République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et application

Par

Zohra Lacefar

Sujet

Théorème de Dore-Venni

Date de soutenance : 29-05-2017

Devant le jury :

Dr.Mokhtari Abdelhak	MCB. Univ de M'sila	Président
Dr.Amroune Nasreddine	MAB. Univde M'sila	Rapporteur
Dr.Boughrara Brahim	MCB. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Avant tout, mes vifs remerciements, je les exprime à Allah tout puissant.

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à l'égard de Monsieur: **Amroune Nasreddine** pour sa fraîcheur d'esprit, pour leur conseils judicieux, pour l'infinie patience ainsi pour les conseils qu'il ma donné tout au long de ce travail.

Il est important pour moi de remerçier ma famille: mes parents, mes soeurs, mes frères et mes cousines, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Notation

$X,\ Y$	Espaces de Banach
$\mathcal{L}(X)$	L'ensemble des opérateurs linéaires bornés
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant
$R(A)$	La résolvante
$\sigma(A)$	Le spectre
$\Re(A)$	L'image de A
$N(A)$	Noyau de A
$\sum_{\varphi}$	Le secteur de l'angle φ
Δ_{θ}	Le secteur de l'angle θ
$\lambda,\ \mu$	Constantes
UMD	Unconditional Martingale Difference
BIP	Bounded imaginary powers
$S.G.D$	Semi-groupe différentiable

Table des matières

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui sont notées en abrégé EDP. Ce travail est basé fondamentalement sur une représentation d'un problème qui constitue une EDP à coefficient opératoriel sectoriel, classe BIP dont on recherche une solution d'un problème de Cauchy.

Le but principal de notre travail est d'utiliser le théorème de G. Dore et A. Venni (Dore-Venni) qui sert à montrer un résultat de régularité maximale pour une somme d'opérateurs assez réguliers dont les résolvantes commutent.

Ce mémoire comporte trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à certaines notions préliminaires d'usage sur les outiles mathématiques tout le long de ce travail, à savoir les opérateurs linéaires bornés, fermés, sectoriels de classe BIP, Résolvante ,ensemble résolvant, les semi-groupes d'opérateurs linéaires analytiques, holomorphes, le générateur infinitésimal d'un groupe fortement continu, et on donne aussi quelques résultas sur les espaces UMD.

Dans le second chapitre, on s'intéresse à démontrer le théorème de **Dore-Venni** sous certains hypothèses**,** en utilisant des lemmes techniques nécessaires pour la démonstration du ce théorème.

Au chapitre trois , on aborde quelques applications de théorème de **Dore-Venni.**

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre constitue un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec le travail. On citera en particulier certains résultas classiques sur les opérateurs linéaires, Semi-groupes d'opérateurs linéaires, opérateurs sectoriels, classe BIP, espaces UMD.[3], [10], [2], [7].

1.1 Opérateurs linéaires

On va effectuer quelques rappels sur les opérateurs linéaires bornés et fermés.

1. Un opérateur linéaire de X dans Y est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ et à valeurs dans Y, pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

   $$\bullet A(x+y) = Ax + Ay.$$

   $$\bullet A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

   $D(A)$ est appelé le domaine de A.

2. On dit que A est à domaine dense (ou densément défini) si

   $$\overline{D(A)} = X.$$

   i.e. si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que

   $$x = \lim_{n \to +\infty} x_n.$$

3. On appelle noyau de A le sous-espace de X, noté $Ker(A)$, défini par:

$$Ker(A) := \{x \in D(A) \text{ tel que } Ax = 0\}.$$

4. On appelle graphe de A le sous-espace de $X \times Y$, on note $G(A)$, défini par:

$$G(A) := \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(A), y = Ax\}.$$

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1 *On dit que l'opérateur linéaire A est borné s'il existe $M > 0$, pour tout x dans l'espace X qui vérifié*

$$\|Ax\|_Y \leq M \|x\|_X .$$

Définition 1.1.2 *On définit une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$ noté $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ et définie pour tout $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ par:*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \Leftrightarrow \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \Leftrightarrow \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \Leftrightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

1.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.1.3 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $D(A)$ telle que:*

$$\begin{cases} x_n \to x, \\ Ax_n \to y. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}$$

Définition 1.1.4 *A est dit fermable si et seulement si s'il admet une extension fermé, ce qui équivaut à dire que pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ d'éléments de $D(A)$ telle que:*

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow y = 0.$$

Les convergences des suites x_n et Ax_n sont au sens de la norme de l'espace X.

Proposition 1.1.1 *Soit A un opérateur linéaire sur X*

1. *Si A un opérateur fermé, alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ l'opérateur $A + B : D(A) \subset X \to Y$ est fermé.*

2. *Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1}est fermé.*

3. *Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X.*

4. *Si A est un opérateur continu de $D(A)$ dans X, alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.*

1.1.3 Résolvante, ensemble résolvant

Définition 1.1.5 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est défini par:*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \textit{est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante $R(A)$ de A au point λ par:

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Définition 1.1.6 *Le spectre de A, noté $\sigma(A)$, est défini par:*

$$\sigma(A) := \mathbb{C}/\rho(A).$$

Proposition 1.1.2 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. On a la formule de l'identité de la résolvante, pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$,*

$$(A - \lambda I)^{-1} - (A - \mu I)^{-1} = (\lambda - \mu)(A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I)^{-1}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{-1} &= (A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I)(A - \mu I)^{-1} \\ &= (A - \lambda I)^{-1}[A - \lambda I - (\mu - \lambda)I](A - \mu I)^{-1} \quad \blacksquare \\ &= (A - \mu I)^{-1} - (\mu - \lambda)(A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I)^{-1} \end{aligned}$$

Définition 1.1.7 *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire . On peut munir $D(A)$ d'une norme notée $\|\cdot\|_{D(A)}$ et appelé* ***norme de graphe,*** *qui est définie pour tout $x \in D(A)$ par:*

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$$

Remarque 1.1.1 *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B : D(B) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire fermé tels que $\Re(A) \subset D(B)$ alors $BA \in \mathcal{L}(X)$.*

Définition 1.1.8 *(Extention d'un opérateur)*
Soit A, B deux opérateurs linéaires de X dans Y. On dit que B est une extention de A (ou prolongement) de A et on note $A \subset B$ si:$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \text{ et} \\ \forall x \in D(A), Ax = Bx \end{cases}$

Théorème 1.1.1 *(Formule de Cauchy intégrale)*
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U avec un bord γ orienté positivement. Soient f holomorphe sur U et $z_0 \in K$ on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

1.1.4 Opérateurs sectoriels, classe BIP

Il est possible de définir les puissances complexes pour une classe d'opérateurs dits sectoriels. Nous en donnons la définition ci-dessous

Définition 1.1.9 *Un opérateur A est dit sectoriel si, de plus, $N(A) = \emptyset$, $\Re(A)$ est dense dans X*

$$(-\infty, 0) \subset \rho(A) \text{ et } M_0 := \sup_{t>0} \left\| t(t+A)^{-1} \right\| < \infty.$$

Proposition 1.1.3 *Si A est sectoriel, alors il existe un angle $\varphi > 0$ tel que le secteur*

$$\sum_\varphi := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \, ; |\arg z| < \varphi\}$$

soit contenu dans $\rho(-A)$. En effet, $\rho(-A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient $(0, +\infty)$.

On peut alors définir l'angle spectral de A de la manière suivante:

Définition 1.1.10 *L'angle spectral φ_A d'un opérateur A sectoriel est défini par*

$$\varphi_A := \inf\left\{\varphi > 0; \sum_{\pi-\varphi} \subset \rho(-A) \text{ et } M_{\pi-\varphi} < \infty\right\},$$

où

$$M_\theta := \left\{\sup \left\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\right\|, \lambda \in \sum_\theta\right\} \theta \in (0, \pi).$$

Définition 1.1.11 *Un opérateur sectoriel admet des puissances imaginaires bornées si les opérateurs A^{is} définis comme fermetures de $(A^{is}, D(A) \cap \Re(A))$ sont bornés pour tout $s \in \mathbb{R}$, et $\sup\limits_{s\in[-1,1]} \|A^{is}\| < \infty$.*

L'ensemble des opérateurs sectoriels sur X qui admettent des puissances imaginaires bornées est noté BIP(X).

