

UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin D'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Spécialité :ANALYSE FONCTIONAL

Par

Naamoune El-arime

sujet

Opérateur linéaire Cohen $(p-q)$ nucléaire

Encadreur: Dahmane Achour

Promotion:2014/2015

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier mes promoteurs : Mr le professeur ACHOUR Dahmane pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience.

Ms Ahlem Alouani qui ma aussi aider avec ses conseils, les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite leurs transmettent ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci

Résumé

Dans ce mémoire, on traitera le concept des opérateurs linéaires Cohen (p, q) -nucléaires. On a détaillé les propriétés élémentaires puis la relation avec quelques opérateurs sommants.

Comme conséquence nous montrons qu'un opérateur linéaire est p -nucléaire si et seulement si son adjoint est p^* -nucléaire.

Mots clés. L'espace de suite fortement p -sommants, les opérateurs sommants, la classe des opérateurs linéaires (p, q) -nucléaires.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaire	2
1.1 Espace de Banach	2
1.2 Espaces de suites	5
1.3 Opérateurs sommants	9
2 L'idéal des opérateurs linéaires Cohen (p,q)-nucléaire	11
2.1 Définition et propriétés	11
2.2 Relation avec $D_{p,q}(X, Y)$ et $\Pi_{p,q}(X, Y)$	20
3 Théorèmes de domination et de factorisation	22
3.1 Théorème de domination	22
3.2 Théorème de factorisation	27
3.3 L'adjoint d'un opérateur p -nucléaire	28

Introduction

Dans ce mémoire on présente la classe des opérateurs p -nucléaires introduite par J. S. Cohen en 1973 [5], étudiée ensuite par Apiola [2] et généralisée par Achour-Alouani en 2010 dans [1] pour les opérateurs multinéaires. On a détaillé les propriétés élémentaires puis la relation avec les autres concepts des opérateurs sommants.

Notre travail de mémoire est divisé en trois chapitres qui sont les suivants:

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions (suite de Cauchy, ensemble convexe, ..., etc) et on donne un aperçu général sur les espaces de suites faiblement p -sommables et l'espace de suites fortement p -sommables, puis on donne des propriétés, enfin on définit les opérateurs (p, q) -sommants et les opérateurs fortement (p, q) -sommants comme des opérateurs continus entre espaces de suites.

Le deuxième chapitre, on étudie la classe des opérateurs linéaires Cohen (p, q) -nucléaire. On montre que les opérateurs Cohen (p, q) -nucléaire est représenté comme des opérateurs continus entre espaces des suites faiblement q -sommables et espaces des suites fortement p -sommables. On donnera quelques propriétés et comme conséquence on montre que la classe des opérateurs linéaires Cohen (p, q) -nucléaire est un idéal de Banach.

On termine ce travail par le troisième chapitre, on a détaillé les théorèmes de domination et de factorisation.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et propriétés qui sont importantes et utilisées dans ce mémoire, pour plus de détails voir [4, 8, 12]. Puis on définit l'espace des suites faiblement p -sommable et l'espace des suites fortement p -sommable, on donnera la relation entre les deux et en termine ce chapitre par quelques définitions des opérateurs sommants.

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 (*Suite de Cauchy*)

Soit (X, d) un espace métrique. On appelle suite de Cauchy dans X une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall m, n \geq n_0 : d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Définition 1.1.2 (*Espace complet*)

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est complet si toute suite de Cauchy converge dans X .

Définition 1.1.3 (*Espace vectoriel normé*)

Soit X un espace vectoriel. On appelle norme une application $\|\cdot\|$ de X dans \mathbb{R}_+ qui vérifie:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$$

On appelle espace vectoriel normé un espace vectoriel muni d'une telle application. C'est un espace métrique pour la norme $d(x, y) = \|x - y\|$

Définition 1.1.4 (*Espace de Banach*)

On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Proposition 1.1.1 Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y . C'est un espace vectoriel normé pour la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \neq y} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

Si Y est complet alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach, lorsque $Y = X$. On notera simplement $\mathcal{L}(E)$ l'espace $\mathcal{L}(E, E)$.

Définition 1.1.5 (*Ensemble convexe*)

Soit X un espace vectoriel et A une partie de X . On dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

Définition 1.1.6 (*Semi-continue inférieure*)

Soit X un espace topologique. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dite semi-continue inférieurement si l'une des trois propriétés sont vérifiées:

i) L'épigraphe $\text{epi}(\varphi) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq y\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.

ii) L'ensemble $\{x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans X pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) Pour tout $x \in X$, toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers x , on a:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} \varphi(x_k)) \geq \varphi(x)$$

Définition 1.1.7 (*Convexité*)

Soit X un espace vectoriel. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dite convexe si son épigraphe est convexe. De façon équivalente, on dira que φ est convexe si $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

Définition 1.1.8 (*Adjoint d'une application linéaire continue*)

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. On définit l'adjoint de T comme l'application T^* de Y^* dans X^* définie par :

$$\langle T^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, T(x) \rangle, \forall x \in X \text{ et } \forall y^* \in Y^*.$$

On a $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ et $\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} = \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$

Définition 1.1.9 (*Théorème de graphe fermé*)

Soient X et Y deux espaces de Banach, alors $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$.

Définition 1.1.10 (*Théorème de Banach-Steinhaus*)

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et $(T_n)_n$ une famille de suites dans $\mathcal{L}(X, Y)$.

On suppose que X est complet et que, pour tout $x \in X$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|_Y < \infty.$$

On a alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty.$$

Théorème 1.1.1 (*Théorème de Hahn Banach, forme géométrique*)

Soient C un sous-ensemble convexe, fermé, non vide, et $x \in X \setminus C$. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement C et $\{x\}$, c'est-à-dire

$$\exists \varphi \in X^*, \exists \epsilon > 0, \langle \varphi, y \rangle \leq \langle \varphi, x \rangle - \epsilon \quad \forall y \in C$$

Théorème 1.1.2 (*Théorème de Goldstine.*)

La boule unités B_X de X est $\sigma(X^{**}, X^*)$ -dense dans la boule unité $B_{X^{**}}$ de X^{**}

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes ($X \sim Y$) s'il existe un opérateur inversible I (dit isomorphisme) de X dans Y . Un opérateur linéaire continue $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continue $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques ($X \simeq Y$) s'il existe une isométrie entre X et Y .

1.2 Espaces de suites

Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$. Rappelons que $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$ est l'espace vectoriel des suites de scalaires $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p$ converge. Alors $\ell_p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$ définie par:

pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$, on a:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace des suites de scalaires $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées muni de la norme:

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté $\ell_\infty(\mathbb{N})$ où tout simplement ℓ_∞ . On notera $c_0(\mathbb{N})$ où tout simplement c_0 le sous-espace fermée de ℓ_∞ des suites qui convergent vers zéro.

On désignera par X, Y deux espaces de Banach et X^*, Y^* sont leurs espaces duaux. Soit $1 \leq p^* \leq \infty$ le conjugué de p telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Définition 1.2.1 (*L'espace des suites p -sommables*)

Une suite (x_n) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X est absolument p -sommables si la suite scalaire $(\|x_n\|)$ (resp. $(\|x_i\|)_{1 \leq i \leq n}$) est dans ℓ_p .

