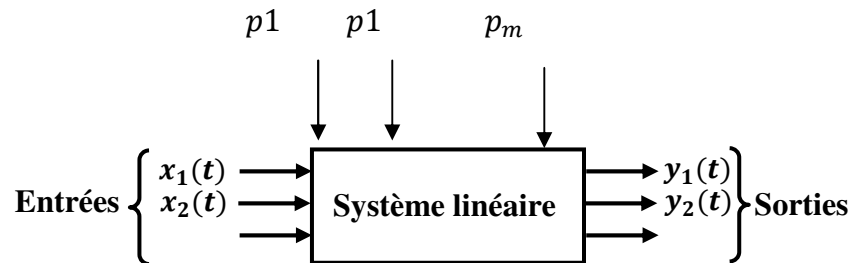
Le système est dit stationnaire si :

$$x(t) \rightarrow y(t) \iff x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau) \quad (\text{I.2})$$

Le système est dit continu si la relation entre l'entrée et la sortie est continue :

$$x \rightarrow y \quad \Rightarrow \quad \text{Lim}x(t) \rightarrow \text{Lim}y(t) \quad (\text{I.3})$$

Il existe l'entrée parasite ou perturbation qui possèdent une action sur le système et qui susceptibles de modifier la relation Entrée/Sortie.



**Figure I.1** : Représentation d'un système

### I.3.2 Structure générale d'un système automatisé

#### I.3.2.1 Partie commande (PC)

Il gère le fonctionnement du système automatisé, elle est capable de reproduire un modèle de fonctionnement exprime savoir-faire humain. En général, elle est composée d'un ordinateur qui contient dans ses mémoires un programme elle transfère les ordres aux actionneurs de la partie opérative à partir :

- Des programmes qu'elle contient.
- Des informations reçues par des capteurs.
- Des consignes données par l'utilisateur ou par l'opérateur.

#### I.3.2.2 Partie Opérative (PO)

Elle assure la transformation de la matière d'œuvre pour élaborer la valeur ajoutée. Elle consomme de l'énergie électrique, pneumatique (air) ou hydraulique (huile), elle comporte en général une boîte (appelle aussi bâti) contenant :

- **Des actionneurs :**

Sont les éléments qui produisent une action ceux-ci transformant l'énergie reçue en énergie utile « moteur, vérin, lampe » créant ainsi un mouvement, rotation ou transformation.

Exemple sur l'actionneur :



Vérin rotatif

Figure I.1 Actionneur.

- **Des capteurs:**

Transforme la variation de la grandeur physique liée au fonctionnement de l'automatisme en signaux électriques capteur de position de température, bouton poussoir, exemple sur le capteur :



Détecteur de gaz

Figure I.2 Capteur.

La relation entre les deux parties d'un système automatisé explique par la figure suivante :

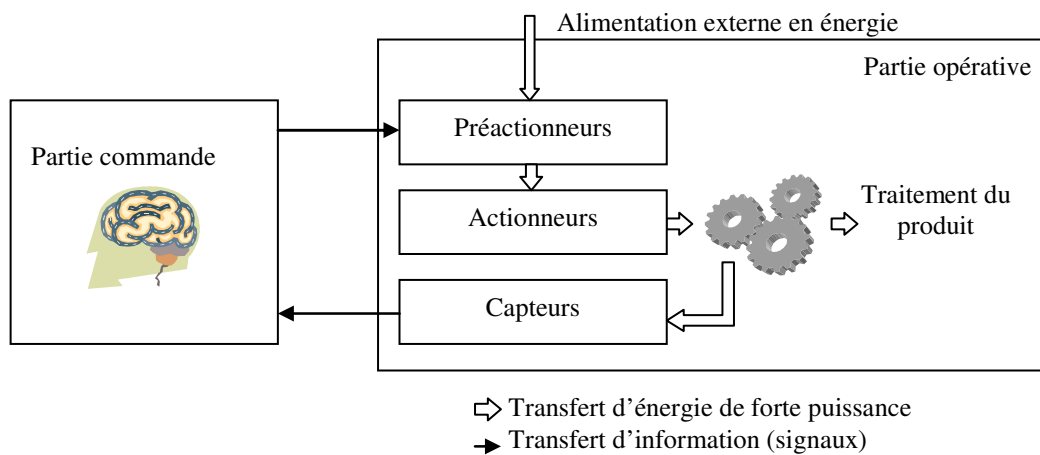


Figure I.3 Les deux parties d'un système automatisé.

### I.3.3 Définition d'un système de commande

Il est composée d'un système de commande et du système à commander, et la commander c'est organiser un système sujet à la commande (four, moteur, réacteur,...), Paramètre d'un système de commande sont :

- **Ordre** : consigne, but fixe, exemple : fixer une à 37 ou fixé une trajectoire d'un avion.
- **Action de commande** : action susceptible de changer l'état du système à commander elle est établie en fonction des ordres.
- **Perturbation** : variation aléatoire dont un pas l'origine.
- **Sortie** : variable à contrôler.

### I.3.4 Pourquoi commander un système

Il commande un système pour annuler l'erreur et le correcteur à concevoir en quelque sorte une double fonction

- Améliorer le comportement intrinsèque du processus d'un point de vue dynamique en garantissant d'abord une bonne stabilité, en suite une bonne rapidité de réaction.
- Obliger le système à suivre au plus la consigne quand celle-ci varie « poursuite » et à gommer l'effet de perturbation « régulation ».

### I.3.5 Système dynamique

Un système dynamique apparaît comme une réalité physique qui transforme un ou plusieurs signaux d'entrée pour créer d'autres signaux en sortie.

Reste à définir, bien sûr ce que les entrées et les sorties et ici qu'apparaît le caractère dynamique puisqu'on considérera  $u$  et  $y$  comme des fonctions du temps.

Ce qui peut être indexé par l'ensemble des entres, et temps continu qui peut être indexé par l'ensemble des réels. On parle alors respectivement de systèmes discrets, ou échantillonnées, et de systèmes continus. [1]

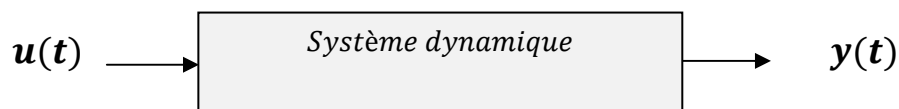


Figure I.4 Représentation d'un système dynamique.

- **Problème de régulation**

C'est déterminer la commande  $u(t)$  à appliquer à l'instant  $t$  par une observation de la sortie passée. Cela revient en fait à construire un système dynamique qui, soumis à l'entrée  $y$ , délivre en sortie la commande qui produira les effets désirés. Cette fermeture de la boucle est appelée *feedback*.

La conception de cette machine qui marche seule constitue un problème central en automatique, suffisamment général pour n'être jamais véritablement résolu.

- **Identification**

Identifier un système dynamique, c'est le décrire par un modèle quantitatif, est un pré requis pour toute étude ultérieure mais constitue un problème ardu, même les modèles les plus simples, et que nous n'aborderons guère. Combinant tous les types de problèmes.

- **Commande adaptative**

Consiste à essayer de construire tout à la fois le modèle et le compensateur à partir de l'observation de la sortie  $y(t)$ . Point culminant, en un sens, de la théorie des systèmes, l'accumulation des difficultés à aussi pour effet de limiter quelque peu pour l'instant sa généralité.

## I.4 Les systèmes asservis

### I.4.1 Définition d'un système asservi

Un système est dit asservi lorsque la grandeur de sortie (réponse) suit précisément que possible les variations de la grandeur d'entrée (ordre ou consigne) quels que soient les effets des perturbations extérieures.

Un système asservi est un système bouclé, il compare en permanence la réponse à la consigne afin de s'auto-corriger automatiquement.

Il est impossible de prévoir la «*réponse*» en fonction de la «*consigne*», car:

- Les modèles que l'on utilise pour étudier le comportement d'un système ne sont que des modèles (Approximés...)(Modèles mécaniques, électriques, thermodynamiques...)
- Si un événement extérieur venant de perturber le système, le système ne se rendra pas compte qu'il est perturbé, et par conséquent il affectera le système, et la réponse ne correspondra pas à la consigne.

#### I.4.1.1 Fonction d'un système asservis

🚦 Observation de l'état du système → utilisation de capteur

🚦 Comparaison réflexion → l'état mesuré est comparé à l'état souhaité

Et la modification éventuelle de la commande est déterminée, l'organe qui réalise ces deux fonctions est appelé régulateur, il est composé d'un comparateur ou soustracteur et d'un correcteur.

🚦 Action l'actionneur → apporte la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche.

### I.4.2 Information

- ☞ **Entrée consigne** : la consigne ou référence est la grandeur que la grandeur réglée doit suivre.
- ☞ **Sortie réglée** : la sortie réglée représente le phénomène que doit régler le système, c'est la raison d'être du système de régulation.
- ☞ **Perturbation** : on appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie, un système règle doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations.
- ☞ **Erreur** : on appelle écart la différence entre la consigne et la sortie, cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs compatibles.

### I.4.3 Concept utiles pour l'étude des systèmes asservis

Pour mener à bien l'étude d'un système automatisé asservi, il faut s'attacher à ce que le système conjugue au mieux les qualités suivantes :

#### ☞ **Stabilité** :

On dit que le système est stable si pour une entrée constante, la sortie reste constante quelles que soient les perturbations. Un critère efficient de la stabilité est le dépassement ce critère permet de définir la notion de stabilité relative.

- ☞ **La précision** : la précision est caractérisée par l'erreur entre la consigne et la sortie. Plus cet écart petit, plus le système n'est précis.
  - **précision statique** : si l'écart entre la sortie est l'entrée lorsque le système est stabilisé.
  - **précision dynamique** : si la sortie suit l'entrée en toutes circonstances (perturbation, évolution de la consigne).

#### ☞ **La rapidité** :

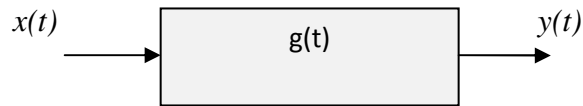
La rapidité se caractérise par le temps mis par le système pour que la sortie atteigne la valeur finale.

### I.4.4 La fonction de transfert

La définition la transformation de la place d'une fonction  $f(t)$  définie pour tout  $t > 0$  est :

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (\text{I.4})$$

**Fonction de transfert** : Considérait le système suivant :



**Figure I.5** Fonction transfert.

Il possède une entrée  $x(t)$  et une sortie  $y(t)$ .

Le comportement de système est généralement décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt} \quad (I.5)$$

Le système étant considéré au repos à l'instant  $t = 0$ , donc tous les termes provenant des conditions initiales seront considérés comme nuls.

