



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département de Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** EDPs et applications

## Thème

---

*Étude d'un problème non-local avec des conditions de Neumann*

---

Présentée par :

NADJI Manel

Soutenu publiquement le : 06/06/2022.

Devant le jury composé de :

M <sup>r</sup> MOKHTARI Abdelhak	M.C.A,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
M <sup>r</sup> SAADI Abderachid	M.C.A,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
M <sup>r</sup> ABDELKBIR Saad	M.C.B,	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2021/2022

# Remerciements



*Je remercie en priorité ALLAH LE TOUT PUISSANT de m'avoir donné le courage, et la force de volonté d'achever ce travail.*

*Je tiens tout à exprimer mes vifs remerciements au mon encadreur de ce mémoire M<sup>r</sup> SAADI Abderachid pour ses conseils, l'orientation la confiance qui ont constitué un rapport considerable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port.*

*Je voudrais exprimer mes plus vifs remerciement vont également aux membres du jury : M<sup>r</sup> MOKHTARI ABDELHAK et ....*

*Je remercie auussi tous mes enseignants, tous mes collègue de Master EDP<sub>s</sub> et applications . Je leur souhaite une bonne continuation.*

*De tous mon coeur je remercie mes parents. Enfin, j'adresse un grand remerciement à mes soeurs ,mon frère , et tout ma famille,et mes amis, qui m'ont donné beaucoup de soutie consant et d'encouragement.*

*Merci!*



# Dédicace

*Je dédie ce travail :*

*A ma chère père : A toi seul, propriétaire d'une biographie parfumée et d'une pensée éclairée, car tu es le seul qui a eu le premier crédit pour moi d'accéder à l'enseignement supérieur, car tu est mon père bien-aimé, que j'espère que ALLAH prolongera ta vie.*

*A ma chère mère : A toi, qui m'as mise sur le chemin de la vie, car tu m'as calmée, et qui as pris soin de moi jusqu'à ce que je devienne une femme, à toi, ma chère maman, que j'espère que ALLAH prolongera ta vie.*

*A mes soeurs "Khaoula, Donia, Sara, Aya, Meriem, et à mon chère frère "Iyad", mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*

*A mes chers amis qui m'ont toujours aidé et encouragé, et surtout "Manel Herzi, Nesrine Baali, Barkahoum Chbabehi, Hadjer Khalfa, Ahlem Bentayeb, Nada Zerrouak, Ibtissem Khalfa, et Imen". Qui je souhaite plus de succès.*

*A tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*

*Merci !*

*MAJJI & Manel*



---

# Table des matières

---

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>4</b>
1.1 Espaces $L^p$ . . . . .	4
1.2 Rappel sur les espaces de Sobolev . . . . .	6
1.3 Les injections de type Sobolev . . . . .	6
1.4 Notions sur la théorie spectrale . . . . .	7
1.5 Dérivé d'un fonctionnelle et point critiques . . . . .	9
<b>2 Espace de Sobolev fractionnaire</b>	<b>11</b>
2.1 Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}$ . . . . .	11
2.2 Injection de Type Sobolev . . . . .	13
2.3 L'espace $H^s$ et l'opérateur Laplacien fractionnaire . . . . .	14
2.4 Espace de Sobolev fractionnaire $H_{\Omega,g}^s$ . . . . .	16
<b>3 Problème aux limites associée à l'opérateur <math>(-\Delta)^s</math> avec condition de Neumann</b>	<b>21</b>
3.1 Position du problème et quelques propriétés . . . . .	21
3.2 Solution faible . . . . .	24
3.3 Existence et unicité . . . . .	27
3.4 Décomposition spectral du problème . . . . .	32
3.5 Comportement asymptotique . . . . .	36

---

# Notations

---

$\mathbb{N}$  : Ensemble des nombres entiers naturels,

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels,

$\mathbb{C}$  : Ensemble des nombres complexes,

$\Omega$  : Domaine borné dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$\partial\Omega = \Gamma$  =frontière de  $\Omega$ ,

$L^p$  : Espace des fonctions mesurables de puissance  $p \in [1, +\infty[$ , intégrables sur  $\Omega$ ,

$L^\infty(\Omega)$  : Espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur  $\Omega$ ,

$C(\Omega)$  : Espace des fonctions continues sur  $\Omega$ ,

$C^n(\Omega)$  : Espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables  $n$  fois et  $f(x)$  continues,

$\mathcal{L}(E, F)$  : espace des opérateurs linéaires continues de  $E$  dans  $F$ ,

$N(A)$  : noyant d'un opérateur  $A$ ,

$R(A)$  : image d'un opérateur  $A$ ,

$M^\perp$  : orthogonal de  $M$ ,

$p.p$  : presque partout,

$(-\Delta)^s$  : Opérateur Laplacien fractionnaire.

---

# Introduction

---

Le calcul fractionnaire est un domaine à la fois ancien et récent, si ses origines remontent aux XVIIe et XVIIIe siècles, ses détails n'ont duré qu'une trentaine d'années à une cinquantaine d'années au plus, cependant, la recherche dans ce domaine progresse rapidement.

Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement.

Par ce procédé on peut définir les opérateurs pseudo-différentiels. En analyse mathématique, un opérateur pseudo-différentiel est une extension du concept d'opérateur différentiel. Les opérateurs pseudo-différentiels sont largement utilisés dans la théorie des équations aux dérivées partielles et de la théorie des champs quantiques. En termes plus simples, la définition d'un opérateur pseudo-différentiel dépend de la transformée de Fourier, mais certaines de ces opérateurs peuvent être définies sous forme intégrative.

Parmi ces opérateurs, on trouve :

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N, S)pv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy$$

avec  $s \in ]0, 1[$ , cet opérateur et plus généralement les opérateurs pseudo-différentiels que font partie aux dérivées partielles pendant longtemps.

Cet opérateur (connu sous le nom de Laplacien fractionnaire) conduit à étudier un problème non local avec conditions de Neumann :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{sur } \Omega \\ \mathcal{N}_s u = g & \text{Dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

telle que  $\mathcal{N}_s u$  est une nouvelle "dérivée normale non local", donnée par :

$$\mathcal{N}_s u = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad , x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Dans ce travail, on donne de quelques résultats théoriques et appliqués de l'opérateur Laplacien fractionnaire sur un domaine borné  $\Omega$ . Pour des résultats importants permettant l'approfondissement de l'étude de cet opérateur seront par ailleurs rappelés voir ([9],[11]).

Notre mémoire est composé de trois chapitres :

◆**Dans le premier chapitre**, on va rappeler quelques résultats sur des espaces fonctionnels usuels, et on va donner des notions sur la théorie spectral.

◆**Dans le deuxième chapitre**, on introduit les espaces de Sobolev fractionnaires  $H^s$ , qui sont le cadre fonctionnel des équations liées à l'opérateur Laplacien fractionnaire.

◆**Dans le troisième chapitre**, nous considérons la structure variate du problème elliptique non local associé, nous montrons un résultat d'existence et d'unicité. Aussi, nous donnons une description d'une sorte de valeurs propres généralisées de  $(-\Delta)^s$  avec des conditions aux limites de Neumann nulles.

Par similitude avec le cas classique, on est tenté de considérer les  $\lambda_i$ , et  $u_i$  ci-dessus, comme des valeurs propres généralisées et des fonctions propres. Bien que le mot "généralisé" soit désormais omis par souci de brièveté nous remarquons que cette notion spectrale n'est pas tout à fait standard, puisque nos fonctions propres  $u_i$ , soit définies dans l'ensemble de  $\mathbb{R}^n$  mais vérifient l'équation  $(-\Delta)^s u_i = \lambda_i u_i$  uniquement dans le domaine  $\Omega$ .

◆**Finalement**, on va donner une liste des références utilisées dans ce travail.

# PRÉLIMINAIRE

Le premier chapitre a pour objet la présentation des notions et des résultats d'analyse fonctionnelle utilisés dans les deux chapitres suivants (espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev, Opérateurs compacts ...). Dans toute la suite,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ .

## 1.1 Espaces $L^p$

**Définition 1.1.** [3]

Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ ; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\}.$$

Pour  $p = \infty$ , on définit  $L^\infty(\Omega)$  comme suit :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \sup_{\text{ess}\Omega} |f| < \infty \}.$$

**Remarque 1.1.**

Pour  $1 \leq p < \infty$  l'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f|^p dx \right]^{1/p}$$

$L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \cdot g dx$$

$L^\infty(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{\text{ess}\Omega} |f|$$

**Inégalité de Hölder [3]**

Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , on désigne par  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$  i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$ . Alors  $fg \in L^1(\Omega)$  et on a :

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}.$$

**Inégalité de Cauchy-Schwartz**

Pour  $p = p' = 2$  on a :

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}.$$

**Théorème 1.1 (Lemme de Fatou). [3]**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonction de  $L^1$  telle que

pour chaque  $n$ ,  $f_n \geq 0$  p.p sur  $\Omega$ .