On note $\ell_p(X)$ (resp. $\ell_p^n(X)$) l'espace des suites (x_n) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X absolument p -sommables muni de la norme:

$$\begin{aligned} \|(x_n)_n\|_{\ell_p(X)} &= \|(x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)} &= \|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n \|x_n\| & \text{si } p = \infty \end{aligned}$$

L'espace de suites faiblement p -sommables

Définition 1.2.2 Une suite (x_n) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X est faiblement p -sommables si la suite scalaire $(x^*(x_n))$ (resp. $(x^*(x_i)_{1 \leq i \leq n})$) est dans ℓ_p pour tout $x^* \in X^*$.

On note $\ell_p^w(X)$ (resp. $\ell_p^{nw}(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X faiblement p -sommables i.e.

$$\ell_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : \langle x^*, x_n \rangle_n \in \ell_p, x^* \in X^*\}.$$

muni de la norme:

$$\begin{aligned}\|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} &= \|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x^*; x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty^w(X)} &= \|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_n |\langle x^*; x_n \rangle| \quad \text{si } p = \infty\end{aligned}$$

Nous considérons les relations entre les espaces de suites.

Théorème 1.2.1 Soit X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$

i) $\ell_\infty^w(X) = \ell_\infty(X)$,

ii) $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ si et seulement si $\dim(X)$ est finie.

Démonstration.

i) On a:

$$\begin{aligned}\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty^w(X)} &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_n |\langle x^*; x_n \rangle| = \sup_n \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^*; x_n \rangle| \\ &= \sup_n |\langle x^*; x_n \rangle| = \sup_n \|x_n\| \\ &= \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)}\end{aligned}$$

ii) On montre que $\ell_p^w(X)$ est un espace de Banach

a) On montre que $\|\cdot\|_{\ell_p^w(X)}$ est fini, et pour ce qui nous appliquons le théorème de graphe fermé. Soit $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, on peut associer à x l'opérateur

$$T : X^* \longrightarrow \ell_p$$

définie par:

$$T(x^*) = (x^*(x_n))_n$$

T est bien définie et linéaire.

Si $(x_n^*)_n$ converge vers $x^* \in X^*$, et $T(x_k^*)_k = (x_k^*(x_n))_k$ est converge vers $y = (y_i)_i \in \ell_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ Par conséquent T est de graphe fermé et donc borné, en d'autre terme

$$\|T\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|x^*(x_n)\|_p = \|(x_n)\|_{p,w} < \infty$$

qui est ce qui nous voulions.

On peut conclure facilement que $\|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)}$ est une norme

b) $\ell_p^w(X)$ est complet.

Si $p = \infty$ on a $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$, il est donc que $\ell_\infty^w(X)$ est un Banach.

Pour $1 \leq p < \infty$.

Soient X est un espace de Banach et $x^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq:
 $\forall K, K' \geq N$ on a:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \langle x^*, x_n^k \rangle - \langle x^*, x_n^{k'} \rangle \right|^p \leq \epsilon^p \quad (1.2.1)$$

Pour tout $x^* \in B_{X^*}$.chaque terme de cette série est dominée par ϵ^p ,donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x_n^k - x_n^{k'} \right\| = \sup \left\{ \left| \langle x_n^k, x^* \rangle - \langle x_n^{k'}, x^* \rangle \right| : x^* \in B_{X^*} \right\} \leq \epsilon$$

Ce qui montre que la suite $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X , comme X est complet, elle est donc convergente vers une limite x_n , ça nous permet d'associer à chaque composante une limite, donc la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite qui est $x = (x_n)_n$

Il reste de vérifier que $x \in \ell_p^w(X)$.

D'après (1.2.1) et soit k tend vers l'infinie .Alors ,quand $k \geq N$, on a :

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \langle x^*, x_n - x_n^k \rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \forall x^* \in B_{X^*}$$

donc $x - x^k$ et x appartient a $\ell_p^w(X)$. ■

Proposition 1.2.1 Soit $1 < p \leq \infty$,on a :

$\ell_p^w(X) = \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$ isométrique. En d'autre terme , soit $v : \ell_{p^*} \rightarrow X$ un opérateur linéaire telle que $v(e_i) = x_i$ et $\{e_i\}$ est la base canonique de ℓ_{p^*} . Alors

$$\|v\| = \|(x_n)\|_{p,w}$$

Démonstration. Soient $\{e_i\}$ est la base canonique de ℓ_{p^*} , $v(e_i) = x_i$ et $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$

On a :

$$\begin{aligned}
 \|v\| &= \sup_{\alpha \in \ell_{p^*}} \|v(\alpha)\|_X \\
 &= \sup_{\alpha \in \ell_{p^*}} \left(\sup_{\epsilon \in B_{X^*}} |\langle v(\alpha), \epsilon \rangle| \right) \\
 &= \sup_{\epsilon \in B_{X^*}} \left(\sup_{\alpha \in \ell_{p^*}} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v(e_i), \epsilon \rangle \right| \right) \\
 &= \sup_{\epsilon \in B_{X^*}} \sup_{\alpha \in \ell_{p^*}} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, \epsilon \rangle \right| \\
 &= \sup_{\epsilon \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, \epsilon \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left\| (x_n)_{i=1}^n \right\|_{\ell_p^w(X)}
 \end{aligned}$$

■

Espaces de suites fortement p-sommables

Définition 1.2.3 Soit $1 \leq p < \infty$, une suite $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ est dite fortement p-sommable, si pour tout $(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i) < \infty$ dans ce cas on note $\ell_p^s\langle X \rangle$ l'espace de suites $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ dans X fortement p-sommable.

Proposition 1.2.2 Soit $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite dans X , la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i)$ est convergente pour toute

$(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$ si et seulement si la série $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*(x_i)|$ est convergente pour toute $(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$.

Théorème 1.2.2 Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a:

1. L'espace $\ell_p^s\langle X \rangle$ est un espace normé de la norme définie par :

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\langle p \rangle} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i) \right| : \|(x_i^*)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*,w} \leq 1 \right\}.$$

De plus $(\ell_p^s\langle X \rangle, \|\cdot\|_{\langle p \rangle})$ est un espace de Banach.

2. $\ell_p^s \langle X \rangle \subseteq \ell_p(X) \subseteq \ell_p^w(X)$ de plus $\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{s,p}$, pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p^s \langle X \rangle$
3. Si $p = 1$, on a $\ell_1^s \langle X \rangle = \ell_1(X)$ et $\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_1 = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{s,1}$.

1.3 Opérateurs sommants

Les opérateurs p-sommants

Nous allons donner la notion des opérateurs p -sommants (voir [7]). Une présentation générale des "idéaux d'opérateurs" est donnée par Pietsch [13] et étudiée ensuite par J. Lindenstrauss et A. Pełczyński en 1968 [11] puis par B. Maurey en 1973.

