

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Discrètes

Par :

1- Bilel Selikh

2- Mohammed Abdelhafid

Sujet

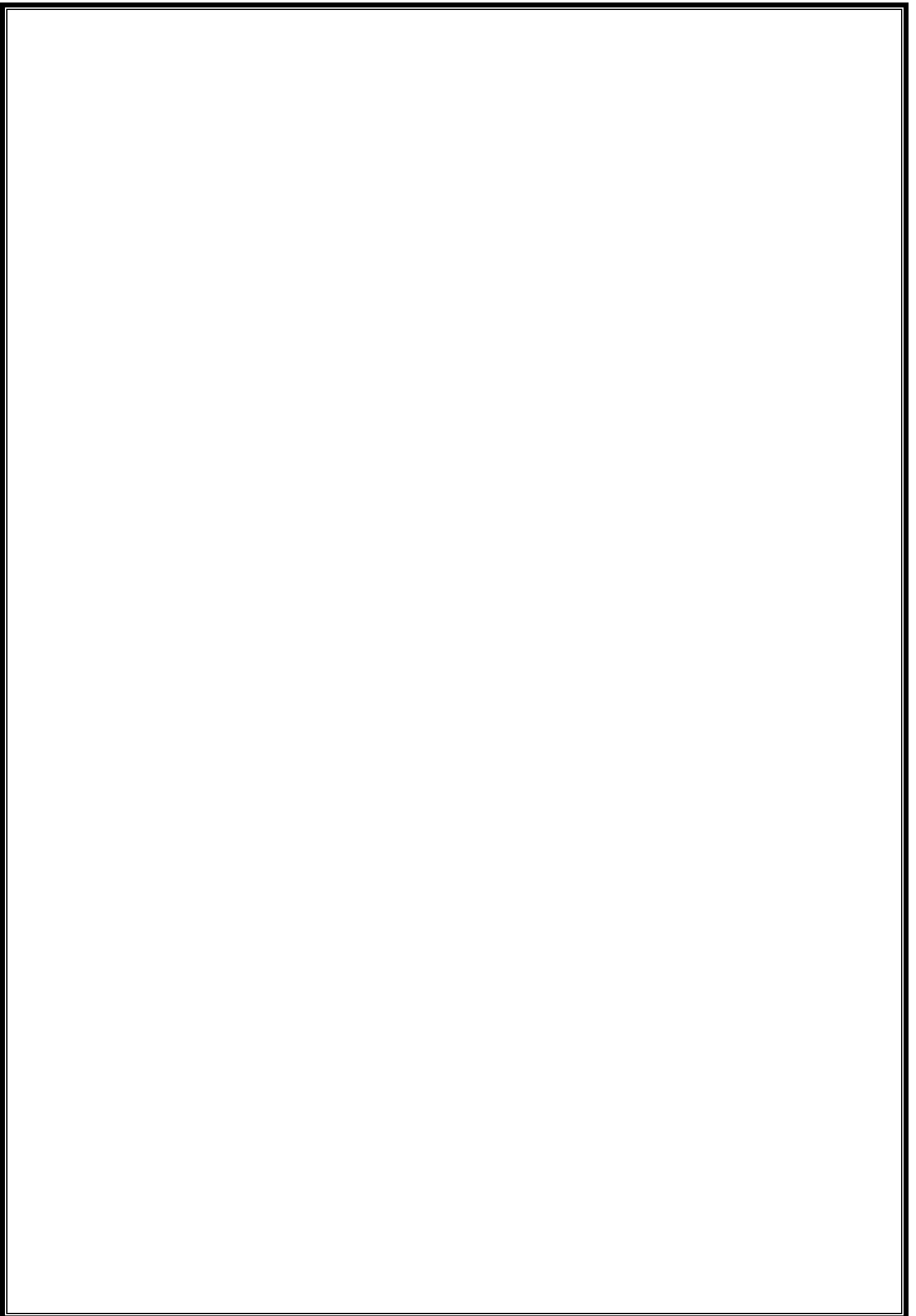
Action d'un groupe et symétrie

Date de soutenance :

Devant le jury :

Mr. N. Midoune	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. D. Mihoubi	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. N. Ghadbane	Prof. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2016 / 2017



Remerciements

*Je tiens à remercier **ALLAH** qui me donne la force de faire ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier mon encadreur le professeur **D.Mihoubi** Qui me donne des orientations et les conseil sur ce travail.*

*Je tiens à remercier Mr. **N. Midoune***

*Je tiens à remercier Mr. **N.Ghadbane***

Nous remerciements vont à tous les professeurs de départements de Mathématique.

Je ne saurais aussi oublier mes amis et mes collègues de loin et de proche , ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de prés et qui nous ont aidé l'élaboration de ce mémoire.

Merci.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail aux plus chers:

***Ma mère et Mon père** pour leurs dévouements,*

leurs amours, leurs sacrifices et leurs encouragements.

*Je prie le bon dieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils
seront*

toujours fiers de moi.

Ma profonde affectation et tendresse.

A mes frères.

Et A mes sœurs.

*A toute ma famille. Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments
de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me
porter.*

A tous mes enseignants du primaire jusqu'à l'université.

A tous mes collègues de promotion 2016-2017 sans aucune exception.

Bilel.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail aux plus chers:

***Ma mère et Mon père** pour leurs dévouements,*

Leurs amours, leurs sacrifices et leurs encouragements.

*Je prie le bon dieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils
seront*

Toujours fiers de moi.

Ma profonde affectation et tendresse.

A mes frères.

Et A mes sœurs.

*A toute ma famille. Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments
de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me
porter.*

A tous mes enseignants du primaire jusqu'à l'université.

A tous mes collègues de promotion 2016-2017 sans aucune exception.

Mohammed.

Action D'un Groupe Et Symétrie

Présente par :

BILEL SELIKH et MOHAMMED ABDELHAFID

Spécialité : Mathématiques .

Option : Mathématiques discrètes.

Sous la direction de : Pr. D. MIHOUBI.

Université : Mohamed Boudiaf De M'sila.

2016 / 2017

Table des matières

Introduction	1
1 Notions de groupes	2
1.1 Groupe	2
1.1.1 Sous-groupe	4
1.1.2 Sous-groupes engendrés	6
1.2 Groupe quotient	8
1.2.1 Relations d'équivalences	8
1.2.2 Théorème de Lagrange	9
1.2.3 Sous-groupes distingués	9
1.3 Morphisme de groupes	10
1.3.1 Notion de morphisme de groupes	10
1.3.2 Isomorphisme de groupes	11
1.3.3 Image et Noyau	12
1.4 Groupe symétrique	13
1.4.1 Groupe de permutation	13
1.4.2 Composition de permutations	15
1.4.3 Cycle et support	16
1.4.4 Signature d'une permutation, groupe alterné	18
2 Action de groupes	21
2.1 Définitions et exemples	21
2.2 Stabilisateurs-Orbites	24
2.3 Formule des classes	27
2.4 Les p -groupes	30
2.5 Théorèmes de Sylow	31

3	Symétries des figures géométriques	34
3.1	la symétrie	34
3.1.1	Transformations de symétrie	35
3.2	La symétrie dans le plan	36
3.3	La symétrie dans l'espace	41
3.3.1	Les polyèdres réguliers	41
3.3.2	Polyèdre dual	47
3.4	Types de symétrie infinie dans le plan	48
	Conclusion	51
	Bibliographie	52

Introduction

Le mot symétrie vient du grec ancien (Symmetría) Συμμετρία, se réfère à un rapport proportionnel et plus précisément à l'harmonie d'un ratio entre les éléments. la symétrie est une opération qui transforme un objet en un objet superposable (isométrie directe) ou superposable à son image dans un miroir (isométrie inverse), et on a deux types de la symétrie : la Symétrie centrale (par rapport à un point) et la Symétrie axiale ou orthogonale (par rapport à une droite), Il existe plusieurs sortes de symétries dans le plan et dans l'espace. L'importance de la symétrie est également dans la physique et chimie et mathématique. En physique, la notion de symétrie est particulièrement importante dans la physique classique et par la représentation de la notion d'isotropie, appelée encore symétrie de rotation, ou encore d'homogénéité qui est liée à l'invariance par translation dans l'espace. En chimie, la symétrie moléculaire est un concept fondamental en chimie car elle permet de comprendre ou de prévoir de nombreuses propriétés chimiques. Elle mobilise des outils mathématiques comme la notion de groupe, en particulier de groupe de symétrie et groupe ponctuel de symétrie. En mathématiques, nous utilisons la symétrie pour résoudre les équations algébrique. Dans ce mémoire nous allons traiter le sujet de l'action d'un groupe et symétrie dans le plan et dans l'espace .

Ce mémoire est reparti en trois chapitres :

Dans le premier chapitre on donne des généralités sur les groupes, homomorphisme des groupes et on présente les groupes symétries et les groupes alternés.

Dans le deuxième chapitre nous étudions l'action d'un groupe sur un ensemble fini et on donne quelques applications.

Le troisième chapitre on présente la notion de symétrie des figures géométrique, dans le plan et dans l'espace, tel que on présente : la symétrie des n-gones, la symétrie des polyèdres réguliers et les types de symétrie infinie dans le plan .

Chapitre 1

Notions de groupes

Dans cette chapitre on présente les notions fondamentales sur les groupes et ainsi que les groupes de symétriques en étudions quelques proposition pour ces dernier .

1.1 Groupe

Soit G un ensemble non vide et " $*$ " est une application définie par :

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

Définition 1.1 (Groupe)

Le couple $(G, *)$ est un groupe si :

a) La lois " $*$ " est associative c'est-à-dire :

$$\forall a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c.$$

b) L'ensemble G possède un élément neutre e pour " $*$ " c'est-à-dire :

$$\exists e \in G, \forall a \in G, a * e = e * a = a .$$

c) Tout élément $a \in G$ admet un symétrique c'est-à-dire :

$$\forall a \in G, \exists b \in G, a * b = b * a = e.$$

On dira de plus que le groupe $(G, *)$ est commutatif (ou bien abélien) si la loi de composition " $*$ " est commutative, c'est-à- dire :

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x,$$

Exemples 1.1

- a) Les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ munis par l'addition sont des groupes,
- b) Les ensembles $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ pour la multiplication sont des groupes.

Exemples 1.2

- a) Les groupes $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}^*, \times), (M_n(\mathbb{C}), +)$ sont abéliens.
- b) L'ensemble \mathbb{C}^* des nombres complexes non-nuls muni de la multiplication est un groupe abélien.
- c) L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ inversibles à coefficients dans \mathbb{R} muni de la multiplication des matrices est un groupe non commutatif en général. L'élément neutre est la matrice identité.

Théorème 1.1

Supposons $(G, *)$ est un groupe

- a) L'élément neutre d'un groupe G est unique.
- b) Chaque élément dans G possède un inverse unique.

Preuve.

- a) L'élément neutre de G est unique, c'est-à-dire, si e et \acute{e} sont des éléments de G tels que $e * a = a * e = a$ pour chaque $a \in G$ et $\acute{e} * a = a * \acute{e} = a$ pour chaque $a \in G$. Alors $e = \acute{e}$. Supposons que e et \acute{e} soient tels qu'indiqués. Alors $e * a = a$ pour chaque $a \in G$. En particulier, $e * \acute{e} = \acute{e}$. De même, en utilisant $a = e$ dans $a * \acute{e} = a$, on obtient aussi $e * \acute{e} = e$. Ainsi on a $\acute{e} = e * \acute{e} = e$, et donc $e = \acute{e}$.
- b) Si a, x et y sont des éléments de G avec e l'élément neutre de G ,
et $a * x = x * a = e$ et $a * y = y * a = e$

$$\begin{aligned} x &= x * e && (e \text{ est élément neutre}) \\ &= x * (a * y) && (a * y = e) \\ &= (x * a) * y && (\text{associativité}) \\ &= e * y && (x * a = e) \\ &= y && (e \text{ est élément neutre}) \end{aligned}$$

alors $x = y$. ■

1.1.1 Sous-groupe

Définition 1.2

Soit G un groupe noté multiplicativement. On définit le produit de deux sous ensembles $A, B \subset G$ par $A \cdot B = \{a \cdot b | a \in A, b \in B\}$. Et pour $a \in G$ et $B \subset G$, on pose : $a \cdot B = \{a \cdot b | b \in B\}$, $B \cdot a = \{b \cdot a | b \in B\}$.

De même, si le groupe G noté additivement, la somme de A et B est définie par : $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$, et celle de a et B par $a + B = \{a + b | b \in B\}$.

Définition 1.3

Un sous ensemble H d'un groupe G est un sous-groupe de G si c'est un groupe pour la loi de G induite sur H (on notera $H \leq G$).

Proposition 1.1

Soit $H \subset G$ un sous-ensemble non vide. On dit que H est un sous groupe de G si et seulement si :

- i) $\forall a, b \in H \Rightarrow ab \in H$;
- ii) $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

Preuve.

Si H est un sous-groupe de G , les assertions (i) et (ii) sont clairement vérifiées. Réciproquement, d'après l'assertion (i), la loi de G induite sur H est une loi interne, et cette loi est associative pour la même raison que celle indiquée ci-dessous pour $(\mathbb{Q}, +)$ et \mathbb{Z} . D'après (ii), pour tout élément a de H , on a : $a^{-1} \in H$, d'où, d'après (i), $aa^{-1} \in H$. Mais aa^{-1} est l'élément neutre de G . On en déduit que l'élément neutre de G est aussi élément neutre de H . Par conséquent, H muni de la loi induite par celle de G est un groupe. ■

Remarques 1.1

a) Les conditions i) et ii) sont évidemment équivalentes à l'unique condition

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H.$$

b) Un groupe G ayant au moins deux éléments admet au moins deux sous groupes, G lui même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.

c) Il est clair que si H est un sous-groupe d'un groupe G et si K est un sous-groupe de H , alors K est un sous-groupe de G .