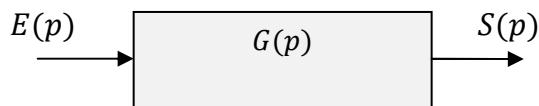
$$D'où : \sum_{i=0}^n a_i p^i y(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i x(p) \quad (I.6)$$

Par définition de la fonction transfert de système sera :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i p^i}{\sum_{i=0}^m a_i p^i} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m} \quad (I.7)$$

**I.4.5 Système en boucle ouverte**

Un système est dit en boucle ouverte lorsque la commande est élaborée sans l'aide de la connaissance des grandeurs de sortie. Au niveau des inconvénients, il n'y a aucun moyen de contrôler, à plus forte raison de compenser les erreurs, les dérives du procédé. Enfin, le système en boucle ouverte ne compense pas les signaux de perturbation, le schéma bloc de système en boucle ouverte est donné par la figure ci-dessous [18] :



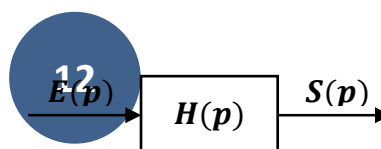
**Figure I.6** Schéma bloc de système en boucle ouverte.

Dans ce dernier cas, le comportement du processus est décrit par la relation :

$$S(p) = G(p)E(p) \quad (I.8)$$

Avec :

$S(p)$  : grandeur réglée (sortie)

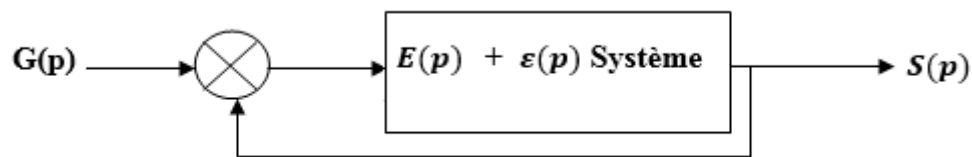


$E(p)$  : grandeur réglant(entrer)

$G(p)$  : fonction de transfert

#### I.4.6 Système en boucle fermée

La boucle fermée (contre réaction) est destinée à stabiliser un système instable en boucle ouvert. Dans une régulation en boucle fermée, une bonne partie des facteurs perturbations externes sont automatiquement compensés par la contre-réaction à travers le procédé. La commande appliquée au système est élaborée en fonction de la consigne et de la sortie. La figure (I.9) représente le principe de retour unitaire. [18]



**Figure I.7** Schéma bloc de système en boucle fermée.

Dans ce dernier cas le comportement du processus est décrit par la relation :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} \quad (\text{I.9})$$

Avec :

$H(p)$  : Fonction de transfert en boucle fermé

$\varepsilon(p)$  : Erreur

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \quad (\text{I.10})$$

#### I.4.7 La modélisation

La modélisation est résumé pas les étapes suivants [27] :

- Analyse approfondie des sous-systèmes.
- Mise en équation et établissement des équations d'état ou des fonctions de transfert.
- Détermination des valeurs numériques pour l'installation en question.
- Formulation plus détaillée des conditions de réglage (but qualité, contraintes à respecter, etc.).
- Esquisse plus détaillée du cahier des charges.

#### I.5 Régulateurs Classiques

Le correcteur **PID** est l'élément primordial d'une boucle de régulation élémentaire. Sa mise en service sur un site industriel nécessite une parfaite connaissance de ses fonctionnalités. [23]

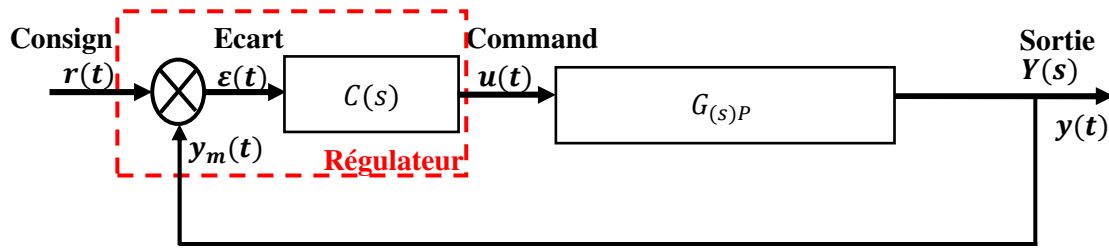


Figure I.8 Système de commande à retour unitaire classique.

$u(t)$ : Le signal de commande.

$e(t)$  : L'écart résultant de la différence entre la consigne  $r(t)$  et la sortie.

$y(t)$ :La grandeur à commander.

$C(t)$  : La fonction de transfert du correcteur.

$G_p(s)$  : La fonction de transfert de système.

### I.5.1 Correcteur proportionnel P

Ce correcteur élémentaire délivre un signal corrigé  $u(t)$  proportionnel à l'écart  $e(t)$  la loi de la commande d'un tel correcteur est [26][12] :

$$u(t) = k_p e(t) \quad (\text{I.11})$$

$k_p$ : Uncoefficient de proportionnalité.

La fonction transfère est :

$$C(p) = \frac{u(p)}{e(t)} = k_p \quad (\text{I.12})$$

$Bp$  : La bande proportionnelle qui est donnée par :

$$Bp\% = 100/k_p \quad (\text{I.13})$$

Elle présente la variation de la grandeur contrôlée provoquant une variation partielle ou totale de la grandeur de sortie.

- Augmenter le gain entraîne une diminution de l'erreur statique.
- Rente le système plus rapide.
- Augmenter l'instabilité du système.

L'action du correcteur  $P$  est relativement dynamique (transmission instantanée du signal d'erreur) alors ce qui se passe à l'instant présent.

### I.5.2 Correcteur proportionnel intégral PI

C'est l'association en série d'un intégrateur au correcteur proportionnel, la loi de commande d'un correcteur  $PI$  est :

$$u(t) = k_p(e(t) + 1/T_i \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (\text{I.14})$$

$T_i$  Coefficient de la constante de temps intégral exprimé en  $s^{-1}$

$$\text{La fonction transfère est : } C(t) = k_p + \frac{1+T_i P}{T_i P} \quad (\text{I.15})$$

- Éliminer l'erreur en régime permanent
- Améliorer la précision
- Rend system instable

Il introduit un dépassement, une réponse lente et un temps de monter diminue.

### I.5.3 Correcteur proportionnel dérivé PD

La loi de commande est :

$$u(t) = k_p(e(t) + \frac{de(t)}{dt}) \quad (\text{I.16})$$

La fonction transfère est :

$$C(P) = k_p(1 + T_d p) \quad (\text{I.17})$$

$T_d$  Le temps d'avance d'une réponse **PD** par rapport à une réponse en P seul.

- Accélérer la correction
- Diminuer le dépassement et le temps de réponse
- Il est sensible aux bruits
- Il ne peut jamais annuler l'erreur statique.

### I.5.4 Correcteur proportionnel intégral dérivéPID

La loi de commande d'un correcteur *PID* est :

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{I.18})$$

La fonction transfert est :

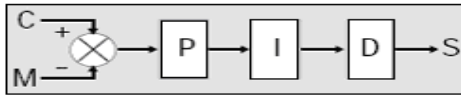
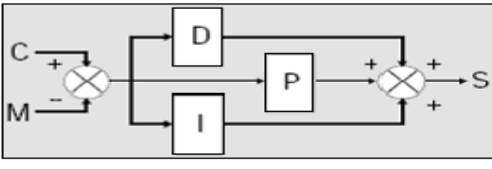
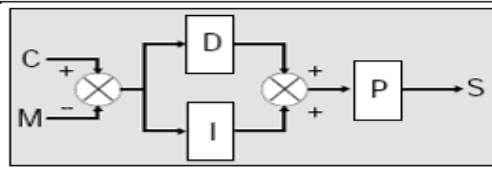
$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (\text{I.19})$$

Améliorer les trois performances d'un système (stabilité, rapidité, précision).

#### I.5.4.1 Structures des régulateurs *PID*

Dans un régulateur *PID*, il existe plusieurs façons d'associer les paramètres *P, I et D*. En effet, le correcteur **PID** peut avoir une structure série, parallèle ou mixte :

*Tableau I.1 Représentation des structures des régulateur PID.*

Structure du régulateur PID	Schéma et fonction de transfert
Série	 $K_p \left( \frac{T_i + T_d}{T_i} + \frac{1}{pT_i} + pT_d \right)$
Parallèle	 $K_p + \frac{1}{pT_i} + pT_d$
Mixte	 $K_p \left( 1 + \frac{1}{pT_i} + pT_d \right)$

La discrétisation du correcteur *PID* parallèle par l'approximation d'Euler rétrograde nous donne :

$$C(z) = \frac{U(z)}{e(z)} = k_p + \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{T_e} \cdot (1 - z^{-1}) \quad (I.20)$$

Ce qui nous donne l'algorithme de commande suivant :

$$u(t) = u(k - 1) + (k_p + k_i + k_d) \cdot e(k) - (k_p + 2k_d) \cdot e(k - 1) + k_d \cdot e(k - 2) \quad (I.21)$$

### I.5.5 Limite des correcteurs classiques :

- Influence d'un temps mort.
- Non linéarité du système.
- Systèmes d'ordre fraction. [24]

## I.6 Conclusion

L'objectif dans ce chapitre c'est d'expliquer les différentes définitions qu'on a utilisé dans la commande des processus et aussi ses constituants essentielles à utiliser dans la commande adaptative afin de régler un système pour obtenir des performances

qui sont : la *stabilité*, la *rapidité* et la *précision*, le sujet du la chapitre suivant c'est la théorie de la commande PI d'ordre fractionnaire.

**Chapitre II :**  
**Théorie de la Commande**  
**PI d'ordre Fractionnaire**

## CHAPITRE II

# Théorie de la Commande PI d'ordre Fractionnaire

### II.1 Introduction

Un système décrit par une équation différentielle est dit d'ordre fractionnaire s'il utilise une dérivation d'ordre fractionnaire. Actuellement, beaucoup de travaux traitent des systèmes ou des phénomènes physiques qui nécessitent l'utilisation du calcul fractionnaire. Dans les dernières décennies, plusieurs techniques et outils mathématiques et informatiques ont été développées afin d'analyser, manipuler et simuler cette classe des systèmes dans différents domaines de la science et de l'ingénierie.

Le calcul fractionnaire a un domaine d'applications très vaste [28], par exemples : mécanique, automatique, théorie du contrôle, électricité, viscoélasticité, biologie, équation de diffusion, électromagnétique,...etc. [29].

Récemment, un intérêt considérable pour l'utilisation du calcul fractionnaire dans les différents domaines des systèmes et de la commande a été porté [30]. Dans le domaine de commande, des équations différentielle fractionnaire sont régies soit le système à commander soit la loi de commande utilisée. La première idée qui basée sur l'utilisation de la régulateur d'ordre fractionnaire revient à Oustaloup, qui a proposé le commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE). Notons qu'Oustaloup avait notamment démontré, dans ces travaux, l'avantage du régulateur CRONE par rapport au régulateur PID classique. Un régulateur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  utilisant des actions dérivées et intégrales d'ordre non entier a été proposé plus tard. Et par la suite, beaucoup de régulateur basée sur le calcul fractionnaire ont été développée (pour plus de détails voir [31]).

Dans ce chapitre, dans la première partie, nous allons commencer par la présentation des fonctions les plus utilisées qui permettrons de fournir des solutions aux problèmes de calcul fractionnaire et les opérateurs non entier (une définition unique de l'intégration et plusieurs définitions de la dérivée), puis nous donnerons les transformées de Laplace de ces opérateurs non entier, et dans la deuxième partie, nous présenterons la commande  $PI$  d'ordre fractionnaire et quelques techniques d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.