Définition 1.3.1 Soient $1 \leq q \leq p \leq \infty$ et X, Y deux espaces de Banach, un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est absolument (p, q) -sommant (où (p, q) -sommant) si:

l'opérateur:

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \ell_q^w(X) &\longrightarrow \ell_p(Y) \\ (x_i)_{i=1}^\infty &\longmapsto \tilde{T}((x_i)_{i=1}^\infty) = (T(x_i))_i \end{aligned}$$

est bien définie

La classe des opérateurs linéaires (p, q) -sommants de X dans Y , noté $\pi_{p,q}(X, Y)$. Pour $p = q$, $\pi_{p,q}(X, Y) = \pi_p(X, Y)$, la classe des opérateurs p -sommants $\pi_p(X, Y)$

$\pi_{p,q}(X, Y)$ est un espace de Banach muni de la norme $\pi_{p,q}(T) = \|\tilde{T}\|$

D'après le théorème du graphe fermé, on peut définir l'espace des suites linéaires (p, q) -sommants comme suit:

$$\pi_{p,q}(X, Y) = \left\{ T \in \mathcal{L}(X, Y) / \exists c > 0 : \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w}, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X \right\}$$

Les opérateurs fortement p-sommants

On présente la classe des opérateurs fortement p -sommants étudiée par J.S Cohen. [5] ensuite H. Apiola [2] donne la notation des opérateurs fortement (p, q) -sommants

Définition 1.3.2 Soit X, Y deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $1 \leq q, p \leq \infty$. On dit que T est fortement (p, q) -sommants s'il existe un opérateur linéaire induite est bien défini:

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \ell_q(X) &\longrightarrow \ell_p^s(X) \\ (x_i)_i &\longrightarrow \tilde{T}((x_i)_i) = (T(x_i))_i \end{aligned}$$

(i.e., $\tilde{T}(\ell_q(X)) \subset \ell_p^s(X)$)

On note

$$\mathcal{D}_{p,q}(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaire fortement } (p, q) \text{-sommants}\}$$

Où bien on dit que $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$, s'il existe une constante positive C , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a:

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_q \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*, w}$$

Pour $p = 1$, on a: $\mathcal{D}_{1,q}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Pour $p = q$, on note $\mathcal{D}_p(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires fortement p -sommants.

$\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ est un espace de Banach, muni de la norme définie par $d_{p,q}(T) = \|\tilde{T}\| = \inf C$, telle que C la constante qui vérifie la dernière inégalité

Théorème 1.3.1 Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur entre deux espaces de Banach. Alors T est fortement p -sommant si et seulement si son adjoint $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ est p^* -sommant de plus on a: $\pi_{p^*}(T^*) = d_p(T)$

Chapitre 2

L'idéal des opérateurs linéaires Cohen (p,q)-nucléaire

Dans ce chapitre, on présente la classe des opérateurs (p, q) -nucléaires introduite par J. S. Cohen en 1973 [4] pour $p = q$ et étudiée ensuite par Apiola [2] pour $1 \leq p, q < \infty$. On a détaillé les propriétés élémentaires puis la relation avec les autres concepts des opérateurs sommants.

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1.1 (*Opérateur linéaire de rang fini*)

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang fini s'il est somme fini d'opérateurs de la forme:

$$\begin{aligned} x^* \otimes y : X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow x^* \otimes y(x) = x^*(x)y \end{aligned}$$

où $x^* \in X^*$ et $y \in Y$

L'espace des opérateurs linéaire de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X, Y)$.

Définition 2.1.2 (*Idéal linéaire*)

Un idéal d'opérateur linéaire \mathcal{I} est un classe d'opérateurs tels que:
pour tout X et Y Banach, on a:

1. $\mathcal{I}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$

2. $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset \mathcal{I}(X, Y)$

3. propriétés d'idéal: si $T \in \mathcal{I}(X, Y)$, $u \in \mathcal{L}(E, X)$ et $v \in \mathcal{L}(Y, F)$, on a:

$$v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(E, F)$$

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait:

i) $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est un espace normé (Banach)

$$\text{ii) } \left\| \begin{array}{l} A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longrightarrow A(\lambda) = \lambda \end{array} \right\|_{\mathcal{I}} = 1$$

$$\text{iii) } \|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|,$$

alors, $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ s'appelle idéal de Banach des opérateurs linéaires.

Définition 2.1.3 (Opérateur linéaire Cohen (p, q) -nucléaire)

Soient X et Y deux espaces de Banach, $1 \leq p, q \leq \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X; Y)$. On dira que T est Cohen (p, q) -nucléaire, s'il existe une constante positive C telle que :

pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^* \in Y^*$

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \quad (2.1.1)$$

On note:

$$N_{p,q}(X; Y) := \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaire Cohen } (p, q)\text{-nucléaire}\}$$

et

$$n_{p,q}(T) = \inf \{C, \text{ vérifiant la définition (2.1.1)}\}$$

Théorème 2.1.1 Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $T \in N_{p,q}(X, Y)$ si et seulement si l'opérateur linéaire induit est bien défini

$$\begin{aligned} \tilde{T} & : \ell_q^w(X) \longrightarrow \ell_p^s\langle Y \rangle \\ (x_n)_n & \longmapsto \tilde{T}((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{aligned}$$

(i.e., $\tilde{T}(\ell_q^w(X)) \subset \ell_p^s\langle Y \rangle$). Dans ce cas $n_{p,q}(T) = \|\tilde{T}\|$.

Démonstration. On suppose que $\tilde{T}(\ell_q^w(X)) \subset \ell_p^s\langle Y \rangle$ et $T \notin N_{p,q}(X, Y)$. Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite finie $(x_i^n)_{i=1}^{m_n} \subset X$ telle que:

$$\|(x_i^n)_{i=1}^{m_n}\|_{q,w} \leq 1$$

et

$$\|(T(x_i^n))_{i=1}^{m_n}\|_{p,s} \geq 2^n$$

On considère la suite

$$(x_i^n 2^{-n})_{i \in \mathbb{N}} = (x_1^1 2^{-1}, \dots, x_{m_1}^1 2^{-1}, x_1^2 2^{-2}, \dots, x_{m_2}^2 2^{-2}, \dots)$$

On trouve

$$\|(x_i^n 2^{-n})_{i \in \mathbb{N}}\|_{q,w} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_i^n 2^{-n})_{i=1}^{m_n}\|_{q,w} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^q}\right)^i \right]^{\frac{1}{q}} = 1.$$

et

$$\|(T(x_i^n 2^{-n}))_{i \in \mathbb{N}}\|_{p,s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(T(x_i^n 2^{-n}))_{i=1}^{m_n}\|_{p,s} = \infty.$$

Donc, contradiction avec l'hypothèse $\tilde{T}(\ell_q^w(X)) \subset \ell_p^s\langle Y \rangle$.

Inversement. On suppose que $T \in N_{p,q}(X, Y)$. Si $(x_i)_{i=1} \in \ell_q^w(X)$, alors pour n fixé et pour tout $(y_i^*)_{i=1} \in \ell_{p^*}^w(Y^*)$ avec $\|(y_i^*)_{i=1}\|_{p^*,w} \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \\ &\leq n_{p,q}(T) \|(x_i)_{i=1}\|_{q,w}^{\infty}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Alors, la série $\sum_{i=1}^{\infty} \langle T(x_i), y_i^* \rangle$ est convergente et $(T(x_i))_{i=1} \in \ell_p^s\langle Y \rangle$. De plus l'inégalité (2.1.2) implique que \tilde{T} est continu et $\|\tilde{T}\| \leq n_{p,q}(T)$. ■

Remarque 2.1.1 Pour $p < q$, $N_{p,q}(X, Y) = \{0\}$.