Exemples 1.3

- a) Si G est un groupe, G et $\{e\}$ sont des sous groupes de G dits sous-groupes triviaux de G .
- b) Les ensembles \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sont des sous-groupes du groupe \mathbb{C} muni de l'addition, mais pas \mathbb{N} (car l'opposé d'un élément de \mathbb{N} n'est pas nécessairement un élément de \mathbb{N}).
- c) L'ensemble $\{-1, 1\}$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) .

Proposition 1.2

L'intersection de deux sous-groupes d'un groupe G est un sous-groupe de G . Plus généralement, l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes d'un groupe G est un sous-groupe de G .

Preuve.

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous groupes d'un groupe G . Posons $K = \bigcap_{i \in I} H_i$ l'intersection de tous les H_i . L'ensemble K est non-vidé, car il contient le neutre e puisque celui-ci appartient à chacun des sous groupes H_i . Soient x et y deux éléments de K . Pour tout $i \in I$, on a $x.y^{-1} \in H_i$ puisque H_i est un sous-groupe. Donc $x.y^{-1} \in K$. Ce qui prouve que K est un sous-groupe de G . ■

Remarque 1.2

La réunion de deux sous-groupes n'est en général pas un sous-groupe.

Contre-exemple

Dans le groupe \mathbb{C}^* muni de la multiplication, considérons le sous-groupe $U_2 = \{1, -1\}$ des racines carrées de l'unité et le sous-groupe $U_3 = \{1, j, j^2\}$ des racines cubiques de l'unité. Notons $K = U_2 \cup U_3 = \{1, -1, j, j^2\}$. On a $j \in K$ et $-1 \in K$, mais le produit $(-1).j = -j \notin K$. Donc K n'est pas stable par la multiplication, et ce n'est donc pas un sous groupe de \mathbb{C}^* .

Remarque 1.3

Si H est un sous-groupe de G , alors $H \cdot H = H$.

Proposition 1.3

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z} = \{nx, x \in \mathbb{Z}\}$, pour n parcourant \mathbb{N} .

Preuve.

Il est clair que les $n\mathbb{Z} = \{nx, x \in \mathbb{Z}\}$, pour n parcourant \mathbb{N} , sont des sous-groupes de \mathbb{Z} . Réciproquement, soit H un sous-groupe de \mathbb{Z} . Si $H = 0$, alors $H = n\mathbb{Z}$ avec $n = 0$. Si H est non nul, son intersection avec \mathbb{N}^* est un ensemble non vide d'entiers positifs et possède donc un plus petit élément n . Soit x un élément quelconque de H , la division euclidienne de x par n donne $x = ny + k$, avec $0 \leq k < n$. Comme $k = x - ny$ appartient à H , k est nul par définition de l'entier n . On en déduit que $H = n\mathbb{Z}$. ■

1.1.2 Sous-groupes engendrés**Définition 1.4**

Soient G un groupe et X une partie de G . On appelle sous groupe engendré par X , et on note $\langle X \rangle$, le plus petit (pour la relation d'inclusion) sous-groupe de G contenant X .

Proposition 1.4

L'ensemble $\langle X \rangle$, c'est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent X .

Définition 1.5

Soit G un groupe et x un élément de G . On appelle sous-groupe monogène engendré par x dans G le sous-groupe engendré par le singleton $\{x\}$. On le note $\langle x \rangle$.

Proposition 1.5

Le sous-groupe engendré par le singleton $\{x\}$ dans G est le plus petit sous-groupe de G contenant x , en d'autres termes $\langle x \rangle = \{x^m; m \in \mathbb{Z}\}$.

Preuve.

Le sous-groupe $\langle x \rangle$ contient x , donc (par stabilité pour la loi de G) il contient aussi $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x = x^3$, et par récurrence x^m pour tout entier $m \geq 1$. Il contient aussi nécessairement le symétrique x^{-1} de x , donc aussi $x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-2}$, et par récurrence x^{-m} pour tout entier $m \geq 1$. Enfin, il contient le neutre $e = x \cdot x^{-1}$ que l'on note par convention x^0 . Ceci montre que $\langle x \rangle \supset \{x^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Il est clair réciproquement que $\{x^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G contenant x . ■

Remarque 1.4

Soit la loi de G est notée additivement, et X une partie non vide de G on a :

$$\langle X \rangle = \{x_1 + \dots + x_n, n \in \mathbb{N}^*, \pm x_i \in X, \forall i, 1 \leq i \leq n\}$$

d'où

$$\langle x \rangle = \{nx, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple 1.4

Le groupe \mathbb{Z} muni de l'addition est engendré par un élément 1. En effet si $n \in \mathbb{Z}$, alors $n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}$ si n est positif et $n = \underbrace{-1 - 1 - \dots - 1}_{-n \text{ fois}}$ si n est négatif.

Définition 1.6 (Ordre d'un groupe, ordre d'un élément)

Un groupe G est dit fini s'il n'a qu'un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, le cardinal de G s'appelle l'ordre du groupe G et est noté $|G|$. Soient G un groupe et x un élément de G . On appelle ordre de x , qu'on note $o(x)$, le cardinal de $\langle x \rangle$. Si ce cardinal est infini, on dit que x est d'ordre infini.

Exemples 1.5

a) On considère l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ muni d'une loi interne notée " + " et définie par $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}$ et $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$. Il est immédiat de vérifier qu'on obtient une structure de groupe commutatif d'ordre 2. Ce groupe sera noté $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Le nombre de bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ étant égal à $n!$, on en déduit que le groupe symétrique S_n est un groupe fini d'ordre $n!$.

Remarques 1.5

a) Soient G un groupe fini et x un élément de G , alors $o(x) \leq |G|$.

b) Dans tout groupe G , l'élément neutre est le seul élément d'ordre 1.

c) Dans $(\mathbb{Z}, +)$, tous les éléments non nuls sont d'ordre infini.

1.2 Groupe quotient

1.2.1 Relations d'équivalences

Définition 1.7

Soit H un sous-groupe d'un groupe G . On définit sur G une relation d'équivalence, appelée relation d'équivalence à gauche (resp. à droite) associée à H , par $a \equiv_g b$ modulo $H \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ (resp. $a \equiv_d b$ modulo $H \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$). Rappelons qu'une relation d'équivalence sur un ensemble est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 1.8

Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Si $a \in G$, le sous ensemble

$$aH = \{g \in G \mid g = ah, h \in H\}$$

est par définition la classe à gauche de l'élément a relativement à H . De même le sous-ensemble Ha est appelé classe à droite.

Lemme 1.1

Soit H un sous-groupe d'un groupe G et $a, b \in G$. On a :

- 1) $Ha \cap Hb \neq \emptyset \Rightarrow Ha = Hb$ (pour les classes à droite);
- 2) $b \notin Ha \Rightarrow Ha \cap Hb = \emptyset$.

Preuve.

Soit $x \in Ha \cap Hb$, alors $x \equiv_g a$ et $x \equiv_g b$, d'où $a \equiv_g b \Rightarrow Ha = Hb$. Et **2)** n'est qu'une reformulation de **1)**. L'ensemble des classes à gauche $(G/H)_g$ est le quotient de G par cette relation d'équivalence (et de même pour $(G/H)_d$). La classe à gauche (ou à droite) de $e \bmod H$ est H . ■

Définition 1.9

Le cardinal de l'ensemble des classes à gauche modulo H (= cardinal de l'ensemble des classes à droite) est appelé indice de H dans G et noté $[G : H]$. On a donc $[G : H] = |(G/H)_g| = |(G/H)_d|$. Si l'on considère G comme sous-groupe de lui-même, on obtient le quotient $G/G = \{a \cdot G \mid a \in G\}$. Comme $a \cdot G = G$ pour tout $a \in G$, on a $G/G = \{G\}$, et donc $[G : G] = 1$.

1.2.2 Théorème de Lagrange

Théorème 1.2 (Lagrange)

Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G . Alors H est fini, et l'ordre de H divise l'ordre de G (i.e. Si $H \leq G$, $|G| = |H|[G : H]$).

Preuve.

On a une injection de H dans G et une surjection de G dans G/H . Donc $|H| \leq |G|$ et $|G| \geq |G/H|$. Comme $|H|$ et $|G/H|$ sont finis. On a alors $G/H = \{g_1H, \dots, g_kH\}$. Les (g_iH) ont $|H|$ éléments. On a $G = \bigcup_{1 \leq i \leq k} g_iH$. Comme les (g_iH) sont disjoints on a $|G| = |G/H||H|$. ■

1.2.3 Sous-groupes distingués

Définition 1.10

Un sous-groupe H de G est distingué (on note $H \triangleleft G$) si pour tout $x \in G$, $Hx = xH$ (on dit aussi invariant ou normal).

Remarques 1.6

- a) Evidemment, dans un groupe commutatif, tout sous-groupe est normal.
- b) Si $H \triangleleft G$, alors $(G/H)_g = (G/H)_d$ et on notera simplement G/H .

Inversement, si $(G/H)_g = (G/H)_d$, alors $H \triangleleft G$ (en effet : xH est une classe à droite, donc aussi à gauche et contient x , donc est nécessairement Hx c'est-à-dire : $xH = Hx$).

Exemples 1.6

- a) Si G est un groupe, ses deux sous-groupes triviaux G et $\{e_G\}$ sont normaux.
- b) Soit $G = GL_2(\mathbb{R})$, le groupe des matrices inversibles à deux lignes et deux colonnes. On considère $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. On montre facilement que H

est un sous-groupe de G . Posons $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Alors on a

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Soit } a \in \mathbb{R}, \text{ alors : } x \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-1} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Cet élément n'étant clairement pas contenu dans H en général, H n'est pas normal.

1.3 Morphisme de groupes

1.3.1 Notion de morphisme de groupes

Définition 1.11

Soient G un groupe muni d'une loi de composition interne " \cdot " et G' un groupe muni d'une loi de composition interne " $*$ ". On appelle morphisme de groupes, ou homomorphisme de groupes de G dans G' toute application

$$f : G \rightarrow G' \quad \text{telle que :}$$
$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y) \quad \text{pour tous } x, y \in G$$

Exemples 1.7

a) L'application $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui à tout nombre réel associe son exponentielle est un morphisme de groupes de \mathbb{R} muni de l'addition dans \mathbb{R}_+^* muni de la multiplication, car : $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

b) L'application $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ qui à toute matrice carrée d'ordre inversible associe son déterminant est un morphisme de groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ muni du produit matriciel dans \mathbb{R}^* muni de la multiplication, car : $\det(A \times B) = \det A \cdot \det B$, pour toutes $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$.

c) Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors l'application suivante :

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$m \mapsto nm$$

est un homomorphisme de groupes. En effet, si $(m, m') \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$f(m + m') = n(m + m') = nm + nm' = f(m) + f(m') \quad (\text{structures additives}).$$

Notation

On note $\text{hom}(G, G')$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans G' . On note $\text{End}(G)$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans lui-même, qu'on appelle endomorphismes de G .

Proposition 1.6

Tout élément f de $\text{hom}(G, G')$ vérifie les propriétés suivantes :

- a) $f(1_G) = 1_{G'}$
- b) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ pour tout élément x de G
- c) $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$
- d) $H' \leq G' \Rightarrow f^{-1}(H') \leq G$ avec $f^{-1}(H') = \{x \in G, f(x) \in H'\}$.

Preuve.

- a) Notons 1_G et $1_{G'}$ les éléments neutres respectifs de G et G' . Soit x un élément de G , on a $f(x) = f(x1_G) = f(x)f(1_G)$. Or $f(x) = f(x)1_{G'}$, d'où

$$f(1_G) = 1_{G'}.$$

- b) Pour tout x de G on a $1_{G'} = f(1_G) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$, d'où

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}.$$

- c) Pour tous y_1 et y_2 dans $f(H)$, il existe x_1 et x_2 dans H tels que

$$f(x_1) = y_1 \text{ et } f(x_2) = y_2.$$

D'où

$$y_1 y_2^{-1} = f(x_1) f(x_2)^{-1} = f(x_1) f(x_2^{-1}) = f(x_1 x_2^{-1})$$

qui appartient à $f(H)$.

- d) Pour tous x et y dans $f^{-1}(H')$ on a $f(x)$ et $f(y)$ dans H' , d'où

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \text{ appartient à } H', \text{ et } xy^{-1} \text{ appartient à } f^{-1}(H'). \blacksquare$$

Exemple 1.8

Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \exp(x)$

$$f(0) = 1 \quad f(-x) = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{f(x)}.$$

Proposition 1.7

Soient G, G', G'' trois groupes. Alors pour tout f de $\text{hom}(G, G')$ et tout g de $\text{hom}(G', G'')$, $g \circ f$ appartient à $\text{hom}(G, G'')$.

1.3.2 Isomorphisme de groupes**Définition 1.12**

Un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de groupes si f est bijectif. On dit alors que G et G' sont isomorphes. Un isomorphisme de G dans lui-même est appelé automorphisme. On note $G \simeq G'$.

Proposition 1.8

Si f est un isomorphisme de groupes de G sur G' , alors la bijection réciproque f^{-1} est un morphisme de groupes de G' sur G .

Preuve.

Soient x' et y' deux éléments quelconques de G' . Posons $x = f^{-1}(x')$ et $y = f^{-1}(y')$.