## II.2 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire (Les opérateurs fractionnaires intégration et différentiation) est un cas général de l'intégration et de la différentiation des opérateurs d'ordre non entier.

Les opérateurs d'intégration et de différentiation peuvent être généralisé en un seul opérateur fondamental  ${}_aD_t^\alpha$  ou  $a$  représente l'ordre de l'opération et  $\alpha$  et  $t$  sont les limites de l'opération.

L'opérateur intégral-différentiel continu est défini comme [32] :

$$D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_\alpha^t (dt)^{-\alpha}, & \alpha < 1 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Où  $\alpha$  est l'ordre de l'opération, généralement  $\alpha \in \mathfrak{R}$

Les définitions de l'opérateur fractionnaire les plus familières et les plus fréquemment utilisées sont : définition de Riemann Liouville et définition de Grünwald-Letnikov.

Avant de présenter ces définitions, nous proposons de présenter premièrement quelques fonctions dans le calcul fractionnaire qui permet de bien compréhension ces définitions.

### II.2.1 Fonctions fondamentales du calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présenterons la fonction Gamma d'Euler et de la fonction Mittag-Leffler qui sont très utilisées et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire.

#### a) La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est l'une des fonctions de base utilisées dans le calcul fractionnaire. La définition intégrale de cette fonction est donnée par [33] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} (e^{-t}t^{z-1}) dt, z > 0 \quad (\text{II.2})$$

L'intégration par partie de l'équation (II.2) permet de donner la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z * \Gamma(z) \quad (\text{II.3})$$

Puisque  $\Gamma(1) = 1$ , en utilisant la relation (II.3), nous obtenons pour  $(z = 1, 2, 3, \dots)$ .

$$\Gamma(n + 1) = n * \Gamma(n) = n * (n - 1) = n! \quad (\text{II.4})$$

Notons que l'autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des

pôles simples pour  $(z = 0, -1, -2, \dots)$ . Son expression est :

$$\Gamma(z + 1) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \dots \quad (\text{II.5})$$

Avec :

$$\Gamma(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0$$

À partir de cette dernière équation il est clair que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend vers l'infini.

### b) Fonction de Mittag-Leffler

L'autre fonction qui est aussi très important dans le calcul fractionnaire est la fonction de Mittag-Leffler. La forme standard de cette fonction à un paramètre est donnée comme suit [34] :

$$E_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0) \quad (\text{II.6})$$

Pour  $\alpha = 1$ , on trouve la fonction exponentielle usuelle suivante :

$$E_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{n!} \quad (\text{II.7})$$

## II.3 Définition et propriétés des opérateurs d'intégration et de dérivation non-entières

Dans la suite, nous allons présenter des opérateurs d'ordre non entier ; une seule définition de l'intégration non entière et plusieurs définitions de la dérivée non entière [35] :

### II.3.1 Intégration non entière

Soit  $\alpha \in \mathcal{R}^+$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur l'intervalle  $[t_0, \infty)$ . On définit l'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure comme suit [35] :

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{II.8})$$

avec :  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma d'Euler.

Cette dernière inégalité est appelée intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville.

Lorsque l'on s'intéresse aux systèmes dynamiques, il est clair que la fonction  $f(t)$  est causale, alors l'intégrale d'ordre non entier est peut être défini comme suit :

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \alpha \in \mathcal{R}^+ \quad (\text{II.9})$$

Qui peut être écrite sous la forme suit :

$$I_t^\alpha f(t) = \phi_\alpha * f(t), t > 0, \alpha \in \mathcal{R}^+ \quad (\text{II.10})$$

Où

$$\phi = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ et } t_+^{\alpha-1} = 0 \text{ pour } t < 0; t_+^{\alpha-1} = t_+^{\beta-1} \text{ pour } \geq 0.$$

Notons que ‘\*’ représente la produit de convolution.

### II.3.2 Dérivation non entière

#### II.3.3 Définitions de Riemann-Liouville (R - L)

Soient  $\alpha \in \mathcal{R}^+$ ,  $n$  un entier positif et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur l'intervalle  $[t_0, \infty)$ , avec  $t_0 \alpha \in \mathcal{R}^+$  et  $n - 1 < \alpha < n$ . On définit l'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  comme suit [30]:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left( t_0 I_t^{(n-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{II.11})$$

#### II.3.4 Définition de Caputo

Une autre définition de la dérivée d'ordre fractionnaire est proposée par Caputo comme la forme suivante [36]:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) \triangleq I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau \quad (\text{II.12})$$

Où

$$n - 1 < \alpha < n, n \in \mathcal{N}.$$

Pour  $t_0$ , à partir des deux des équations (II.14) et (II.15), on peut trouver les deux relations suivantes :

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = {}^C D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (\text{II.13})$$

$${}^{RL}D^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) = {}^C D^\alpha f(t) \quad (\text{II.14})$$

#### II.3.5 Définition de Grunwald-Letnikov (G-L)

Cette définition est peut considère comme une généralisation de la dérivée classique d'une fonction  $f(t)$  d'ordre  $n \in \mathcal{R}$  qui prend la forme suivante :

$$D^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (\text{II.15})$$

Avec :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (\text{II.16})$$

remplaçant le nombre entier  $n$  par  $\alpha \in \mathcal{R}$ , on peut réécrire (II.16) comme suit

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} \quad (\text{II.17})$$

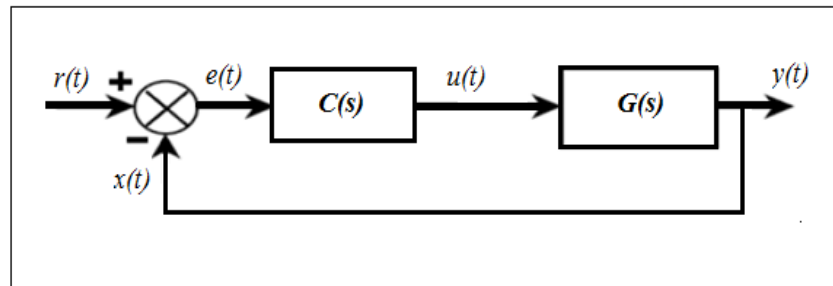
Maintenant on définit la dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de G-L comme suit [35] :

$${}^G L D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (\text{II.18})$$

Où  $h$  est le pas d'échantillonnage,  $[x]$  représente la partie entière de  $x$  et  $\binom{\alpha}{j}$  appelés coefficient binomiaux.

#### II.4 Commande d'un *PID* classique

Aujourd'hui, le correcteur *PID* est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs *PID*. Généralement, le correcteur *PID* classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure (II.1).



**Figure II.1** Système de commande à retour unitaire classique.

Où :

$u(t)$ : Le signal de commande

$e(t)$  : L'écart résultant de la différence entre la consigne  $r(t)$

$Y(t)$ : La grandeur à commander

$C(t)$  : La fonction de transfert du correcteur

$G_p(s)$  : C'est la fonction de transfert de système.

Le comportement du correcteur proportionnel intégral dérivé (*PID*) classique est décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{II.19})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (II.19) avec les conditions initiales nulles la fonction de transfère de ce correcteur peut être exprimé par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (\text{II.20})$$

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel  $K_p$ , la constante d'intégration  $T_i$  la constante de dérivation  $T_d$ . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire.

La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain  $K_p$ . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart donc Lorsque  $K_p$  augmente, le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée.

D'un autre côté, un correcteur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral.

Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Mais il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition .

Notons que dans le domaine fréquentiel, ces effets se traduisent par un courbe d'amplitude de pente nulle ( $0dB$ ) et une phase nulle pour le terme proportionnel, une pente de  $-20dB/déc.$  et une phase de  $-\pi/2$  pour le terme de l'intégrale et une pente  $+20dB/déc$  et une phase  $-\pi/2$  pour le terme dérivée. La stabilité des systèmes dépend Du réglage de ces trois paramètres.

## II.5 Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Le contrôleur PID, a part sa simplicité, est très utilisé dans le monde industriel, néanmoins, ses performances deviennent insuffisante en raison par exemple de la présence d'un retard non négligeable dans le modèle du procédé ou lorsque les paramètres du procédé varient. Dans ce cas, on fait appel à d'autres algorithmes de réglage tels que, le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne, le réglage Par régime glissant, etc.

Mais récemment, Podlubny, pour améliorer le comportement du correcteur  $PID$ , à proposer le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, comportant un intégrateur d'ordre  $\lambda$  et un différentiateur d'ordre  $\mu$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  appartiennent à l'ensemble des nombre réels. L'équation de sortie du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda}(e(t)) + T_d D^\mu(e(t)) \right] \quad (\text{II.21})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (II.21) avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfère de ce correcteur peut être exprimé par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (\text{II.22})$$

Où les d'intégration  $K_i$  et de dérivation  $K_d$  sont liés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (\text{II.23})$$

$$K_d = K_p T_d \quad (\text{II.24})$$

la fonction de transfère  $C(s)$  d'un correcteur est :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\lambda} + T_d s^\mu \right) \quad (\text{II.25})$$

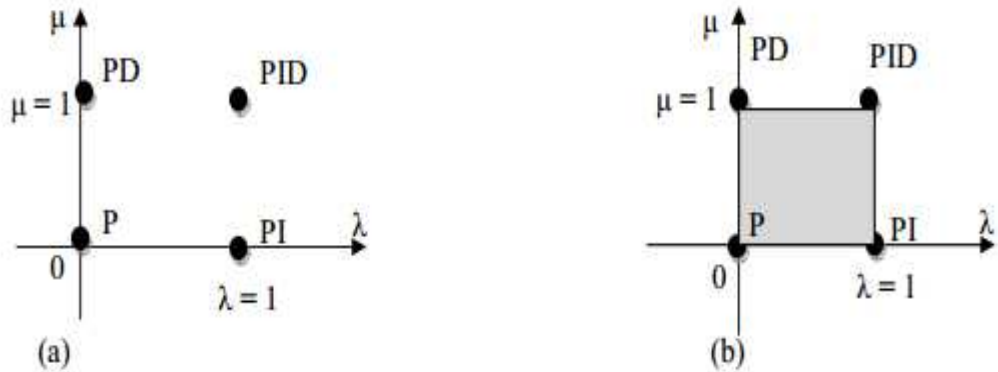
En choisissant

$\lambda = 1$  et  $\mu = 1$  dans l'équation (II.25), on obtien le correcteur  $PID$  classique.

$\lambda = 1$  ,  $\mu = 0$  et  $\lambda = 0$  ,  $\mu = 1$  donnent respectivement les correcteur  $PI$  et  $PD$  classique ,

$\lambda = 0$  et  $\mu = 0$  donnent un correcteur proportionnel .

Tous ces types de correcteur *PID* classique sont des cas particuliers du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire donné par l'équation (II.25), comme le montre la figure(II.2).



**Figure II.2**  $PI^\lambda D^\mu$  et *PID* ,(a) :ordre entier,(b) :ordre fractionnaire

En plus de  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$ , le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  possède deux autres paramètres de réglage  $\lambda$  et  $\mu$ . Ceci le rend plus flexible et donc une opportunité pour mieux ajuster les propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. S'inspirant de l'idée du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ ; plusieurs travaux sur les techniques de réglage sont actuellement publiés.