Démonstration. Soit $(\lambda_j)_j \in \ell_{\frac{qp^*}{q+p^*}} - \ell_1$. On suppose que $T \neq 0$ et $T \in N_{p,q}(X, Y)$

Soient $(\lambda_j x)_j \subset X$ et $y^* \in Y$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n |\langle T(\lambda_j x), y^* \rangle| &= \sum_{j=1}^n |y^* T(\lambda_j x)| \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j^{\left(\frac{qp^*}{q+p^*}\right)\frac{1}{p^*}} y^* \cdot T\left(\lambda_j^{\left(\frac{qp^*}{q+p^*}\right)\frac{1}{q}} x\right) \right) \\
 &\leq n_{p,q}(T) \left\| \lambda_j^{\left(\frac{qp^*}{q+p^*}\right)\frac{1}{q}} x \right\|_{q,w} \cdot \left\| \lambda_j^{\left(\frac{qp^*}{q+p^*}\right)\frac{1}{p^*}} y^* \right\|_{p^*,w} \\
 &= n_{p,q}(T) \|x\| \|y^*\| \left\| \lambda_j^{\left(\frac{qp^*}{q+p^*}\right)\frac{1}{q}} \right\|_q \cdot \left\| \lambda_j^{\left(\frac{qp^*}{q+p^*}\right)\frac{1}{p^*}} \right\|_{p^*}
 \end{aligned}$$

Alors

$$|y^*(T(x))| \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \leq n_{p,q}(T) \|x\| \|y^*\| \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^{\frac{qp^*}{q+p^*}} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^{\frac{qp^*}{q+p^*}} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

Donc

$$\|T\| \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \leq n_{p,q}(T) \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^{\frac{qp^*}{q+p^*}} \right)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p^*}} < \infty$$

Donc $(\lambda_j) \in \ell_1$ contradiction.

D'où $N_{p,q}(X, Y) = \{0\}$ pour $p < q$. ■

Théorème 2.1.2 Soient X, Y deux espaces de Banach et $1 \leq p, q \leq \infty$

1. Si $T \in N_{p,q}(X, Y)$ alors T est continue et $\|T\| \leq n_{p,q}(T)$.
2. $N_{p,q}(X, Y)$ est un espace de Banach.

Preuve.

1. On suppose que $T \in N_{p,q}(X, Y)$

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq n_{p,q}(T) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w}$$

Pour $n = 1$, on a:

$$\begin{aligned}
 |\langle T(x), y^* \rangle| &\leq n_{p,q}(T) \|x\| \|y^*\| \\
 &\leq n_{p,q}(T) \|x\| \|y^*\|
 \end{aligned}$$

et on a:

$$\|T(x)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |\langle T(x), y^* \rangle| \leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} n_{p,q}(T) \|x\| \|y^*\|$$

Alors

$$\|T(x)\| \leq n_{p,q}(T) \|x\|$$

D'où T est continue et $\|T\| \leq n_{p,q}(T)$

2. $N_{p,q}(X, Y)$ est un espace de Banach.

(i) $N_{p,q}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel normé de $\mathcal{L}(X, Y)$

(a) Soit T et $S \in N_{p,q}(X, Y)$. Pour tout $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \subset X$ et $(y_k^*)_{1 \leq k \leq n} \subset Y^*$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\langle (T+S)(x_k), y_k^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_k) + S(x_k), y_k^* \rangle| = \sum_{i=1}^n |\langle T(x_k), y_k^* \rangle + \langle S(x_k), y_k^* \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_k), y_k^* \rangle| + |\langle S(x_k), y_k^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_k), y_k^* \rangle| + \sum_{i=1}^n |\langle S(x_k), y_k^* \rangle| \\ &\leq n_{p,q}(T) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} + \\ &\quad n_{p,q}(S) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \\ &\leq (n_{p,q}(T) + n_{p,q}(S)) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

D'où $T + S \in N_{p,q}(X, Y)$ et $n_{p,q}(T + S) \leq n_{p,q}(T) + n_{p,q}(S)$

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{k}$ et $T \in N_{p,q}(X, Y)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\langle (\alpha T)(x_k), y_k^* \rangle| &= \sum_{k=1}^n |\langle T(\alpha x_k), y_k^* \rangle| \\ &\leq n_{p,q}(T) \|(\alpha x_k)_{k=1}^n\|_{q,w} \|(y_k^*)_{k=1}^n\|_{p^*,w} \\ &\leq |\alpha| n_{p,q}(T) \|(x_k)_{k=1}^n\|_{q,w} \|(y_k^*)_{k=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Alors $\alpha T \in N_{p,q}(X, Y)$ et

$$n_{p,q}(\alpha T) \leq |\alpha| n_{p,q}(T)$$

D'autre part

$$n_{p,q}(T) = n_{p,q}\left(\alpha T \cdot \frac{1}{\alpha}\right) \leq \frac{1}{|\alpha|} n_{p,q}(\alpha T), \quad \alpha \neq 0$$

Ce qui implique que

$$|\alpha| n_{p,q}(T) \leq n_{p,q}(\alpha T).$$

D'où

$$n_{p,q}(\alpha T) = |\alpha| n_{p,q}(T)$$

(c) Soit $T \in N_{p,q}(X, Y)$ tel que $n_{p,q}(T) = 0$.

D'après (1) on a :

$$\|T\| \leq n_{p,q}(T) = 0 \implies \|T\| = 0 \implies T = 0.$$

De (a),(b) et (c) $N_{p,q}(X, Y)$ est un espace vectoriel normé.

(ii) $N_{p,q}(X, Y)$ est complet. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $N_{p,q}(X, Y)$.

D'après (1) on a:

$$\|T_n - T_m\| \leq n_{p,q}(T_n - T_m).$$

Donc $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X, Y)$. Alors converge vers une limite

$$T \in \mathcal{L}(X, Y)$$

Soit $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0 : n_{p,q}(T_n - T_m) \leq \epsilon.$$

Soient $l \in \mathbb{N}, (x_1, \dots, x_l) \subset X$ et $(y_1^*, \dots, y_l^*) \subset Y^*$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l |\langle (T_n - T_m)(x_k), y_k^* \rangle| &\leq n_{p,q}(T_n - T_m) \|(x_k)_{k=1}^l\|_{q,w} \|(y_k^*)_{k=1}^l\|_{p^*,w} \\ &\leq \epsilon \|(x_k)_{k=1}^l\|_{q,w} \|(y_k^*)_{k=1}^l\|_{p^*,w}. \end{aligned}$$

$\forall n, m > n_0$ et pour m tend vers à l'infinie on trouve

$$\sum_{k=1}^l |\langle (T_n - T)(x_k), y_k^* \rangle| \leq \epsilon \|(x_k)_{k=1}^l\|_{q,w} \|(y_k^*)_{k=1}^l\|_{p^*,w}$$

Donc $\forall n > n_0, (T_n - T) \in N_{p,q}(X, Y)$ et $n_{p,q}(T_n - T) \leq \epsilon$, finalement $T = (T - T_n) + T_n \in N_{p,q}(X, Y)$

Alors $(N_{p,q}(X, Y); n_{p,q}(\cdot))$ est un espace de Banach.

■

Proposition 2.1.1 $(N_{p,q}(X, Y); n_{p,q}(\cdot))$ est un idéal de Banach.