Parce que f est un morphisme de groupes, on a :

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \text{ donc } f(x \cdot y) = x' \cdot y', \text{ d'où } x \cdot y = f^{-1}(x' \cdot y'),$$

$$\text{c'est-à-dire : } f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y') = f^{-1}(x' \cdot y').$$

Ceci prouve que f^{-1} est un morphisme de groupes de G' sur G . ■

Exemple 1.9

Soit l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$$

- f est un application bijective.
- $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f^{-1}(x) = \ln(x)$.
- f^{-1} est aussi un morphisme $f^{-1}(x \cdot y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$,
 $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
- f est un isomorphisme.
- les groupes $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}_+^*, *)$ sont isomorphes.

1.3.3 Image et Noyau

Définition 1.13

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

(i) l'ensemble $f(G) = \{x' \in G' \mid \exists x \in G, f(x) = x'\} = \{f(x) \mid x \in G\}$

est un sous-groupe de G' appelé **l'image** de f , et noté $\text{Im } f$.

(ii) l'ensemble $f^{-1}(\{1_{G'}\}) = \{x \in G \mid f(x) = 1_{G'}\}$

est un sous-groupe de G , appelé **le noyau** de f , et noté $\ker f$.

Proposition 1.9

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes

(i) f est injective si et seulement si $\ker f = \{1_G\}$.

(ii) f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = G'$.

Preuve.

f injectif $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in G \times G, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$. Si f est injectif et $f(x) = 1_{G'} = f(1_G)$, alors $x = 1_G$ et $\ker(f) = \{1_G\}$.

Réciproquement, si $f(x) = f(y)$, on a $1_{G'} = (f(x))^{-1}f(y) = f(x^{-1}y)$,

d'où $x^{-1}y \in \ker(f)$. Comme $\ker(f) = \{1_G\}$, alors $x^{-1}y = 1_G$ et donc $x = y$.

Ainsi f est injective.

La deuxième assertion est évidente. ■

Exemple 1.10

Soit l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 3x \end{aligned}$$

- f est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$

$$f(x + x') = 3(x + x') = 3x + 3x' = f(x) + f(x').$$

- Calcul de noyau $\ker f = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = 0\}$ si $f(x) = 0$ alors $3x = 0$ donc $x = 0$ ainsi $\ker f = \{0\}$ donc f est injective.
- $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$.

Nous retrouvons que $3\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

1.4 Groupe symétrique

1.4.1 Groupe de permutation

Définition 1.14

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle groupe symétrique (ou groupe de permutation) sur n éléments, ou n -ième groupe symétrique, le groupe des bijections d'un ensemble fini à n éléments quelconque sur lui-même. On le note S_n .

Proposition 1.10

Le couple (S_n, \circ) est un groupe .

Preuve.

Soient $f, g \in S_n$. Alors la composée $g \circ f$ est une application de X dans lui-même, et est une bijection entant que composée de deux applications bijectives. Donc $g \circ f$

est une permutation de X . Par conséquent, la loi $S_n \times S_n \rightarrow S_n, (f, g) \rightarrow f \circ g$ est une loi de composition interne dans S_n . L'élément neutre de S_n est l'application identité $Id_X : X \times X$ ($Id_X(x) = x$ pour tout $x \in X$). En effet, pour tout $f \in S_n$ et pour tout $x \in X$, on a : $f \circ Id_X(x) = f(x) = Id_X \circ f(x)$, d'où $f \circ Id_X = Id_X \circ f$. Enfin, comme f est bijective, son application inverse existe, c'est aussi une permutation de X . ■

Notation

Si $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ est une permutation, on dénote par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

L'élément neutre Id_X est représenté par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

L'élément inverse σ^{-1} de σ par :

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Bien qu'il s'agit de la composition, on parle souvent du «produit de σ par τ », et l'on écrit aussi $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$, qui signifie «effectuer d'abord la permutation τ , puis la permutation σ ».

Exemple 1.11

Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, l'inverse de σ est :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.11

Le cardinal de S_n est $n!$.

Preuve.

Une permutation de S_n est entièrement déterminée par les images de $\{1, \dots, n\}$, qui sont des éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. Pour compter le nombre d'éléments σ de S_n , observons que pour l'image de 1, il ya n choix, pour l'image de 2, il ya $n - 1$ choix (car $\sigma(2) \notin \{\sigma(1)\}$), pour l'image de 3, il ya $n - 2$ choix (car $\sigma(3) \notin \{\sigma(1), \sigma(2)\}$), et ainsi de suite, enfin pour l'image de n , il ya 1 choix (car $\sigma(n) \notin \{\sigma(1), \dots, \sigma(n - 1)\}$). Donc au total, il ya $n! = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1$ permutations de $1, \dots, n$, c'est l'ordre du groupe S_n . ■

Exemples 1.12

a) Pour $n = 2$, $|S_2| = 2! = 2$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

b) Pour $n = 3$, $|S_3| = 3! = 6$

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

1.4.2 Composition de permutations

La composition $\tau\sigma$, de deux permutations σ et τ de S_n , correspond à superposer deux tels diagrammes de flèches, plaçant celui de σ au-dessus de celui de τ . Ainsi,

le composé de $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ s'obtient en « suivant » les flèches dans la figure obtenue par cette superposition

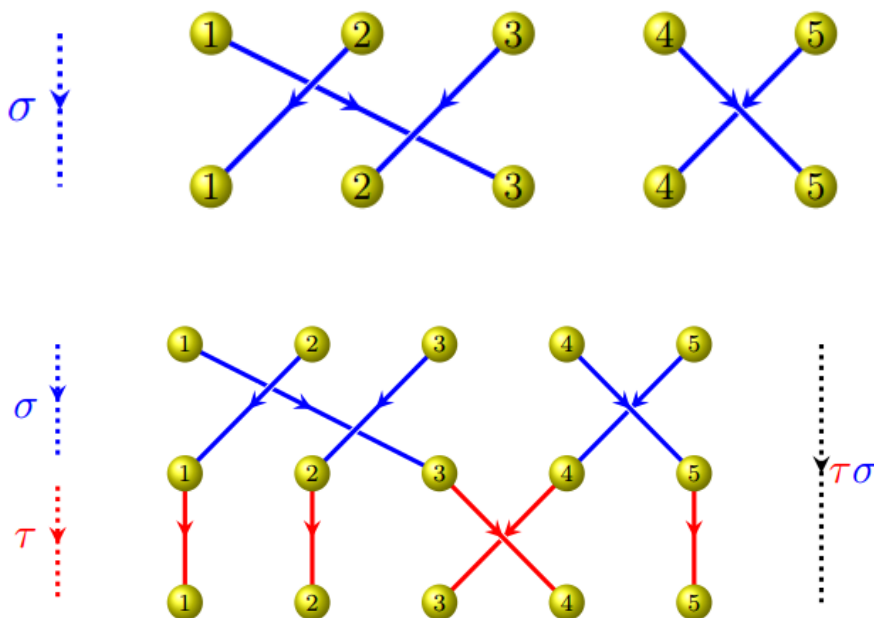


Figure 1.1- Composition de permutations .

$$\text{Donc } \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.12

Si $n \geq 3$ S_n est un groupe non commutatif.

Preuve.

Soit $n \geq 3$. Pour montrer que S_n est non commutatif, soient $\sigma, \pi \in S_n$, pour

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & x & \cdots & y \\ b & c & a & x & \cdots & y \end{pmatrix} \text{ et } \pi = \begin{pmatrix} a & b & c & x & \cdots & y \\ b & a & c & x & \cdots & y \end{pmatrix}$$

on a : $\pi \circ \sigma \neq \sigma \circ \pi$.

$$\text{par exemple } n = 3 : \text{ on a : } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $\pi \circ \sigma \neq \sigma \circ \pi$. Alors si $n \geq 3$ le groupe S_n est non commutatif. ■

1.4.3 Cycle et support

Définition 1.15 (support d'une permutation)

On appelle support d'une permutation $\sigma \in S_n$ l'ensemble des éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ non invariants, c'est-à-dire l'ensemble des i tels que $\sigma(i) \neq i$. Ainsi, le support de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \{1, 2, 4, 5\}.$$

Définition 1.16 (Ordre d'une permutation)

On appelle ordre d'une permutation $\sigma \in S_n$ le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^p = Id$. On rappelle la convention d'écriture $\sigma^p = \underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{p \text{ fois}}$.

Définition 1.17 (Cycle)

Une permutation σ de S_n est un cycle de longueur $k \geq 2$ (ou k -cycle) s'il existe k éléments distincts a_1, a_2, \dots, a_k de X tel que

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{k-1}) = a_k, \sigma(a_k) = a_1$$

et $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in X \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. On utilise alors la notation cyclique $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Exemples 1.13

Soient σ, ρ deux permutations tels que :

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (162354)$ est un cycle de longueur 6.

b) $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1243)(56)$ cette permutation contenant un cycle de longueur 2 et cycle de longueur 4.

Exemple 1.14

Si $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$

On remarque que $\sigma = (13254) = (32541) = (25413) = (41325)$.

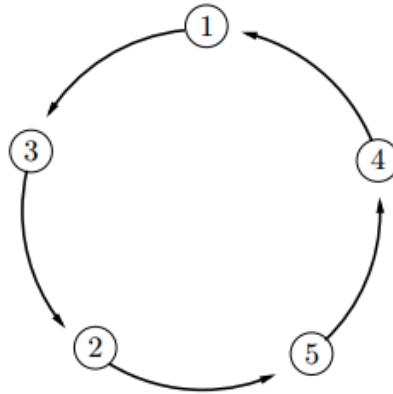


Figure 1.2- le cycle (13254)

Définition 1.18 (Transposition)

On appelle transposition tout 2-cycle, c'est-à-dire toute permutation qui échange deux éléments i et $j \neq i$ en laissant fixe chacun des $n - 2$ autres, on note aussi τ_{ij} ,

$$\tau_{ij} = (i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.15

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (24) \text{ est un transposition } \tau_{24}.$$

Définition 1.19

Deux cycles (i_1, \dots, i_k) et (j_1, \dots, j_l) de S_n sont dits disjoints si les supports sont disjoints c'est-à-dire $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$.

Exemples 1.16

- a) Dans S_6 , les cycles $(1, 3)$ et $(2, 4, 5)$ sont disjoints.
- b) Dans S_7 , les cycles $(2, 6, 8, 5)$ et $(4, 5)$ ne sont pas disjoints.

Proposition 1.13

Soit σ et τ deux cycles disjoints commutent dans S_n . Alors $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Preuve.

Soient $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ et $\tau = (b_1, b_2, \dots, b_l)$. On montrons que $\tau\sigma(x) = \sigma\tau(x)$ pour tout $x \in S_n$ si x n'est ni dans le support de $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ et x ni dans celui de $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$, alors σ et τ fixe x , C'est-à-dire que $\sigma(x) = x$ et $\tau(x) = x$.

Par conséquent $\sigma\tau(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(x) = x = \tau(x) = \tau(\sigma(x)) = \tau\sigma(x)$. ■

Remarques 1.7

- a) Les cycles $(i_1, \dots, i_k), (i_2, \dots, i_k, i_1), \dots, (i_k, i_1, \dots, i_{k-1})$ sont identiques.
- b) Soient σ une permutation et $c = (i_1, \dots, i_k)$ un cycle. Alors :

$$\sigma c \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)).$$

- c) Inversement deux cycles de même longueur sont conjugués (c'est -à-dire :
si c_1 et c_2 sont deux tels cycles, il existe $\sigma \in S_n$ tel que $c_2 = \sigma c_1 \sigma^{-1}$).

1.4.4 Signature d'une permutation, groupe alterné

Définition 1.20 (Signature d'une permutation)

Soit $n \geq 2$ un entier, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on appelle nombre d'inversions de σ l'entier

$$I(\sigma) = \text{card}\{(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

On appelle signature de σ l'entier valant $+1$ ou -1 défini par :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}.$$

Exemple 1.17

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 6)(2, 5, 3)$ dans S_6 .

- 1) L'élément 1 présente une inversion avec 2, 3, 4, 5, 6.
- 2) L'élément 2 présente une inversion avec 3, 4, 5, 6.
- 3) L'élément 3 présente une inversion avec 6.
- 4) L'élément 4 présente une inversion avec 5 et 6.
- 5) L'élément 5 présente une inversion avec 6.

Le nombre total d'inversions est $I(\sigma) = 13$, $I(\sigma)$ est impaire, donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{13} = -1$.

Proposition 1.14

Quelles que soient deux permutations $\sigma, \gamma \in S_n$, on a $\varepsilon(\sigma\gamma) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\gamma)$. En d'autres termes, l'application

$$\begin{aligned} \varepsilon : S_n &\rightarrow \{+1, -1\} \\ \sigma &\mapsto \varepsilon(\sigma) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Preuve.

- $\forall \sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma) \in \{-1, +1\}$
- Soient σ et γ deux éléments de S_n ,

σ se décompose en produit de transpositions $\sigma = \prod_{k=1}^p \tau_k, \varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

γ se décompose en produit de transpositions $\gamma = \prod_{k=1}^q \tau'_k, \varepsilon(\gamma) = (-1)^q$.

$$\text{Alors : } \sigma\gamma = \left(\prod_{k=1}^p \tau_k \right) \left(\prod_{k=1}^q \tau'_k \right).$$

Donc $\varepsilon(\sigma\gamma) = (-1)^{p+q} = (-1)^p(-1)^q = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\gamma)$. ■

Exemples 1.18

a) Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $1 = \varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1})$,

donc comme ε prend ses valeurs dans $\{1, -1\}$, on a : $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

b) Dans S_6 , Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 6)(2, 5, 3)$,

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1, 6))\varepsilon((2, 5, 3)) = (-1)^1(-1)^2 = -1.$$

Définition 1.21 (Groupe alterné)

Pour tout entier $n \geq 2$, le noyau de ε est appelé n -ième groupe alterné. On le note A_n . Le sous-groupe A_n de S_n est donc l'ensemble des permutations de S_n qui sont de signature 1 (c'est-à-dire qui se décomposent en un nombre pair de transpositions).