$\sup_n \int f_n < \infty$ . pour chaque  $x \in \Omega$  on pose  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .  
alors  $f \in L^1(\Omega)$  et

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x).$$

**Théorème 1.2 (Fubini). [3]**

Soit  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ , et soit  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Alors :

Pour presque par tout  $x \in \Omega_1$ ,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque par tout  $y \in \Omega_2$ ,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

**Théorème 1.3 (Représentation de Riesz). [3]**

Soit  $1 < p < \infty$  et soit  $\varphi \in (L^p)'$ .

Alors il existe  $u \in L^{p'}$  unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

## 1.2 Rappel sur les espaces de Sobolev

Dans cette section, on fait un bref rappel sur les espaces de Sobolev. Pour une présentation plus détaillé de ces espaces, on réfère l'ouvrage de [3] ou [8].

Pour  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

**Définition 1.2.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . On pose :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

ou les dérivées  $D^\alpha u$  sont prises au sens des distributions sur  $\Omega$ .

Si  $p = 2$ , on ait dans les espaces :

$$W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

**Remarque 1.2.** L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad (1.1)$$

$H^m$  est un espace de Hilbert, avec le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

**Remarque 1.3.** [9]

Pour  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , il y'a une autre représentation des espaces  $H^m$  en utilisant la transformation de Fourier, précisément nous pouvons définir :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|)^{2m} |\mathcal{F}u(\zeta)|^2 dx < \infty\}. \quad (1.2)$$

## 1.3 Les injections de type Sobolev

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriel [3]

—  $E$  s'inject d'une manière continue dans  $F$ , signifie que l'injection canonique  $j : E \rightarrow F$  est continue et on le note par  $E \hookrightarrow F$ .

—  $E$  s'injecte d'une manière compacte dans  $F$ , signifie que l'injection  $j : E \rightarrow F$  est compacte et on le note par  $E \hookrightarrow_c F$ .

Si  $1 \leq p \leq N$ , l'exposant de Sobolev de  $p$  est définie par :

$$p^* = \frac{NP}{N - P}$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{P} - \frac{1}{N}$$

**Théorème 1.4.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de classe  $C^1$ , borné

1. Si  $1 \leq p < N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}$ ,
2. Si  $p = N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[$ ,
3. Si  $p > N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty$ .

**Théorème 1.5. (Rellich-Kondrachov)[3]** On suppose que  $\Omega$  borné da classe  $C^1$ . On a

1. Si  $p < N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ ,
2. Si  $p = N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$ ,
3. Si  $p > N$ , alors  $W^{1,p} \hookrightarrow_c C(\overline{\Omega})$ .

## 1.4 Notions sur la théorie spectrale

**Définition 1.3.** [6] soit  $A \subset (x, d)$ , l'ensemble  $A$  est dit compact si et seulement si toute suite  $(x_n)_n$  dans  $A$  contiens une sous suite convergente dans  $A$

$$A \text{ est compact} \iff \begin{cases} \forall (x_n)_n \subset A \\ \exists (x_{n_k})_k \text{ sous suite de } (x_n)_n \text{ et } (x_{n_k})_k \longrightarrow x \in A \end{cases}$$

**Définition 1.4.** [6] L'ensemble  $A$  est dit relativement compact si  $\overline{A}$  est compact

$$A \text{ est relativement compact} \iff \begin{cases} \forall (x_n)_n \subset A \\ \exists (x_{n_k})_k \text{ sous suite de } (x_n)_n \text{ et } (x_{n_k})_k \longrightarrow x \in \overline{A} \end{cases}$$

**Définition 1.5.** [6] soient  $E, F$  deux espaces normés et  $T : E \rightarrow F$  un opérateur borné (continue). On dit que  $T$  est un opérateur de rang finie si  $Im(A)$  est de dimension finie c-à-d

$$Rang(T) = dim(Im(T)) < +\infty$$

L'ensemble des opérateurs de rang finie est un sous espace de  $\mathcal{L}(E, F)$

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  un opérateur borné.[3]

**Définition 1.6.** [6]

On dit que  $T$  est un opérateur compacte si l'image par  $T$  de la boule unité  $B_E$  est relativement compacte dans  $F$

$$T \text{ est compacte} \Leftrightarrow \overline{T(B_E)} \text{ est compact dans } F$$

**Proposition 1.1.** [6] soient  $H_1, H_2$  deux espace de Hilbert .Pour tout  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , il existe un autre opérateur noté  $T^*$  et applé l'adjoint de  $T$ , tq :  $\langle \phi, Tx \rangle_{H_2} = \langle T^*\phi, x \rangle_{H_1}$  pour tout  $x \in H_1$  et tout  $\phi \in H_2$

De plus  $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \|T^*\|_{H_2, H_1}$

**Remarque 1.4.** :

$N(I - T)$  : noyant d'un opérateur  $(I - T)$ .

$R(I - T)$  : image d'un opérateur  $(I - T)$ .

$M^\perp = \{f \in E^*; \langle f, x \rangle = 0, \forall x \in M\}$ .

$\mathcal{L}(H)$  est l'espace de fonction réel et continue

**Théorème 1.6. de L'Alternative de Fredholm**([3]).

Soit  $T \in \mathcal{K}(E)$ . Alors

1.  $N(I - T)$  est de dimension finie.
2.  $R(I - T)$  est fermé, et plus précisément  
 $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ .
3.  $N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$
4.  $\dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$

on suppose que  $E = H$  est un espace de Hilbert et que  $T \in \mathcal{L}(H)$ .

Identifiant  $H'$  et  $H$  on peut considérer que  $T^* \in \mathcal{L}(H)$

**Définition 1.7.**

On dit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H)$  est **auto-adjoint** si  $T^* = T$ , c'est -à-dire

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in H$$

**Théorème 1.7 (Hilbert-Schmidt).** [3]

Pour tout opérateur linéaire compact auto-adjoint  $T$  dans un espace de Hilbert  $H$ , il existe un système

orthonormé  $\{\varphi_n\}$  de vecteurs propres, associés aux valeurs propres non nulles  $\{\lambda_n\}$ , tel que tout élément  $\xi \in H$  peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\xi = \sum_k c_k \varphi_k + \xi'$$

où  $\xi' \in \ker A$ , c'est-à-dire  $A\xi' = 0$ , en outre :

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k,$$

et si le système  $\{\varphi_n\}$  est infini on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

.

## 1.5 Dérivé d'un fonctionnelle et point critiques

### Dérivé au sens de Gateaux[7]

**Définition 1.8.** Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ensemble ouvert et  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle. On dit que  $I$  est différentiable au sens de Gâteaux (G-différentiable) en  $u \in \Omega$ , s'il existe  $A \in E'$  (linéaire et continue), noté par  $I'_G(u)$  tel que pour tout  $v \in E$ , où  $I(u + tv)$  existe pour  $t > 0$  assez petit, la dérivée directionnelle  $DI(u)$  existe c'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \langle A, v \rangle$$

Si  $I$  est différentiable au sens de Gâteaux en  $u$ .

### Dérivé au sens de Fréchet[7]

**Définition 1.9.** Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ensemble ouvert et  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle. On dit que  $I$  est différentiable au sens de Fréchet en  $u \in \Omega$ , s'il existe  $A \in E'$  tel que :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u + v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0$$

où

$$I(u + v) - I(u) = Av + o(\|v\|).$$

Si  $I$  est différentiable, alors  $A$  est unique et on note  $I' = A$ . L'ensemble des fonctions différentiables sera noté  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

**Proposition 1.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert d'un espace de Banach  $E$ . Soit  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle Gâteaux différentiable dans un voisinage de  $u \in \Omega$ , alors l'application  $u \mapsto I'_G(u)$  est continue au voisinage de  $u$ . Alors  $I$  est Fréchet différentiable et on a

$$I'_G(u) = I'(u)$$

**Remarque 1.5.** L'importance de la proposition 1.2 réside dans le fait qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens Gâteaux et ensuite de prouver qu'il est continue, plutôt que prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.

### Point critique

**Définition 1.10.** Soit  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle de classe  $C^1$  :

On dit que  $u \in X$  est un point critique de  $\phi$  si  $\phi'(u) = 0$  i.e  $\langle \phi'(u), v \rangle = 0, \forall v \in X$

De nombreux problèmes sont équivalents à :

$$Au = 0 \tag{1.3}$$

avec  $A : X \rightarrow Y$  est un opérateur entre deux espaces de Banach.