Remarque 1.1.2 *Soit $A \in$ BIP(X). Alors la famille d'opérateurs bornés $(A^{is})_{s\in\mathbb{R}}$ forme un groupe fortement continu sur X.*

Proposition 1.1.4 *On suppose que $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$, tel que $s \in \mathbb{R}$*

(a) *Si $\operatorname{Re} w < 0$ et $w + z = is$, alors $A^{w+z} = A^z A^w = A^w A^z$.*

(b) *Si $\operatorname{Re} w < 0$, alors $A^w A^{is} = A^{is} A^w = A^{w+is}$.*

(c) *Si $\operatorname{Re} w \geq 0$, alors $A^{is} A^w \subset A^{w+is} \subset A^w A^{is}$ et le deuxième inclusion est une égalité si $\operatorname{Re} w > 0$.*

Remarque 1.1.3 *Si $0 < \operatorname{Re} z < 1$, alors*

$$\left\|A^{-z}\right\| \leq M(\cosh(\pi \operatorname{Im} z) + \frac{\sinh(\pi |\operatorname{Im} z|}{\sin(\pi \operatorname{Im} z)}).$$

1.2 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach et soit $(S(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus sur X. On dit que $S(t)$ est un C_0 semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) si:*

1. *$S(t) = Id$,*

2. *Pour tout $t; s \geq 0$,$S(t+s) = S(t)S(s)$,*

3. *Pour tout $x \in X$, $t \longrightarrow S(t)x$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans X.*

Définition 1.2.2 *On dit que $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un C_0 groupe si ces propriétés restent valables sur pour t et s négatifs.*

Proposition 1.2.1 *On parle de semi-groupe de contractions si $S(t)$est une contraction pour tout $t \geq 0$ et de semi-groupe compact si $S(t)$ est compact pour tout $t > 0$.*

Proposition 1.2.2 *On dit que le semi-groupe est uniformément continu si $S(t)$ tend vers Id dans $\mathcal{L}(X)$quand t tend vers 0.*

Définition 1.2.3 *On dit qu'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \to S(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continu c'est à dire*

$$\forall x \in X, \lim_{t\to 0} \|S(t)x - x\|_X = 0,$$

on dit aussi que $(S(t))_{t\geq 0}$ C_0 semi-groupe.

Proposition 1.2.3 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 0$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\forall t \geq 0, \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}. \tag{1.2.1}$$

Proposition 1.2.4 *Si A est générateur infinitèsimal d'un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, alors:*

1. *A est linéare fermé de domaine $D(A)$ dense dans X.*

2. *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ contient le demi plan*

$$p_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(\lambda)| > \omega\}$$

et $\forall \lambda \in p_\omega, \forall n \geq 1$

$$\left\|(A - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}.$$

3. La résolvante de A est donnée par la transformation de Laplace

$$\forall\lambda \in p_\omega, (A-\lambda I)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

où M et ω sont des constantes.

Proposition 1.2.5 *On peut retrouver le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ à partir de son générateur infinitèsimal A par la formule suivante:*

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-tA_\lambda}x, \ \forall t \geq 0, x \in X$$

où $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ est l'approximation de Yosida définie par

$$A_\lambda = -\lambda A(A-\lambda I)^{-1}, \ \text{où } \lambda > \omega$$

Remarque 1.2.1 *Le C_0semi-groupe est uniformément borné si on a la majoration de (1.2.1) avec $M \geq 1$ et $\omega = 0$.*

Définition 1.2.4 *On dit que $(S(t))_{t\geq 0}$, est un C_0 semi-groupe différentiable (que l'on notera par $(S(t))_{t\geq 0} \in S.G.D(M,\omega)$) si l'application:*

$$]0,+\infty[\ni t \to S(t)x \in X,$$

est différentiable quelque soit $x \in X$.

Théorème 1.2.1 *Soient $(S(t))_{t\geq 0} \in S.G.D(M,\omega)$, et A son générateur infinitésimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

i) $(S(t)_{t\geq 0}) \in S.G.D(M,\omega)$,

ii) $\Re(S(t)) \subset D(A), \forall t > 0$.

Corollaire 1.2.1 *On considère les générateurs analytiques A et B de deux groupes $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ et $(V(s))_{s\in\mathbb{R}}$ sur un espace de Banach X qui possède la propriété UMD.*

On suppose que U est de type ω_1 et V de type ω_2 commutent dans le sens où $U(s)V(t) = V(t)U(s)$ pour tout $s,t \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que B est inversible.

Alors $(A+B, D(A)\cap D(B))$ est un opérateur fermé et inversible sur X.

Théorème 1.2.2 *Un opérateur linéaire A, de domaine $D(A)$, est le générateur infinitésimal d'un C_0semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X si et seulement si*

1. *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$;*

2. *$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$, et pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\|R_\lambda(A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

1.2.2 Générateur infinitésimal

Définition 1.2.5 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire (non-borné) $A : D(A) \to X$ défini par:*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X, \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)u - u}{t} \text{ existe dans } X \right\}, \\ Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{S(t)u-u}{t}. \end{cases}$$

Proposition 1.2.6 *Soit $S(t)$ un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal A alors*

1. *Pour tout*

$$u_0 \in X, \int_0^t S(s)u_0 \in D(A).$$

   et

$$A \left(\int_0^t S(\tau)u_0 d\tau \right) = S(t)u_0 - u_0.$$

2. *Si $u_0 \in D(A)$, alors*

$$S(t)u_0 \in D(A).$$

   Pour tout $t \geq 0$

$$S(t)u_0 \in C^1 \text{ et } \frac{d\ S(t)u_0}{dt} = AS(t)u_0.$$

Théorème 1.2.3 *Soit $S(t)$un C_0 semi-groupe, alors son générateur infinitésimal A est fermé et son domaine est dense dans X.*

Théorème 1.2.4 *Si $S(t)$ et $T(t)$ sont deux semi-groupes de même générateur infinitésimal A, alors*

$$S(t) = T(t).$$

On notera souvent $S(t) = e^{At}$ l'unique semi-groupe associé à A.

Proposition 1.2.7 *Soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un C_0 groupe sur X, de type $\omega < \pi$, de générateur analytique C. Alors $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est l'unique C_0 groupe de type strictement inférieur à π associé à C, c'est-à-dire que si $(V(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un C_0 groupe sur X, de type $\omega' < \pi$, de générateur analytique C, alors*

$$U(s) = V(s).$$

1.2.3 Semi-groupes analytiques

Définition 1.2.6 *Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on dit que l'application*

$$S = \Delta_\theta \cup \{0\} \to \mathcal{L}(X)$$

est un semi groupe analytique si les conditions suivantes sont vérifiées:

1. *$S(0) = Id$.*
2. *$S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$pour tout z_1, z_2 dans Δ_θ.*
3. *Pour tout $x \in X.S(Z)\,x$ est continue en 0.*
4. *L'application $z \to s(z)$ est analytique dans Δ_θ.*

Proposition 1.2.8 *Soit $s(z)$ un semi-groupe analytique de générateur infinitèsimal A pour tout $z \in \Delta_\theta$ et tout $n \geq 1$,*

$$\left\{ \begin{array}{c} S(z)\,X \subset D(A^n) \\ S^{(n)}(z)x = A^n S(z) \end{array} \right. .$$

1.2.4 Semi-groupes holomorphes

Soit X un espace de Banach complexe, pour $\theta \in (0, \pi]$, on définit le secteur

$$\sum_\theta := \{z \in \mathbb{C}/\{0\}\,; |\arg z| < \theta\} = \left\{re^{i\theta}; r > 0; |\alpha| < \theta\right\}$$

On va également utiliser la notation $\sum_{\theta,0} := \sum_\theta \cup \{0\}$. Un semi-groupe holomorphe est une fonction $T : \sum_{\theta,0} \to \mathcal{L}(X)$, holomorphe sur $\sum_\theta$, Satisfaisant:

1. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \sum_{\theta,0}$,

2. $\lim\limits_{z\to 0,\sum_{\theta'}} T(Z)x = x$ pour tout$x \in X$ et tout $\theta' \in (0,\theta)$.