Proposition 1.15

Pour tout entier $n \geq 2$, le groupe A_n est fini d'ordre $\frac{n!}{2}$.

Preuve.

Notons X l'ensemble des permutations de S_n qui sont de signature -1 . Le sous-ensemble X est non-vide. Si l'on fixe $\tau \in X$, l'application $\sigma \mapsto \tau \sigma$ réalise une bijection de A_n sur X . Comme $S_n = A_n \cup X$ et $A_n \cap X = \emptyset$, on conclut que $\text{card } X = |A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}$. ■

Exemples 1.19

a) Pour $n = 2$, on a $A_2 = \{e\}$.

b) Pour $n = 3$, on a $A_3 = \{e, \gamma, \gamma^2\}$ avec $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 2

Action de groupes

Dans cette chapitre on présente l'action d'un groupe sur un ensemble fini et on donne quelques exemples illustratifs.

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1

Soit G un groupe (noté multiplicativement, d'élément neutre e) et soit E un ensemble non vide. **Une opération à gauche** de G sur E est la donnée d'une application $G \times E \rightarrow E$, $(g, x) \mapsto g.x$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- ▶ $\forall (g_1, g_2) \in G \times G, \forall x \in E, (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$.
- ▶ $\forall x \in E, e \cdot x = x$.

On pourrait définir de même un groupe G opérant à droite sur l'ensemble E . Par la suite, on ne considérera que les groupes opérant à gauche sur un ensemble et le mot gauche sera sous-entendu. Si G opère sur l'ensemble E , on dira que E est un G -ensemble.

Théorème 2.1

L'ensemble E est un G -ensemble si et seulement si G est un homomorphe au groupe $S(E)$.

Preuve.

Supposons G homomorphe au groupe $S(E)$ dans le morphisme $T : G \rightarrow S(E)$.

A tout élément $g \in G$, il correspond donc une bijection $T_g \in S(E)$. Cette bijection donne de $x \in E$, une image que nous noterons gx .

Nous définissons ainsi sur E une loi de composition externe $G \times E \rightarrow E$. Le morphisme T exige $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$, d'où

$$(T_{g_1} \circ T_{g_2})(x) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (T_{g_1 g_2})(x) = (g_1 g_2) \cdot x.$$

De plus, si e est l'élément neutre de G , T_e est la bijection identique i_E de E , donc $e \cdot x = x$. Finalement E est un G -ensemble.

Réciproquement, soit E un G -ensemble, fixons $g \in G$ et soit T_g l'application $x \mapsto gx$ de E dans E . On a :

$$(T_{g^{-1}} \circ T_g)(x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$$

et aussi $(T_g \circ T_{g^{-1}})(x) = x$. Donc T_g et $T_{g^{-1}}$ sont des bijection réciproques.

D'autre part : $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$, c'est -à-dire que l'application $T : g \rightarrow T_g$ de G dans $S(E)$ est un morphisme de groupes. ■

Exemples 2.1 (Action par conjugaison)

a) Tout groupe G opère sur lui-même par conjugaison

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x = gxg^{-1} \end{aligned}$$

Vérification

$$\mathbf{a-1)} \text{ Soient } g_1, g_2, x \in G, \text{ on a : } \begin{cases} g_1 \in G \Rightarrow g_1 \cdot x = g_1 x g_1^{-1} \\ \text{et} \\ g_2 \in G \Rightarrow g_2 \cdot x = g_2 x g_2^{-1} \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (g_2 \cdot x) &= g_1 \cdot (g_2 x g_2^{-1}) \\ &= g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} \\ &= g_1 g_2 x (g_1 g_2)^{-1} \\ &= (g_1 g_2) \cdot x \end{aligned}$$

a-2) Soient $e, x \in G$ on a $e \cdot x = exe^{-1} = exe = ex = x$.

b) Tout group G opère sur $\mathcal{P}(G)$, ensemble des parties de G , par conjugaison

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{P}(G) &\rightarrow \mathcal{P}(G) \\ (g, S) &\mapsto g \cdot S = gSg^{-1} \\ (g, \emptyset) &\mapsto \emptyset \end{aligned}$$

Exemple 2.2

Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Alors G opère sur l'ensemble $(G/H)_g$ des classes à gauche modulo H par :

$$\begin{aligned} G \times (G/H)_g &\rightarrow (G/H)_g \\ (g, xH) &\mapsto g \cdot (xH) = gxH \end{aligned}$$

Exemple 2.3 (Action de S_E)

Soit E un ensemble non vide. Alors le groupe S_E des permutations de E opère sur E par :

$$\begin{aligned} S_E \times E &\rightarrow E \\ (\sigma, x) &\mapsto \sigma \cdot x = \sigma(x) \end{aligned}$$

Exemple 2.4

Le groupe linéaire $Gl_n(\mathbb{R})$ opère sur \mathbb{R}^n de la manière suivante :

$$\text{pour } A \in Gl_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n, (A, v) \mapsto Av \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 2.2

► On dit qu'un groupe G opère **transitivement** sur E si on a :

$$\forall x, y \in E, \exists g \in G; g \cdot x = y.$$

► On dit qu'un groupe G opère **fidèlement** sur un ensemble E si

$$(\forall g \in G, g \cdot x = x \forall x \in E) \Rightarrow g = e.$$

Exemples 2.5

a) Tout groupe G opère transitivement et fidèlement sur lui-même par « translation » $G \times G \rightarrow G, (g, x) \mapsto g \cdot x = gx$

b) L'action d'un groupe $G \neq \{e\}$ n'est pas transitive et en générale n'est pas fidèle sur lui-même par conjugaison.

Théorème 2.2 (Théorème de Cayley)

Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_n .

Preuve.

En effet on considère l'action de G sur lui-même par multiplication à gauche, ce qui nous donne un morphisme $\phi : G \rightarrow \mathfrak{S}(G)$ or, via une bijection entre G et $\{1, \dots, n\}$, on a $\mathfrak{S}(G) \simeq S_n$. De plus l'action est fidèle car si $g_1 \cdot g = g$ alors $g_1 = e$ donc on obtient un morphisme injectif de G dans S_n ce qui permet de conclure. ■

2.2 Stabilisateurs-Orbites

Définition 2.3 (Stabilisateur)

Soit $x \in E$, le sous-groupe $Stab_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ est appelé **stabilisateur** (ou groupe d'**isotropie**) de x .

Plus généralement, si A est un sous-ensemble de E , le stabilisateur de A est l'ensemble $Stab_G(A) = \{g \in G \mid g \cdot A = A\}$.

Exemple 2.6

Soit $G = GL_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles à n lignes et n colonnes et à coefficients dans \mathbb{C} . Alors, $GL_n(\mathbb{C})$ opérant sur \mathbb{C}^n via l'action :

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ (A, x) & \mapsto & Ax \end{array} .$$

Soit x un élément non nul de \mathbb{C}^n . Alors $A \in Stab_G(x)$ si et seulement si $Ax = x$ c'est-à-dire si $(A - I)x = 0$. Donc le stabilisateur de x est l'ensemble des matrices inversibles avec valeur propre 1 et ayant x comme vecteur propre associé à cette valeur propre.

Exemple 2.7

Dans l'opération naturelle de S_n sur $\{1, \dots, n\}$, le stabilisateur d'un point est isomorphe à S_{n-1} .

Exemple 2.8

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et supposons que G est le groupe de permutation défini par $G = \{(1), (12)(3456), (35)(46), (12)(3654)\}$. Donc le stabilisateur est :

$$\begin{cases} Stab_G(1) = Stab_G(2) = \{(1), (35)(46)\} \\ Stab_G(3) = Stab_G(4) = Stab_G(5) = Stab_G(6) = \{(1)\} \end{cases}$$

Proposition 2.1

Soit E un G -ensemble. Pour tout $x \in E$, le stabilisateur de x est un sous groupe de G .

Preuve.

Clairement, $e \in Stab(x)$. Soit $g_1, g_2 \in Stab(x)$. Donc $g_1 \cdot x = x$ et $g_2 \cdot x = x$. Alors $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$, Par conséquent, le produit de deux éléments dans $Stab(x)$ est aussi dans $Stab(x)$. Finalement, si $g \in Stab(x)$, alors $x = e \cdot x = (g^{-1} g) \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x$, donc $g^{-1} \cdot x$ est dans $Stab(x)$. ■

Définition 2.4 (Noyau d'une action)

Soit G un groupe et E un ensemble. Le noyau de l'action de G sur E est le noyau du homomorphisme $\lambda : G \rightarrow S_E$, notée $\ker(\lambda)$.

Proposition 2.2

Le noyau d'une action $\lambda : G \rightarrow S_E$ est l'intersection des stabilisateurs des éléments de E : $\ker(\lambda) = \bigcap_{x \in E} \text{Stab}(x)$.

Preuve.

Soit G un groupe opérant sur E par l'action $\lambda : G \rightarrow S_E$, et Soit g un élément de $\ker(\lambda)$. On a

$$\begin{aligned} g \in \ker(\lambda) &\Leftrightarrow \lambda(g) = \text{Id}_E \\ &\Leftrightarrow \lambda(g)(x) = \text{Id}_E \text{ pour tout } x \in E \\ &\Leftrightarrow \lambda(g)(x) = x \text{ pour tout } x \in E \\ &\Leftrightarrow g \cdot x = x \text{ pour tout } x \in E \\ &\Leftrightarrow g \in \text{Stab}(x) \text{ pour tout } x \in E \\ &\Leftrightarrow \ker(\lambda) = \bigcap_{x \in E} \text{Stab}(x) \end{aligned}$$

. ■

Définition 2.5

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E . **Le fixateur** d'un élément $g \in G$ est par définition l'ensemble $\text{Fix}_E(g) := \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$.

Exemple 2.9

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et supposons que G est le groupe de permutation défini par $G = \{(1), (12)(3456), (35)(46), (12)(3654)\}$, les fixateurs sont donc :

$$\begin{aligned} \text{Fix}_E((1)) &= E \\ \text{Fix}_E((35)(46)) &= \{1, 2\} \\ \text{Fix}_E((12)(3456)) &= \text{Fix}_E((12)(3654)) = \emptyset \end{aligned}$$

Remarque 2.1

$\text{Fix}_E(g)$ peut être vide (par exemple dans le cas où G opère transitivement sur E).

Définition 2.6 (Orbite)

Soit G un groupe opérant sur un ensemble E et soit x un élément fixé de E . L'ensemble $\mathcal{O}_G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ est appelé **l'orbite** de x sous l'action de G .

Exemple 2.10

L'ensemble S_n des bijections de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, n\}$ opérant sur $\{1, \dots, n\}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S_n \times \{1, \dots, n\} &\rightarrow \{1, \dots, n\} \\ (\sigma, j) &\mapsto \sigma(j) \end{aligned}$$

L'orbite d'un élément $j \in \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des $\sigma(j)$ pour $\sigma \in S_n$. C'est évidemment l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en entier.

Exemple 2.11

Soit G le groupe de permutation défini par :

$G = \{(1), (123), (132), (45), (123)(45), (132)(45)\}$ et $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. G opérant sur l'ensemble E . Les orbites sont :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_G(1) = \mathcal{O}_G(2) = \mathcal{O}_G(3) = \{1, 2, 3\} \\ \mathcal{O}_G(4) = \mathcal{O}_G(5) = \{4, 5\} \end{cases}$$

Exemple 2.12

Pour l'action de $S(E)$ sur E il y'a une seule orbite. En effet, pour tout $x \in E$, on a :

$$S(E) \cdot x = \{\sigma(x) \mid \sigma \in S(E)\} = E$$

(tout $y \in E$ s'écrit $y = \tau(x)$, où τ est la transposition $\tau = (x, y)$ si $y \neq x$, $\tau = Id$ si $y = x$)

Exemple 2.13

Pour l'action de G sur lui même par conjugaison, les orbites sont appelées classes de conjugaison :

$$\forall h \in G, G \cdot h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}.$$

Définition 2.7

Soit G un groupe opérant sur un ensemble E . La relation R définie sur E par :

$$xRy \Leftrightarrow \exists g \in G, y = g \cdot x$$

est une relation d'équivalence. L'orbite $\mathcal{O}_G(x)$ d'un élément x de E sous l'action de G est une classe d'équivalence pour la relation R . Les orbites des éléments de E sous l'action de G forment donc une partition de E .

Théorème 2.3

Si x et $y \in E$ sont éléments d'une même orbite alors $Stab(x)$ et $Stab(y)$ sont des sous groupes *conjugués* de G .

Preuve.

On a x et y sont dans la même orbite, il existe $h \in G$ tel que $y = h \cdot x$. La relation $g \cdot y = y$ ($g \in G$) équivaut à $(gh) \cdot x = h \cdot x$, ou encore $(h^{-1}gh) \cdot x = x$. Ceci implique que l'application $g \mapsto h^{-1}gh$ est une bijection de $Stab_G(y)$ sur $Stab_G(x)$ c'est-à-dire que $Stab_G(x) = h^{-1}Stab_G(y)h$. ■

Remarque 2.2

On a $Fix_E(g) = \{x \in E \mid Stab_G(x) = G\} = \{x \in E \mid \mathcal{O}_G(x) = \{x\}\}$.

Définition 2.8 (Action libre)

Soit E un G -ensemble. L'action de G sur E est dite **libre** si pour tout $x \in E$, $Stab(x) = \{e\}$, où e est l'identité de G .