L'avantage le plus important du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est sa possibilité de bien commander la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Un autre avantage se trouve dans le fait que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont moins sensibles aux changements des paramètres d'un système commandé, ce qui donne une amélioration de la robustesse. Ceci est parce que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire ayant deux degrés de liberté supplémentaires pour mieux ajuster les propriétés dynamiques de systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Puisque les ordres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels arbitraires, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des systèmes [20, 21].

Des activités de recherche sont dirigées pour définir de nouvelles techniques de réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par l'extension de la théorie de la commande classique.

## II.6 Les Méthodes de réglage des correcteurs fractionnaires

Une précision insuffisante, une stabilité trop relative (instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important, sont des qualités qui peuvent être inacceptables au regard d'un cahier des charges. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservis un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans bien sûr le faire au détriment des autres. Si l'on souhaite améliorer les caractéristiques de précision, stabilité, rapidité du système il est nécessaire d'introduire un correcteur dans la boucle de commande.

Ces correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié [18, 23]. Les correcteurs classiques *PID* possèdent trois paramètres  $K_p, T_i$ , et  $T_d$ , ce nombre de paramètres augmentent par rapport aux correcteurs fractionnaires. Les paramètres qui doivent ajuster pour un correcteur fractionnaire sont  $K_p, T_i$ , et  $T_d, \lambda$  et  $\mu$ . pour déterminer ces Cinq paramètres, il faut avoir 5 équations à 5 inconnues. Généralement ces équations est non linéaires dues à la nature de l'expression de la fonction de transfert ce qui demande dans certain cas des solution numériques. Ces paramètres Sont déterminés en fonction des exigences de cahier de charge.

### II.6.1 Critères de performances

#### II.6.1.1 Critères temporelles

Nous pouvons citer par exemple coefficient d'amortissement, erreur statique, temps de réponse et temps de mante.

#### II.6.1.2 Critères

On cite ci-dessous les spécifications fréquentielle qui peuvent être utilisé pour déterminer les paramètres des correcteurs fractionnaires :

a-La marge de phase  $\varphi_m$  et la fréquence de la coupure  $w_{cg}$  :

$$|C(w_{cg})G(w_{cg})|_{db} = 0db \quad (II.26)$$

$$-\pi + \varphi_m = \text{arg}|C(w_{cg})G(w_{cg})| \quad (II.27)$$

b-Marge du gain :

$$M_g = \frac{1}{C(jw_{-\pi})G(jw_{-\pi})} \quad (II.28)$$

$$\text{arg}(C(jw_{-\pi})G(jw_{-\pi})) = -\pi \quad (II.29)$$

c. Garantir un rejet du bruit en haute fréquence, la fonction du transfert en boucle fermée doit avoir une petite amplitude en haut fréquence :

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{db} < A_{db} \quad (\text{II.30})$$

$$|F(j\omega_t)|_{db} = A_{db} \quad \omega \geq \omega_t \text{ rad/s}$$

Où A est l'atténuation désiré de bruit pour des fréquences rad/s

**d-**pour assurer un bon rejet de bruit de mesure de sortie on doit atteindre la contrainte :

$$\left| \frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{db} \leq N_{db}$$

$$|S(j\omega_t)|_{db} \omega \geq \omega_s \text{ rad/s} \Rightarrow |S(j\omega_s)|_{db} = N_{db} \quad (\text{II.31})$$

Avec N la valeur désirée de la fonction de sensibilité pour les fréquences  $\omega \geq \omega_s \text{ rad/s}$

**e-Garantir la robustesse** vis-à-vis aux variations du gain du système, la phase de la fonction du transfert en boucle ouverte doit être constante autour de la fréquence de coupure

$$\frac{d}{d\omega} \arg|C(j\omega)G(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = 0 \quad (\text{II.32})$$

La vérification de l'équation (II.32) signifie que le système est plus robuste aux variations du gain ; ce qui donne un dépassement presque constant dans cette intervalle.

### **f-Rejet de bruit de sortie :**

La contrainte suivante doit être atteinte :

$$\left| s(j\omega) = \frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{db} \leq B_{db} \quad (\text{II.33})$$

$$\Rightarrow |s(j\omega_s)|_{db} = B_{db} \quad \omega \leq \omega_s \text{ rad/s}$$

Avec B la valeur désirée de la fonction de sensibilité pour les fréquences  $\omega \leq \omega_s \text{ rad/s}$

## **II.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions de base du calcul fractionnaire avec leurs propriétés et leurs transformées de Laplace. Puis, nous avons fait un résumé sur la commande *PI/PID* d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Ensuite un bref rappel sur les techniques d'approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire proposé dans la littérature ont été présenté. Notre prochain sujet dans le troisième chapitre sera Commande *PI* adaptatif d'ordre entier.

**Chapitre III :**  
**Commande *PI* Adaptatif**  
**d'Ordre Entier**

## CHAPITRE III

### Commande *PI* Adaptatif d'Ordre Entier

#### III.1 Introduction

La commande adaptative est un ensemble de techniques destinées pour l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des paramètres du correcteur des systèmes de commande, lorsque les caractéristiques du processus et les perturbations sont difficiles à déterminer où variant dans le temps.

#### III.2 Contrôleur *PI* adaptatif d'ordre entier pour les systèmes linéaires

Nous abordons le problème de la stabilisation adaptative par rétroaction de rendement pour usines à entrée unique / sortie unique (SISO) linéaires avec des perturbations nulles présentées comme suit [13] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + d \\ y(t) = cx(t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Là où  $A \in R^{n \times n}$  et  $b$  et  $c$  sont des vecteurs avec une dimension appropriée.  $d$  est un vecteur de perturbation constant de même dimension que  $x(t)$ .

L'hypothèse suivante est imposée à (III.1) :

A1) les systèmes est de degré relatif d'ordre 1 avec gain de haute fréquence positif et une phase minimale, c'est-à-dire

$$cb > 0 \text{ et } \det \begin{vmatrix} sI - Ab & \\ c & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pour tous } s \in C^+ .$$

Il est bien connu que le système (III.1) satisfaisant à A1) soit stabilisé par la stratégie de rétroaction simple de rendement [13].

$$u(t) = -k(t)y(t) , \quad \dot{k}(t) = y^2(t) , \quad k(0) \geq 0 \quad (\text{III.2})$$

De nombreux résultats intéressants ont été développés sur la base de ce concept de rétroaction à gain élevé. Le schéma a également été envisagé pour les systèmes avec un degré relatif supérieur à " $un$ " et pour les systèmes à dimension infinie. Il est également montré qu'un système de suivi adaptatif similaire peut être construit, comme les systèmes de contrôle à rétroaction conventionnels, en

introduisant un modèle interne tel que l'hypothèse A1) est toujours valable pour le système de connexion en série de système contrôlé et du modèle interne. [13].

Le schéma ordinaire de contrôleur *PI* adaptatif d'ordre entier [37] est donné par la figure (III.2).

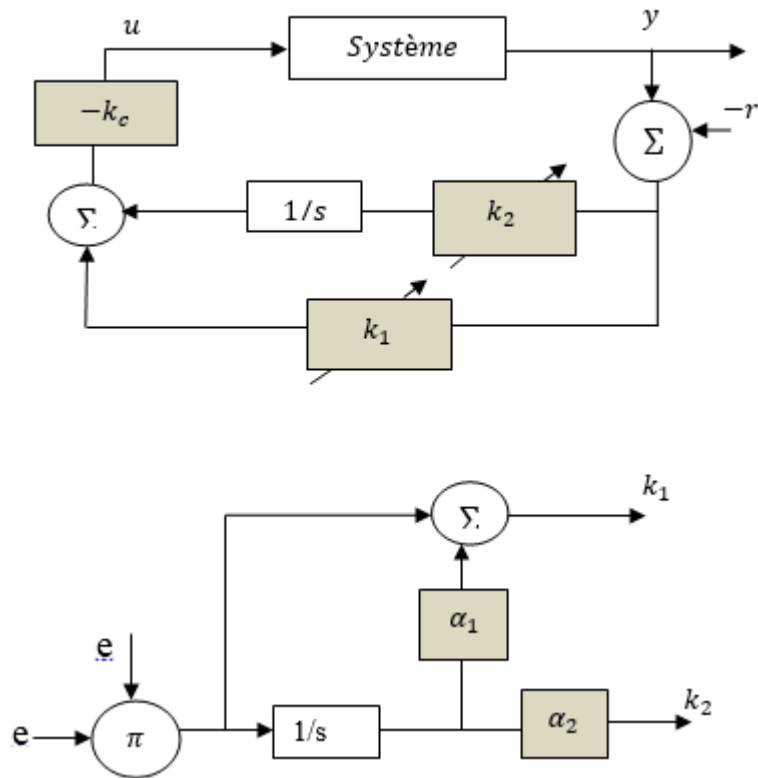


Figure II.3 Contrôleur adaptatif *PI* d'ordre entier.

La loi de commande de régulateur adaptatif *PI* d'ordre entier est donnée comme suit [37, 38] :

$$u(t) = -k_c \left[ k_1(t)e(t) + \int_0^t k_2(\tau)e(\tau)d\tau \right] \quad (III.3)$$

Avec :

$$k_1(t) = k_p(t) + \alpha_1 k_i(t)$$

$$k_2(t) = \alpha_2 k_i(t)$$

$$k_p(t) = e^2(t)$$

$$k_i(t) = \int_0^t e(\tau)^2 d\tau$$

$$e(t) = y(t) - r(t)$$

Avec  $k_c, \alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes positives.

### III.3 Stratégie de commande adaptative

Considérant le système (III.1) satisfaisant la prétention A1).

L'objectif de notre conception de commande est de trouver une loi de commande adaptative de rétroaction qui stabilise le système en boucle fermé et force le rendement pour converger sans erreur équilibrée. Aucune connaissance a priori des paramètres du système et de l'ordre du système ne peut être utilisés. Il est clair qu'avec la loi de commande (III.2). L'exigence ne sera pas satisfaite en raison de la présence de la perturbation  $d$ . Dans le problème de rétroaction de sortie constante, cela peut être facilement surmonté en introduisant un terme intégral dans la loi de commande. Notre préoccupation est de savoir si cette approche est également efficace dans le problème actuel de rétroaction de sortie adaptative.

Maintenant, pour le système (III.1), considérons un contrôle de rétroaction adaptatif de la forme :

$$\begin{cases} u(t) = -k_c(k_1(t)y(t) + \int_0^t k_2(\tau)y(\tau)d\tau \\ k_1(t) = k_p(t) + \alpha_1 k_i(t), & k_2(t) = \alpha_2 k_i(t) \\ k_p(t) = y^2(t), & k_i(t) = y^2(t) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Là où  $k_c; \alpha_1; \alpha_2$ ; sont des constantes positives.

La représentation schématique ordinaire du système global est montrée dans la figure (III.1). Nous pouvons voir la simplicité extrême du système de contrôle. Nous souhaitons que le terme intégral dans le contrôleur (III.4) élimine l'effet de la perturbation constante sans affecté la stabilité du système en boucle fermée.