Alors T s'appellera un semi-groupe holomorphe (de l'angle θ).

Proposition 1.2.9 *Soit $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $x \in D(A^\gamma)$. Alors,*

$$z \to A^z x \text{ est holomorphe pour } \operatorname{Re} z < \gamma.$$

Lemme 1.2.1 *On a $z \to A^z$ est holomorphe de $\{z, z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z < 0\}$ dans $\mathcal{L}(X)$.*

Proposition 1.2.10 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ et $(A-\lambda)^{-1}T = T(A-\lambda)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(A)$, alors*

1. *$TA^z = A^z T$ pour $\operatorname{Re} z < 0$,*

2. *$TA^z \subseteq A^z T$ pour $\operatorname{Re} z \geq 0$.*

Remarque 1.2.2 *D'aprés (1.2.10) on peut déduire que $A^z B^w = B^w A^z$ lorsque $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0$ à condition que $(A-\lambda)^{-1}$ commute avec $(B-\mu)^{-1}$. Si on suppose que A^{is} et B^{it} sont bornés pour tout $s,t \in \mathbb{R}$, alors*

$$\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leq 0.$$

En prenant les opérateurs inverses , on a l'égalité pour

$$\min\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} > 0.$$

1.3 Espaces UMD

La définition originale d'un espace UMD (Unconditional Martingale Differences),(voir Bourgain [4] , Burkholder[5]) fait intervenir la théorie des martingales à valeurs vectorielles. Nous donnons ici une définition équivalente, plus adaptée à notre travail et qui utilise la transformation de Hilbert.

Définition 1.3.1 *Pour $\varepsilon \in]0,1[$ et $p \in]1,+\infty[$ on définit l'opérateur*

$$H_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}, E))$$

par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R},E), (H_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|s|<1/\varepsilon} \frac{f(x-s)}{s} ds, p.p.x \in \mathbb{R}.$$

et pour un élément $\in L^p(\mathbb{R},E)$ *on a*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R},E), \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R},E)$$

Cette limite est notée Hf *et est appelée la transformée de Hilbert de* f *sur* $L^p(\mathbb{R},E)$.

Définition 1.3.2 *E est appelé espace UMD s'il existe $p \in]1,+\infty[$ tel que*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R},E), \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R},E). \tag{1.3.1}$$

Dans ces conditions, l'application linéaire

$$\begin{array}{rcccl} H & : & L^p(\mathbb{R},E) & \to & L^p(\mathbb{R},E) \\ & & f & \mapsto & Hf = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f \end{array}$$

est continue, d'après le théorème de Banach Steinhaus.

Cet élément de $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R},E))$ est appelé la transformée de Hilbert sur $L^p(\mathbb{R},E)$.

Remarque 1.3.1 *Notons que si E est un espace UMD alors (1.3.1) est satisfaite pour tout $p \in]1,+\infty[$. Il est bon d'avoir aussi une caractérisation géométrique des espaces UMD, à cet effet on introduit la notion de ζ-convexité.*

Définition 1.3.3 *E est dit ζ-convexe si et seulement s'il existe une fonction*

$$\zeta : E \times E \to \mathbb{R},$$

vérifiant $\zeta(0,0) > 0$ et telle que pour tout x, y de E, on a

1. *$\zeta(x,.)$ et $\zeta(.,y)$ sont convexes sur E.*

2. *$\zeta(x,y) \leq \|x+y\|$ si $\|x\| = \|y\| = 1$.*

Théorème 1.3.1 *E est un espace UMD si et seulement si Eest ζ-convexe.*

Exemple 1.3.1 *Il est possible de donner de nombreux exemples d'espaces de Banach classiques qui ont la propriété UMD. Ainsi:*

1. Tout espace de Hilbert est un espace UMD

2. Tout sous espace fermé d'un espace UMD est UMD.

3. Tout espace isomorphe à un espace UMD est UMD.

4. Si E est un espace UMD alors $L^p(\mathbb{R}, E)$l'est aussi dès que $p \in]1, +\infty[$ et que Ω est un espace mesuré $\sigma-$fini.

Définition 1.3.4 *Un opérateur linéaire fermé A densément défini sur E appartient à la classe BIP (α, E), avec $\alpha \in [0, \pi[$ si*

$$\begin{cases}]-\infty, 0[\in \rho(A), \ker(A) = \{0\}, \overline{\operatorname{Im}(A)} = 0 \\ \quad et\ \exists c \geq 1 : \forall \lambda > 0, \|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq C/\lambda \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \quad \forall s \in \mathbb{R}, A^{is} \in \mathcal{L}(E)\ \ et \\ \exists c \geq 1, \forall s \in \mathbb{R}, \|A^{is}\| \leq ce^{\alpha|s|} \end{cases}$$

Cette définition valable pour tout espace de Banach E sera en fait utilisée quand E est UMD.

Chapitre 2

Théorème de Dore-Venni

Dans ce chapitre, on donne quelques résultats fondamenteux sur la commutativité des opérateurs par résolvantes, la régularité maximale de la solution des problèmes en EDP. Ensuite, on donne des lemmes techniques nécéssaires qui permettent de donner la démonstration du théorème de **Dore-Venni.**

2.1 Commutativité des opérateurs au sens des résolvantes

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés sur X.

2.1.1 Commutativité pour deux opérateurs ayant chacun des ensembles résolvants non vides

Définition 2.1.1 *Supposons que $\rho(A) \neq \varnothing$ et $\rho(B) \neq \varnothing$.On dit que A et B commutent (au sens des résolvantes) si et seulement:*
$\forall\lambda \in \rho(A)$, $\forall\mu \in \rho(B)$ $(A-\lambda I)^{-1}(B-\mu I)^{-1} = (B-\mu I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1}$.

Lemme 2.1.1 *On a $\forall\lambda \in \rho(A), \forall\mu \in \rho(B)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(A-\lambda I)^{-1}(B-\mu I)^{-1} = (B-\mu I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1}$,

2. $\forall y \in D(B)$

$(A-\lambda I)^{-1}y \in D(B)$ *et* $(A-\lambda I)^{-1}(B-\mu I)y = (B-\mu I)(A-\lambda I)^{-1}y,$

3. $\forall y \in D(B)$

$(A-\lambda I)^{-1}y \in D(B)$ *et* $(A-\lambda I)^{-1}By = B(A-\lambda I)^{-1}y,$

4. $\forall y \in D(A)$

$(B-\mu I)^{-1}y \in D(A)$ *et* $(B-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)y = (A-\lambda I)(B-\mu I)^{-1}y.$

5. $\forall y \in D(A)$

$(B-\mu I)^{-1}y \in D(A)$ *et* $(B-\mu I)^{-1}Ay = A(B-\mu I)^{-1}y.$

Lemme 2.1.2 *Soient* $\lambda, \lambda' \in \rho(A)$ *et* $\mu, \mu' \in \rho(B)$*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. $(A-\lambda I)^{-1}(B-\lambda I)^{-1} = (B-\mu I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1}$

2. $(A-\lambda' I)^{-1}(B-\mu' I)^{-1} = (B-\mu' I)^{-1}(A-\lambda' I)^{-1}.$

2.1.2 Commutativité pour deux opérateurs dont l'un au moins a un ensemble résolvant non vide

Définition 2.1.2 *Supposons que* $\rho(A) \neq \varnothing$*. On dit que* A *commute avec* B *(au sens des résolvantes) si et seulement si*

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(A), \forall y \in D(B) \\ (A-\lambda I)^{-1}y \in D(B) \ \textit{et} \ (A-\lambda I)^{-1}By = B(A-\lambda I)^{-1}y \end{cases}$$

Proposition 2.1.1 *Soit* λ_0 *fixé dans* $\rho(A)$ *et on suppose que* $D(A) \subset D(B)$
Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\forall y \in D(B)$*,* $(A-\lambda_0 I)^{-1}y \in D(B)$ *et* $(A-\lambda_0 I)^{-1}By = B(A-\lambda_0 I)^{-1}y,$
- $D(BA) \subset D(AB)$ *et* $\forall y \in D(BA)$*,* $BAy = ABy,$
- $\forall \lambda \in \rho(A), \forall y \in D(B)$*,* $(A-\lambda I)^{-1}y \in D(B)$ *et* $(A-\lambda I)^{-1}By = B(A-\lambda I)^{-1}y.$

Remarque 2.1.1 $AB = BA$ *signifie que*
$D(AB) = D(BA)$*et* $ABx = BAx$ *pour tout* $x \in D(AB) = D(BA)$*.*

2.2 Régularité maximale

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = f(t) & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Ici, $A(t)_{t\in(0,T)}$ désigne une famille d'opérateurs linéaires non bornés de X et dépendant du temps $t \in (0,T)$, et $f \in L^p(0,T;X)$ est donnée où $p \in]1,+\infty[$.