Exemple 2.14

L'action d'un groupe G sur lui-même par multiplication à gauche est libre.

Exemple 2.15

L'action d'un groupe G sur lui-même par conjugaison n'est pas libre.

Définition 2.9 (Action régulière)

Soit E un G -ensemble. L'action de G sur E est **régulière** si elle est transitive et libre. Dans ce cas, on dit aussi que G est régulier sur E .

Exemple 2.16

L'action d'un groupe G sur lui-même par multiplication à gauche est régulière.

2.3 Formule des classes

Définition 2.10

Soit G un groupe :

► Soit S une partie d'un groupe G . on appelle le centralisateur de S dans G , est l'ensemble $C_G(S) = \{x \in G \mid \forall s \in S, xsx^{-1} = s\}$ est un sous-groupe de G .

► L'ensemble $Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg \text{ pour tout } g \in G\}$ appelé le centre du groupe G , $Z(G) = G$ si G est commutatif.

Exemple 2.17

Pour $n \geq 3$, on a $Z(S_n) = \{1\}$. En effet, prenons $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq Id$. Il existe donc un indice i tel que $\sigma(i) \neq i$. Comme $n \geq 3$, il existe j (dans $\{1, 2, \dots, n\}$) tel que $j \neq i$ et $j \neq \sigma(i)$. Soit τ la transposition $(j\sigma(i))$. Alors on a $\sigma\tau(i) = \sigma(i)$ et $\tau\sigma(i) = j$, donc σ et τ ne commutent pas et $\sigma \notin Z(S_n)$.

Lemme 2.1 (Première formule des classes)

Soit G un groupe opérant sur un ensemble fini E .

$$\sum_{\mathcal{O}_i \in E/G} \text{card } \mathcal{O}_i = \text{card } E.$$

On désigne par E/G l'ensemble des orbites de l'action, c'est-à-dire.

$$E/G = \{\mathcal{O}_G(x) \mid x \in E\}.$$

Lemme 2.2 (Deuxième formule des classes)

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E . Pour tout $x \in E$, on a $\text{card}(\mathcal{O}_G(x)) = [G : \text{Stab}_G(x)]$.

Preuve.

Par définition, $[G : \text{Stab}_G(x)]$ est le cardinal de l'ensemble $G/\text{Stab}_G(x)$. Nous allons construire une application de $\mathcal{O}_G(x)$ sur $G/\text{Stab}_G(x)$ et montrer qu'elle est bijective. Tout élément de $\mathcal{O}_G(x)$ s'écrit $g \cdot x$, pour un certain $g \in G$. Posons $\varphi(g \cdot x) = g\text{Stab}_G(x)$ et montrons que cela définit bien une application de $\mathcal{O}_G(x)$ sur $G/\text{Stab}_G(x)$ si

$$\begin{aligned} g \cdot x = h \cdot x &\iff g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (h \cdot x) \\ &\iff (g^{-1}g) \cdot x = (g^{-1}h) \cdot x \\ &\iff e \cdot x = (g^{-1}h) \cdot x \\ &\iff x = (g^{-1}h) \cdot x \\ &\iff (g^{-1}h) \in \text{Stab}(x) \\ &\iff g\text{Stab}(x) = h\text{Stab}(x) \end{aligned}$$

donc φ est bien définie. Il est évident qu'elle est surjective. D'autre part, $g\text{Stab}_G(x) = h\text{Stab}_G(x)$ équivaut à $(g^{-1}h) \in \text{Stab}_G(x)$, c'est-à-dire $(g^{-1}h) \cdot x = x$, d'où $g \cdot x = h \cdot x$ et φ est injective. ■

Corollaire 2.1

Soit G un groupe opérant sur un ensemble fini E et soit $\{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$, une famille de représentants des orbites distinctes, alors

$$\text{Card}(E) = \sum_{1 \leq i \leq n} [G : \text{Stab}_G(x_i)].$$

Preuve.

Les orbites forment une partition de E , alors $E = \bigcup_{x_i \in E} \mathcal{O}_G(x_i)$, donc

$$\text{card}(E) = \sum_{x_i \in E} \text{card}(\mathcal{O}_G(x_i)) \text{ (d'après le lemme (Deuxième formule des classes))}$$

$$\text{card}(\mathcal{O}_G(x_i)) = [G : \text{Stab}_G(x_i)] \text{ alors } \text{Card}(E) = \sum_{1 \leq i \leq n} [G : \text{Stab}_G(x_i)]. \blacksquare$$

Ce corollaire est à la base de beaucoup d'applications des groupes finis. En particulier, on a la suivante. Pour l'action de G sur lui-même par conjugaison, on a la partition en orbites

$$G = \mathcal{O}(h_1) + \mathcal{O}(h_2) + \dots + \mathcal{O}(h_r)$$

pour un bon choix de éléments h_1, \dots, h_r . Notons que

$$h \in Z(G) \Leftrightarrow \mathcal{O}(h) = \{h\}.$$

On conclut donc qu'on a la formule

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{h_i \notin Z(G)} [G : C(h_i)].$$

Théorème 2.4 (Théorème de Burnside)

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E . Alors le nombre N d'orbites se calcule par

$$N = \text{card}(E/G) = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{g \in G} \text{card } \text{Fix}_E(g) = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{x \in E} \text{card } \text{Stab}_G(x).$$

En particulier, le nombre d'orbites est le nombre moyen de points fixes des éléments de G

Preuve.

Soit $A = \{(g, x) \in G \times E, g \cdot x = x\}$. On peut écrire en désignant par E/G l'ensemble des orbites :

$$\begin{aligned} \text{card } A &= \sum_{x \in E} \text{card } \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \\ &= \sum_{x \in E} \text{card } \text{Stab}(x) \\ &= \sum_{\mathcal{O}_i \in E/G} \sum_{x \in \mathcal{O}_i} \text{card } \text{Stab}(x) \text{ et } i \in \{1, 2, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Or il résulte de la formule des classes que pour chaque orbite \mathcal{O}_i ,

$$\sum_{x \in \mathcal{O}_i} \text{card } \text{Stab}(x) = \sum_{x \in E} (\text{card } G) / (\text{card } \mathcal{O}_i) = \text{card } G,$$

donc $\text{card } A = \text{card } (E/G) \cdot \text{card } G$.

Mais on peut aussi calculer $\text{card } A$ en groupant différemment les éléments :

$$\text{card } A = \sum_{g \in G} \text{card } \{x \in E \mid g \cdot x = x\} = \sum_{g \in G} \text{card } \text{Fix}_E(g).$$

Et en écrivant l'égalité des deux expressions de $\text{card } A$ trouvées, on obtient la formule annoncée :

$$\text{card } (E/G) = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{g \in G} \text{card } \text{Fix}_E(g). \quad \blacksquare$$

Exemple 2.18

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et supposons que G est un groupe de permutation $G = \{(1), (13), (13)(25), (25)\}$. Les orbites de E sont $\{1, 3\}$, $\{2, 5\}$ et $\{4\}$.

Les ensembles des points fixes sont :

$$\begin{aligned} \text{Fix}_E((1)) &= E \\ \text{Fix}_E((13)) &= \{2, 4, 5\} \\ \text{Fix}_E((13)(25)) &= \{4\} \\ \text{Fix}_E((25)) &= \{1, 3, 4\} \end{aligned}$$

Le théorème de Burnside dit que :

$$N = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{g \in G} \text{card } \text{Fix}_E(g) = \frac{1}{4}(5 + 3 + 1 + 3) = 3.$$

2.4 Les p -groupes

Définition 2.11 (p -groupe)

Un p -groupe fini est un groupe fini qui possède p^n éléments pour un certain n , avec p est un nombre premier.

Exemple 2.19

- $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est un 2-groupe (il est d'ordre 2^3 avec 2 premier).

Proposition 2.3

Soient p un nombre premier, n un entier non nul et G un groupe fini d'ordre p^n opérant sur un ensemble fini E . Alors

$$\text{card}(E^G) \equiv \text{Card}(E) \pmod{p}.$$

et E^G définie par : $E^G = \{x \in E \mid \mathcal{O}_x = \{x\}\}$

Preuve.

Un élément x appartient à E^G si et seulement si $\mathcal{O}_x = \{x\}$, donc $\text{card}(E^G)$ est le nombre d'orbites ponctuelles. Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille de représentants des orbites non ponctuelles.

Alors $\text{Card}(E) = \text{card}(E^G) + \sum_{i \in I} \text{Card}(\mathcal{O}_{x_i})$ Or, $\text{Card}(\mathcal{O}_{x_i}) = [G : \text{Stab}_G(x_i)]$ est différent de 1 et divise p^n , il est donc de la forme p^{α_i} , avec $\alpha_i \geq 1$. Donc $(\text{Card}(E) - \text{card}(E^G))$ est divisible par p . ■

Théorème 2.5

Pour tout nombre premier p , le centre d'un p -groupe n'est pas réduit à $\{e\}$.

Preuve.

Soit G un p -groupe à p^n éléments.

On a :

$$\text{card}(Z(G)) = \text{card}(G^G) \equiv \text{card}(G) \pmod{p}$$

et comme $\text{card}(Z(G)) \geq 1$, il en résulte que $\text{card}(Z(G)) \geq p$ et $Z(G)$ est non trivial. ■

2.5 Théorèmes de Sylow

Définition 2.12

Soient G un groupe et p un nombre premier divisant l'ordre de G . Un sous-groupe de G d'ordre p^n , où n est maximal tel que p^n divise l'ordre de G , est appelé un **p -sous-groupe de Sylow** de G .

Théorème 2.6 (Théorème de Cauchy)

Soit G un groupe fini et p un diviseur premier du cardinal n de G . Alors il existe un élément d'ordre p dans G .

Preuve.

Comme p est premier, il suffit de montrer l'existence d'un élément a non neutre tel que $a^p = e$. On pose

$$E = \{(g) = (g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdot g_2 \cdots g_p = e\}$$

Remarquons alors que si $(g_1, \dots, g_p) \in E$ alors g_1 est l'inverse de $g_2 \cdots g_p$. Ainsi E est en bijection avec G^{p-1} .

Ceci montre aussi que si $(g_1, \dots, g_p) \in E$ alors $g_2 \cdots g_p \cdot g_1 = e$.

On peut donc définir $\sigma : E \rightarrow E, (g_1, \dots, g_p) \rightarrow (g_2, \dots, g_p, g_1)$ qui engendre un groupe de permutations circulaires $\sigma^{\mathbb{N}} = \{\sigma^1, \dots, \sigma^p\}$ opérant sur E via

$$\phi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times E \rightarrow E, (\bar{k}, (g_1, \dots, g_p)) \rightarrow (g_{1+k \bmod p}, \dots, g_{p+k \bmod p}).$$

Les orbites $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot (g)$ de ϕ sont de cardinaux divisant p , et elles partitionnent E avec n_1 orbites réduites à un élément et n_p orbites à p éléments :

$$n_1 + pn_p = \text{card } E = n^{p-1}. \text{ Noter que l'orbite de } (e, \dots, e) \text{ est réduite à un élément.}$$

Par suite p qui divise n_1 , est strictement plus grand que 1. Il existe donc un élément $(h_1, \dots, h_p) \in E$ autre que (e, \dots, e) tel que

$$(h_1, \dots, h_p) = (h_2, \dots, h_1) = \dots = (h_p, \dots, h_{p-1}) \text{ c'est-à-dire}$$

$$h_1 = h_2 = \dots = h_p. \text{ Finalement } h_1 \cdots h_p = h_1 \cdots h_1 = h_1^p = e. \blacksquare$$

Lemme 2.3

Soit G un groupe d'ordre $n = p^\alpha q$ où p est un nombre premier et α un entier naturel et q un entier premier avec p . Soit H un sous-groupe de G . Soit S un p -Sylow de G . Alors il existe un conjugué aSa^{-1} de S qui rencontre H en un p -Sylow $H \cap aSa^{-1}$ de H .

Preuve.

On fait opérer le groupe H sur l'ensemble G/S . Le stabilisateur de aS est $aSa^{-1} \cap H$ qui est un p -sous-groupe de H . Reste à trouver un a tel que l'indice de $aSa^{-1} \cap H$ dans H soit premier à p . Mais par la seconde formule des classes, cet indice est le cardinal de l'orbite de $aS \in G/S$ par H . Si tous ces indices étaient divisibles par p , par la première formule des classes, le cardinal q de G/S le serait aussi. \blacksquare

Théorème 2.7 (Théorème de Sylow)

Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha q$ où p est un nombre premier et q un entier premier avec p . Alors

- 1) Il existe un p -sous-groupe de Sylow de G .
- 2) Tout sous-groupe de G d'ordre p^β avec $1 \leq \beta \leq \alpha$ est inclus dans un p -Sylow de G .
- 3) Le groupe G opère par conjugaison transitivement sur ses p -Sylow.
- 4) Le nombre n_p de p -Sylow de G est congru à 1 modulo p et divise q .

Preuve.

1) Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Ce dernier groupe est d'ordre $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}) = p^{n(n-1)/2} q$.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de diagonale identité est un p -sous-groupe de Sylow. En appliquant le lemme à $G \subset GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on obtient (1).

2) Soit H un p -sous-groupe de G et S un p -Sylow. Il existe un p -Sylow de H de la forme $aSa^{-1} \cap H$. Comme H est un p -groupe, $H = aSa^{-1} \cap H$. Donc, H est inclus dans aSa^{-1} qui est un p -Sylow de G .

3) Si H est de plus un p -Sylow, il existe a tel que $aSa^{-1} \cap H = H$, donc par cardinalité, $H = aSa^{-1}$ et H est un conjugué de S .