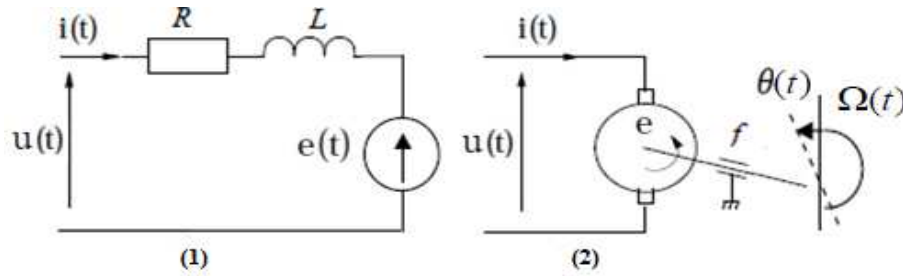
### III.4 Commande PI adaptatif d'ordre entier des systèmes linéaires

#### III.4.1 Application à un moteur à courant continu

Un moteur à courant continu (MCC) est un dispositif électromécanique qui convertit une énergie électrique d'entrée en une énergie mécanique.

##### a) Mise en équations

Le schéma équivalent d'un moteur à courant continu est donné à la figure (III.2)



**Figure II.4** Schéma équivalent d'un moteur à courant continu.

L'équation électrique, liant la tension  $U(t)$  aux bornes de l'induit (rotor), le courant d'induit  $i(t)$  et la force électromotrice  $e(t)$  est donnée par

$$U = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (\text{III.5})$$

Où  $R$  est la résistance de l'induit du moteur,  $L$  est son inductance et  $e(t)$  est la force électromotrice qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor et elle est donnée par :

$$e(t) = Ke \Omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{III.6})$$

Où  $Ke$  est la constante électrique du moteur (constante de vitesse),  $\Omega(t)$  est la vitesse de rotation du rotor et  $\theta(t)$  est sa position.

L'équation mécanique liant le couple agissant sur le rotor et sa position s'écrit comme suit :

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = (Ce - Cr) \quad (\text{III.7})$$

$$Cr = f \Omega(t)$$

Où  $Ce$  est le couple moteur,  $f$  le coefficient de frottement visqueux et  $J$  le moment d'inertie du rotor.

Le couple  $Ce$  est proportionnel au courant d'induit  $i(t)$  :

$$Ce = Km \cdot i(t) \quad (\text{III.8})$$

Où  $Km$  est la constante du couple moteur.

En générale les coefficients  $Ke$  et  $Km$  sont si proches qu'il est raisonnable de les considérer égaux, négligeant alors les pertes durant la conversion électromécanique de puissance.

On pose:

$$Ke = Km = K$$

**b) Modèle mathématique de la réponse en vitesse**

Les transformées de Laplace des équations (III.5), (III.6), (III.7) et (III.9) sont données par :

$$(III.5) \rightarrow (R + Ls) I(s) = Us - e(s) \quad (III.9)$$

$$(III.6) \rightarrow e(s) = k\Omega(s) \quad (III.10)$$

$$(III.7) \rightarrow Ce(s) - Cr = (f + Js)\Omega(s) \quad (III.11)$$

$$(III.8) \rightarrow Ce(s) = K.I(s) \quad (III.12)$$

Alors, la fonction de transfert du moteur  $H(s) = \Omega(s)/U(s)$  est donnée par :

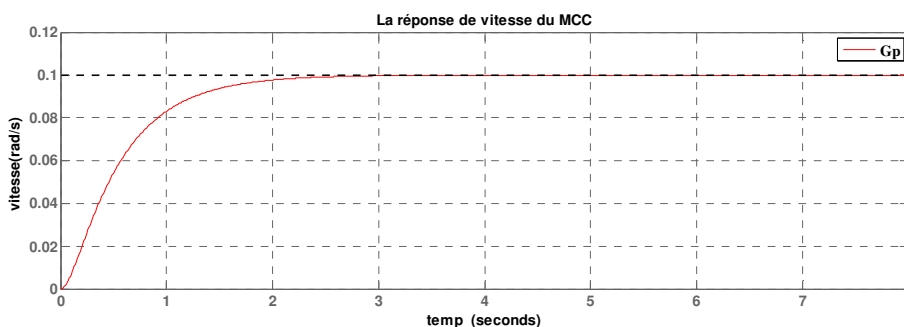
$$H(s) = \frac{\frac{K}{(Rf+K^2)}}{1 + \left(\frac{JL}{(Rf+K^2)}\right)s^2 + \left(\frac{(RJ+fL)}{(Rf+K^2)}\right)s} \quad (III.13)$$

Il s'agit clairement d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre.

Après application numérique des paramètres de la machine à courant continu donné en *annexe I*, la fonction de transfert du système (MCC) sera donnée par l'équation III.14 :

$$G_{mcc}(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.06s + 0.1001} \quad (III.14)$$

D'après la simulation de la réponse en boucle ouverte de MCC décrit comme dans l'équation (III.13). On peut voir que la sortie de réponse indicielle est proche de 0,1. L'erreur en régime permanent =  $1 - 0.1 = 0,9$ . **C'est assez élevé.** Notez également que le temps de stabilisation est d'environ 2.4s (voir Figure (III.13)).



**Figure II.5** Réponse indicielle d'un MCC en BO

**c) Régulateur PI adaptative d'ordre entier**

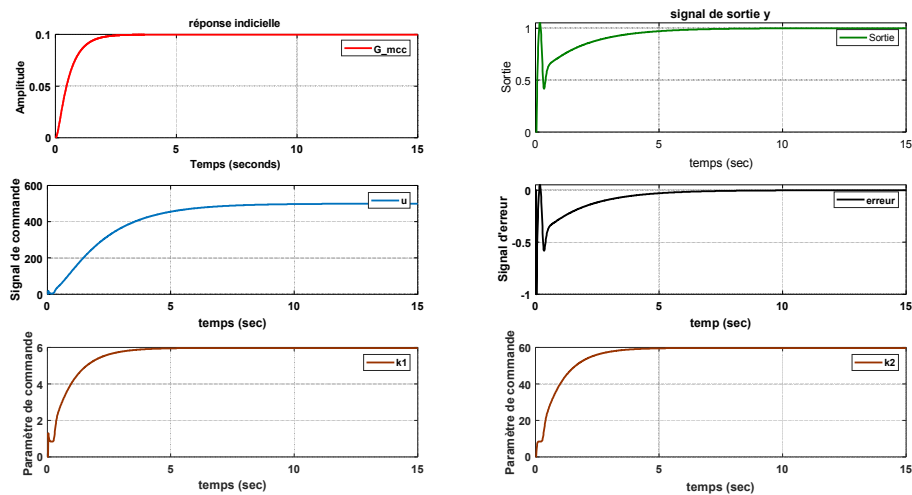
En appliquent le algorithme de commande adaptative de PI d'ordre entier de l'équation (III.4) pour des systèmes à phase minimale avec le degré relatif "un" est donnée comme suit :

☞ **Paramètre de réglages initiaux :**

- Le pas d'échantillonnage :  $\delta t = 0.01$
- Nombre d'échantillons :  $N_i = 1500$
- Valeur initiale du signal de commande :  $u(0) = 0.5$
- Paramètres du régulateur :  $k_c = 15\alpha_1 = 30$   $\alpha_2 = 300$

**Résultats de simulation**

En utilisant les valeurs de pré réglage indiquées précédemment nous avons obtenu les résultats illustrés dans la figure (III.4) suivante :



**Figure II.6** résultats (a) réponse du système en BO, (b) : sortie du système en BF (PI adaptatif), (c) : signal de commande, (d) : erreur statique, (e) : paramètre de réglage k1, (f) : paramètre du commande k2.

☞ **Interprétation des résultats**

D'après les résultats obtenus, nous remarquons que :

- ☞ La réponse indicielle de la commande PI d'ordre entier présente un temps de réponse lent dans le cas de la commande PI adaptatif de la MCC (Voir la **figure III.4 b**)
- ☞ La technique de réglage est très simple car il n'est pas nécessaire de régler les paramètres de correcteur PI.

☞ Le critère d'erreur quadratique  $J$  est d'ordre de 19.92 qui est important dans le cas d'utilisation de contrôleur  $PI$  adaptatif, ce qui justifie que ce correcteur est moins robuste.

### III.4.2 Application à un ensemble moteur tracteur et chariot

#### a) Modélisation du système

Soit un système physique constitué d'un ensemble : moteur tracteur et chariot (Figure .III.5).

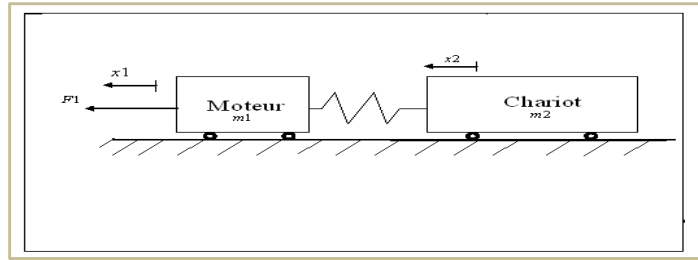


Figure II.7 Schéma représentatif de l'ensemble

Un schéma simplifié du système étudié peut être représenté par la figure (III.6).

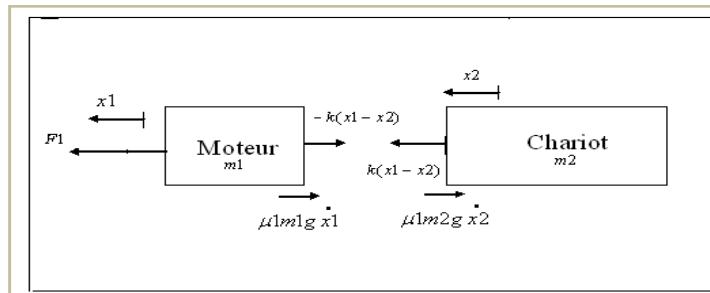


Figure II.8 Diagramme des corps libres et la loi de Newton.

#### Les forces agissant sur $m_1$

Le frottement ( $\mu_1$ ) et la rigidité de ressort ( $k$ ) et la force appliquée par le moteur  $F_1$ .

#### Les forces agissant sur $m_2$

Le frottement ( $\mu_1$ ) et la rigidité de ressort ( $k$ ).

#### Équations différentielles

D'après la loi de Newton  $\sum F = m \cdot \ddot{x}$ , les équations différentielles des systèmes dans le sens horizontal sont :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_1 - k(x_1 - x_2) - \mu_1 m_1 g \dot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - \mu_1 m_2 g \dot{x}_2 \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

**Variables d'états et équations de sortie**

Sachant que les variables d'états sont :  $x_1, x_2, v_1, v_2$  Et l'entrée  $F_1$ , les équations d'états

$$\begin{aligned} \text{seront :} \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \end{cases} \\ & \begin{cases} \dot{v}_1 = \frac{F_1}{m_1} - \frac{k}{m_1} x_1 + \frac{k}{m_1} x_2 - \mu_1 g v_1 \\ \dot{v}_2 = \frac{k}{m_2} x_1 - \frac{k}{m_2} x_2 - \mu_1 g v_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Étant donné que la sortie du système est la vitesse du moteur  $y = v_1$ , d'après la transformée de Laplace de (IV.16) :

La fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{y(s)}{F_1(s)} \quad (\text{III.17})$$

Avec:

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{F_1(s)} = & (m_2 s^2 + m_2 \mu_1 g s + 1) / (m_1 m_2 s^3 + (2m_1 m_2 \mu_1 g) s^2 + (m_1 k \\ & + m_1 m_2 (\mu_1 g)^2 s + k \mu_1 g (m_1 + m_2) \end{aligned}$$

Avec  $y(s)$  la vitesse du moteur et la commande  $F_1(t)$  est la force qui est fournie par le moteur.