- L'ensemble des opérateurs linéaires de rang fini inclue dans l'ensemble des opérateurs linéaires Cohen (p, q) -nucléaire (i.e $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset N_{p,q}(X, Y)$).
- Propriété d'idéal:

Soient $v \in \mathcal{L}(E, X), T \in N_{p,q}(X, Y)$ et $u \in \mathcal{L}(Y, F)$

$n_{p,q}(\cdot)$ satisfait:

- i) $n_{p,q}(u \circ T \circ v) \leq \|u\| n_{p,q}(T) \|v\|$.
- ii) $(N_{p,q}(X, Y); n_{p,q}(\cdot))$ est un espace de Banach.
- iii) $\|A : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; A(x) = x\| = 1$ (i.e $n_{p,q}(T) = 1$).

Démonstration.

- Soit $T \in \mathcal{L}_f(X, Y)$

Il suffit de montrer que l'opérateur de rang 1 $(T(x) = x^*(x)y)$ est dans $N_{p,q}(X, Y)$

Soit $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \subset X, (y_k^*)_{1 \leq k \leq n} \subset Y^*$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\langle T(x_k), y_k^* \rangle| &= \sum_{k=1}^n |\langle x^*(x_k)y, y_k^* \rangle| = \sum_{k=1}^n |\langle x^*, x_k \rangle| |\langle y, y_k^* \rangle| \\ \text{I. H} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\langle x^*, x_k \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle y, y_k^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

D'après le théorème d'inclusion pour les espaces ℓ_p puisque $p \geq q$ on a $\ell_q \subset \ell_p$ et $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$ donc on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\langle T(x_k), y_k^* \rangle| &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\langle x^*, x_k \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle y, y_k^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|x^*\| \|y\| \left(\sum_{k=1}^n \left| \left\langle \frac{x^*}{\|x^*\|}, x_k \right\rangle \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y_k^* \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|x\| \|y\| \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \xi, x_k \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_Y} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \varphi, y_k^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|x\| \|y\| \|(x_k)\|_{q,w} \|(y_k^*)\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

D'où $T \in N_{p,q}(X, Y)$ et $n_{p,q}(T) \leq \|x\| \|y\|$

D'autre part :

$$\|x\| \|y\| = \|T\| \leq n_{p,q}(T) \leq \|x\| \|y\|. \text{ Donc } n_{p,q}(T) = \|x\| \|y\|$$

• Propriété d'idéal:

i) Soient $(z_1, \dots, z_n) \subset E$ et $(f_1^*, \dots, f_n^*) \subset F^*$

$$E \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{v} F$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\langle (v \circ T \circ u)(z_k), f_k^* \rangle| &= \sum_{k=1}^n |\langle T(u(z_k)), v^*(f_k^*) \rangle| \\ &\leq n_{p,q}(T) \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle u(z_k), \alpha \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\beta \in B_Y} \left(\sum_{k=1}^n |\langle v^*(f_k^*), \beta \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq n_{p,q}(T) \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle z_k, u^*(\alpha) \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\beta \in B_Y} \left(\sum_{k=1}^n |\langle f_k^*, v(\beta) \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} u^* &: X^* \longrightarrow E^* \\ \alpha &\longmapsto u^*(\alpha) \end{aligned}$$

alors

$$\xi = \frac{u^*(\alpha)}{\|u^*(\alpha)\|} = \frac{u^*(\alpha)}{\|u(\alpha)\|} \in B_{E^*}$$

et on pose

$$\begin{aligned} v & : Y \longrightarrow F \\ \beta & \longmapsto v(\beta) \end{aligned}$$

alors

$$\varphi = \frac{v(\beta)}{\|v(\beta)\|}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |\langle (v \circ T \circ u)(z_k), f_k^* \rangle| \\ & \leq n_{p,q}(T) \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \|u^*(\alpha)\| \left(\sum_{k=1}^n \left| \left\langle z_k, \frac{u^*(\alpha)}{\|u^*(\alpha)\|} \right\rangle \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \sup_{\beta \in B_Y} \|v(\beta)\| \left(\sum_{k=1}^n |\langle f_k^*, v(\beta) \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq \|u^*\| n_{p,q}(T) \|v\| \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle z_k, \xi \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_Y} \left(\sum_{k=1}^n |\langle f_k^*, \varphi \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq \|u\| n_{p,q}(T) \|v\| \|(z_k)\|_{q,w} \|(f_k^*)\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Alors $v \circ T \circ u \in N_{p,q}(X, Y)$ et $n_{p,q}(v \circ T \circ u) \leq \|u\| n_{p,q}(T) \|v\|$

ii) $(N_{p,q}(X, Y); n_{p,q}(\cdot))$ est un espace de Banach

iii) $n_{p,q}(T) = 1$

D'après le théorème (2.1.2) on a:

$$n_{p,q}(id_{\mathbb{k}}) \geq \|id_{\mathbb{k}}\| = 1$$

Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $n_{p,q}(id_{\mathbb{k}}) \leq 1$

Si $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \ell_p^w(X)$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ell_q^w(X)$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |y_i^*(id_{\mathbb{k}}(x_i))| &= \sum_{i=1}^n |y_i^*(x_i)| \\ \text{I.H} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i^*|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

D'autre part on a les coïncidences $\ell_{p^*}^w(\mathbb{k}) = \ell_{p^*}$ et $\ell_q^w(\mathbb{k}) = \ell_q$, alors:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |y_i^*(id_{\mathbb{k}}(x_i))| &\leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i^*|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*} \cdot \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_q \\ &= \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*,w} \cdot \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{q,w} \end{aligned}$$

D'où

$$n_{p,q}(id_{\mathbb{k}}) = 1.$$

■

Théorème 2.1.3 (Théorème d'inclusion)

Soit $q_1 \leq q_2, p_1 \leq p_2$, alors $N_{p_1, q_2}(X, Y) \subseteq N_{p_2, q_1}(X, Y)$ et $n_{p_2, q_1}(T) \leq n_{p_1, q_2}(T)$ pour tout $T \in N_{p_1, q_2}(X, Y)$.

Preuve. Soient $q_1 \leq q_2, p_1 \leq p_2$ et $u \in N_{p_1, q_2}(X, Y)$. Pour $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ D'après les inclusions $\ell_{q_1}^w(X) \subset \ell_{q_2}^w(X)$ et $\ell_{p_2^*}^w(X) \subset \ell_{p_1^*}^w(X)$ on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle ux_i, y_i^* \rangle| &\leq n_{p_1, q_2}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{q_2, w} \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p_1^*, w} \\ &\leq n_{p_1, q_2}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{q_2, w} \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p_2^*, w} \\ &\leq n_{p_1, q_2}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{q_1, w} \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p_2^*, w} \end{aligned}$$

alors $T \in N_{p_2, q_1}(X, Y)$ et $n_{p_2, q_1}(T) \leq n_{p_1, q_2}(T)$. ■

2.2 Relation avec $D_{p,q}(X, Y)$ et $\Pi_{p,q}(X, Y)$

Proposition 2.2.1 Soit $1 \leq q \leq p \leq \infty$

1. $N_{p,q}(X, Y) \subseteq D_{p,q}(X, Y)$ et $d_{p,q}(T) \leq n_{p,q}(T)$
2. $N_{p,q}(X, Y) \subseteq \Pi_{p,q}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}(T) \leq n_{p,q}(T)$
3. Si $T \in \Pi_{p,q}(X, Y)$ et $S \in D_p(X, Y)$ alors $S \circ T \in N_{p,q}(X, Y)$