4) On fait agir un p -Sylow S par conjugaison sur l'ensemble E des p -Sylow de G .

$$\text{card } E = \text{card } \text{Fix}(E) + \sum_{\mathcal{O}_i \in E/S} \text{card } \mathcal{O}_i = \text{card } \text{Fix}(E) \pmod{p}$$

par la seconde formule des classes, car S est un p -groupe. Soit T un p -Sylow de G stable par tous les éléments de S . Soit N le sous-groupe de G engendré par S et T . Les groupes S et T sont deux p -Sylow de G donc de N et comme T est distingué dans N , $S = T$. Donc, $\text{Fix}(E) = \{S\}$.

Les p -Sylow forment une orbite sous l'action par conjugaison de G sur ses sous groupes. Par conséquent, n_p divise $\text{card } G = n$. Comme $n_p = 1 \pmod{p}$ est premier avec p , il divise q . ■

Exemple 2.20

Supposons G un groupe d'ordre 30. On a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Il ya au moins un 2-sous-groupe de Sylow, au moins un 3-sous-groupe de Sylow et au moins un 5-sous-groupe de Sylow. Les possibilités pour n_2 sont 1, 3, 5, 15. Les possibilités pour n_3 sont 1, 10. Les possibilités pour n_5 sont 1, 6.

Exemple 2.21

Soit S_3 le groupe des bijections de $\{1, 2, 3\}$ sur $\{1, 2, 3\}$. Il comporte $2 \cdot 3 = 6$ éléments. Le nombre de 3-sous-groupes de Sylow n_3 divise 2 et $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$ donc il y en a un seul. Le nombre de 2-sous-groupes de Sylow n_2 divise 3 et $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$. Il y en a donc 1 ou 3. On peut conclure par exemple en notant que l'on a au moins 2 éléments d'ordre 2 :

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et donc on a trois 2-sous-groupes de Sylow.

Chapitre 3

Symétries des figures géométriques

Une grande partie de l'importance des groupes vient de leur lien avec la symétrie. Tout comme numéros peuvent être utilisés pour mesurer la taille (une fois qu'une unité de mesure a été choisie), et les groupes peuvent être utilisés pour mesurer la symétrie, comme caractérise la symétrie de la figure. Cette application de groupes s'étend de géométrie. Dans cette chapitre on présente la symétrie des figures géométriques dans le plan et dans l'espace.

3.1 la symétrie

Une symétrie géométrique est une transformation géométrique involutive qui conserve le parallélisme. Parmi les symétries courantes, on peut citer la réflexion par rapport un axe à et la symétrie centrale par rapport à un point. Une symétrie géométrique est un cas particulier de symétrie. Il existe plusieurs sortes de symétries dans le plan ou dans l'espace.

Définition 3.1 (Figure symétrie)

- Soit F une figure et d une droite. Dire que F est symétrique par rapport à d signifie que la figure symétrique de F par rapport à d est F elle-même, d est alors un axe de symétrie de F .
- Soit F une figure et O un point. Dire que F est symétrique par rapport à O signifie que la figure symétrique de F par rapport à O est F elle-même. Le point O est alors un centre de symétrie de F .

3.1.1 Transformations de symétrie

Rotation

Faire tourner une figure géométrique autour d'un point. Chaque point de la figure se déplace selon un même angle et dans un sens donné. Une rotation est définie par un centre de rotation O et une flèche (un angle θ).

Réflexion

Une figure possède une symétrie axiale si elle peut être coupée en deux par un ou plusieurs axes de « miroir ». Dans ce cas la partie sur le côté gauche d'un tel axe concerne la partie sur le côté droit en étant son image miroir. Tous les points sur l'axe du miroir (réflexion) restent fixes.

Identité

Cette symétrie est équivalente à aucun mouvement du tout : La figure, ou un dessin, est effectivement levé et posé exactement la même situation telle que chaque point est mappé sur lui-même. Sinon il peut être considéré comme un 360° rotation autour d'un point.

Translation

Une translation est une transformation géométrique qui correspond à l'idée intuitive de « glissement » d'un objet sans rotation, et sans retournement ni déformation de cet objet.

Réflexion glissée

On appelle réflexion glissée une transformation géométrique qui permet d'associer à toute figure initiale une figure image en effectuant une réflexion suivie d'une translation parallèle à l'axe de réflexion.

Anti-rotation

une anti-rotation est une transformation géométrique dans l'espace de dimension 3, c'est la composée de deux transformations qui commutent : une rotation d'angle θ autour d'un axe Δ et d'une réflexion par rapport à un plan Π perpendiculaire à cet axe, ce qui lui vaut aussi le nom de roto-réflexion, ou rotation-réflexion.

Exemples 3.1



Figure 3.1 : La rotation



Figure 3.2 : Réflexion



Figure 3.3 : Symétrie identité



Figure 3.4 : La translation



Figure 3.5 : Réflexion-glissée

Une opération de symétrie de rotation 90° dans le sens horaire d'environ O (ce qui équivaut à une rotation de 270° dans le sens antihoraire sur O).

Une opération de symétrie axiale selon l'axe de réflexion M .

L'opération de symétrie d'identité représentée par aucun mouvement du tout et est équivalente à une rotation de 360° autour de O .

Une opération de symétrie de translation de distance L en direction d .

Une opération de symétrie de réflexion-glissée de distance $1/2L$ sur l'axe de réflexion G et la direction d .

3.2 La symétrie dans le plan

Définition 3.2 (Groupe cyclique)

Soit n un nombre naturel. Le groupe cyclique d'ordre n , noté C_n , est l'ensemble de tous rotations d'un n -gon régulier.

Exemple 3.2

Le groupe de rotation de l'hexagone est constitué de 6 rotations possibles :

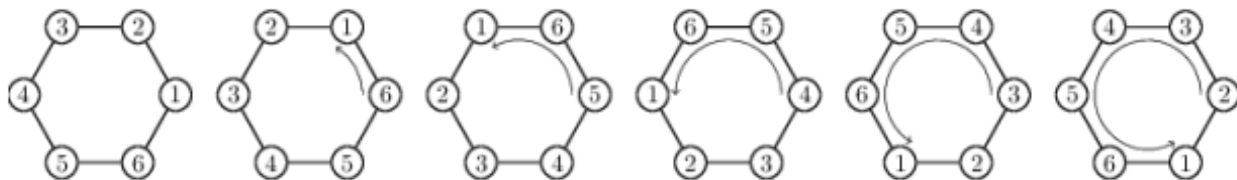


Figure 3.6 : Le groupe cyclique C_6

Exemple 3.3

La symétrie des dessins finis cycliques :

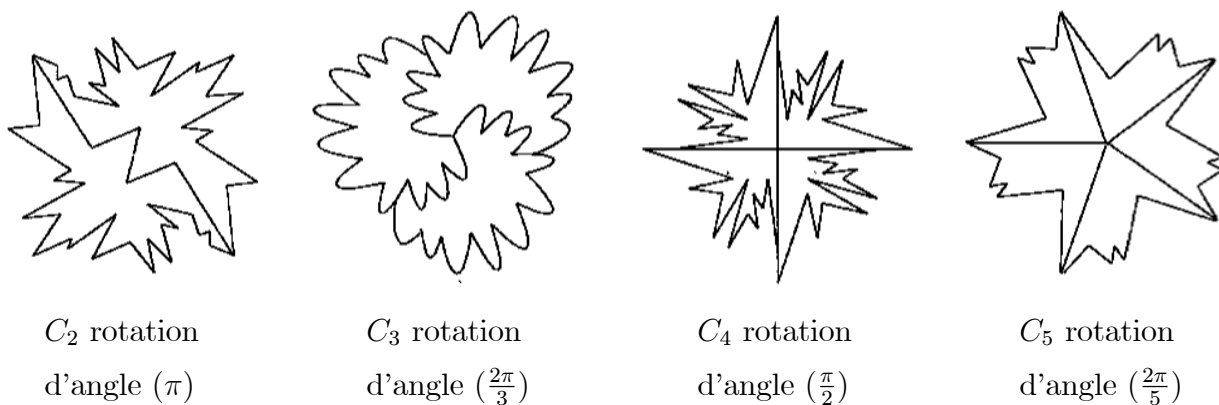


Figure 3.7 : La symétrie des dessins

Définition 3.3 (Groupe Diédral)

Soit n un entier naturel. Le n -ième groupe diédral, noté D_n , est l'ensemble de toutes les rotations et réflexions axiales d'un n -gon régulier.

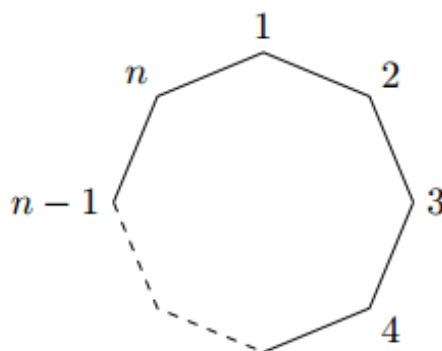


Figure 3.8 : Un n -gon régulier

Théorème 3.1 [16]

Le groupe diédral D_n , est un sous-groupe de S_n d'ordre $2n$.

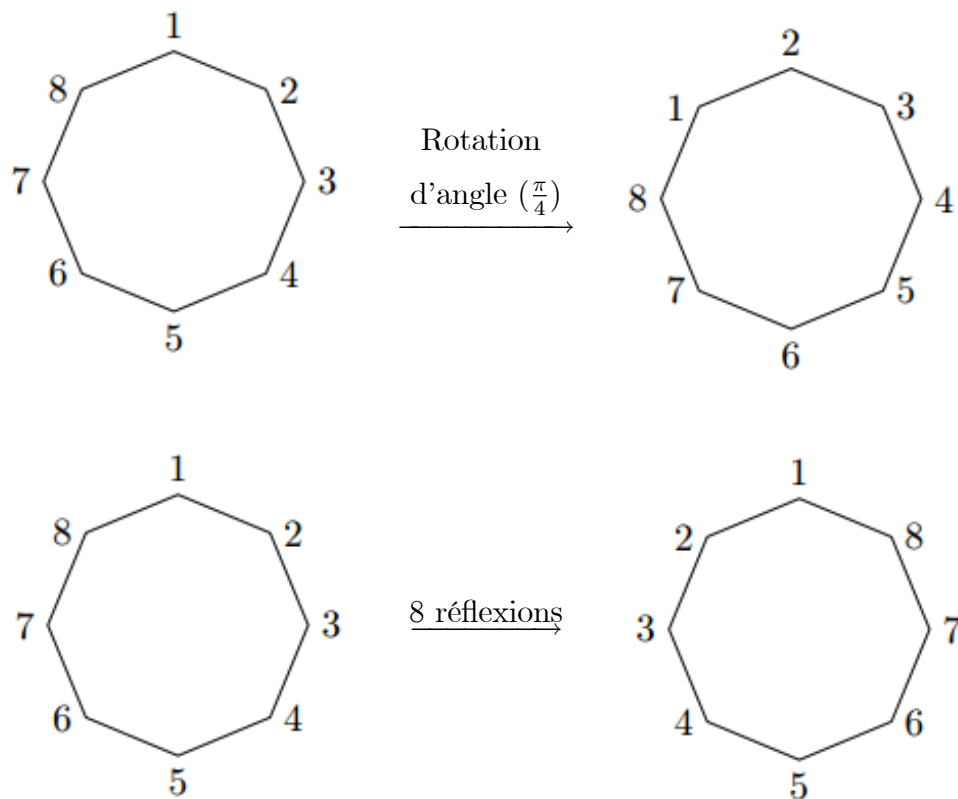


Figure 3.9 : Rotations et réflexions d'un 8-gon régulier

Exemple 3.4

Il y'a 12 symétries possibles pour le groupe de symétrie de l'hexagone (6-gones).

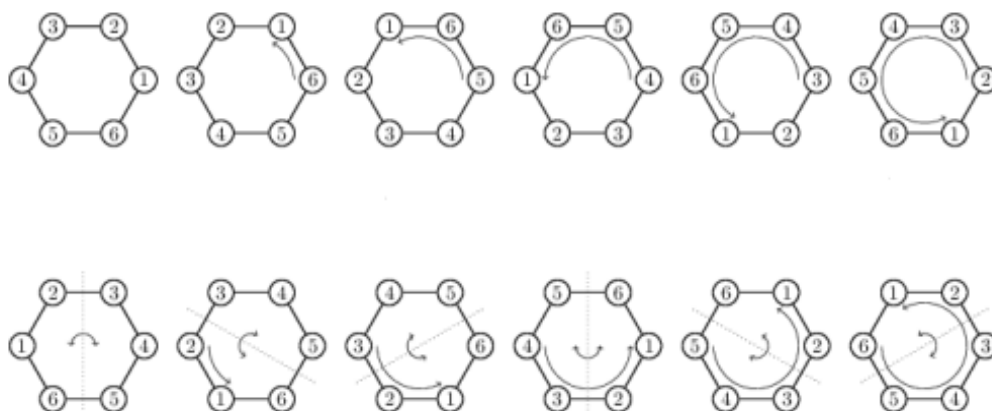


Figure 3.10 : Le groupe diédral D_6

Exemple 3.5

Les symétries possibles d'un triangle équilatéral, On constate qu'il y a 3 manières de faire effectuer une symétrie de rotation du triangle, et 3 symétries axiales (de réflexions).