Lorsque le problème est variationnel, alors il existe une fonction différentiable  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $A = \varphi'$ , c-à-d :

$$\langle Au, v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t}$$

L'espace  $Y$  correspond alors à l'espace dual  $X'$  de  $X$ , et nous avons l'équation (1.3) est équivalent à  $\varphi'(u) = 0$ , c-à-d :

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in X \tag{1.4}$$

ce qui implique que tout point critique de  $\varphi$  est une solution faible de (1.3).

# ESPACE DE SOBOLEV FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à introduire les espaces de Sobolev fractionnaires  $H^s, H_{\Omega, g}^s$ , qui forment un cadre fractionnaire du problème qu'on va étudier dans le dernier chapitre. On va donner aussi quelques notions sur l'opérateur qui concerne de ces espaces.

## 2.1 Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}$

On va donner la définition des espaces  $W^{s,p}(\Omega)$ , où  $0 < s < 1$  et  $1 < p < +\infty$ .

**Définition 2.1.** [9].

soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et soient  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, \infty[$ . On définit l'espace de Sobolev fractionnaire  $W^{s,p}(\Omega)$  par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{N+sp}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}. \quad (2.1)$$

C'est un espace vectoriel, on le muni par la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

avec

$$[u]_{s,p} = \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3)$$

est la semi norme de Gagliardo.

**Proposition 2.1.** .

soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, \infty[$ , nous avons alors :

- $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace de Banach, séparable pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .
- $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace réflexif et uniformément convexe pour tout  $1 < p < +\infty$ .

**Définition 2.2.** Soit  $p \in ]1; +\infty[$  et  $s \in ]0; 1[$ , alors on définit le  $p$ -laplacien fractionnaire par :

$$\begin{aligned} (-\Delta)_p^s u(x) &= 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+ps}} dy \\ &= 2pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.** soit  $s \in ]0; 1[$  et  $p \in ]1; +\infty[$ . alors :

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))'$$

est bien défini, et de plus :

1.  $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  nous avons :

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy$$

2.  $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$  :

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle \leq [u]_{s,p}^{p-1} [v]_{s,p}$$

et par suite :  $\|(-\Delta)_p^s u\|_* \leq \|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1}$

*Démonstration.* .

1) puisque  $u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  alors l'intégrale dans la définition de  $(-\Delta)_p^s$  existe, donc :

$$(-\Delta)_p^s u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy$$

alors  $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  nous avons : (on utilise Fubini) :

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+2s}} dy v(x) dx \quad (2.4)$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+2s}} v(x) dx dy \quad (2.5)$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+2s}} v(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+2s}} v(y) dx dy \end{aligned}$$

dans le second intégral nous changeons le rôle entre  $x$  et  $y$  i.e :  $x \rightarrow y$  et  $y \rightarrow x$  nous avons alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+2s}} v(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+2s}} v(x) dx dy, \end{aligned}$$

et par suite :

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

et d'après 2.4 nous avons :

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dy v(x) dx$$

2) Pour tous  $u, v \in X^s$  nous avons par l'inégalité de Holder :

$$\begin{aligned} \langle A(u), v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dy dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-1}(v(x) - v(y))}{|x - y|^{(N+2s)(\frac{p-1}{p})} |x - y|^{(N+sp)(\frac{1}{p})}} dy dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \times \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= [u]_{s,p}^{p-1} [v]_{s,p} \end{aligned}$$

□

## 2.2 Injection de Type Sobolev

Dans cette section, on considère les résultats des injections continues et compactes dans l'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  avec  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, +\infty[$ . Pour plus de détails sur ses injections voir [12]

### Injection continue de Sobolev fractionnaire

Nous avons trois cas :

**Première cas :**  $sp < N$

Soit  $\Omega$  une ouvert bornée de  $\mathbb{R}^N$  alors :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1, p^*]$$

avec  $p^* = \frac{Np}{N-sp}$

**Deuxième cas :**  $sp = N$

Soit  $\Omega$  une ouvert bornée de  $\mathbb{R}^N$  alors :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1, +\infty[$$

**Troisième cas :**  $sp > N$

Soit  $\Omega$  une ouvert de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^{0,1}$ , de frontière borné alors :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \cap C^{0, N-\frac{s}{p}}(\Omega) = C_b^{0, N-\frac{s}{p}}(\Omega)$$

### Injection compact de Sobolev fractionnaire

**Théorème 2.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné, de classe  $C^{0,1}$  de frontière borné, et soit  $s \in ]0, 1[$ ,  $p \in ]1, +\infty[$  et  $N \geq 1$ . Alors nous avons :

- Si  $sp < N$  alors  $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  est compact  $\forall q \leq \frac{Np}{N-sp}$
- Si  $sp = N$  alors  $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  est compact  $\forall q < +\infty$
- Si  $sp > N$  alors  $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\alpha}(\Omega)$  est compact  $\forall \alpha \leq s - \frac{N}{s}$

## 2.3 L'espace $H^s$ et l'opérateur Laplacien fractionnaire

Dans cette section on s'intéresse à le cas particulier, c'est le cas où  $p = 2$ , et on définit l'opérateur Laplacien fractionnaire et ses propriétés

**Définition 2.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et soient  $s \in ]0, 1[$  et  $p = 2$ . L'espace  $H^s(\Omega)$  est défini par :

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$$

**Proposition 2.3.** On définit le produit scalaire sur  $H^s(\Omega)$  par :

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega \times \Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy, \forall u, v \in H^s(\Omega)$$

L'espace  $H^s(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

Clairement, pour tout  $s \in ]0, 1[$ , on a :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : [u]_{s,2} < +\infty\}$$

où  $[u]_{s,2}$  est donné par la formule (2.3).

**Définition 2.4.** soit  $s \in ]0, 1[$ . On définit l'opérateur Laplacien fractionnaire par :

$$(-\Delta)^s u(x) = c(n, s)pv \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = c(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

Où  $B(x, \epsilon)$  est la boule centrée en  $x$  de rayon  $\epsilon$ , et  $c(n, s)$  est la constante de normalisation (positive) suivant :

$$c(n, s) := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi_1)}{|\xi|^{n+2s}} d\xi \right)^{-1} \quad (2.7)$$

**Proposition 2.4.** soit  $s \in ]0, 1[$  et soit  $(-\Delta)^s$  le Laplacien fractionnaire définie par (2.6). Alors, pour tout  $u \in \mathcal{C}$

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}c(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

*Démonstration.* l'équivalence de les définition dans (2.6) et 2.8 suit immédiatement par la formule variable de changement standard.

En effet, on choisissant  $z = y - x$ , on a :

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= -c(n, s)pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &= -c(n, s)pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \end{aligned}$$

De plus, par substitution  $\tilde{z} = -z$  dans le dernier terme de l'égalité ci-dessus, on obtient

$$pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz = pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x - \tilde{z}) - u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2s}} d\tilde{z}. \quad (2.9)$$

et donc après avoir renommé  $\tilde{z}$  par  $z$

$$2pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \quad (2.10)$$

$$= pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz + pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \quad (2.11)$$

$$= pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) + u(x-z) - 2u(x)}{|z|^{n+2s}} dz. \quad (2.12)$$

D'ou, si on renomé  $z$  comme  $y$  dans ?? et 2.10, on peut écrire le Laplacien fractionnaire dans (2.6) comme

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}c(n,s)pv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

□

## Une approche par la transformée de Fourier

**Définition 2.5.** L'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  peut être défini de manière alternative via une transformée de Fourier comme suivant :

$$\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty\}$$

**Proposition 2.5.** Soit  $s \in ]0, 1[$  et soit  $(-\Delta)^s : \mathcal{C} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  l'opérateur de Laplacien fractionnaire que définit par (2.6). D'ou pour tout  $u \in \mathcal{C}$ ,

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}(\mathcal{F}u)) \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.13)$$

elle est prouvée dans [9]

## 2.4 Espace de Sobolev fractionnaire $H_{\Omega,g}^s$

Dans ce qui suit, on prend  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ , et  $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions mesurables.

**Définition 2.6.** L'espace  $H_{\Omega,g}^s$  est défini par :

$$H_{\Omega,g}^s = \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \|u\|_{H_{\Omega,g}^s} < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H_{\Omega,g}^s} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \| |g|^{1/2} u \|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}^2 + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

On peut considérer  $H^s(\Omega)$  comme  $H_{\Omega,0}^s$  i.e.  $H_{\Omega,g}^s$  avec  $g \equiv 0$

**Proposition 2.6.**  $H_{\Omega,g}^s$  est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H_{\Omega,g}^s} = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g| uv dx + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \quad (2.15)$$

*Démonstration.* .