La question générale, dite de régularité maximale est de savoir si, séparément, $u'(t)$ et $A(t)u(t)$ sont aussi dans $L^p(0,T;X)$.

Si l'opérateur A ne dépend pas du temps, la condition nécessaire de régularité maximale est que le semi-groupe engendré par A soit analytique, et qu'alors, la régularité maximale indépendante de $p \in]1,+\infty[$. Elle est toujours réalisable dans un espace de Hilbert.

Dans le cas d'un espace de Banach quelconque pour lequel plusieurs approches sont possibles dont l'une plus particulièrement adoptés dans ce travail:

- la solution de (2.2.1) avec $A(t) = A$ est donnée par,

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds, u'(t) = \int_0^t Ae^{-(t-s)A} f(s)ds = \mathcal{F}f(t).$$

Comme A engendre un semi-groupe analytique, on a $\left\| Ae^{-At} \right\| \leq c/t$ est vérifie.

Ainsi, l'opérateur $\mathcal{F} : f \in L^p(0,T;X) \to u'$ est donné par une intégrale singulière et lié a la transformation de Hilbert dans $L^p(0,T;X)$.

- On peut voir l'opération $u \to u' + Au$ comme la somme de deux opérateurs non bornés dans $L^p(0,T;X)$.

La question revient alors à celle de l'inversibilité de cette somme d'opérateurs dans l'intersection de leurs domaine de $L^p(0,T;X)$.

Remarque 2.2.1 *Un résultat marquant dans ce contexte, est le suivant, valable dans les espaces de Banach ayant la propriété UMD :*

Si $U(s)_{s\in\mathbb{R}}$ *vérifie,* $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \sup \frac{\log\|U(s)\|}{|s|} < \pi$, *alors son générateur analytique* C *est sectoriel et admet des puissances imaginaires bornées telles que* $C^{is} = U(s)$.

2.3 Théorème de Dore-Venni

2.3.1 Hypothèses

On suppose, dans la suite, que X est un espace UMD (complexe) et $A : D(A) \to X$, $B : D(B) \to X$ sont des opérateurs linéaires fermés, avec des domaines denses dans X, supposons que:

(H1) $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \subseteq \rho(A) \cap \rho(B)$ et $\exists M \geq 1$ tels que

$$\max\left\{\left\|(A+t)^{-1}\right\|, \left\|(B+t)^{-1}\right\|\right\} \leq M/(1+t), \forall t \in R^+ \cup \{0\}.$$

(H2) si $\lambda \in \rho(A), \mu \in \rho(B)$, Alors

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - B)^{-1} = (\mu - B)^{-1}(\lambda - A)^{-1}.$$

(H3) $\forall s \in \mathbb{R}, A^{is}$ et B^{is} appartiennent à $\mathcal{L}(X)$, les groupes $s \to A^{is}, s \to B^{is}$ sont fortement continus et les estimations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{cases} \|A^{is}\| \leq Ke^{\theta_A|s|}, \\ \|B^{is}\| \leq Ke^{\theta_B|s|}, \end{cases}$$

où $\theta_A + \theta_B < \pi$.

2.3.2 Lemmes techniques

Lemme 2.3.1 *Si $c \in \left]0,1\right[$, alors l'intégrale*

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin(\pi z)} dz.$$

absolument converge dans $\mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas de c.

Preuve. D'aprés (1.2.1) on a

$$z \to \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin(\pi z)}$$

est holomorphe pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

De plus, $|\sin(\pi z)| \geq ce^{\pi i \operatorname{Im} z}$ pour $|\operatorname{Im} z|$ assez grand où c est une constante strictement positive, et comme $|\operatorname{Im} z| \to \infty$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$,

$$\left\|A^{-z}B^{z-1}\right\| \leq K^2 \left\|A^{-\operatorname{Re} z}\right\| \left\|B^{\operatorname{Re} z-1}\right\| e^{|\operatorname{Im} z|(\theta_A+\theta_B)} \leq M^2K^2e^{|\operatorname{Im} z|(\theta_A+\theta_B)}.$$

Afin d'appliquer la proposition (1.1.4), la remarque (1.1.3) et théorème de Cauchy (1.1.1), on trouve le résultat. ■

Définition 2.3.1 *On définit S par*

$$S = \frac{1}{2i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin(\pi z)}dz, avec\ 0 < C < 1.$$

L'opérateur S est borné. Notre but est de prouver que $S = (A+B)^{-1}$.

Lemme 2.3.2 $\forall x \in D(A) \cap D(B), S(A+B)x = x.$

Preuve. D'aprés(1.2.2)

$$S(A+B) = \frac{1}{2i}(\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{A^{-z}B^{z}x}{\sin(\pi z)}dz \ + \int\limits_{c-1-i\infty}^{c-1+i\infty} \frac{B^{z}A^{-z}x}{\sin(\pi(z+1))}dz).$$

D'aprés (1.2.1)et (1.2.9),

On a $z \to A^{-z}B^{z}x$ est holomorphe pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$ et $z \to B^{z}A^{-z}x$ est holomorphe pour $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, et les deux fonctions convergent vers $A^{-is}B^{is}x$ quand $z \to is \in i\mathbb{R}$.

Donc, les estimations semblables à celles de lemme (2.3.1)

$$S(A+B)x = \pi \operatorname{Re} s_z = o(\frac{A^{-z}B^{z}x}{\sin(\pi z)}) = x.$$

■

Lemme 2.3.3 *Si* $0 < \varepsilon < 1$ *et* $x \in D(A^{1-\varepsilon})$, *alors* $Sx \in D(A) \cap (B)$ *et* $(A+B)Sx = x$.

Preuve. D'aprés la formule suivante

$$A^{1-\varepsilon-is}B^{1-\varepsilon+is}x = B^{\varepsilon-1}B^{is}A^{-is}A^{1-\varepsilon}x.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{A^{1-z}B^{z-1}}{\sin(\pi z)}dz.$$

est converge absolument.

Alors $Sx \in D(A)$ et

$$ASx = \frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{A^{1-z}B^{z-1}}{\sin(\pi z)}dz.$$

D'autre part, la fonction $z \to B^{z-1}A^{-z}$ est holomorphe pour $\varepsilon - 1 < \operatorname{Re} z < \varepsilon$ et converge comme $z \to \varepsilon - 1 + is$; de plus , pour $\varepsilon - 1 \leq \gamma \leq \varepsilon$ $|s| \to +\infty$,

$$\left\|A^{-\gamma-is}B^{\gamma-1+is}x\right\| \leq \left\|A^{-\gamma+\varepsilon-1}\right\|\left\|B^{\gamma-1}\right\|\left\|A^{-is}\right\|\left\|B^{is}\right\|\left\|A^{1-\varepsilon}x\right\|.$$

Alors, les estimations usuelles donnent

$$Sx = \frac{1}{2i}\int_{c-1-i\infty}^{c-1+i\infty}\frac{A^{-z}B^{z-1}x}{\sin(\pi z)} + \pi Res_{z=0}(\frac{A^{-z}B^{z}B^{-1}x}{\sin(\pi z)}).$$

Où le deuxième terme est $B^{-1}x$.