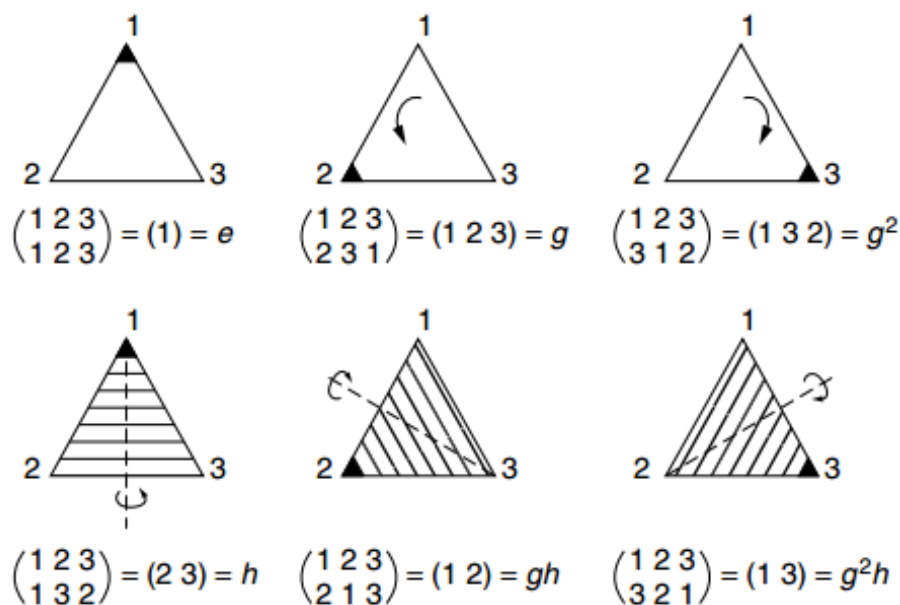


Figure 3.11 : Symétries d'un triangle équilatéral

Exemple 3.6

Un rectangle admet :

- deux axes de symétrie : les médiatrices de ses côtés
- un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.

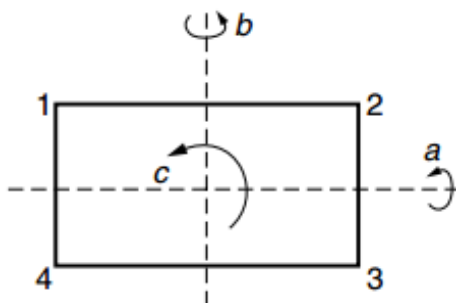


Figure 3.12 : Les symétries de rectangle

Exemple 3.7

La symétrie d'un carré admet :

- quatre axes de symétrie : ses diagonales et les médiatrices de ses côtés ;
- un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.

Tous les éléments de D_4 sont représentés dans la figure suivante et l'ordre de chaque élément dans la table :

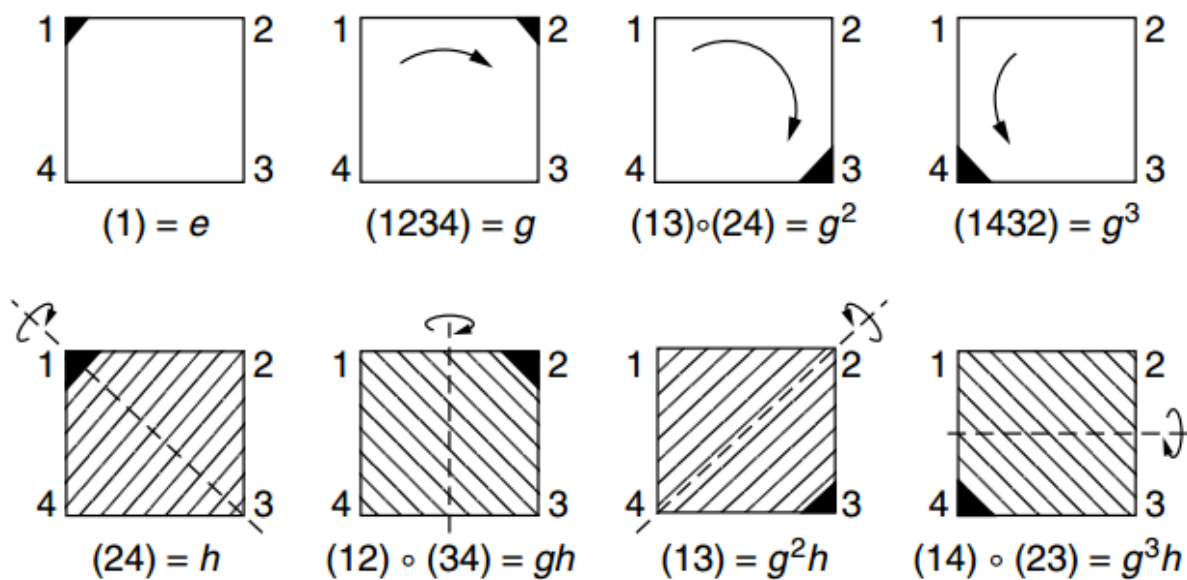


Figure 3.13 : Les symétries du carré

Élément de D_4	Ordre de l'élément
e	1
g	4
g^2	2
g^3	4
h	2
gh	2
g^2h	2
g^3h	2

Table 3.1 : Ordres des symétries d'un carré

Exemple 3.8

Les symétries des dessins ci-dessous sont :



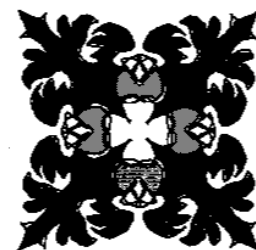
D_1 (une réflexion)



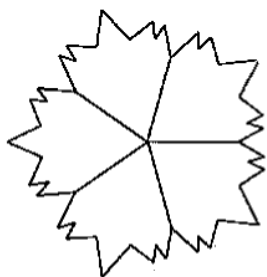
D_2 (2 réflexions)



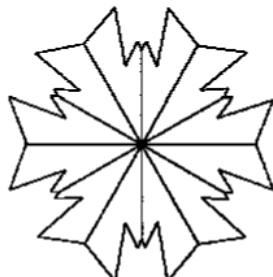
D_3 (rotation
 $\theta = \frac{2\pi}{3}$)



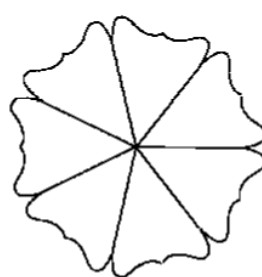
D_4 (4 réflexions et
rotation $\theta = \frac{\pi}{2}$)



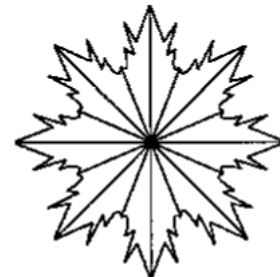
D_5 (rotation
 $\theta = \frac{2\pi}{5}$)



D_6 (6 réflexions et
rotation $\theta = \frac{\pi}{3}$)



D_7 (rotation
 $\theta = \frac{2\pi}{7}$)



D_8 (8 réflexions et
rotation $\theta = \frac{\pi}{4}$)

Figure 3. 14 : Les symétries des dessins

Théorème 3.2 [12]

Un groupe de symétrie finie d'un plan est un groupe cyclique C_n ou un groupe diédral D_n .

3.3 La symétrie dans l'espace

3.3.1 Les polyèdres réguliers

Définition 3.4 (Polyèdre convexe)

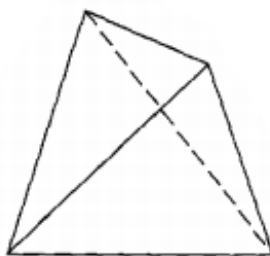
Un polyèdre est convexe si chaque point d'un segment de droite qui joint deux points quelconques appartient au polyèdre. Dans tout polyèdre convexe, la somme du nombre de sommets et du nombre de faces est égale au nombre d'arêtes plus deux.

Définition 3.5 (Polyèdre régulier)

On appelle polyèdre régulier tout polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques. De plus, on impose que chacun de ses sommets possède le même nombre de faces et d'arêtes.

Il y a exactement cinq polyèdres réguliers . Ce sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, Dodécaèdre et icosaèdre.

1) Tétraèdre régulier

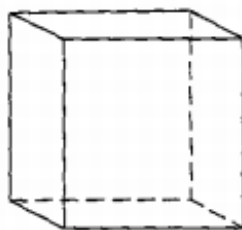


Tétraèdre

Faces	4 faces, qui sont toutes des triangles équilatéraux.
Sommets	4 sommets, qui sont tous communs à 3 faces.
Arêtes	6 arêtes (3 par face, toutes communes à deux faces).
Axes de rotation	<ul style="list-style-type: none">▶ Les 4 hauteurs (droites perpendiculaires à une face et passant par son sommet opposé). Ce sont des axes d'ordre 3.▶ Les 3 droites joignant les milieux des arêtes opposées. Ce sont des axes d'ordre 2.
Plans de symétrie	Les 6 plans passant chacun par une arête et le milieu de l'arête opposée.
Centre de symétrie	Le centre du tétraèdre, qui est le point d'intersection des 4 hauteurs. C'est aussi le point d'intersection de tous les axes de rotation et plans de symétrie
Groupe de symétries	24 éléments <ul style="list-style-type: none">▶ 12 rotations (dont l'identité),▶ 12 "anti-rotations" (dont 1 symétrie centrale), qui résultent de l'enchaînement d'une de ces 12 rotations avec cette symétrie centrale. Parmi elles, il y a 6 réflexions.

Table 3.2 : La symétrie de Tétraèdre

2) Cube

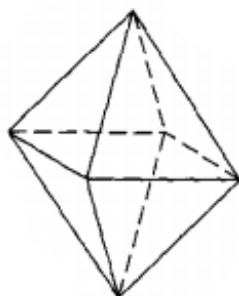


Cube

Faces	6 faces, qui sont toutes des carrés.
Sommets	8 sommets, qui sont tous communs à 3 faces.
Arêtes	12 arêtes (4 par face, toutes communes à deux faces).
Axes de rotation	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Les 4 diagonales (droites joignant deux sommets opposés). Ce sont des axes d'ordre 3. ▶ Les 3 droites joignant les centres de deux faces opposées. Ce sont des axes d'ordre 4. ▶ Les 6 droites joignant les milieux de deux arêtes opposées. Ce sont des axes d'ordre 2.
Plans de symétrie	<p>Les 3 plans parallèles à deux faces opposées et passant par le centre du cube.</p> <p>Les 6 plans contenant deux arêtes opposées.</p>
Centre de symétrie	<p>Le centre du cube, situé à l'intersection des 4 diagonales.</p> <p>C'est aussi le point d'intersection de tous les axes de rotation et plans de symétrie.</p>
Groupe de symétries	<p>48 éléments :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ 24 rotations (dont l'identité), ▶ 24 "anti-rotations" (dont 1 symétrie centrale), qui résultent de l'enchaînement d'une de ces 24 rotations avec cette symétrie centrale. Parmi elles, il y a 9 réflexions.

Table 3.3 : La symétrie de Cube

3) Octaèdre régulier

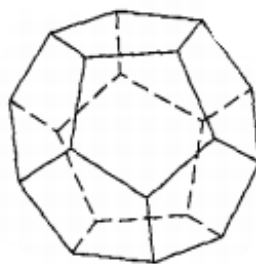


Octaèdre

Faces	8 faces, qui sont toutes des triangles équilatéraux.
Sommets	6 sommets, qui sont tous communs à 4 faces.
Arêtes	12 arêtes (3 par face, toutes communes à deux faces).
Axes de rotation	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Les 3 diagonales (droites joignant deux sommets opposés). Ce sont des axes d'ordre 4. ▶ Les 4 droites joignant les centres de deux faces opposées. Ce sont des axes d'ordre 3. ▶ Les 6 droites joignant les milieux de deux arêtes opposées. Ce sont des axes d'ordre 2.
Plans de symétrie	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Les 3 plans qui passent par deux arêtes opposées (ils contiennent alors 4 arêtes formant un carré). ▶ Les 6 plans passant par deux sommets opposés et les milieux de deux arêtes opposées.
Centre de symétrie	Le centre de l'octaèdre, situé à l'intersection des 3 diagonales. C'est aussi le point d'intersection de tous les axes de rotation et plans de symétrie.
Groupe de symétries	<p>48 éléments</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ 24 rotations dont l'identité, ▶ 24 "anti-rotations" (dont 1 symétrie centrale), <p>qui résultent de l'enchaînement d'une de ces 24 rotations avec cette symétrie centrale. Parmi elles, il y a 9 réflexions.</p>

Table 3.4 : La symétrie de Octaèdre

4) Dodécaèdre régulier

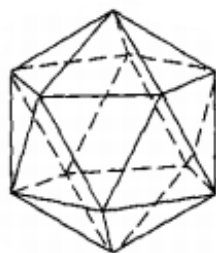


Dodécaèdre

Faces	12 faces, qui sont toutes des pentagones réguliers.
Sommets	20 sommets, qui sont tous communs à 3 faces.
Arêtes	30 arêtes (5 par face, toutes communes à deux faces).
Axes de rotation	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Les 10 diagonales (droites joignant deux sommets opposés). Ce sont des axes d'ordre 3. ▶ Les 6 droites joignant les centres de deux faces opposées. Ce sont des axes d'ordre 5 ▶ Les 15 droites joignant les milieux de deux arêtes opposées. Ce sont des axes d'ordre 2.
Plans de symétrie	Les 15 plans qui passent par deux arêtes opposées.
Centre de symétrie	Le centre du dodécaèdre, situé à l'intersection des 10 diagonales. C'est aussi le point d'intersection de tous les axes de rotation et plans de symétrie..
Groupe de symétries	120 éléments <ul style="list-style-type: none"> ▶ 60 rotations dont l'identité, ▶ 60 "anti-rotations" (dont 1 symétrie centrale), qui résultent de l'enchaînement d'une de ces 60 rotations avec cette symétrie centrale. Parmi elles, il y a 15 réflexions.