**Premièrement :** on montre 2.15 définit un produit scalaire

il est clair que 2.15 est une forme bilinéaire et  $\|u\|_{H_{\Omega,g}^s} = ((u, u)_{H_{\Omega,g}^s})^{1/2}$ .

Alors, si  $\|u\|_{H_{\Omega,g}^s} = 0$ , il s'ensuit que  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , d'où  $u = 0$  p.p dans  $\Omega$  et

$$\int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0.$$

Alors  $|u(x) - u(y)| = 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2$ , en particulier, p.p  $x \in C\Omega$  et  $y \in \Omega$ , donc :

$$u(x) = u(x) - u(y) = 0$$

d'où  $u = 0$  p.p dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Deuxièmement,** on montre que  $H_{\Omega,g}^s$  est complet.

Pour cela, soit  $(u_k)$  une suite de Cauchy pour la norme 2.14.

En particulier,  $(u_k)$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Supposons que  $(u_k)$  converge vers  $u \in L^2(\Omega)$  et p.p dans  $\Omega$ . Plus explicitement, il existe  $Z_1 \subset \mathbb{R}^n$  tel que

$$|Z_1| = 0 \quad \text{et} \quad u_k(x) \rightarrow u(x) \quad \text{pour chaque} \quad x \in \Omega \setminus Z_1. \quad (2.16)$$

Étant donné  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$  on définit

$$E_U(x, y) = \frac{(U(x) - U(y))_{\chi_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2}(x,y)}}{|x - y|^{(n+2s)/2}} \quad (2.17)$$

En remarquant que

$$E_{u_k}(x, y) - E_{u_h}(x, y) = \frac{(u_k(x) - u_h(x) - u_k(y) + u_h(y))_{\chi_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2}(x,y)}}{|x - y|^{(n+2s)/2}}$$

Par conséquent,  $(u_k)$  est une suite de Cauchy dans  $H_{\Omega,g}^s$ , donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que si  $h, k \geq N_\varepsilon$  on ait

$$(\varepsilon)^2 \geq \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|(u_k - u_h)(x) - (u_k - u_h)(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \|E_{u_k} - E_{u_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}^2.$$

Donc,  $E_{u_k}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , et pour une sous suite, on suppose que  $E_{u_k}$  converge vers certains  $E \in L^2(\Omega)$  et p.p dans  $\Omega$ , plus explicitement, il existe  $Z_2 \subset \mathbb{R}^n$  tel que

$$|Z_2| = 0 \quad \text{et} \quad E_{u_k}(x, y) \longrightarrow E_{u(x,y)} \quad \text{pour chaque} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus Z_2. \quad (2.18)$$

Maintenant, pour tout  $x \in \Omega$ , on définit

$$S_x = y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus Z_2$$

$$W = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \Omega \text{ et } y \in \mathbb{R}^n \setminus S_x$$

$$V = x \in \Omega / |\mathbb{R}^n \setminus S_x| = 0.$$

On remarque que

$$W \subseteq Z_2. \quad (2.19)$$

En effet, si  $(x, y) \in W$  alors  $y \in \mathbb{R}^n \setminus S_x$ , donc  $(x, y) \notin \mathbb{R}^{2n} \setminus Z_2$ , alors  $(x, y) \in Z_2$ , ce qui donne (2.19).

À l'aide de 2.18 et (2.19), nous obtenons que  $|W| = 0$ , d'après théorème de Fubini on a :

$$0 = |W| = \int_{\Omega} |\mathbb{R}^n \setminus S_x| dx,$$

ce qui implique que  $|\mathbb{R}^n \setminus S_x| = 0$  pour  $x \in \Omega$ .

Par conséquent, nous concluons que  $|\Omega \setminus V| = 0$ . Ceci et (2.16) implique que :

$$|\Omega \setminus (V \setminus Z_1)| = |(\Omega \setminus V) \cup Z_1| \leq |\Omega \setminus V| + |Z_1| = 0$$

En particulier  $V \setminus Z_1 \neq \emptyset$ , on peut fixer  $x_0 \in V \setminus Z_1$ .

Puisque  $x_0 \in \Omega \setminus Z_1$ , l'équation (2.16) implique

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x_0) = u(x_0)$$

. En outre, d'après  $x_0 \in V$  on a  $|\mathbb{R}^n \rightarrow S_{x_0}| = 0$ . Par conséquence,  $y \in \mathbb{R}^n$  (pour chaque  $y \text{ p.p} \in S_x$ ), on a  $(x_0, y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus Z_2$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E_{u_k}(x_0, y) = E(x_0, y),$$

grâce a (2.18).

On remarque aussi que  $\Omega \times (C\Omega)^2$ , ainsi d'après (2.17), on obtient :

$$E_{u_k}(x_0, y) = \frac{u_k(x_0) - u_k(y)}{|x_0 - y|^{(n+2s)/2}},$$

pour p.p  $y \in C\Omega$ .

Ainsi, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \{u_k(x_0) - |x_0 - y|^{(n+2s)/2} E_{u_k}(x_0, y)\} = u(x_0) - |x_0 - y|^{(n+2s)/2} E(x_0, y) \quad y \in C\Omega$$

Ceci et (2.16) permet nous de dire que  $u_k$  converge p.p dans  $\mathbb{R}^n$ .

Faisant un changement de notation, on peut dir que  $u_k$  converge p.p dans  $\mathbb{R}^n$  vers certains  $u$ .

En utilisant  $u_k$  comme une suite de Cauchy dans  $H_{\Omega,g}^s$ , pour  $\varepsilon > 0$  fixé il  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $h \geq N_\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &\geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_h - u_k\|_{H_{\Omega,g}^s}^2 \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_h - u_k)^2 + \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{C\Omega} |g|(u_h - u_k)^2 \\ &\quad + \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n} \rightarrow (C\Omega)^2} \frac{|(u_h - u_k)(x) - (u_h - u_k)(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &\geq \int_{\Omega} (u_h - u)^2 + \int_{C\Omega} |g|(u_h - u)^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{2n} \rightarrow (C\Omega)^2} \frac{|(u_h - u)(x) - (u_h - u)(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \|u_h - u\|_{H_{\Omega,g}^s}^2, \end{aligned}$$

Où le lemme de Fatou a été utilisé. cela dit que  $u_h$  converge vers  $u$  dans  $H_{\Omega,g}^s$ , montrant que  $H_{\Omega,g}^s$  est complet.  $\square$

### **Théorème 2.2.** (Inégalité de Poincaré)

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  une domaine bornée lipschitzien, et soit  $s \in ]0, 1[$ . Alors, pour toute fonction  $u \in H^s(\Omega)$ , nous avons

$$\int_{\Omega} |u - \int_{\Omega} u|^2 dx \leq C_{\Omega,s} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

où  $\int_{\Omega} u = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u(x)| dx.$

La constante  $C_{\Omega,s} > 0$  ne dépend que de  $\Omega$  et  $s$ .

*Démonstration.* Par contradiction, supposons que l'inégalité n'a pas vérifié. Alors, il existe une suite de fonction  $(u_k) \in H^s(\Omega)$  vérifie

$$\int_{\Omega} u_k = 0, \quad \|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1. \quad (2.20)$$

et

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < \frac{1}{k}. \quad (2.21)$$

en particulier, la fonction  $\{u_k\}_{k \geq 1}$  est bornée dans  $H^s(\Omega)$ .

On utilise le fait que  $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  avec compacité [?], il existe une sous suite  $\{u_{k_j}\}_{j \geq 1}$  converge vers une fonction  $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ ,

on outre, on déduire á partir de (2.20) que

$$\int_{\Omega} \bar{u} = 0 \quad \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad (2.22)$$

et

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0.$$

Donc,  $\bar{u}$  est une constante de  $\Omega$ , ceci contradiction d'après (2.22).  $\square$

# PROBLÈME AUX LIMITES ASSOCIÉE À L'OPÉRATEUR $(-\Delta)^s$ AVEC CONDITION DE NEUMANN

---

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de solution d'un problème non local avec des conditions de Neumann pour l'opérateur Laplacien fractionnaire.

## 3.1 Position du problème et quelques propriétés

Soit  $\Omega$  un ouvert borné assez régulier de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$  et  $s \in ]0, 1[$ .