Démonstration. Soient $x_1, \dots, x_n \in X, y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ et $z_1^*, \dots, z_n^* \in Z$

1. Soit $T \in N_{p,q}(X, Y)$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, T(x_i) \rangle| &\leq n_{p,q}(T) \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \sup_{\|y^*\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq n_{p,q}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{q, w} \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*, w} \end{aligned}$$

D'après le théorème (1.2.2) on a:

$$\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, T(x_i) \rangle| \leq n_{p,q}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_q \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*,w}$$

alors $T \in D_{p,q}(X, Y)$ et $d_{p,q}(T) \leq n_{p,q}(T)$

D'ou: $N_{p,q}(X, Y) \subseteq D_{p,q}(X, Y)$ et $d_{p,q}(T) \leq n_{p,q}(T)$

2. Soit $T \in N_{p,q}(X, Y)$

On a:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| : \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*} \leq 1 \right\} \quad (**)$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| &\leq \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, T(x_i) \rangle| \\ &\leq n_{p,q}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_q \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

D'après de (**). Si on prend le sup sur la boule unité de $\ell_{p^*}^w(Y^*)$ on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq n_{p,q}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{q,w} \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*,w} \\ &\leq n_{p,q}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{q,w} \end{aligned}$$

alors $T \in \Pi_{p,q}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}(T) \leq n_{p,q}(T)$

D'où $N_{p,q}(X, Y) \subseteq \Pi_{p,q}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}(T) \leq n_{p,q}(T)$

3. On suppose que : $T \in \Pi_{p,q}(X, Y)$ et $S \in D_p(Y, Z)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle ST(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle S(T(x_i)), y_i^* \rangle| \\ &\leq d_p(S) \|(T(x_i))_{1 \leq i \leq n}\|_p \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*,w} \\ &\leq d_p(S) \pi_{p,q}(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{q,w} \cdot \|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

D'où $ST \in N_{p,q}(X, Z)$ et $n_{p,q}(ST) \leq d_p(S) \pi_{p,q}(T)$. ■

Chapitre 3

Théorèmes de domination et de factorisation

Dans ce chapitre on a détaillé les théorèmes de domination et de factorisation.

3.1 Théorème de domination

On présente maintenant le théorème de domination. Avant ceci, on donne le lemme de Ky Fan, pour la preuve de ce lemme, le lecteur intéressé peut consulter [8].

lemme de Ky Fan

Lemme 3.1.1 *Soient E un espace vectoriel topologique séparé, C une partie convexe compacte de E . Soit M un ensemble de fonctions définies sur C à valeurs dans $[-\infty; +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes:*

- a. *Toute $f \in M$ est convexe et semi-continue inférieurement*
- b. *Si $g \in \text{conv}(M)$, il existe $f \in M$ telle que $g(x) \leq f(x), \forall x \in C$*
- c. *Il existe $r \in \mathbb{R}$ telle que toute $f \in M$ prend une valeur $\leq r$. Alors il existe $x_0 \in C$ telle que $f(x_0) \leq r, \forall f \in M$.*

Théorème 3.1.1 *(théorème de domination de Pietsch)*

Soient $1 < p \leq \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1). $T \in N_p(X, Y)$.

2). Il existe une constante C , et deux mesure de Radon μ et ν sur les boules unités B_{X^*} et $B_{Y^{**}}$, telle que pour tout $x \in X$ et $y \in Y^*$, on a:

$$|\langle T(x); y^* \rangle| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, \varphi \rangle|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\nu(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (3.1.1)$$

Démonstration.

\Leftarrow) On suppose que T vérifie (2), alors pour tout $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$ et $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \subset Y^*$. On a:

$$|\langle T(x_i); y_i^* \rangle| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \varphi \rangle|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \psi \rangle|^{p^*} d\nu(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| &\leq C \sum_{i=1}^n \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \varphi \rangle|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \psi \rangle|^{p^*} d\nu(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \varphi \rangle|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \psi \rangle|^{p^*} d\nu(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C \left(\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\langle x_i, \varphi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{\psi \in B_{Y^{**}}} \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, \psi \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= C \| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{p,w} \| (y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Alors $T \in N_p(X, Y)$

\Rightarrow) On considère R l'ensemble des probabilités de Radon (μ, ν) sur $C(B_{X^*})^* \times C(B_{Y^{**}})$. soit M un ensemble des fonctions définies sur R à valeurs dans \mathbb{R} de la forme

$$f_{((x_i), (y_i^*))}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \eta \rangle|^p d\mu + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right] \quad (3.1.2)$$

Condition(a) Soit $f \in M$

f est semi continue infireurement évident et on montre que f est convexe .Soit $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 & f_{((x_i), (y_i^*))}(\alpha\mu, (1-\alpha)\nu) \\
 = & \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \eta \rangle|^q d(\alpha\mu) + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \zeta \rangle|^{p^*} d(1-\alpha)\nu \right] \\
 = & \sum_{i=1}^n (\alpha + (1-\alpha)) |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{\alpha}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \eta \rangle|^p d\mu + \frac{1-\alpha}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right] \\
 = & \alpha \left(\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \eta \rangle|^p d\mu + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right] \right) + \\
 & (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \eta \rangle|^p d\mu + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right] \right) \\
 = & \alpha f_{((x_i), (y_i^*))}(\mu, \nu) + (1-\alpha) f_{((x_i), (y_i^*))}(\mu, \nu)
 \end{aligned}$$

Donc f est convexe

Condition(b) M est un cône convexe des fonctions réelles. Soient f, g dans M et $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 & f_{((x'_i), (y_i'^*))}(\mu, \nu) \\
 = & \sum_{i=1}^n |\langle T(x'_i); y_i'^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x'_i, \eta \rangle|^p d\mu + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i'^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & g_{((x''_i), (y_i''*))}(\mu, \nu) \\
 = & \sum_{i=1}^n |\langle T(x''_i); y_i''^* \rangle| - C \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x''_i, \eta \rangle|^q d\mu + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i''^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha f_{((x'_i), (y_i'^*))}(\mu, \nu) \\
 = & \sum_{i=1}^n \alpha |\langle T(x'_i); y_i'^* \rangle| - C \left[\frac{\alpha}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x'_i, \eta \rangle|^q d\mu + \frac{\alpha}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i'^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right] \\
 = & \sum_{i=1}^n |\langle T(\alpha x'_i); y_i'^* \rangle| - C \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle \alpha^{\frac{1}{q}} x'_i, \eta \rangle|^q d\mu + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle \alpha^{\frac{1}{p^*}} y_i'^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right]
 \end{aligned}$$

et

$$(1 - \alpha)g_{((x_i''), (y_i''*))}(\mu, \nu) \\ = \sum_{i=1}^n |\langle (1 - \alpha)T(x_i''); y_i''^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle (1 - \alpha)^{\frac{1}{p}} x_i'', \eta \rangle|^p d\mu + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle (1 - \alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right]$$

Finalement on a

$$(\alpha f + (1 - \alpha)g)_{((x_i), (y_i^*))}(\mu, \nu) \\ = \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \eta \rangle|^p d\mu + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right]$$

avec $n = k + l$

$$x_i = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{p}} x_i' & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ (1 - \alpha)^{\frac{1}{p}} x_i'' & \text{si } k + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

et

$$y_i^* = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{p^*}} y_i'^* & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ (1 - \alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^* & \text{si } k + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