Comme

$$\frac{1}{2i}\int_{\varepsilon-1-i\infty}^{\varepsilon-1+i\infty}\frac{A^{-z}B^{z}x}{\sin(\pi z)}dz$$

Est absolument converge, on a $Sx \in D(B)$ et

$$BSx = x + \frac{1}{2i}\int_{\varepsilon-1-i\infty}^{\varepsilon-1+i\infty}\frac{A^{-z}B^{z}x}{\sin(\pi z)}dz = x - ASx.$$

■

Lemme 2.3.4 *$A + B$ est fermable et $S = \overline{(A+B)}^{-1}$.*

Preuve. Supposons que $x_n \in D(A) \cap D(B), x_n \to 0, (A+B)x_n \to y$. Alors

$$x_n = S(A+B)x_n \to Sy,$$

alors $Sy = 0$. D'aprés le lemme (2.3.3),

$$SA^{-1}y \in D(A+B) et (A+B)SA^{-1}y = A^{-1}y.$$

D'autre part $SA^{-1}y = A^{-1}Sy = 0$, (voir la proposition (1.2.10)et le lemme (1.2.2)) et alors $A^{-1}y = 0$ et $y = 0$.Cela prouve que $A + B$ fermable.

Soit $x \in D\overline{(A) \cap (B)}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $D(A) \cap D(B)$ telle que

$$x_n \to x, (A+B)x_n \to \overline{(A+B)}x.$$

Ainsi

$$x_n = S(A+B)x_n \to S\overline{(A+B)}x.$$

donc $x = S\overline{(A+B)}x$. Réciproquement, on a fixé $x \in X$ et on choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D(A)$ telle que $x_n \to x$.

Alors

$$D(A) \cap D(B) \ni Sx_n \to Sx \text{ et } (A+B)Sx_n = x_n \to x.$$

D'où

$$\begin{cases} Sx \in D\overline{(A+B)}, \\ \overline{(A+B)}Sx = x. \end{cases}$$

■

Théorème 2.3.1 *Supposons que X est un espace UMD et que les hypothèses $(H1)$, $(H2)$ et $(H3)$ sont vérifiées. Alors*

$$A + B \textit{ est fermé et } (A+B)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Preuve. On a

$$\forall x \in X, \ Sx \in D(A+B) = D(A) \cap D(B).$$

D'aprés le lemme (2.3.4) nous avons $D\overline{(A+B)} \subseteq D(A+B)$. Alors

$$\overline{A+B} = A + BetS = (A+B)^{-1}.$$

Si la fonction $z \to \frac{A^{-z}B^{z-1}x}{\sin(\pi z)}$ est holomorphe pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$,

D'aprés les estimations ci-dessus et la continuité de cette fonction pour $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ avec $z = 0$ et $z = 1$ (tel que $(\sin(\pi z))^{-1}$ a des pôles), on obtient

$$Sx = \frac{1}{2i} \int\limits_{\Gamma_{0,\varepsilon}} \frac{A^{-z}B^{z-1}x}{\sin(\pi z)} dz = \frac{1}{2i} \int\limits_{\Gamma_{1,\varepsilon}} \frac{A^{-z}B^{z-1}x}{\sin(\pi z)} dz,$$

où $\Gamma_{j,\varepsilon}$ est la courbe, orientée par l'augmentation de la partie imaginaire, composé par les demi-droites $\{j+s; |s|\geq\varepsilon\}$ $(j=0,1)$ et par le demi cercle dans centre j de rayon ε, contenue dans le pavillon $0\leq \operatorname{Re} z\leq 1$. Ainsi

$$Sx=\Phi_{0,\varepsilon}x+\Psi_{0,\varepsilon}x=\Phi_{1,\varepsilon}x+\Psi_{1,\varepsilon}x$$

Où

$$\begin{aligned}\Phi_{j,\varepsilon}x &= \tfrac{1}{2}\int\limits_{|s|\geq\varepsilon}\tfrac{A^{-j-is}B^{J-1+is}x}{\sin(\pi(j+is))}ds,\\ \Psi_{0,\varepsilon}x &= \tfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\tfrac{\varepsilon e^{i\theta}}{\sin(\pi\varepsilon e^{i\theta})}A^{-\varepsilon e^{i\theta}}B^{\varepsilon e^{i\theta}-1}xd\theta,\\ \Psi_{1,\varepsilon}x &= -\tfrac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\tfrac{\varepsilon e^{i\theta}}{\sin(\pi(1+\varepsilon e^{i\theta}))}A^{-1-\varepsilon e^{i\theta}}B^{\varepsilon e^{i\theta}}xd\theta.\end{aligned}$$

On peut vérifier que, quand $\varepsilon\to 0^+$, on a

$$\begin{cases}\Psi_{0,\varepsilon}x\to\tfrac{1}{2}B^{-1}x,\\ \Psi_{1,\varepsilon}x\to\tfrac{1}{2}A^{-1}x.\end{cases}$$

Alors,

$$\Phi_{0,\varepsilon}x\to Sx-\frac{1}{2}B^{-1}x,\Phi_{1,\varepsilon}x\to Sx-\frac{1}{2}A^{-1}x.$$

D' autre part, on peut vérifier que, comme A et B sont fermés,

$$\begin{aligned}&\Phi_{0,\varepsilon}x\in D(B),\\ &\Phi_{1,\varepsilon}x\in D(A).\end{aligned}$$

et

$$B\Phi_{0,\varepsilon}=\frac{1}{2}\int\limits_{|s|\geq\varepsilon}\frac{A^{-is}B^{is}x}{\sin(\pi is)}ds=-A\Phi_{1,\varepsilon}x.$$

Donc, il ne reste de monter que $B\Phi_{0,\varepsilon}x$ converge lorsque $\varepsilon\to 0^+$. En effet, cela montre que

$$Sx-\frac{1}{2}B^{-1}x\in D(B),Sx-\frac{1}{2}A^{-1}x\in D(A)$$

et alors

$$Sx\in D(A)\cap D(B).$$

On peut écrire

$$B\Phi_{0,\varepsilon}x = \frac{1}{2}\int\limits_{|s|\geq 1} \frac{A^{-is}B^{is}x}{\sin(\pi is)}ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon|\leq s|\leq 1} \frac{A^{-is}B^{is}x}{\pi is}ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon|\leq s|\leq 1} A^{-is}B^{is}x\left(\frac{1}{\sin(\pi is)} - \frac{1}{i\pi s}\right)ds.$$

Notons que le premier terme ne dépend pas de ε et le troisième converge lorsque $\varepsilon \to 0^{+}$.

Nous posons $F(s) = \chi_{]-1,1[}(s)A^{-is}B^{is}x$. On remarque que $F \in L^{p}(\mathbb{R}, X), \forall p \in]1,\infty[$. Puisque X est un espace UMD, la transformation de Hilbert tronquée de F c-à-d

$$(H_{\varepsilon}F)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|s|\geq\varepsilon} \frac{F(t-s)}{s}ds.$$

converge dans la norme de X pour tout t. Donc, pour $t < 0$ fixé (assez petit), on obtient

$$\int\limits_{\varepsilon|\leq s|\leq 1} \frac{A^{-is}B^{is}x}{\pi is}ds = A^{-it}B^{it}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|s|\geq\varepsilon} \frac{F(t-s)}{s}ds - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{1}^{t+1} \frac{A^{i(t-s)}B^{i(s-t)}x}{\pi is}ds + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{t-1} \frac{A^{i(t-s)}B^{i(s-t)}x}{\pi is}ds\right)$$

qui converge en $\varepsilon \to 0^{+}$ grâce au fait que $A^{-it}B^{it} \in \mathcal{L}(X)$. ■

Remarque 2.3.1 *Supposons que A est un opérateur linéaire borné dans X, dont le spectre n'est pas contenu dans le demi droite $\{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \leq 0\}$ .On appelle $\widetilde{\theta}_A$ le plus petit nombre réel positif tel que*

$$\sigma(A) \subseteq \left\{\rho e^{i\theta}, \rho > 0, |\theta| \leq \widetilde{\theta}_A\right\}.$$

puis il est bien connu que A^{z} peut être calculé au moyen de l'intégrale de Dunford

$$A^{z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \lambda^{z}(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