On considère le problème non local suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

ou :

$$\mathcal{N}_s u(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad (3.2)$$

La constante de normalisation  $c_{n,s}$  est celle apparaissant dans la définition du Laplacien fractionnaire

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{n,s} p v \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy. \quad (3.3)$$

**Proposition 3.1.** *Soit  $u$  une fonction de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^n$ , alors*

$$\int_{\Omega} (-\Delta)^s u = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u$$

*Démonstration.* Notons que le rôle de  $x$  et  $y$  dans les intégrales ci-dessus est symétrique, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} -\frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta)^s u dx &= \int_{\Omega} c_{n,s} p v \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \\ &= c_{n,s} \int_{\Omega} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \\ &= c_{n,s} \int_{\Omega} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus B(x, \epsilon))} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \right] dx \\ &= c_{n,s} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx. \end{aligned}$$

On applique le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta)^s u dx &= c_{n,s} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u(y) dy \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.2.** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} v(-\Delta)^s u + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u.$$

*Démonstration.* On commence la démonstration par la discrétisation de l'intervalle  $\int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2}$  (figure 3.1) :

D'où on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy. \end{aligned}$$

on pose :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy. \\ J &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy. \end{aligned}$$

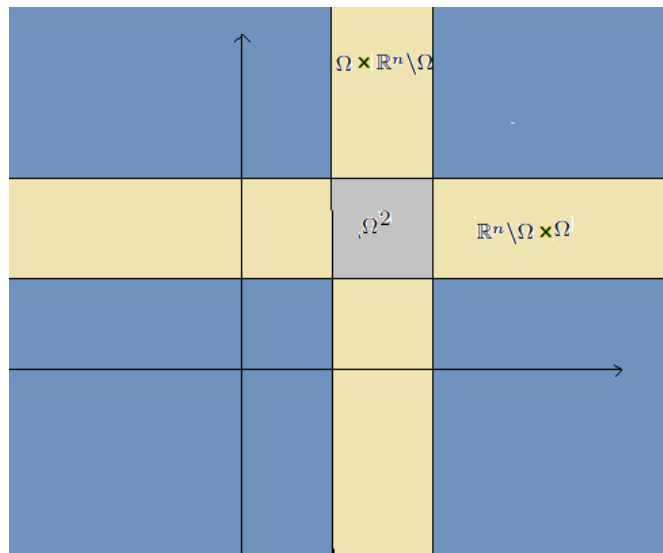


FIGURE 3.1 – ceci la descritisation de l'intrevale

D'ou

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))v(y)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \end{aligned}$$

Faisant le changement de Rolle entre  $x$  et  $y$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(y)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx. \end{aligned}$$

En utilisant les expressions dans (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} v(-\Delta)^s u + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u$$

□

**Remarque 3.1.** Rappelons que si l'on prend  $\partial_\nu u = 1$ , alors on peut obtenir le périmètre de  $\Omega$ , en intégrant cette condition de Neumann sur  $\partial\Omega$ .

En effet

$$|\partial\Omega| = \int_{\partial\Omega} dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u dx. \quad (3.4)$$

De manière analogue, on peut définir  $\tilde{\mathcal{N}}_s u$ , en normalisant  $\mathcal{N}_s u$  par le facteur

$$\omega_{s,\Omega}(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{n+2s}},$$

alors

$$\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = \frac{\mathcal{N}_s u(x)}{\omega_{s,\Omega}(x)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \quad (3.5)$$

Maintenant, on remarque que si  $\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ , alors on trouve le périmètre fractionnaire [4], en intégrant sur  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ , i.e

$$\begin{aligned} Per_s(\Omega) &= c_{n,s} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{dx dy}{|x-y|^{n+2s}} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \omega_{s,\Omega}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \omega_{s,\Omega}(x) \tilde{\mathcal{N}}_s u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u(x) dx, \end{aligned}$$

## 3.2 Solution faible

**Définition 3.1.** Soient  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ . On dit que  $u \in H_{\Omega,g}^s$  est une solution faible de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \quad (3.6)$$

si

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} f v + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \quad (3.7)$$

pour toute fonction test  $v \in H_{\Omega,g}^s$ .

**Proposition 3.3.** Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$  soit  $I : H_{\Omega,g}^s \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonctionnelle définie pour toute  $u \in H_{\Omega,g}^s$ , comme suivant :

$$I[u] = \frac{c_{n,s}}{4} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy - \int_{\Omega} f u - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g u.$$

Alors : tout point critique de  $I$  est une solution faible de (3.1).

Pour montrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.1.** *La fonctionnelle*

$$I[u] = \frac{c_{n,s}}{4} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \int_{\Omega} f u - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g u.$$

est bien définie.

*Démonstration.* Soit  $u \in H_{\Omega,g}^s$ . En utilisant Cauchy Schwartz :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f u \right| &\leq \int_{\Omega} |f| \cdot |u| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|u\|_{H_{\Omega,g}^s}. \end{aligned}$$

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq c \text{ car } f \in L^2(\Omega)$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_{\Omega,g}^s} \text{ par définition.}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g u \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g|^{1/2} |g|^{1/2} |u| \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} (|g|^{1/2})^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} (|g|^{1/2} u)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g| \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} (|g|^{1/2} u)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}^{1/2} \| |g|^{1/2} u \|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)} \\ &\leq c \|u\|_{H_{\Omega,g}^s}. \end{aligned}$$

$$\text{car } g \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

d'ou , si  $u \in H_{\Omega,g}^s$  on a

$$|I[u]| \leq c \|u\|_{H_{\Omega,g}^s} < +\infty.$$

Donc  $I$  est bien définie □

*Démonstration.* de proposition 3.3

Premièrement, on calcule la dérivé de  $I$ , pour ce la on écrit  $\frac{I[u + \varepsilon v] - I[u]}{\varepsilon}$  pour  $|\varepsilon| < 1$  et  $v \in H_{\Omega,g}^s$ , puis on passe à la limite.

$$\begin{aligned}
I[u + \varepsilon v] &= \frac{c_{n,s}}{4} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u + \varepsilon v(x) - u + \varepsilon v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\
&\quad - \int_{\Omega} f(u + \varepsilon v) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g(u + \varepsilon v) \\
&= \frac{c_{n,s}}{4} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2 + \varepsilon^2 |u(x) - u(y)|^2 - 2\varepsilon((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\
&\quad - \int_{\Omega} f u - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g u - \varepsilon \left( \int_{\Omega} f v - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \right) \\
&= I[u] + \frac{c_{n,s}}{4} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{\varepsilon^2 |u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\
&\quad - \varepsilon \left( \int_{\Omega} f v + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v + \frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right),
\end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I[u + \varepsilon v] - I[u]}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{c_{n,s}}{4} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{\varepsilon^2 |u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon \left( \int_{\Omega} f v + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v + \frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \right] \\
&= \frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \int_{\Omega} f v + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v.
\end{aligned}$$

Donc

$$I'[u](v) = \frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \int_{\Omega} f v + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v.$$

Alors, si  $u$  est un point critique de  $I$ ,  $u$  est un solution faible de (3.1), selon la définition précédent.  $\square$

**Proposition 3.4.** soient  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ . soit  $u$  une fonction de  $H_{\Omega, g}^s$  satisfait au sens faible :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega \\ \mathcal{N}_s u = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

avec  $f \geq 0$  et  $g \geq 0$ .

Alors,  $u$  est une constante.

*Démonstration.* D'abord, on la fonction  $v \equiv 1$  appartient à  $H_{\Omega, g}^s$ , on peut donc l'utiliser comme fonction de test dans 3.7, d'ou pour  $v \equiv 1$  :

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(1 - 1)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} f + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g.$$

Alors : 
$$\int_{\Omega} f = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g,$$

et on a d'après les hypothèse  $f \geq 0$  et  $g \geq 0$ , alors  $0 \leq \int_{\Omega} f = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g \leq 0 \Rightarrow f = 0$  dans  $\Omega$  et  $g = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ .

Si on prend  $v \equiv u$  comme fonction test dans 3.7, on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0$$

et donc  $u$  doit être une constante. □

### 3.3 Existence et unicité

Dans cette section, on donne le résultat d'existence et d'unicité, puis on donne une application (décomposition spectrale de l'opérateur laplacien fractionnaire), aussi un résultat sur le comportement asymptotique de solution.

**Théorème 3.1.** *soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine borné lipschitzienne, et soit  $f \in L^2(\Omega), g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ . Supposons qu'il existe une fonction  $\psi$  de classe  $C^2$  telle que  $\mathcal{N}_s \psi = g$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ . Alors, le problème (3.1) admet un solution faible dans  $H_{\Omega, g}^s$  si et seulement si*

$$\int_{\Omega} f = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g. \tag{3.8}$$

De plus, la solution est unique à une constante additive près.

Pour montre cette théorème on a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 3.2.** *Étant donné  $h \in L^2(\Omega)$ , et soit  $v \in H_{\Omega, g}^s$  une solution faible du problème*

$$\int_{\Omega} v \varphi + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(v(x) - v(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} h \varphi, \tag{3.9}$$

pour tout  $\varphi \in H_{\Omega, g'}^s$ ,

avec condition de Neumann homogène  $\mathcal{N}_s v = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ .

Alors,  $v$  est unique .

*Démonstration.* on va utiliser la théorème de représentation de Riesz pour montrer l'unicité de la solution (Notons que  $H_{\Omega, g}^s$  est un espace de Hilbert).

On considère la fonction

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi) &: H_{\Omega,g}^s \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{F} = \int_{\Omega} h\varphi dx.\end{aligned}$$

On montre que  $\mathcal{F}$  est une forme linéaire continue :

il est évidente que  $\mathcal{F}$  est linéaire (d'après la linéarité de l'intégrale).

$\mathcal{F}$  est continue :

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(\varphi)| &= \left| \int_{\Omega} h\varphi \right| \leq \int_{\Omega} |h||\varphi| \\ &\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{inégalité de Cauchy schwartz}) \\ &\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_{\Omega,g}^s} \quad (\text{définition de la norme dans } H_{\Omega,g}^s) \\ &\leq c \|\varphi\|_{H_{\Omega,g}^s} \quad (\text{car } h \in L^2(\Omega)).\end{aligned}$$

Donc,  $\mathcal{F}$  est une forme linéaire continue.

D'ou, et d'après la représentation de Riesz, il existe unique  $v \in H_{\Omega,g}^s$  telle que pour toute  $\varphi \in H_{\Omega,g}^s$  on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi) &= \langle v, \varphi \rangle \\ &= \int_{\Omega} h\varphi dx \\ &= \int_{\Omega} v\varphi + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(v(x) - v(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.\end{aligned}$$

□

**Lemme 3.3.** On a :

$$\|v\|_{H_{\Omega,g}^s(\Omega)} \leq C \|h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.10)$$

*Démonstration.* on substitue dans le problème (3.9)  $\varphi$  par  $v$  on trouve :

$$\int_{\Omega} |v|^2 + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \leq \int_{\Omega} |h||v|,$$

donc :  $\|v\|_{H^s(\Omega)}^2 \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^s(\Omega)},$

alors :  $\|v\|_{H^s(\Omega)}^2 \leq \|h\|_{L^2(\Omega)}. D'ou le résultat.$

□

**Soit maintenant l'opérateur compact**  $T_0 : L^2 \longrightarrow H^s$  tel que  $T_0 h = v$ , et on écrit la restriction de  $T$  dans  $\Omega$  comme suit :  $Th = T_0 h|_{\Omega}.$

On prod  $Th$  pour être sa restriction dans  $\Omega$  peut prendre comme  $T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega).$

**Lemme 3.4.**  $T$  est compact.

*Démonstration.* :

Soit  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $L^2(\Omega)$ , d'après le lemme 3.3 on en déduit que  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  bornée dans  $H^s$ .

Donc on peut extraire une sous-suite bornée dans  $L^2$ , d'où  $T$  est compact.  $\square$

**Lemme 3.5.**  $T$  est auto-adjoint.

*Démonstration.* Soit  $h_1, h_2 \in C_0^\infty$ . On utilise la formulation faible (3.9) pour tout  $\varphi, \Phi \in H_{\Omega, g}^s$  :

$$\int_{\Omega} T_0 h_1 \varphi + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(T_0 h_1(x) - T_0 h_1(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} h_1 \varphi, \quad (3.11)$$

et

$$\int_{\Omega} T_0 h_2 \Phi + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(T_0 h_2(x) - T_0 h_2(y))(\Phi(x) - \Phi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} h_2 \Phi. \quad (3.12)$$

• Posons  $\varphi = T_0 h_2$  et  $\Phi = T_0 h_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \varphi + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(\Phi(x) - \Phi(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= \int_{\Omega} h_1 \varphi. \\ \int_{\Omega} \varphi \Phi + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))(\Phi(x) - \Phi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= \int_{\Omega} h_2 \Phi. \end{aligned}$$

Donc :  $\int_{\Omega} h_1 T_0 h_2 = \int_{\Omega} T_0 h_1 h_2$  pour tout  $h_1, h_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Comme  $T_0 h_1 = Th_1$  et  $T_0 h_2 = Th_2$  dans  $\Omega$ , on a :

$$\int_{\Omega} h_1 Th_2 = \int_{\Omega} Th_1 h_2 \quad (3.13)$$

pour tout  $h_1, h_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ , si  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ .

il existe des suites de fonctions  $h_{1,k}$  et  $h_{2,k}$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$  tel que  $h_{1,k} \rightarrow h_1$  et  $h_{2,k} \rightarrow h_2$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $k \rightarrow \infty$  et on a :

$$\int_{\Omega} h_{1,k} Th_{2,k} = \int_{\Omega} Th_{1,k} h_{2,k}. \quad (3.14)$$

Alors, d'après lemme (3.3) on déduit que  $Th_{1,k} \rightarrow Th_1$  et  $Th_{2,k} \rightarrow Th_2$  dans  $H^s$  si  $k \rightarrow \infty$ ,

d'où

$$\int_{\Omega} h_{1,k} Th_{2,k} \rightarrow \int_{\Omega} h_1 Th_2$$

et

$$\int_{\Omega} Th_{1,k} h_{2,k} \rightarrow \int_{\Omega} Th_1 h_2.$$

Les deux dernières formules et (3.14) signifient que

$$\int_{\Omega} h_1 Th_2 = \int_{\Omega} Th_1 h_2 \quad \text{pour tout } h_1, h_2 \in L^2(\Omega) \quad (3.15)$$

Donc :  $T$  est auto-adjoint.  $\square$

**Lemme 3.6.**  $\ker(Id - T)$  consist de fonction constante .

*Démonstration.* .

On va prouver que la constante est dans  $\ker(Id - T)$ , pour cela on prend une fonction constante  $c$ , on obtient :

$$(-\Delta)^s c + c = c$$

d'où

$$(-\Delta)^s c = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_s = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Donc  $T_0 c = c$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $Tc = c$  dans  $\Omega$ , alors  $c \in \ker(Id - T)$ .

On prouve maintenant que si  $v \in \ker(Id - T) \subseteq L^2(\Omega)$ , alors  $v$  est une constante.

On considère  $T_0 v \in H_{\Omega, g}^s$ . Par construction :

$$(-\Delta)^s(T_0 v) + T_0 v = v \quad \text{dans } \Omega \tag{3.16}$$

au sens faible, et

$$\mathcal{N}_s(T_0 v) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \tag{3.17}$$

D'autre part, puisque  $v \in \ker(Id - T)$ , on a :

$$v = Tv = T_0 v \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.18}$$

Par conséquent, d'après (3.16) on a :

$$(-\Delta)^s(T_0 v) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

En utilisant (3.17) et lemme 3.4, on obtient que  $T_0 v$  est constante.

Ainsi, d'après (3.18) on obtient que  $v$  est constante dans  $\Omega$  et ceci a complété la démonstration.  $\square$

*Démonstration.* du théorème 3.1 :

On a les deux cas suivants

**Cas homogène :** On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{sur } \Omega \\ \mathcal{N}_s u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

On montre que si  $\int_{\Omega} f = 0$ , alors le problème (3.19) admet une solution faible.

On utilise l'opérateur  $\tilde{T}$  qui a déjà définie, et d'après les deux lemme 3.4 et 3.5, elle est clairement cette opérateur est compat et auto-adjoint.

Grâce le lemme 3.6 et l'alterntive de Fredholme, on conclure que :

$$Im(Id - T) = Ker(Id - T)^\perp = \{\text{fonction constante}\}^\perp,$$

avec

$$Im(Id - T) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \text{ telle que : } \int_{\Omega} f = 0 \right\}.$$

Donc, il existe  $w \in L^2(\Omega)$  telle que  $f = w - Tw$ .

On monter que le problème (3.19) admet une solution faible implique que :

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

Soit  $u$  une solution de 3.19, on utilise le chengement suivant :

$$w = f + u. \quad (3.20)$$

Maintenant, on pose  $\int_{\Omega} f = 0$ , alors il existe  $w \in L^2(\Omega)$  tq :  $f = w - Tw$ .

On pose  $u = T_0w$ , alors  $T_0w$  est vérifie le problème (3.1) i.e.

$$\begin{cases} (-\Delta)^s(T_0w) + T_0w = w & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

Par conséquent :

$$f = w - Tw = w - T_0w = (-\Delta)^s(T_0w) = (-\Delta)^s u. \quad \text{dans } \Omega,$$

on a trouvé alors la solution dans ce cas.