On déduit que l'ensemble M est convexe

Condition(c) Il existe $y_0 \in B_{Y^{**}}$ et $x_0^* \in B_{X^*}$ tels que:

$$\sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

et

$$\sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x_0^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Alors f définie comme

$$f_{((x_i), (y_i^*))}(\delta_{x_0^*}, \delta_{y_0}) \\ = \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \eta \rangle|^p d\delta_{x_0^*} + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\delta_{y_0} \right] \\ = \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |\langle x_i, x_0^* \rangle|^p + \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^{p^*} \right] \\ = \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right) + \frac{1}{p^*} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y \rangle|^{p^*} \right) \right]$$

On choisie

$$q_1 = \sup_{\|\varphi\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \varphi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad q_2 = \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

on trouve

$$\begin{aligned} & f_{((x_i), (y_i^*))}(\delta_{x_0^*}, \delta_{y_0}) \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i); y_i^* \rangle| - C \left[\frac{1}{p} \sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p^*} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \right] \end{aligned}$$

Comme T est Cohen p -nucléaire, alors $f_{((x_i), (y_i^*))}(\delta_{x_0^*}, \delta_{y_0}) \leq 0$. D'après le lemme de Ky Fan, il existe $(\mu, \nu) \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(\mu, \nu) \leq 0 \quad \text{pour } f \in M$$

Si on prend $x \in X$ et $y^* \in Y$ on obtient

$$\begin{aligned} f(\mu, \nu) &= f_{(x, y^*)}(\mu, \nu) \\ &= |\langle T(x); y^* \rangle| - \frac{C}{p} \int_{B_{X^*}} |\langle x, \eta \rangle|^p d\mu + \frac{C}{p^*} \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

D'où

$$|\langle T(x); y^* \rangle| \leq \frac{C}{p} \int_{B_{X^*}} |\langle x, \eta \rangle|^p d\mu + \frac{C}{p^*} \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu$$

On pose:

$$\lambda_1 = \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, \eta \rangle|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \zeta \rangle|^{p^*} d\nu \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

et on remplaçons x par $\frac{x}{\lambda_1}$ et y^* par $\frac{y^*}{\lambda_2}$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| &\leq C \lambda_1 \lambda_2 \left\{ \frac{1}{p} \frac{1}{\lambda_1^p} \lambda_1^p + \frac{1}{p^*} \frac{1}{\lambda_2^{p^*}} \lambda_2^{p^*} \right\} \\ &\leq C \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

alors

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y(y^*)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

■

3.2 Théorème de factorisation

Théorème 3.2.1 (Théorème de factorisation). Soit T un opérateur linéaire continue de X dans Y , alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. L'opérateur T dans $\mathcal{N}_p(X, Y)$
2. Il existe un espace de Banach quelconque Z , $u : X \rightarrow Z$ est p -sommant et $v : Z \rightarrow Y$ est fortement p -sommant tel que $T = vu$.

Preuve. 1) \implies 2) On considère l'opérateur $u_0 : X \rightarrow L_p(\mu)$ (μ est une mesure de probabilité sur B_{X^*}) donné par $x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$, et on remarquer que $\|T(x)\| \leq C \|u_0(x)\|$, pour tout $x \in X$, soit Z un sous espace fermé d'un $L_p(\mu)$ ($Z = \overline{u_0(X)}$), et soit $u : X \rightarrow Z$ l'opérateur induit. Noton que $u \in \Pi_p(X, Z)$ avec $\pi_p(u) \leq 1$. On écrit $T = vu$, pour certain $v \in \mathcal{L}(Z, Y)$.

Si $y^* \in Y^*$, alors

$$\begin{aligned} \|v^*(y^*)\| &= \sup \{ |\langle u(x), v^*(y^*) \rangle| : \|u(x)\| \leq 1 \} \\ &= \sup \left\{ |\langle T(x), y^* \rangle| : \int_K |\langle x^*, x \rangle|^p d\mu(x^*) \leq 1 \right\} \\ &\leq C \left(\int_K |\langle y^{**}, y^* \rangle|^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

d'après le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs p -sommants, $v^* \in \Pi_{p^*}(Y^*, Z^*)$ et $\pi_{p^*}(v^*) \leq C$. Ce qui implique que v est fortement p -sommant.

(2) \implies (1). Pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle vu(x_i), y_i^* \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \langle u(x_i), v^*(y_i^*) \rangle \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\langle u(x_i), v^*(y_i^*) \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \|u(x_i)\| \|v^*(y_i^*)\| \\ \text{Par Hölder} \quad &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|v^*(y_i^*)\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Puisque u est p -sommant et v^* est p^* -sommant, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle vu(x_i), y_i^* \rangle \right| &\leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x^*, x_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \pi_{p^*}(v^*) \sup_{y^{**} \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y^{**} \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \pi_p(u) d_p(v) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \cdot \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Ce qui implique $T = vu$ est un opérateur p -nucléaire et $n_p(T) \leq \pi_p(u) d_p(v)$. ■

Exemple 3.2.1 Puisque $I : l_1 \rightarrow l_2$ est p -sommant ($1 \leq p < \infty$) et aussi $I^* : l_2 \rightarrow l_\infty$ est fortement p -sommant ($1 < p \leq \infty$), alors l'opérateur $I^*I : l_1 \rightarrow l_\infty$ est p -nucléaire ($1 < p < \infty$).

3.3 L'adjoint d'un opérateur p -nucléaire

Avant de donner la relation entre T et T^* , nous avons donné le théorème de dualité pour les espaces $\ell_p^{n,w}(X)$ et $\ell_p^{n,s}\langle X \rangle$.

Théorème 3.3.1 pour $1 \leq p \leq \infty$

1. $\ell_p^{n,w}(X)^* = \ell_{p^*}^{n,s}\langle X^* \rangle$ isométriquement.
2. $\ell_{p^*}^{n,s}\langle X \rangle^* = \ell_p^{n,w}(X^*)$ isométriquement.

Preuve. Il suffit de montrer (1) seulement. On définit l'application:

$$f : \ell_{p^*}^{n,s}\langle X^* \rangle \longrightarrow [\ell_p^{n,w}(X)]^*$$

$$(x_i^*)_{i=1}^n \longmapsto f((x_i^*)_{i=1}^n) = f_{x^*}$$

telle que:

$$f_{x^*} : \ell_p^{n,w}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(x_i)_{i=1}^n \longmapsto f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i).$$

Il est clair que f est linéaire. D'autre part d'après le Théorème de Goldstine, pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_p^{n,w}(X)$ on a:

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*) \right| : \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,w} \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| : \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \leq 1 \right\},$$

alors

$$\begin{aligned} |f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n)| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i^*(x_i)}{\|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w}} \right| \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| : \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \leq 1 \right\} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*) \right| : \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,w} \leq 1 \right\} \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \\ &= \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{\langle p^* \rangle} \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \end{aligned}$$

donc, $\| f_{x^*} \| \leq \| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{\langle p^* \rangle}$, d'où

$$\| f((x_i^*)_{i=1}^n) \| = \| f_{x^*} \| \leq \| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{\langle p^* \rangle} .$$

Ce qui implique que f est continue et $\| f \| \leq 1$.