On montre que $\forall\varepsilon > 0\ \exists C_{\varepsilon}$ tel que $\forall s \in \mathbb{R}\ \|A^{is}\| \leq C_{\varepsilon}e^{(\widetilde{\theta}_A+\varepsilon)|s|}$. Donc si $B : D(B) \to X$ nous avons (H1) , (H2), (H3) avec $\widetilde{\theta}_A + \theta_B < \pi$, d'aprés le lemme (2.3.4) nous avons satisfaisant les hypothèses

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{2i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin(\pi z)}dz.$$

En particulier, si on prend $Ax = \lambda_0 x$, avec $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\,[0,+\infty[$, on obtient le résultat suivant:

Corollaire 2.3.1 *Soit X un espace de Banach complexe et $B : D(B) \to X$ opérateur linéaire fermé, densément définie t, tels que :*

(a) $\mathbb{R}^- \cup (0) \subseteq \rho(B), \|(B+t)^{-1}\| \leq M/(1+t) \quad \forall t \geq 0,$

(b) $\forall s \in \mathbb{R}\ B^{is} \in \mathcal{L}(X), s \to B^{is}$ *est un groupe fortement continu et* $\|B^{is}\| \leq ke^{\theta_0|s|}$ *avec* $0 \leq \theta_0 \leq \pi$. *Alors*

$$\sigma(B) \subseteq \left\{\alpha e^{i\theta}, \alpha > 0, |\theta| \leq \theta_0\right\}$$

Chapitre 3

Applications

3.1 Résultat de Dore-Venni pour le problème de Cauchy

Afin d'appliquer le théorème (2.3.1) au problème (2.2.1), on commence par démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Soit Y un espace UMD (complexe), et $X = L^p(0, T; Y)$, $T \in\,]0, +\infty[\,, p \in\,]1, +\infty[\,$.*

On définit l'opérateur $B : D(B) \to Y$ fermé dans X par

$$\begin{cases} D(B) & = \{u \in W^{1,p}(0, T; Y); u(0) = 0\}\,, \\ Bu & = u'. \end{cases}$$

Alors

(a) $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \subseteq \rho(B)$, $\forall \lambda \leq 0\, \|(\lambda - B)^{-1}\| \leq C_0/(1 + |\lambda|)$,

(b) $\forall \xi \in \mathbb{R} B^{i\xi} \in \mathcal{L}(X)$.

De plus, $\xi \to B^{i\xi}$ est un C_0-groupe dans $\mathcal{L}(X)$ qui vérifie

$$\left\|B^{i\xi}\right\| \leq C_1(1 + \xi^2)e^{\frac{\pi}{2}|\xi|}. \tag{3.1.1}$$

Preuve.

(a) On sait que

$$\forall \lambda \leq 0 \forall f \in X((\lambda - B)^{-1} f)(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds.$$

(b) De plus, on définit la transformée de Fourier de f par :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}, Y)\ \widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-its} f(s)ds, f^{\smile} = \widehat{f}(-t).$$

On rappelle que $\forall f \in X, 0 < \varepsilon < 1$,

$$B^{-\varepsilon+i\xi} f = \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon+i\xi)\Gamma(\varepsilon-i\xi)} \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{-\varepsilon+i\xi} (B+\lambda)^{-1} f d\lambda.$$

Alors

$$\begin{aligned}(B^{-\varepsilon+i\xi} f)(t) &= \tfrac{1}{\Gamma(1-\varepsilon+i\xi)\Gamma(\varepsilon-i\xi)} \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{-\varepsilon+i\xi} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds d\lambda \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\varepsilon-i\xi)} \int_0^t (t-s)^{\varepsilon-i\xi-1} f(s)ds = \tfrac{1}{\Gamma(\varepsilon-i\xi)} (\psi * F)(t),\end{aligned}$$

où F est l'extension de f dans $\mathbb{R}$ qui disparait à l'extérieur de $[0,T]$ et

$$\psi_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda \leq 0 \\ \lambda^{\varepsilon-1+i\xi} & \text{if } \lambda > 0 \end{cases}.$$

Nous avons

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(\lambda) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(\varepsilon - i\xi)(e^{i(\varepsilon-1-i\xi)\frac{\pi}{2}} \lambda_-^{i\xi-\varepsilon} - e^{-i(\varepsilon-1-i\xi)\frac{\pi}{2}} \lambda_+^{i\xi-\varepsilon})$$

(ici $\lambda_+ = \max\{\lambda, 0\}, \lambda_- = \max\{-\lambda, 0\}$).

Donc

$$f \in C_0^\infty(]0,T[, Y), B^{-\varepsilon+i\xi} f = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\varepsilon - i\xi)} (\widehat{\psi_\varepsilon} \widehat{F})^\vee.$$

Par exemple, ceci peut être vu par approximation, ψ_ε définie par :

$$\psi_{\varepsilon,n} = \chi_{]0,n]} \psi_\varepsilon.$$

Maitenant, comme $\varepsilon \to 0^+$, $B^{-\varepsilon+i\xi} f \to B^{i\xi} f$ dans X ($f \in D(B)$),

on a donc

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\varepsilon - i\xi)} (\widehat{\psi_\varepsilon} \widehat{F})^\vee \xrightarrow{s'} (m\widehat{F})^\vee,$$

où

$$m(\lambda) = e^{-\frac{\pi}{2}\xi sgn\lambda} \left|\lambda\right|^{i\xi}.$$

On introduit la fonction

$$m_k(\lambda) = \phi(k\lambda)m(\lambda),$$

telle que

$$\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), 0 \leq \phi(t) \leq 1 \forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = 0$$

et

$$-1 \leq t \leq 1, \phi(t) = 1.$$

Pour tout $|t| \geq 2$, alors

$$m_k \in C^{\infty}, |m_k(\lambda)| \leq e^{\frac{\pi}{2}|\xi|}, |\lambda m_k'(\lambda)| \leq \sup_{\tau} |\tau\phi'(\tau)| e^{\frac{\pi}{2}\xi} + |\xi| e^{\frac{\pi}{2}\xi},$$

$$\left|\lambda^2 m_k''(\lambda)\right| \leq \sup_{\tau} \left|\tau^2 \phi''(\tau)\right| e^{\frac{\pi}{2}\xi} + 2\sup_{\tau} |\tau\phi'(\tau)| |\xi| e^{\frac{\pi}{2}\xi} + \left|\xi^2\right| e^{\frac{\pi}{2}\xi}.$$

Par conséquent, on peut appliquer le théorème de multiplicateur de Mikhlin prolongé, on obtient

$$\left\|(m_k\widehat{f})^{\vee}\right\|_{L_p} \leq C(p, Y)(1 + \xi^2)e^{\frac{\pi}{2}\xi} \|f\|_{L_p},$$

on déduit qu'il existe une constante C qui depend seulement de p, Y et

$$\sup_{0 \leq q \leq 2} \sup_{\lambda} \left|\lambda^q m^{(q)}(\lambda)\right| = \gamma_2(m).$$

Alors que la dépendance à $\gamma_2(m)$ est linéaire par homogénéité. Quand $k \to \infty$, $m_k \to m$, alors que $m_k\widehat{f} \to m\widehat{f}$ dans L^1 et $(m_k\widehat{f})^{\vee} \to (m\widehat{f})^{\vee}$ dans L^{∞}.

D'aprés le lemme de Fatou

$$\left\|(m\widehat{f})^{\vee}\right\|_{L_p} \leq \liminf_{k} \left\|(m_k\widehat{f})^{\vee}\right\|_{L_p} \leq C(p, Y)(1 + \xi^2)e^{\frac{\pi}{2}\xi} \|f\|_{L_p},$$

donc, pour toute f dans un sous-espace dense dans X

$$\left\|B^{i\xi}f\right\|_X \leq C(p, Y)(1 + \xi^2)e^{\frac{\pi}{2}\xi} \|f\|_x$$

et $B^{i\xi}$ est fermé, il s'ensuit que $B^{i\xi} \in \mathcal{L}(X)$ avec

$$\left\|B^{i\xi}f\right\| \leq C(p, Y)(1 + \xi^2)e^{\frac{\pi}{2}\xi}.$$

La forte continuité du groupe résulte à la fois, car il se trouve sur un sous-espace dense. ■

Remarque 3.1.1 *Si on suppose que $A : D(A) \to Y$ est un opérateur linéaire fermé, densément défini dans Y, tel que*

$$\left\|(A+\lambda)^{-1}\right\| \leq C/(1+\lambda)\forall\lambda \geq 0$$

et que $\xi \to A^{i\xi}$ est un groupe fortement continu dans $\mathcal{L}(Y)$ avec

$$\left\|A^{i\xi}\right\| \leq Ce^{\theta_A|\xi|},\ 0 \leq \theta_A < \frac{\pi}{2}.$$

On définit l'opérateur A sur $X = L^p(0,T;Y)$ par l'égalité $(Au)(t) = A(u(t))$, A a les mêmes propriétés dans X et dans Y.