**Réciproquement**, si on a une solution  $u \in H_{\Omega, g}^s$  de  $(-\Delta)^s u = f$  dans  $\Omega$ , avec  $\mathcal{N}_s u = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ , on pose  $w = f + u$  et on observe que :

$$(-\Delta)^s u + u = f + u = w \text{ dans } \Omega.$$

par conséquent, on a  $u = T_0w$  dans  $\mathbb{R}^n$ , d'ou  $u = Tw$  dans  $\Omega$ , alors :

$$(Id - T)w = w - u = f \quad \text{dans } \Omega,$$

alors,  $f \in Im(Id - T)$ . On obtient que  $\int_{\Omega} f = 0$ .

Ceci établit la démonstration du théorème (3.1) lorsque  $g \equiv 0$ .

#### Cas non homogène :

D'après les hypothèses, il existe une fonction  $\psi$  de classe  $C^2$  satisfais  $\mathcal{N}_s \psi = g$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ .

Soit  $\bar{u} = u - \psi \Rightarrow u = \bar{u} + \psi$ , alors,  $\bar{u}$  satisfait :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s(\bar{u} + \psi) = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s(\bar{u} + \psi) = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-\Delta)^s \bar{u} = f - (-\Delta)^s \psi = \bar{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s \bar{u} = g - \mathcal{N}_s \psi = g - g = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \text{ avec } \bar{f} = f - (-\Delta)^s \psi.$$

On a déjà prouvé que ce problème admet une solution ssi  $\int_{\Omega} f = 0$ , c'est-à-dire, si

$$0 = \int_{\Omega} \bar{f} = \int_{\Omega} f - \int_{\Omega} (-\Delta)^s \psi. \quad (3.21)$$

Mais, d'après le lemme (3.1) on a :

$$\int_{\Omega} (-\Delta)^s \psi = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s \psi = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g.$$

d'après ça et (3.21) on conclure que la solution existe ssi (3.8) est vérifiée.

Finalement, la solution est unique á une constante additive grâce au lemme (3.8).  $\square$

### 3.4 Décomposition spectrale du problème

**Théorème 3.2.** : Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine bornée Lipschitzienne. Alors , il existe une suite des valeurs positives

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

et une suite des fonctions  $u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_i(x) = \lambda_i u_i & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ \mathcal{N}_s u_i = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \end{cases}$$

Aussi, la fonction  $u_i$  (quand restreint á  $\Omega$ ) fournit un système orthogonal complet dans  $L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* :

On définit

$$L_0^2 \{u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u = 0\}$$

Ainsi l'opérateur  $T_0$  est définie par  $T_0 f = u$ , tel que  $u$  est la solution unique du problème :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Selon la définition(3.1), on a l'existence et l'unicité de quel solution est une conséquence du fait que  $f \in L_0^2$  et théorème (3.1). Alors, on définit  $T$  la restriction de  $T_0$  dans  $\Omega$ , d'ou :

$$Tf = T_0|_{\Omega}.$$

dans ce cas :  $T : L_0^2(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$ .

On va montrer que l'opérateur  $T$  est compact et auto-adjoint.

**$T$  est compact :**

En effet, on prend  $v = u = T_0 f$  dans la formulation faible de problème (3.7), on obtient :

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \left| \int_{\Omega} f u \right| \quad (3.22)$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.23)$$

Maintenant, on utilise l'inégalité de Poincaré qui définie dans 2.2 (rappeler que  $\int_{\Omega} u = 0$ ), alors :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{1/2}, \quad (3.24)$$

d'où, d'après 3.23 et (3.24) on obtient

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

donc

$$\left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{1/2} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.25)$$

Maintenant, on prend une suite  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  bornée dans  $L^2(\Omega)$ . D'après (3.26) et (3.25) on obtient que  $u_k = T f_k$  est bornée dans  $H^s(\Omega)$ .

De l'injection  $H^s \hookrightarrow L^2$  est compact, alors il existe une sous-suite qui converge dans  $L^2$ .

D'où  $T$  est compact.

**$T$  est auto-adjoint dans  $L_0^2$  :**

Pour montrer que  $T$  est auto-adjoint, on prend  $f_1$  et  $f_2$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$  tq  $\int_{\Omega} f_1 = \int_{\Omega} f_2 = 0$ .

D'après la formulation faible dans (3.7) on a pour tout  $u, w \in H_{\Omega, g}^s$  :

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(T_0 f_1(x) - T_0 f_1(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} f_1 v, \quad (3.26)$$

et

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(T_0 f_2(x) - T_0 f_2(y))(w(x) - w(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\Omega} f_2 w. \quad (3.27)$$

Alors, on peut trouver  $v = T_0 f_2$  dans (3.26) et  $w = T_0 f_1$  dans (3.27) (rappelons que  $T_0 f_i = T_0 f_i$  dans  $\Omega$ ), on obtient que :

$$\int_{\Omega} f_1 T f_2 = \int_{\Omega} f_2 T f_1, \text{ pour tout } f_1, f_2 \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.28)$$

Maintenant, si  $f_1, f_2 \in L_0^2(\Omega)$  on peut trouver une suites des fonctions  $f_{1,k}, f_{2,k} \in C_0^\infty(\Omega)$  tels que  $f_{1,k} \rightarrow f_1$  et  $f_{2,k} \rightarrow f_2$  dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Alors, d'après (3.28), on a :

$$\int_{\Omega} f_{1,k} T f_{2,k} = \int_{\Omega} f_{2,k} T f_{1,k}, \quad (3.29)$$

Grâce a (3.24) et 3.25 :  $T f_{1,k} \rightarrow T f_1$  et  $T f_{2,k} \rightarrow T f_2$  dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , alors d'après (3.29) on obtient :

$$\int_{\Omega} f_1 T f_2 = \int_{\Omega} f_2 T f_1.$$

Donc  $T$  est auto-adjoint dans  $L_0^2$ .

D'après le théorèm spectral, il existe une suite de valeurs propres  $\{\mu_i\}_{i \geq 2}$  de  $T$ , et ses fonctions propres  $\{e_i\}_{i \geq 2}$  correspondantes forment un système orthogonal complet dans  $L_0^2$ .

On remake que :

$$\mu_i \neq 0. \quad (3.30)$$

En effet , supposons par contradiction que  $\mu_i = 0$ , alors

$$0 = \mu_i e_i = T e_i = T_0 e_i \quad \text{dans } \Omega \quad (3.31)$$

par contradiction  $\mathcal{N}_s(T_0 e_i) = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ . Ceci et ((3.31)) donner que

$$T_0 e_i(x) = \frac{\int_{\Omega} \frac{T_0 e_i(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{n+2s}}} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}.$$

En utilisant ceci et (3.31) encore une fois, nous concluons que  $T_0 e_i \equiv 0$  dans  $\mathbb{R}^n$ . D'ou

$$0 = (-\Delta)^s(T_0 e_i) = e_i \quad \text{dans } \Omega,$$

ceci donne que  $e_i = 0$  dans  $\Omega$ , ainsi il n'est pas une fonction propre.

D'après (3.30) on peut poser

$$\lambda_i = \mu_i^{-1},$$

aussi, on pose  $u_i = T_0 e_i$ , et nous affirmons que  $u_2, u_3, u_4, \dots$  est le système souhaite de fonctions propres avec les valeurs propres correspondantes  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ .

En effet,

$$u_i = T_0 e_i = T e_i = \mu_i e_i, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.32)$$

par conséquence, l'orthogonalité et les propriétés de complétude de  $u_2, u_3, \dots$  dans  $L_0^2(\Omega)$  suivre de ceux de  $e_2, e_3, \dots$

En outre, dans le domaine  $\Omega$  on a :

$$(-\Delta)^s u_i = (-\Delta)^s T_0 e_i = e_i = \lambda_i u_i,$$

qui est utilisée dans le dernier étape, et ceci prouve la propriété spectrale désirée .

Maintenant, on remarque que

$$\lambda_i > 0 \quad \text{pour tout } i \geq 2. \quad (3.33)$$

En effet , le correspondant fonctions propres  $u_i$  solution de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_i(x) = \lambda_i u_i & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ \mathcal{N}_s u_i = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (3.34)$$

alors, si on prend  $u_i$  comme une fonction test dans la formulation faible de (3.34), on obtient :

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u_i(x) - u_i(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_i \int_{\Omega} u_i^2,$$

ceci implique que  $\lambda_i \geq 0$ .

On suppose par contradiction que  $\lambda_i = 0$ , alors d'après lemme 3.4  $u_i$  est constante. D'autre part, on a  $u_i \in L_0^2(\Omega)$ , et ceci implique que  $u_i \equiv 0$ , qui est contredit le fait que  $u_i$  est une fonction propre, cela établit (3.33).

D'après, (3.33), on peut supposer que  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ , et ses fonctions propres correspondantes sont un système orthogonal complet dans  $L^2(\Omega)$ .