Table 3.5 : La symétrie de Dodécaèdre

5) Icosaèdre régulier



Icosaèdre

Faces	20 faces, qui sont toutes des triangles équilatéraux.
Sommets	12 sommets, qui sont tous communs à 5 faces.
Arêtes	30 arêtes (3 par face, toutes communes à deux faces).
Axes de rotation	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Les 6 diagonales (droites joignant deux sommets opposés). Ce sont des axes d'ordre 5. ▶ Les 10 droites joignant les centres de deux faces opposées. Ce sont des axes d'ordre 3. ▶ Les 15 droites joignant les milieux de deux arêtes opposées. Ce sont des axes d'ordre 2.
Plans de symétrie	Les 15 plans qui passent par deux arêtes opposées.
Centre de symétrie	Le centre de l'icosaèdre, situé à l'intersection des 6 diagonales. C'est aussi le point d'intersection de tous les axes de rotation et plans de symétrie.
Groupe de symétries	<p>120 éléments</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ 60 rotations dont l'identité, ▶ 60 "anti-rotations" (dont 1 symétrie centrale), qui résultent de l'enchaînement d'une de ces 60 rotations avec cette symétrie centrale. Parmi elles, il y a 15 réflexions.

Table 3.6 : La symétrie de Icosaèdre

3.3.2 Polyèdre dual

Définition 3.6 (Polyèdre dual)

Pour tout polyèdre, nous pouvons construire son polyèdre dual de la manière suivante. Les sommets du dual sont les centres des faces du polyèdre original. Deux centres sont reliés par une arête si les faces correspondantes se rencontrent dans un mouvement ascendant.

Le dual d'un tétraèdre régulier est un autre tétraèdre régulier. Le cube et l'octaèdre sont duaux l'un à l'autre. Le dodécaèdre et l'icosaèdre sont également duaux l'un à l'autre.

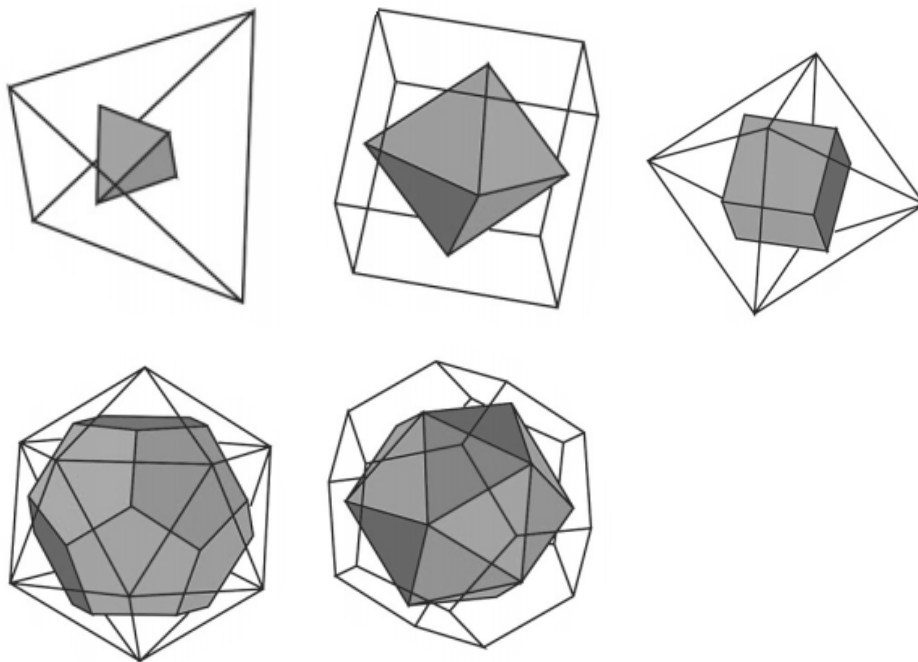


Figure 3.14 : Les polyèdres duaux

Théorème 3.3 [17]

- Le groupe des rotations d'un tétraèdre régulier est isomorphe à A_4 .
- Le groupe des rotations d'un cube est isomorphe à S_4 .
- Le groupe des rotations d'un dodécaèdre régulier est isomorphe à A_5 .

Théorème 3.4 [17]

Le groupe de rotations de toute figure de dimensions trois finie est isomorphe à l'un des :

$$C_n (n \geq 1), D_n (n \geq 2), A_4, S_4 \text{ ou } A_5.$$

3.4 Types de symétrie infinie dans le plan

Il y'a 7 types de symétrie infinie dans le plan :

Le Type 1 :

Le groupe dans la Figure 3.15 se compose de translations uniquement. Si τ désigne la translation par le biais de la plus petite distance possible (à la droite, par exemple, en Figure 3.15), puis le groupe est infini cyclique avec génératrice τ .

$$F_1 = \{\tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$



Figure 3.15

Le type 2 :

Le groupe dans la Figure 3.16 est aussi infini cyclique. Il est généré par une réflexion-glissée, si cette réflexion-glissée est dénotée par γ , alors les puissances paires de γ sont des translations.

$$F_2 = \{\gamma^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

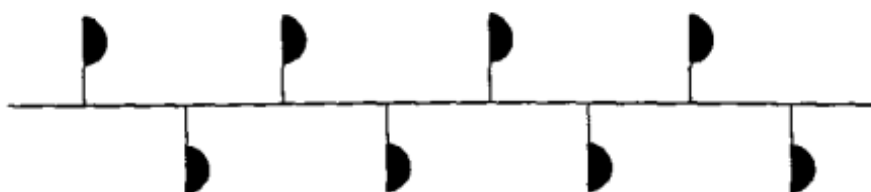


Figure 3.16

Le type 3 :

Le groupe dans la Figure 3.17 est généré par une translation (dire τ) et une réflexion(notée ρ) par une ligne verticale (tel que la ligne pointillée dans la figure). Ce groupe est un groupe diédral infini.

$$F_3 = \{\tau^k \rho^m \mid k \in \mathbb{Z}, m = 0, 1\}$$

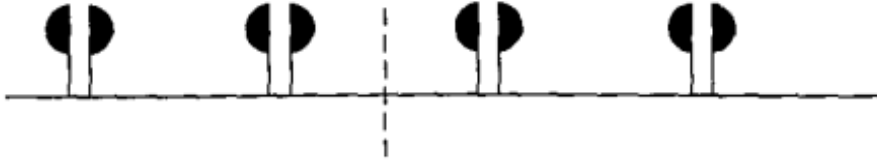


Figure 3.17

Le type 4 :

Le groupe dans la Figure 3.18 est généré par une translation (dire τ) et une rotation (dire α) à travers 180° autour d'un point tel que p dans la figure. C'est aussi un groupe diédral infini.

$$F_3 = \{\tau^k \alpha^m \mid k \in \mathbb{Z}, m = 0, 1\}$$

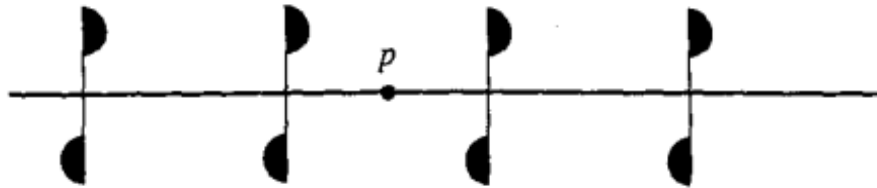


Figure 3.18

Le type 5 :

Le groupe dans la Figure 3.19 est généré par le réflexion-glissé (dire γ) et un rotation (dire α) à travers 180° autour d'un point tel que p dans la figure, F_5 est une autre groupe diédral infini.

$$F_5 = \{\gamma^k \alpha^m \mid k \in \mathbb{Z}, m = 0, 1\}$$

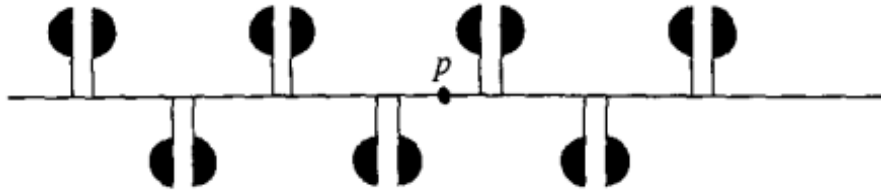


Figure 3.19

Le type 6 :

Le groupe dans la Figure 3.20 est généré par une translation (dire τ) et une réflexion (dire β) grâce à un axe de symétrie (ce qui est horizontal dans la figure). Ce groupe est abélien.

$$F_6 = \{\tau^k \beta^m \mid k \in \mathbb{Z}, m = 0, 1\}$$



Figure 3.20

Le Type 7 :

Le groupe dans la Figure 3.21 est généré par une translation (dire τ) et deux réflexions (dire ρ , comme dans le type 3, et β , comme dans le type 6). Les éléments τ et ρ sont multiplies comme en F_3 , τ et β multiplier comme en F_6 : et $\rho\beta = \beta\rho$.

$$F_7 = \{\tau^k \beta^m \rho^n \mid k \in \mathbb{Z}, m = 0, 1, n = 0, 1\}$$

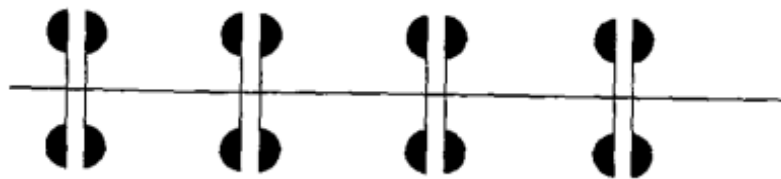


Figure 3.21

Conclusion

Ce travail est consacré à l'action des groupes et la notion de symétrie des figures géométriques dans le plan et dans l'espace. La notion de symétrie a une grande importance en mathématiques (géométrie, équations, ect...), en physique pour déduire les lois physiques, en chimie pour la symétrie moléculaire et en la symétrie de cristallographie.

Bibliographie

- [1] **C.A.PILLET.** *Algèbre-1ère Partie, Théorie des groupes, Université de sud : Toulon var. France.*
- [2] **CHARLES CLAUDE PINTER.** *A book of abstract algebra*, Bucknell University, ISBN 0-07-050130-0.
- [3] **CHRISTOPHE MOURUGANE.** (6 Avril 2010). *Théorie des groupes et géométrie*, Université De Rennes 1.
- [4] **D.SCHAUB.** (1997/98). *Éléments de la théorie des groupes*, Université D'angers.
- [5] **DANIEL GUIN-THOMAS HAUSBERGER.** (2008). *Algèbre tome 1, Groupe, Corps et théorie de galois*, EDP Sciences, France, ISBN : 978-2-86883-974-9.
- [6] **DAVID S.DUMMIT-RICHARD M.FOOTE.** (2004). *Abstract algebra*, Third Edition, United States of America : John Wiley & Sons, ISBN 047J43334-9.
- [7] **DEREK J.S.ROBINSON.** *Abstract Algebra, An introduction with application*, Second Edition, University of Illinois, ISBN 978-3-11-034086-0, Gruyter.
- [8] **FRANÇOIS DUMAS.** (2007-2008). *Algèbre groupes et anneaux 1*, Université Blaise Pascal, U.F.R. Sciences et Technologies.
- [9] **FREDERICK M.GOODMAN.** (2006). *Algebra abstract and concrete, Edition 2.5*, Univesity Of Iowa, Semisimple Press Iowa City, IA.
- [10] **J. QUIRRÉ.** (1976). *Cours d'algèbre*, Université de Bretagne Occidentale, MASSON .
- [11] **JEAN-JACQUES RISLER-PASCAL BOYER.** (2006). *Algèbre pour la licence 3 ème année, Groupe, Anneaux, Corps*, DUNOD, Paris, ISBN : 2-10-049498-8.

- [12] **JOHN R .DURBIN.** (2009). *Modern algebra an introduction*, Sixth Edition, The University Of Texas at Austin, United States of America : John Wiley & Sons, Inc.
- [13] **LIONEL SCHWARTZ.** (2003). *Algèbre troisième année*, Deuxième édition. Dunod, Paris, ISBN : 2-10-0070057-6.
- [14] **LLOYD R. JAISINGH-FRANK AYRES, JR.** (2004). *Abstract algebra*, Second Edition, McGraw-Hill Education.
- [15] **PAUL GAREET.** (June 2007). *Abstract algebra*, University Minneapolis.
- [16] **THOMAS W.JUDSON-STEPHEN F.** (27 August 2010). *Abstract algebra, Theory and application*, Austin state University.
- [17] **WILLIAM J.GILBERT-W. KEITH NICHOLSON.** (2004). *Modern algebra with applications*, Second Edition, Canada : John Wiley & Sons.

Résumé

Dans ce mémoire traite les actions de groupes symétrique S_n sur un ensemble fini et applications aux problèmes de dénombrement et symétrie de certaine figure géométrique dans le plan et dans l'espace.

Mot-clé: Groupe symétrie, action de groupe, figure symétrie, rotation translation, réflexion.

ملخص

نعالج في هذه المذكرة تأثيرات الزمر المتماثلة S_n على مجموعة منتهية و تطبيقات لمشاكل العد و التناظر الهندسي للأشكال في المستوي و في الفضاء.

الكلمات المفتاحية: الزمر المتماثلة، تأثير الزمر، الأشكال المتناظرة، الدوران، الإنسحاب، الإنعكاس.

Abstract

In this thesis is about the actions of symmetric groups S_n on a finite set and applications to counting problems and some figure in the plan and the space geometric symmetry.

Key-words: Group symmetry, group action, figure symmetry, rotation, translation, reflection.