3.2 Problème de Cauchy dans le cadre non commutative

Soit Y un espace de Banach. Notre but est de montrer un résultat de régularité maximale de la solution du problème (2.2.1), où A est un opérateur linéaire sur Y et le générateur analytique d'un groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ fortement continu.

On suppose que le type du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est strictement infèrieur à $\frac{\pi}{2}$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 *Soit A un opérateur sectoriel de classe BIP. On suppose que Y est un espace UMD. Alors le problème (2.2.1) vérifie la régularité maximale sur $L^p(0,T;Y), 1 < p < \infty$. C'est-à-dire pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$, il existe une unique solution u de (2.2.1) vérifiant*

$$u \in W^{1,p}(0,T;Y) \cap L^P(0,T,D(A)).$$

Preuve. Pour montrer le théorème précédent, nous allons utiliser le corollaire (1.2.1), on considère l'opérateur $\widetilde{A}$ défini par

$$\begin{cases} D(\widetilde{A}) = L^p(0,T;D(A)), \\ (\widetilde{A}u)(t) = Au(t), t \in [0,T]. \end{cases}$$

D'autre part, l'opérateur B est défini par

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in W^{1,p}(0,T;Y); u(0) = 0\}, \\ Bu = u'. \end{cases}$$

On sait que l'opérateur B est inversible et possède des puissances imaginaires bornées sur $L^p(0,T;Y)$.

De plus, les puissances imaginaires de B vérifient l'estimation (3.1.1),

où $C_p(Y)$ est une constante qui ne dépend que de p et de X.

En ce qui concerne l'opérateur $\widetilde{A}$, on a, pour tout $\mu \in \rho(A)$, $\mu \in \rho(\widetilde{A})$ et on a

$$((\mu - \widetilde{A})^{-1}u)(t) = (\mu - A)^{-1}u(t), \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Ainsi, d'aprés la proposition (1.2.7), on a que $\widetilde{A}$ est le générateur analytique du groupe fortement continu $(\widetilde{U}(s))_{s\in\mathbb{R}}$ sur $L^p(0,T;Y)$ défini par

$$(\widetilde{U}(s)f)(t) = U(s)(t), t \in [0,T], s \in \mathbb{R}$$

pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$, le type de $(\widetilde{U}(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est strictement infèrieur à $\frac{\pi}{2}$.

L'espace Y étant UMD, $L^p(0,T;Y)$ l'est aussi. Ainsi, l'opérateur $\widetilde{A} + B$ est fermé et inversible. ■

3.3 Problème parabolique

Le théorème (3.2.1) peut être appliquer pour obtenir des résultats du $L^p(L^q)$ régularité pour les solutions du système d'équations différentielles partielles avec des conditions aux limites de types paraboliques avec des coefficients C^∞ indépendants du temps.

Soit G un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec frontière de C^∞.

Soit

$$A = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha.$$

Où $\forall x \in \overline{G}$, $a_\alpha(x)$ est une matrice $r \times r$ avec des coefficients C^∞ et

$$D^\alpha = \prod_{1\leq j\leq n} \left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}.$$

De plus, pour $k = 1, ..., mr$,

$$B_k = \sum_{|\alpha| \leq m_k} b_{k,\alpha}(x) D^\alpha$$

est un opérateur différentiel dans ∂G avec des coefficients de classe C^∞.

Soit $\gamma \in]0, \pi/2[$ et on pose

$$\sum_\gamma = \left\{ \rho e^{i\theta}; \rho \geq 0, \gamma \leq \theta \leq 2\pi - \gamma \right\}.$$

On suppose que

(i) $\forall \lambda \in \sum_\gamma$, $\forall x \in \overline{G}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\det \left(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha - \lambda I \right) \neq 0$$

(ii) $\forall \lambda \in \sum_\gamma$, $\forall x \in \overline{G}$ et pour $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ linéairement indépendant, le polynôme

$$\tau \to \det \left(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) (\xi - \tau\eta)^\alpha - \lambda I \right)$$

a des racines mr avec une partie imaginaire positive.

(iii) On pose

$$\hat{A}_\lambda(x, \xi) \det \left(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha - \lambda I \right) \left(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha - \lambda I \right)^{-1},$$

$$b_{k,\alpha}(x) = (b_{k,\alpha,1}(x), ..., b_{k,\alpha,r}(x)),$$

$$\hat{b}_{k,j}(\xi, x) = \sum_{|\alpha|=m_k} b_{k,\alpha,j}(x) \xi^\alpha.$$

$\forall x \in \partial G$, soit $v(x)$ la normale de ∂G à x. On a pour tout $\lambda \in \sum_\gamma$, $\forall x \in \partial G$ et pour tout vecteur ξ de la tangente à la frontière ∂G en point x, les lignes de la matrice

$$\left(\sum_{j=1}^r \hat{b}_{k,j}(x, \xi + \tau v(x)) (\hat{A}_\lambda)_{j,l}(x, \xi + \tau v(x)) \right)_{1 \leq k \leq mr,\ 1 \leq l \leq r}$$

être linéairement indépendant par rapport au polynôme

$$\tau \to \prod_{j=1}^{r} \left(\tau - \tau_j^+(x, \xi, \lambda)\right)$$

où $\tau_1^+(x, \xi, \lambda), ..., \tau_{mr}^+(x, \xi, \lambda)$ sont les racines avec une partie imaginaire positive du polynôme

$$\tau \to \det \left(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha (x) (\xi + \tau v)^\alpha - \lambda I \right).$$

Sous des hypothèses équivalentes à des hypothèses ci-dessus, Seeley a prouvé en [13] que le $(L^q(G))^r$ réalisation $A_{B,q}$ de l'opérateur différentiel A, sous les conditions aux limites

$$B_k u = 0(1 \leq k \leq mr)$$

satisfait les propriétés suivantes :

(iv) L'ensemble résolvant de $A_{B,q}$ contient

$$\left(\sum_\gamma \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < \delta\} \right) \setminus \{0\}.$$

pour δ assez petit et

$$\left\| (A_{B,q} - \lambda I)^{-1} \right\| = O(|\lambda|^{-1}), pour \ \ |\lambda| \to +\infty, \lambda \in \sum_\gamma.$$

(v) $\forall s \in \mathbb{R}$, $(A_{B,q})^{is}$ est borné dans $(L^q(G))^r$ avec

$$\left\| (A_{B,q})^{is} \right\| \leq C e^{\gamma|s|}.$$

Si $(L^q(G))^r$ est UMD, le théorème(3.2.1) donne:

Théorème 3.3.1 *Soient les hypothèses énumérées ci-dessus (i), (ii), (iii) vérifient et* $p \in]1, +\infty[$.