Et dans l'espace d'état, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A = & [0 \ 1 \ 0 \ 0; -k/m_1 - \mu_1 g \ k/m_1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1; k/m_2 \ 0 \ -k/m_2 - \mu_1 g] \\ B = & [0; 1/m_1; 0; 0]. C = [0 \ 1 \ 0 \ 0], D = [0]. \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

**b) Régulateur PI adaptative d'ordre entier**

✚ **Système sans frottements : (Cas idéal :  $\mu_1 = 0$ )**

☞ **Paramètres physiques du système :**

- Masse de moteur :  $m1 = 1 \text{ kg.}$
- Masse de voiture :  $m2 = 0.5 \text{ kg.}$
- Coefficient de redore :  $k=1 \text{ N/sec.}$
- Coefficient de frottement :  $\mu1 = 0 \text{ N/m.}$
- Constante de gravite :  $g = 9.8 \text{ m/s}^2 .$

☞ **Fonction de transfert :**

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 3s^2} \quad (\text{III.19})$$

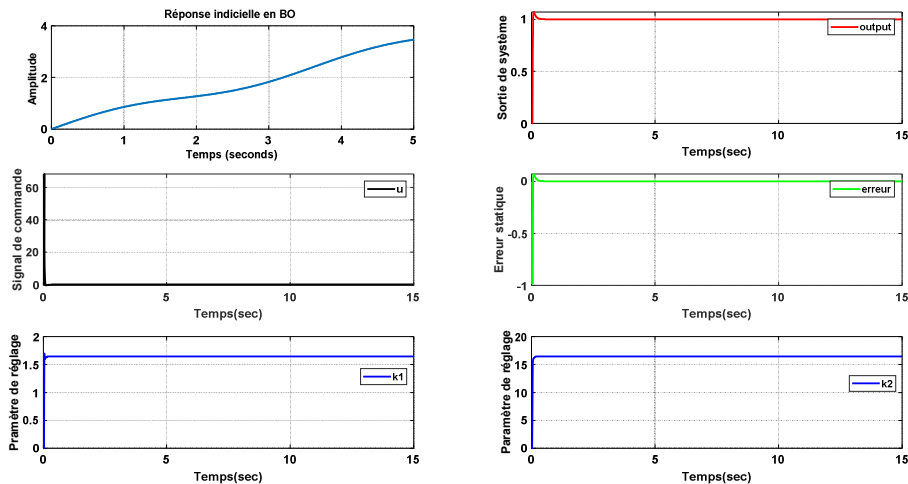
En appliquant l'algorithme de commande adaptative de *PI* d'ordre entier de l'équation (III.3) avec les valeurs initiales suivantes :

☞ **Paramètres de réglages initiaux**

- Le pas d'échantillonnage :  $\text{delta} = 0.01$
- Nombre d'échantillons :  $Ni = 1500$
- Valeur initiale du signal de commande :  $u(0) = 1.5$
- Paramètres du régulateur :  $kc = 40 \quad \alpha1 = 150 \quad \alpha2 = 1500$

**Résultats de simulation**

En utilisant les valeurs de pré réglage indiquées précédemment nous avons obtenu les résultats illustrés dans la figure (III.7) suivante :



**Figure II.9** résultats (a) réponse du système en BO, (b) : sortie du système en BF (PI adaptatif), (c) : signal de commande, (d) : erreur statique, (e) : paramètre de réglage  $k_1$ , (f) : paramètre du commande  $k_2$ .

✍ *Interprétation des résultats*

D'après les résultats obtenus, nous remarquons que :

- ☞ La réponse indicielle de la commande  $PI$  d'ordre entier présente un dépassement (Voir la **figure III.7 b**)
- ☞ La technique de réglage est très simple car il n'est pas nécessaire de régler les paramètres de correcteur  $PI$ .
- ☞ Le critère d'erreur quadratique  $J$  de l'application d'un  $PI$  adaptatif à un moteur tracteur et chariot est de 1.092 ce qui justifie que ce correcteur est un peu robuste.

**III.5 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté une commande  $PI$  adaptative d'ordre entier appliquées à deux systèmes linéaires différents (**un moteur à courant continu** et **un moteur tracteur + chariot**).

D'après les résultats obtenus on constate que les régulateur  $PI$  adaptatif donne des réponses moins satisfaisantes en termes de rapidité, dépassement minimal et robustesse). Dans le chapitre suivant nous allons présenter une commande  $PI$  adaptative fractionnelisé pour améliorer les performances de cas entier.

**Chapitre IV :**  
**Commande *PI* Adaptative**  
**d'Ordre Fractionnaire**

## CHAPITRE IV

### Commande PI Adaptative d'Ordre Fractionnaire

#### IV.1 Introduction

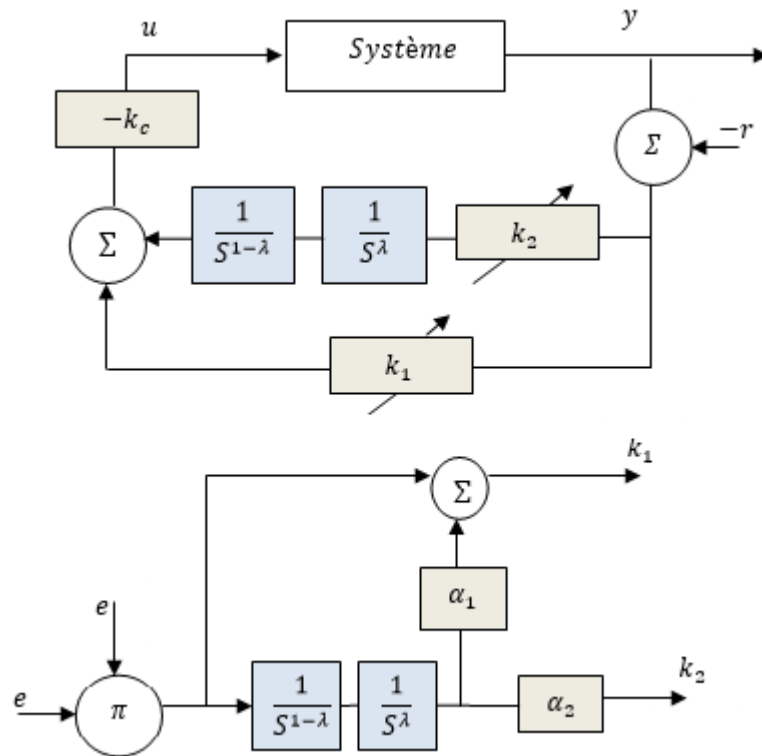
La commande robuste d'ordre non entier (CRONE) a été proposée par Oustaloup au début des années 90 [25]. Oustaloup a étudié les algorithmes d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes dynamiques et a montré la supériorité des performances de la commande CRONE sur la commande robuste classique et le *PID*. Les stratégies de la commande CRONE bien distinctes assurant d'excellentes performances de robustesse ont fait l'objet de développements théorique et technologiques importants [27] et [26].

Le calcul d'ordre fractionnaire est presque aussi ancien que le calcul d'ordre entier et son application aux systèmes de contrôle est maintenant bien reconnue. Ce chapitre se concentre sur l'introduction d'un contrôleur Proportionnel Intégral Dérivé d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande classique. Elle est basée sur le remplacement d'une fonction d'ordre entier par une cascade de fonctions d'ordre fractionnaire.

Dans ce chapitre nous allons présenter deux exemples de simulation, en utilisant les algorithmes de commande *PI* adaptatifs d'ordre entier et d'ordre fractionnaire appliqués à un moteur à courant continu et un chariot. Nous montrons aussi que la méthode *PI* adaptatif fractionnalisé donne des résultats très appréciables.

#### IV.2 Contrôleur *PI* adaptatif d'ordre Fractionnalisé pour les systèmes linéaires

Le schéma ordinaire de contrôleur *PI* adaptatif d'ordre fractionnalisé est donné par la figure IV .1.



**Figure IV.1** Contrôleur adaptatif *PI* fractionnalisé.

La loi de commande de régulateur adaptatif *PI* d'ordre entier est donnée comme suit [28] :

$$u(t) = -k_c \left[ k_1(t)e(t) + I^{1-\lambda} \left\{ I^\lambda \{ k_2(t)e(t) \} \right\} \right] \quad (IV.1)$$

Avec :

$$k_1(t) = k_p(t) + \alpha_1 k_i(t)$$

$$k_2(t) = \alpha_2 k_i(t)$$

$$k_p(t) = e^2(t)$$

$$k_i(t) = I^{1-\lambda} \left\{ I^\lambda \{ e^2(t) \} \right\}$$

$$e(t) = y(t) - r(t)$$

### IV.3 Analyse de Robustesse

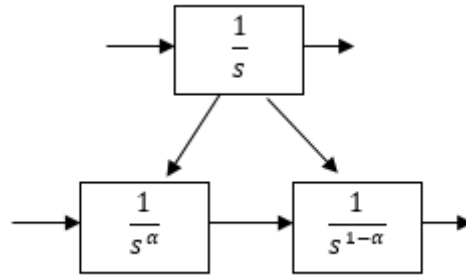
L'évaluation de performance de système de commande est réalisée en utilisant le critère de l'erreur quadratique *J* suivant :

$$J = \int_{t_i}^{t_F} (u_r(t) - y(t))^2 dt \quad (IV.2)$$

#### IV.4 La fractionalisation des Correcteurs *PI* et *PID*

La fractionalisation de *PI* classique ainsi que *PID* classique est obtenue en modifiant le terme intégrateur dans les fonctions de transferts des correcteurs précédent.

L'intégrateur  $1/s$  est fractionalisé comme suit [26, 87] :



**Figure IV.2** Fractionalisation d'un intégrateur.

Tel que :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{s^{(1-\alpha)}}$$

Avec  $\alpha$  est un nombre réel:  $0 < \alpha < 1$ .