On va montrer la surjectivité de f , soit $f_{x^*} \in l_p^{n,w}(X)^*$. On pose $x_i^* = f_{x^*} \circ \psi_i$, telle que ψ_i est l'injection canonique de X dans $l_p^{n,w}(X)$ avec

$$\psi_i(x) = (\delta_{ij}x)_j$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Il est claire que $(x_i^*)_{i=1}^n \in X^*$ et $f((x_i^*)_{i=1}^n)((x_i)_{i=1}^n) = f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) = f_{x^*}((\delta_{ij}x_i)_j)$

$$f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i), \forall (x_i)_{i=1}^n \in l_p^{n,w}(X)$$

donc $f((x_i^*)_{i=1}^n)((x_i)_{i=1}^n) = f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n)$, alors f est surjective. Il reste à montrer que $\| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{\langle p^* \rangle} \leq \| f((x_i^*)_{i=1}^n) \| .v$

rappel que (Principe de réflexivité locale)(voir[6, 10]). Si X un espace de Banach arbitraire.

Pour tout sous-espace E de X^{**} de dimension finie, tout sous-espace F de X^* de dimension finie ,et tout $\epsilon > 0$, il existe un isomorphisme T de E sur un sous-espace $T(E)$ de X tel que

- 1) $\|T\| \|T^{-1}\| \leq 1 + \epsilon$
- 2) $T|_{E \cap X} = Id_{E \cap X}$;
- 3) $\langle \varphi, T(\Psi) \rangle = \langle \Psi, \varphi \rangle$ pour tout $\Psi \in E$ et tout $\varphi \in F$.

Maintenant, soient $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$, $\epsilon > 0$, et F le sous espace engendré par $\{x_1^{**}, \dots, x_n^{**}\}$, d'après le principe de réflexivité local, il existe $S \in \mathcal{L}(F; X)$ telle que $\| S \| \leq 1 + \epsilon$ et

$$x_i^*(Sx_i^{**}) = x_i^{**}(x_i^*), i = 1, \dots, n$$

Donc

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*) \right| = \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(Sx_i^{**}) \right| = |f((Sx_i^{**})_{i=1}^n)| \leq \| f_{x^*} \| \| (Sx_i^{**})_{i=1}^n \|_{p,w}$$

de plus

$$\begin{aligned} \| (Sx_i^{**})_{i=1}^n \|_{p,w} &= \sup \{ \| S(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{**}) \| : \| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_{p^*} \leq 1 \} \\ &\leq (1 + \epsilon) \sup \{ \| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{**} \| : \| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_{p^*} \leq 1 \} \\ &\leq (1 + \epsilon) \| (x_i^{**})_{i=1}^n \|_{p,w} . \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i^{**} (x_i^*) \right| \leq (1 + \varepsilon) \| f_{x^*} \| \| (x_i^{**})_{i=1}^n \|_{p,w}$$

alors,

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^{**} (x_i^*) : \| (x_i^{**})_{i=1}^n \|_{p,w} \leq 1 \right\} \leq (1 + \varepsilon) \| f_{x^*} \|$$

donc

$$\| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{\langle p^* \rangle} \leq \| f_{x^*} \| .$$

D'où, l'application f_{x^*} est isométrique et surjective qui permet d'identifier le dual de $l_p^{n,w}(X)$ avec $\ell_{p^*}^{n,s} \langle X^* \rangle$. ■

Théorème 3.3.2 Soit $1 < p < \infty$. Alors, $T^* \in \mathcal{N}_{p^*}(Y^*, X^*)$ si et seulement si $T \in \mathcal{N}_p(X, Y)$ et $n_p(T) = n_{p^*}(T^*)$.

Preuve. Soit $T^* \in \mathcal{N}_{p^*}(Y^*, X^*)$, et soit $x \in X \subset X^{**}$ et $y^* \in Y^*$

$$\begin{aligned} |y^*(Tx)| &= |x(T^*y^*)| \\ &\leq n_{p^*}(T^*) \left(\int_{B_X} |\langle x, \varphi \rangle|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\nu(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq n_{p^*}(T^*) \left(\int_{B_{X^{**}}} |\langle x, \varphi \rangle|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\nu(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}} . \end{aligned}$$

D'où

$$T \in \mathcal{N}_p(X, Y) \text{ et } n_p(T) \leq n_{p^*}(T^*) . \quad (*)$$

(\Leftarrow) Soit $T \in \mathcal{N}_{p,q}(X, Y)$, alors l'opérateur linéaire induit est continu

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \ell_p^{n,w}(X) &\longrightarrow \ell_p^{n,s} \langle Y \rangle \\ (x_i)_{i=1}^n &\longrightarrow \tilde{T}((x_i)_{i=1}^n) = (T(x_i))_{i=1}^n \end{aligned}$$

de plus, $\|\tilde{T}\| = n_{p,q}(T)$,

par le théorème précédent l'adjoint de \tilde{T}

$$\begin{aligned} \tilde{T}^* : \ell_{p^*}^{n,w}(Y^*) &\longrightarrow \ell_{p^*}^{n,s} \langle X^* \rangle \\ (y_i^*)_{i=1}^n &\longmapsto \tilde{T}^*((y_i^*)_{i=1}^n) = (T^*y_i^*)_{i=1}^n . \end{aligned}$$

est bien défini, ce qui entraîne que T^* dans $\mathcal{N}_{p^*}(Y^*, X^*)$ et $\|\tilde{T}^*\| = n_{p^*}(T^*)$.

comme $\|\tilde{T}^*\| = \|\tilde{T}\|$ on obtient $n_p(T) = n_{p^*}(T^*)$. ■

Bibliographie

- [1] D. Achour and A. Alouani On the multilinear generalizations of the concept of nuclear operators. *Colloquium Math.* 2010;120:85–102.
- [2] H. Apiola. Duality between spaces of p -summable sequences, (p, q) -summing operators and characterizations of nuclearity. *Math. Ann.* 219 (1976) 53-64. Springer-Verlag 1973.
- [3] A. Alouani. Mémoire de Magister, Université de M'sila.(2007).
- [4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, (1987).
- [5] J. S. Cohen. Absolutely p -summing, p -Nuclear operators and Thier Conjugates. *Math. Ann.* 201, 177-200 (1973), Springer-Verlag 1973.
- [6] D.W. Dean. The equation $L(E, X^{**}) = L(E, X)^{**}$ and the principle of local reflexivity. *Proc. Amer. Math. Soc.* 40.146.148, (1973).
- [7] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge. *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [8] N. El Hage Hassan. *Topologie générale et espaces normés.* Dunod, Paris, (2011).
- [9] J.T. Lapresté. Opérateurs sommants et factorisations à travers les espaces L_p , *Studia Math.* 57(1)(1976).
- [10] D. Li et H. Queffélec. *Introduction à l'étude des espaces de Banach, Analyse et probabilités.* Société Mathématique de France, (2004).
- [11] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski Absolutely summing operators in \mathcal{L}_p space and their applications *Studia Math* 29 (1968) 275-326.

- [12] B. Maury. Analyse Fonctionnelle.Exercices et problemes corrigés. Ellipses Edition Marketing S.A, (2004).
- [13] A.Pietsch. Operator ideals Deutsh Verlag Wiss, Berlin,1978;North-Holland,Amsterdam-London-New.York-Takyo,(1980).