On suppose que $f \in L^p(0, T; (L^q(G))^r)$, *alors il existe une solution unique*

$$u \in W^{1,p}(0, T; (L^q(G))^r) \cap L^p(0, T; D(A_{B,q})).$$

de problème «parabolique» aux limites suivant : i

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + A(x,D)u(t,x) = f(t,x) & (t,x) \in [0,T] \times \overline{G} \\ u(0,x) = 0 & x \in \overline{G} \\ B_k(x,D)u(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,T] \times \partial\overline{G},\ l \leq k \leq mr. \end{cases}$$

3.4 Problème de Dirichlet-Neumenn

3.4.1 Hypothèses

Soit X un espace UMD, considérons le problème de type Dirichlet-Neumenn suivant:

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), x \in (0,1) \\ u(0) = d_0 \\ u'(1) = n_1 \end{cases} \tag{3.4.1}$$

L'opérateur A satisfait l'hypothèse d'éllipticité suivante

$$[0,+\infty[\subset \rho(A) \ et\ \exists C > 0 \, \|A - \lambda I\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}. \tag{3.4.2}$$

Et on a

$$d_0, n_1 \in X,\ f \in L^p(0,1;X) \text{ avec } 1 < p < +\infty \text{ et } X \text{ un espace UMD.} \tag{3.4.3}$$

De plus, l'opérateur A vérifie:

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists C \geq 1, \alpha \in]0,\pi[\,, \\ \|(-A)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} < Ce^{\alpha|s|}. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Le résultat principal dans cette section, affirme que sous les hypothèses (3.4.2), (3.4.3) et (3.4.4), le problème (3.4.1) admet une unique solution stricte dans $L^p(0,1;X)$ si et seulement si $d_0 \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}$ et $n_1 \in (D(A),X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$.

Remarque 3.4.1 *1. L'hypothèse (3.4.3) implique que X est réflexif, alors $D(A)$ dans X*

2. L'hypothèse (3.4.2) implique que l'opérateur $\left(-\sqrt{-A}\right)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique noté $\left(e^{(-\sqrt{-A})x}_{x\geq 0}\right)$ sur X.

3. *L'hypothèse (3.4.4) est équivalente à*

$$\exists C \geq 1, \alpha \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R}, \left\| \sqrt{-A^{is}} \right\| \leq Ce^{(\frac{\alpha}{2})|s|}.$$

3.4.2 lemmes techniques

On a le lemme suivant

Lemme 3.4.1 *Soit $f \in L^p(0,1;X)$, Sous les hypothèses (3.4.2), (3.4.3)et(3.4.4), on a*

1. $x \longmapsto L(x,f) = B\displaystyle\int_0^x e^{-(x-s)B} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.

2. $x \longmapsto L(1-x, f(1-\cdot)) = B\displaystyle\int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.

3. $x \longmapsto \mathcal{L}(x,f) = B\displaystyle\int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.

Preuve.

- Pour la première assertion, on peut appliquer le théorème Dore-Venni, à l'étude du problème

$$\begin{cases} u'(x) - Bu(x) = f(x), x \in (0,1), \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.4.5a}$$

alors, puisque X est un espace UMD et B est un opérateur linéaire fermé dans X vérifiant les hypothèses de Dore-Venni, alors pour tout $f \in L^p(0,1;X)$ le problème (3.4.5a) admet une solution unique stricte u telle que

$$u \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(B)).$$

avec

$$u(x) = \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s)ds$$

et donc

$$x \longmapsto B\int_0^x e^{-(x-s)B} f(s)ds \in L^p(0,1;X).$$

- L'assertion 2. découle immédiatement de la première, en posant $1-x=y$ et $1-s=t$ on obtient

$$\begin{aligned}
L(1-x, f(1-\cdot)) &= B\int_x^1 e^{-(s+1-1-x)B} f(s)ds \\
&= B\int_x^1 e^{-(1-x-(1-s))B} f(s)ds \\
&= B\int_x^1 e^{-(y-t)B} f(1-t)dt \\
&= L(y, f(1-\cdot)) \in L^p(0,1;X)
\end{aligned}$$

- En fin pour l'assertion 3, on écrit, pour tout élément $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,f) &= B\int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s)ds \\
&= B\int_0^x e^{-(x+s)B} f(s)ds + B\int_x^1 e^{-(x+s)B} f(s)ds \\
&= B\int_0^1 e^{-(x-s)B} e^{-2sB} f(s)ds + e^{-2xB} B\int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s)ds \\
&= L(x, e^{-2sB}f) + e^{-2xB} L(1-x, f(1-\cdot))
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.4.2 *On suppose (3.4.4). Alors*

1. $B^2 e^{-B}\varphi \in L^p(0,1;X)$ *si et seulement si* $\varphi \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}$.

2. $Be^{-B}\varphi \in L^p(0,1;X)$ *si et seulement si* $\varphi \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.

Remarque 3.4.2 *On suppose (3.4.2), (3.4.3) et (3.4.4), alors*

$$\begin{aligned}
-Ae^{-B}B^{-1}\int_0^1 e^{-sB} f(s)ds &= Be^{-B}\int_0^1 e^{-sB} f(s)ds \\
&= \mathcal{L}(\cdot, f).
\end{aligned}$$

du lemme (3.4.1) on obtient

$$-Ae^{-B}(B^{-1}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds) \in L^p(0,1;X)$$

d'où l'on déduit en utilisant le lemme (3.4.2) que

$$(B^{-1}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds) \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Conclusion générale

Dans une plusieurs travaux concernant les équations différentielles abstraites et leurs applications dans l'EDP élliptiques et paraboliques avec les différentes conditions aux limites (Dirichlit, Neumenn, mixtes, Robin(locale et non locale), les chercheurs ont été utiliser le théorème de Dore-Venni comme un résultat principale pour la démonstration du régularité des solutions.

Bibliographie

[1] H. AMANN. *Linear and quasilinear parabolic problems.* Birkh¨auser Verlag, Basel, 1995.

[2] A.LUNARDI *Analytic semi groups for sectoriel operators,* Springer-Verlag 1995.

[3] A.PAZY *Semi groups of operators and applications to partial differential equations;* Springer-Verlag, New York, Inc, V44, 1983.

[4] J.BOURGAIN *Some remarks on Banach spaces in which martingle difference sequences are unconditionel*, Ark.Mat. 21 (1983), 163-168.

[5] D.L.BURKHOLDER *A Geometrical characterisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditionel*, Ann. Probab., 9 (1981), 997-1011

[6] BURKHOLDER, D.L. *A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions.* In: Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zyground (Chicago 1981), pp. 270-286. Belmont:Wadsworth 1983.

[7] H.BREZIS *ANNALYSE FONCTIONNELLE , Théorie et applications, Université Pierre et Marie Curie* et Ecole Polytechnique, *année 1987 .*

[8] G.DORE AND A.VENNI *On the Closedness of the Sum of Two Closed Operators,* Math. Z. 196,189-201(1987).

[9] ERIC DUMAS ET ROMAIN JOLY. *Introduction aux EDP d'evolution.* universit´e de Grenoble.

[10] M.HASSE *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods,* Thesis, University ULM, Germany 2003.

[11] MEZEGHRANI FATIMA ZOHRA *quelques problèmes élliptiques sous forme abstraite de type mele.* année 2012, université d'Oran.

[12] S.MONNIAUX *Générateur analytique et régularité maximale, année 1995,* Université de Franche-Comté en Mathématiques et Applications.

[13] SEELEY, R. *Norms and domains of the complex powers* A_B^z. Am. J. Math. 93, 299-309 (1971)

تم بحمد الله

الملخص:

الهدف من هذا العمل هو تقديم نتيجة للحد الأقصى لانتظام حل مشكل كوشي المجرد والحد الأمثل لانتظام حل معادلة تفاضلية مجردة من الدرجة الثانية تحت شروط محدودة.

على وجه الخصوص،نقوم بعرض نظرية دوور- فييني وتطبيقاتها على المعادلات التفاضلية الجزئية.

كلمات المفتاح: معادلة تفاضلية مجردة, الحد الأقصى للانتظام , نظرية دوور-فييني.

Résumé :

Le but de ce travail est de donner un résultat de régularité maximale d'un problème de Cauchy abstrait et une régularité optimale pour un problème aux limites d'une équation différentielle abstraites du second ordre.

En particulier, on s'intéresse à la représentation de théorème de Dore-Venni et ses applications dans les EDP.

Mots-clés :

Équations différentielles abstraites, régularité maximale, théorème de Dore-Venni.

Abstract:

The aim of this work is to give a result concerning maximal regularity of abstract Cauchy problem and an optimal regularity of boundary value problems for an abstract differential equations of second order.

In particular, we are interested to show Dore-Venni theorem and its applications for EDP.

Key Words :

Abstract differential equations, maximal regularity, Dore-Venni theorem.