La fonction de transfert d'un correcteur classique *PI* est :

$$C_{PI}(p) = K_p + \frac{1}{T_i p} \tag{IV. 3}$$

La fonction de transfert d'un correcteur *PI* fractionalisé est donnée comme suite :

$$C_{PIf} = \frac{1}{p^\alpha} \frac{1}{p^{\alpha-1}} \left( \frac{k_p \tau_i p + 1}{\tau_i} \right) \tag{IV. 4}$$

Avec  $0 < \alpha < 1$

Soit la fonction de transfert d'un correcteur classique *PID* donné par la fonction suivante :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Le correcteur *PID* fractionalisé est défini par la fonction suivante [26] :

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} \left( \frac{(k_p T_d T_i s^2 + k_p T_i s + k_p)}{T_i} \right) \\ &= \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{s^{(1-\alpha)}} \left( \frac{(k_p T_d T_i s^2 + k_p T_i s + k_p)}{T_i} \right) \end{aligned} \tag{IV. 5}$$

Avec  $0 < \alpha < 1$

### IV.5 Approximation d'Oustaloup

Ce travail utilise l'approximation *d'Oustaloup* de l'opérateur différentiel intégral qui est défini par la fonction de transfert ( $H(s)$ ) montrée dans l'équation (IV.6) où  $\alpha$  est l'ordre intégral ou l'ordre dérivé et  $N$  est le nombre de termes dans l'expansion. La constante  $\omega_u$  est déterminée à partir des bornes supérieure ( $\omega_h$ ) et inférieure ( $\omega_b$ ) de la fréquence comme indiqué dans l'équation (IV.7). La valeur de  $\omega_0$  et  $\omega'_0$  sont ensuite calculées à partir de  $\omega_u$  comme indiqué dans l'équation (IV.8). De la même façon, les constantes  $\omega_k$  et  $\omega'_k$  sont déterminées à partir de l'équation (IV.9) [D18].

$$H(s) = c \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega'_k}} \quad (IV.6)$$

$$\omega_u = \sqrt[2]{\omega_h \omega_b} \quad (IV.7)$$

$$\omega_0 = \alpha^{0.5} \omega_u \quad (IV.8)$$

$$\begin{cases} \omega_{k+1} = \gamma \omega_k \\ \omega_k = \alpha \omega'_k \end{cases} \quad (IV.9)$$

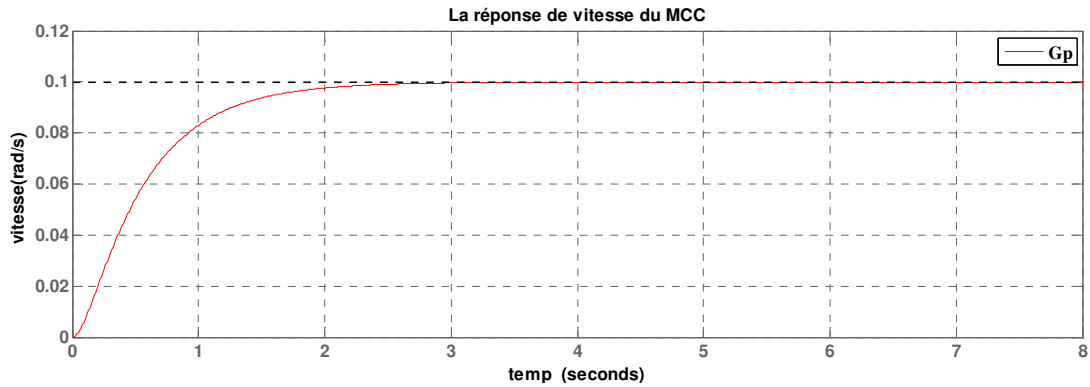
### IV.6 Commande PI adaptatif d'ordre fractionnaire des systèmes linéaires

#### IV.6.1 Application à un moteur à courant continu

Il s'agit clairement d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre dont la fonction de transfert du système modélisé en (*section III.4.1*) :

$$G_{mcc}(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.06s + 0.1001} \quad (IV.10)$$

D'après la simulation de la réponse en boucle ouverte de MCC décrit comme dans l'équation (III.14). On peut voir que la sortie de réponse indiciaire est proche de 0,1. L'erreur en régime permanent =  $1 - 0.1 = 0,9$ . **C'est assez élevé**. Notez également que le temps de stabilisation est d'environ 2.4s (voir Figure IV.3).



**Figure IV.3**Réponse indicielle d'un MCC en BO

Pour améliorer les performances de la commande en vitesse de la Machine à courant continu et après avoir appliqué un correcteur *PI* adaptatif d'ordre entier au chapitre III, et en guise de comparaison, nous allons appliquer un correcteur *PI* adaptatif fractionnalisé.

D'après la section II.3, nous avons :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s^\lambda} \frac{1}{s^{(1-\lambda)}}$$

### Régulateur *PI* adaptative d'ordre fractionnaire

En appliquant l'algorithme de la commande *PI* adaptatif d'ordre fractionnaire de l'équation (III.3) avec les valeurs initiales suivantes :

#### ☞ Paramètre de réglages initiaux

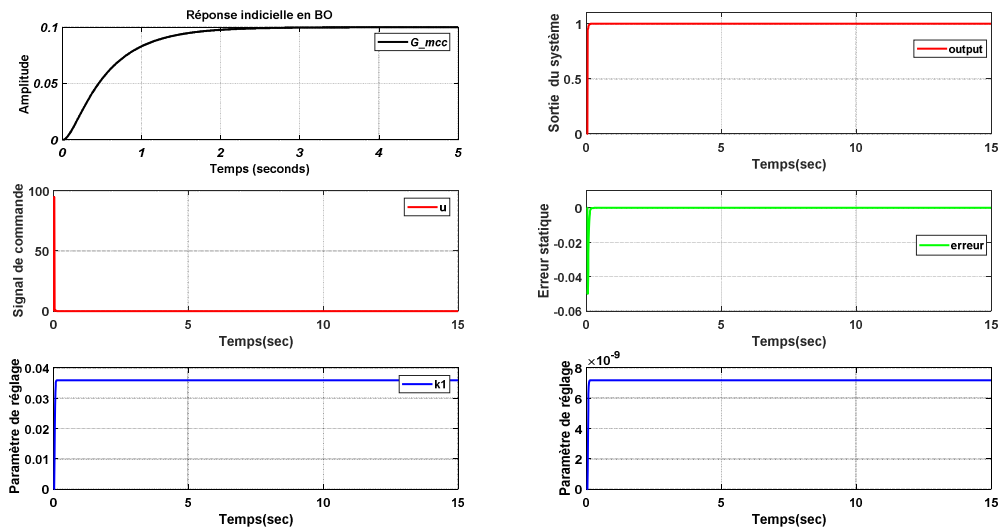
- Le pas d'échantillonnage :  $\delta = 0.01$
- Nombre d'échantillons :  $N_i = 1500$
- Valeur initiale du signal de commande :  $u(0) = 95$
- Paramètres du régulateur :
- $k_c = 1000$
- $\alpha_1 = 500$
- $\alpha_2 = 0.0001$
- L'ordre d'intégrateur  $\lambda = 0.3$

#### Résultats de simulation

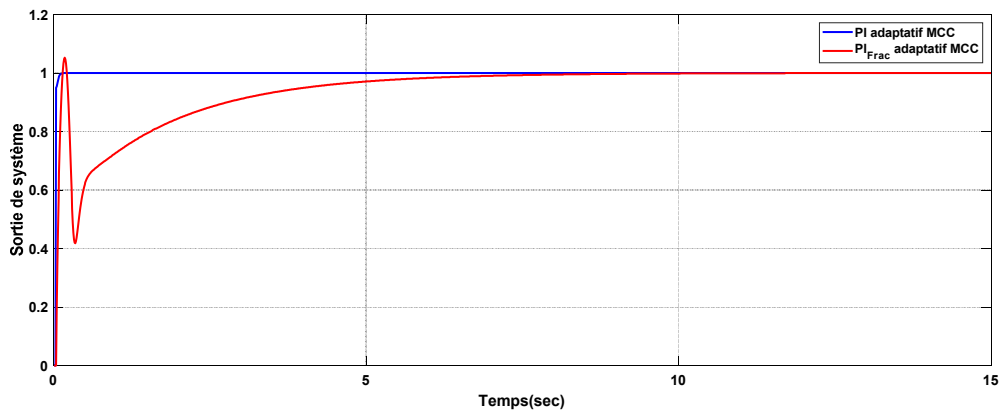
En utilisant les valeurs de pré-réglage indiquées précédemment nous avons obtenu les résultats illustrés dans la figure (IV.4) suivante.

Pour avoir une idée plus complète de l'amélioration de la robustesse obtenue en utilisant le correcteur fractionnalisé, nous comparerons les résultats des réponses du

système aux contrôleurs *PI* adaptatif d'ordre entier et *PI* adaptatif d'ordre fractionnalisé (figure IV.5).



**Figure IV.4** Résultats : (a) réponse du système en BO, (b) : sortie du système en BF (*PI* adaptatif fractionnalisé), (c) : signal de commande, (d) : erreur statique, (e) : paramètre de réglage  $k_1$ , (f) : paramètre de la commande  $k_2$ .



**Figure IV.5** Commande *PI* adaptative et *PI* adaptative fractionnalisé d'un MCC.

#### IV.6.2 Application à un ensemble moteur-tracteur et chariot

Reprenons l'exemple donné dans la *section III.4.2*, où nous avons la fonction de transfert de l'ensemble *Moteur-tracteur + chariot* :

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 3s^2} \quad (IV.11)$$

##### a) Régulateur *PI* adaptative d'ordre fractionnalisé

En appliquant l'algorithme de la commande *PI* adaptatif d'ordre fractionnalisé de l'équation (III.3) avec les valeurs initiales suivantes :

☞ **Paramètre de réglages initiaux**

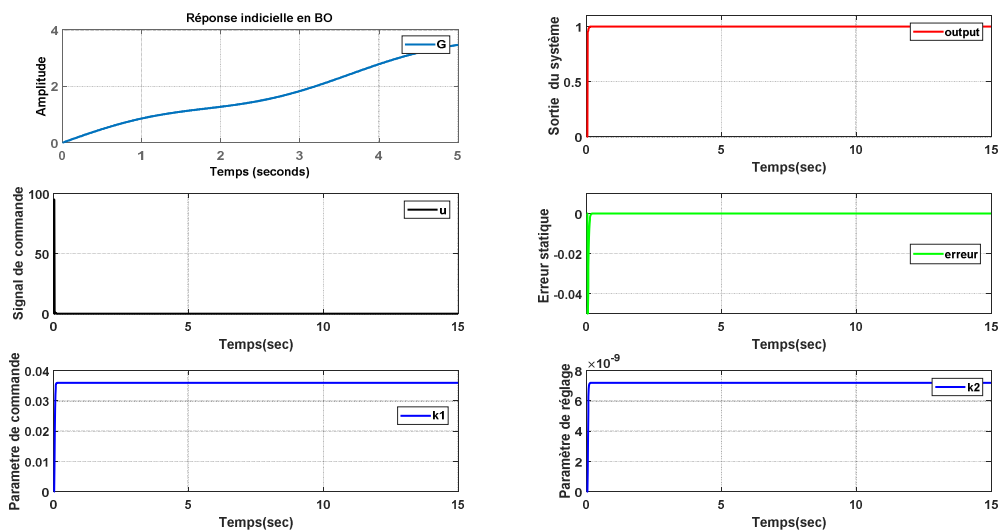
- Le pas d'échantillonnage :  $\delta t = 0.01$
- Nombre d'échantillons :  $N_i = 1500$
- Valeur initiale du signal de commande :  $u(0) = 95$
- Paramètres du régulateur :  $k_c = 1000$      $\alpha_1 = 500$  et  $\alpha_2 = 0.0001$
- L'ordre d'intégrateur  $\lambda = 0.3$

**Résultats de simulation**

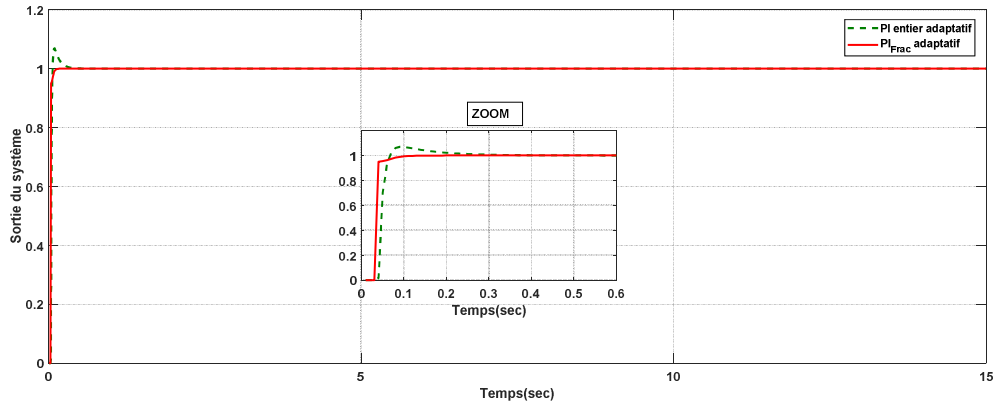
En utilisant les valeurs de pré-réglage indiquées précédemment nous avons obtenu les résultats illustrés dans la figure (IV.6) suivante.

Pour avoir une idée plus complète de l'amélioration de la robustesse obtenue en utilisant le correcteur fractionnalisé, nous comparerons les résultats des réponses du système aux contrôleurs *PI*

adaptatif d'ordre entier et *PI* adaptatif d'ordre fractionnalisé (figure IV.7).



**Figure IV.6** résultats : (a) réponse du système en BO, (b) : sortie du système en BF (*PI* adaptatif fractionnalisé), (c) : signal de commande, (d) : erreur statique, (e) : paramètre de réglage  $k_1$ , (f) : paramètre du commande  $k_2$ .



**Figure IV.7** Commande  $PI$  adaptative et  $PI$  adaptative fractionnalisé d'un MCC.

✍ *Interprétation des résultats*

D'après les résultats obtenus, nous remarquons que :

- ☞ La stabilité est garantie dans les deux cas (entier et fractionnalisé).
- ☞ La commande  $PID$  fractionnalisé nous a permis d'améliorer le temps de réponse ( $tr$ ) et de minimiser le dépassement ( $D$ ).

La comparaison du contrôleur  $PI$  adaptatif d'ordre entier et de contrôleur adaptatif d'ordre fractionnalisé robuste proposé monte que :

- ☞ La réponse indicielle de la commande  $PI$  adaptatif d'ordre entier présente des oscillations, tant dit que la réponse de la commande  $PI$  adaptatif d'ordre fractionnalisé ne présente aucun dépassement (Voir la *figure IV.5 & IV.7*)

**IV.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons commandé deux systèmes différents (MCC et Moteur +Tracteur+Chariot) avec des régulateurs  $PI$  adaptatifs d'ordre entier et d'ordre fractionnalisé. Nous pouvons conclure d'après les résultats obtenus que la commande  $PI$  adaptative d'ordre fractionnalisé est mieux que la commande  $PI$  adaptative d'ordre entier.

# Conclusion général

Les stratégies de commande sont toujours élaborées afin de rendre le système insensible aux perturbations et aux variations paramétriques.

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire, est une contribution à l'étude de la commande *PI* d'ordre Fractionnaire avec un régulateur adaptatif.

Au cours du premier chapitre nous avons effectué une étude les définitions de quelques concepts de système, l'automatique, la régulation, l'asservissement et la modélisation.

Nous avons présenté dans le deuxième présenté les définitions de base du calcul fractionnaire avec leurs propriétés et leurs transformées de Laplace. Puis, nous avons fait un résumé sur la commande *PI/PID* d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Ensuite un bref rappel sur les techniques d'approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Dans la troisième chapitre nous avons faire la présentation de la commande *PI* adaptative d'ordre entier appliquées à deux systèmes linéaires différents (un moteur à courant continu et un moteur tracteur + chariot).

D'après les résultats obtenus on constate que les régulateur *PI* adaptatif donne des réponses moins satisfaisantes en termes de rapidité, dépassement minimal et robustesse)

Finalement nous avons commandé deux systèmes différents (MCC et Moteur + Tracteur + Chariot) avec des régulateurs *PI* adaptatifs d'ordre entier et d'ordre fractionnalisés. Nous pouvons conclure d'après les résultats obtenus que la commande *PI* adaptative d'ordre fractionnalisés est mieux que la commande *PI* adaptative d'ordre entier en performance et stabilité.

# **Références bibliographiques**

## Introduction

- [1] Aged W., Bagloul. A., Souila. W. : « Les régulateurs auto ajustables des procédés industriels». Mémoire de fin d'étude Ingénieur d'Etat en Informatique. Systèmes d'informations avancées. Université 20 Août 1995 Skikda 2004.
- [2]: A Acharya, S Das, I Pan. « Extending the Concept of Analog Butterworth filter for Fractional Order Systems » Department of Instrumentation and Electronics Engineering, Jadavpur University, Salt Lake Campus, LB-8, Sector 3, Kolkata-700098, India.
- [3] Astrom K.J., Wittenmark B.: « Adaptative control » Addison-Wesley PIC, 1995.
- [4]Badreddine B M : « Adaptive PID Controller For Stable/instable Linear and Non-Linear Systems » Authorized licensed use limited to: University of Nantes. Downloaded on July 06, 2010 UTC from IEEE Xplore. Restrictions apply.
- [5]: Bensouici T. «Implémentation numérique RIF de dérivateur et intégrateur d'ordre fractionnaire , Variable» Mémoire de magister, Univ Mentouri. Constantine 2007
- [6]: Boene P. Dauphin-Tanguy G-P. Richard. F. Rotella. L. Zambettakis «Analyse et régulation des processus industriels »
- [7]Boujdadi N.Djamai A. « Correcteur PI et PID fractionnaire ; Etude, approximation et application » Mémoire D'ingéniorats. Département D'électrotechnique, Université De Skikda.2008.
- [8]Bounour N. Djouama I. «Etude et Simulation d'un Système Automatisé à Evènements Discrets» Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du Diplôme d'ingénieur d'Etat en Informatique Département d'Informatique 2009.
- [9]Djouambi A, Charef A, AV Besançon «Optimal approximation, simulation and analog realization ofthe fundamental fractional order transfer function»Int. J. Appl. Math.Comput. Sci. Vol. 17, No. 4, 455–462, DOI: 10.2478/v10006-007-0037-9, 2007.
- [10]Hammouche S. «Identification d'un modèle fractionnaire à l'aide des réseaux de neurones» Mémoire de magister, Univ Mouloud Mammeri. Tizi-ouzou 2012.
- [11]Idiou D. « Implémentation analogique de dérivateur et intégrateur d'ordre fractionnaire,Variable» Mémoire de magister, Univ Mentouri. Constantine 2008.
- [12]Jean-Marie Flans « La régulation industrielle,régulateur PID, prédictifs et flou»
- [13]Jia-Chun Fan and Toshihiro Kobayashi. « A Simple Adaptive PI Controller for Linear Systems with Constant Disturbances » IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 43, NO. 5, MAY 1998 733.

- [14]Khalifa B. « Analyse et réalisation de correcteurs analogiques d'ordre fractionnaire » Thèse Doctorat, Département D'électronique, Université Mentouri De Constantine,2011.
- [15]Ladaci S. Abdelfatah Charef « AN ADAPTIVE FRACTIONAL  $PI^\lambda D^\mu$  CONTROLLER » Proceedings of TMCE 2006, April 18–22, 2006, Ljubljana, Slovenia, edited by I. Horváth and J. Duhovnik. Organizing Committee of TMCE 2006, ISBN 961-6536-04-4.
- [16]Ladaci S. Caref A : «Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire d'un artificiel » Communication sciences et technologie cost N°1pp,50-52 enst Oran Algérie 2002
- [17]Ladaci S « contribution a la commande adaptative d'ordre fractionnaire », thèse de doctorat, université Mentouri de Constantine 2007
- [18]Le Lann C. « Le PID utilise en régulation de position et/ou de vitesse de moteurs électriques » Projet de fin d'étude .2007.
- [19]Madry. F, « Ajustage des Paramètres d'un régulateur PID» Département D'électricité Et Informatique, Eivd, École D'ingénieur Du Canton De Vaud, Avril 2002.
- [20]Magiante G .« Analyse et Synthèses des Filtres Analogiques » Edition TEC&DOC. Paris, 2006.
- [21]Monje A, Yang Quan Chen, Bals M, DingyerXue, VicentFelier « Fractional Order Systems and controls (fundamental and application) » Library of Congress Control Number: 2010934759, © Springer-Verlag London Limited 2010.
- [22]Noury. N, « Systèmes asservis et systèmes de régulation » Département Génie Electrique Et Informatique Industrielle1, 2007.
- [23] Ouhib. L, «Les système asservies» Institut Algérien Du Pétrole , IAP.2008.
- [24] Oulji S.Laib A.«Correcteurs fractionnaires :Application aux système a retards via un modèle diffusif »Mémoire de fin d'étude. Automatique. Université 20Aout 1995 Skikda 2006
- [25]Podlubny I. « Fractional-order Systems and  $PI^\lambda D^\mu$  Controllers » IEEE, Transactions on Automatic Control. Vol 44, N01, page 208-214, January 1999.
- [26] Sermondade.C. Toussaint A. «Régulation »tome 1et 2 NATAN 1994
- [27]: Sermondade C . Toussaint A. régulation Tome 4 correcteurs spécifiques, régulation en temps discret.

- [28] R Hilfer, "Applications of Fractional Calculus in Physics," *World scientific*, vol. 35, no.02, pp. 87-130, 2000.
- [29] A McBride, J Sabatier, O.P Agrawal, and J.T Machado, "Advances in fractional calculus: theoretical developments and applications in physics and engineering," *Springer*, pp. 613-615, 2008.
- [30] A Ben Messaoud, S Talmoudi, and M Ksour, "Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles extrêmes d'ordre entier," in *Conférence Internationale des Energies Renouvelables (CIER-2016)*, Hammamet, Tunisie, 2016, pp. 134-140.
- [31] P Shah and S Agashe, "Review of fractional PID controller.," *Mechatronics*, vol. 38, pp.29-41, 2016.
- [32] C.A Monje, Y.Q Chen, Vinagre B.M, D Xue, and V Feliu, *Fractional-order systems and controls : fundamentals and applications*. London: Springer, 2010.
- [33] D Matignon and B d'Andréa Novel, "Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems," *Computational engineering in systems applications*, vol. 2, pp. 952-956, 1996.
- [34] R Caponetto, G Dongola, and L Fortuna, *Fractional order systems : modeling and control applications.*: World Scientific , 2010.
- [35] K.B Oldham and J Spanier, *The fractional calculus : theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.*: Elsevier Science, 1974, vol. 111.
- [36] I Doye, "Généralisation du lemme de gronwall-bellman pour la stabilisation des systemes fractionnaires," Jeddah, Western province, Saudi Arabia, 2011.