Le système  $\{e_i\}_{i \geq 1}$  est orthogonal dans  $L^2(\Omega)$ , puisque nous avons déjà vu que le système  $\{e_i\}_{i \geq 2}$  est orthogonal, et chaque  $e_i$  est orthogonale à  $e_1$  pour tout  $i \geq 2$ , puisque  $e_i \in L_0^2(\Omega)$  et  $e_1 \equiv 1$ . pour vérifie que le système  $\{e_i\}_{i \geq 1}$  est complet dans  $L^2$ , on on pos pout tout  $\gamma \in L^2(\Omega)$  :

$$\gamma_1 = \int_{\Omega} \gamma \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_1,$$

alors ,  $\tilde{\gamma} \in L_0^2(\Omega)$  et puisque  $\{e_i\}_{i \geq 2}$  est un système orthogonal complet dans  $L_0^2(\Omega)$ , il existe une suite de nombres réels  $\{\tilde{\gamma}_i\}_{i \geq 2}$  tel que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \tilde{\gamma} - \sum_{i=2}^N \tilde{\gamma}_i e_i \right\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Par conséquent, puisque  $\tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_1 e_1$  on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \gamma - \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Comme  $\gamma$  est une fonction arbitraire dans  $L^2(\Omega)$ , nous montrons que le système  $\{e_i\}_{i \geq 1}$  est complet dans  $L^2(\Omega)$ , ceci conclure le preuve de théorème (3.2).  $\square$

**Remarque 3.2.** En remarquant que la notion de fonctions propres dans théorème (3.2) n'est pas complètement standard. En effet, les fonctions propres  $u_i$  correspondant a ces valeurs propre  $\lambda_i$  sont définie dans  $\mathbb{R}^n$ , mais ils satisfaisaient une unique condition orthogonal dans  $L^2$ .

Alternativement, on peut penser que le domaine "naturel" de la définition pour  $u_i$  est  $\Omega$  elle même. Puisque il a lieu l'équation de les valeurs propres  $(-\Delta)^s u_i = \lambda_i u_i$ , avec la condition d'orthogonalité, alors  $u_i$  est "naturellement" étendu à l'extérieure  $\Omega$  via la condition de Neumann non-local. En outre, la condition  $\mathcal{N}_s u_i = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  équivaut à la prescription de  $u_i$  à l'extérieur de  $\Omega$  à l'intérieur de la valeur  $\Omega$  selon la formule

$$u_i(x) = \frac{\int_{\Omega} \frac{u_i(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}} dy} \quad \text{por tout} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}.$$

### 3.5 Comportement asymptotique

**Proposition 3.5.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine bornée, et soit  $u \in H_{\Omega, g}^s$  une solution faible (selon la définition (3.1)) du problème :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \end{cases}$$

alors

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \quad \text{uniformément}$$

*Démonstration.* D'abord, puisque  $\Omega$  est bornée il existe  $R > 0$  tel que  $\Omega \subset B_R$ . Si  $y \in \Omega$  on a :

$$|x| - R \leq |x - y| \leq |x| + R,$$

alors :

$$1 - \frac{R}{|x|} \leq \frac{|x - y|}{|x|} \leq 1 + \frac{R}{|x|}.$$

D'ou, pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\bar{R} > R$  tel que pour tout  $|x| \geq \bar{R}$  on a :

$$\frac{|x|^{n+2s}}{|x - y|^{n+2s}} = 1 + \gamma(x, y),$$

il vient que  $|\gamma(x, y)| \leq \varepsilon$ .

D'après la définition de  $\mathcal{N}_s u$ , en utilisant le fait que  $\mathcal{N}_s u = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ , on obtient pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\int_{\Omega} \frac{u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{n+2s}}} = \frac{\int_{\Omega} \frac{|x|^{n+2s} u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{|x|^{n+2s} dy}{|x-y|^{n+2s}}} \\ &= \frac{\int_{\Omega} (1 + \gamma(x, y)) u(y) dy}{\int_{\Omega} (1 + \gamma(x, y)) dy} = \frac{\int_{\Omega} u(y) dy + \int_{\Omega} \gamma(x, y) u(y) dy}{|\Omega| + \int_{\Omega} \gamma(x, y) dy}. \end{aligned}$$

On pose

$$\gamma_1 = \int_{\Omega} \gamma(x, y) u(y) dy \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \int_{\Omega} \gamma(x, y) dy,$$

Notons que  $|\gamma_1(x)| \leq C_\varepsilon$  et  $|\gamma_2(x)| \leq \varepsilon$ , pour certain  $C > 0$ .

Alors, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  :

$$\begin{aligned} |u(x) - \int_{\Omega} u(y) dy| &= \left| \frac{\int_{\Omega} u(y) dy + \gamma_1(x)}{1 + \gamma_2(x)} - \int_{\Omega} u(y) dy \right| \\ &= \frac{|\gamma_1(x) - \gamma_2(x) \int_{\Omega} u(y) dy|}{1 + \gamma_2(x)} \leq \frac{C_\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

Faisons  $\varepsilon \rightarrow 0$  (i.e  $|x| \rightarrow +\infty$ ), on obtient le résultat souhaité. □

---

# Bibliographie

---

- [1] **R. A. Adams.** Sobolev spaces. *Academic Press, New York*, 1975.
- [2] **I. Ammari** Mémoire de master :Etude d'un problème p-Laplacien fractionnaire avec un terme non linéaire singulier. *Univ de msila* , 2019 - 2020.
- [3] **H. Brezis.** Analyse Fonctionnelle : théorie et applications. *Masson, Paris*, 2ème tirage, 1983.
- [4] **L. Caffrelli, J.M Roquejofre, et O. Savin,** : Nonlocal minimal surfaces.*Comm.Pure Appl.Math.*63(2010),no.9, 1111-1144.
- [5] **S. Dipierro, X. Ros-Oton and E. Valdinico** Nonlocal problems with Neumann boundary conditions. *European Mathematical Society, Math .Iberoam.* 33 (2017), no.2, 377-416.
- [6] **R.Hraiz** :Cours analyse fonctionnelle Master  $EDP_s$  et applications *univ-Mohamed BOUDIAF-Msila.*2021.
- [7] **O.Kavian** Introduction á la théorie des points critique, et application aux problèmes elliptiques.O.K.Nancy,le 20 Juillet 1993
- [8] **J. L. Lions et E.Magenes** problèmes aux limites non homogènes .*Volume 1, Dunod, paris*, 1968.
- [9] **G. Palatucci E.Di. Nezza and E. Valdinoci.** Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev nspaces. *Bull. Sci. Math*, 136 : 521-573, 2012.
- [10] **V.D. Radulescu G.M. Bisci and R. Servadei.** Variational methods for nonlocal fractional problems. *University Printing House, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom*, 2016.
- [11] **L. Silvestre,** Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator. *Comm. Pure Appl.Math.* 60 (2007), no. 1, 67-112.
- [12] **M. Sрати.** p-laplacien fractionnaire. Master's thesis, *Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Maroc*, 2017.

## ملخص

في هذا العمل قدمنا بدراسة المسألة الحدية الناقصية غير المحلية ذات الصيغة:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & : \quad \Omega \text{ في} \\ \mathcal{N}_s u = g & : \quad \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \text{ في} \end{cases}$$

حيث  $\Omega$  ميدان محدود من  $\mathbb{R}^n$ .

قنا بدراسة الوجود والوحدانية لحلول المسألة المعطاة تحت شروط تحققها الدالتان  $f$  و  $g$  منها الشرط اللازم المسمى بشرط التجانس:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} g$$

كلمات مفتاحية: فضاء سوبولاف كسري الرتبة ، مؤثر لابلاس الكسرية ، مؤثر غير محلي ، شرط نيومان.

## Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié le problème aux limites elliptiques non locales de la forme :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & : \quad \Omega \text{ dans} \\ \mathcal{N}_s u = g & : \quad \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \text{ dans} \end{cases}$$

ou  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous avons étudié l'existence et l'unité des solutions au problème donné sous des conditions remplies par les fonctions  $f$  et  $g$ , y compris la condition nécessaire appelée condition de compatibilité :

$$\int_{\Omega} f = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} g$$

**Mots clés :** Espaces de Sobolev fractionnaires, Laplacien fractionnaire, Opérateur non-locale, condition de Neumann.

## Abstract

In this work, we have studied the nonlocal elliptical boundary problem of the form:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & : \quad \text{in } \Omega \\ \mathcal{N}_s u = g & : \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a bounded domain of  $\mathbb{R}^n$ .

We have studied the existence and unity of solutions to the given problem under conditions satisfied by the functions  $f$  and  $g$ , including the necessary condition called the compatibility condition:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} g$$

**Keywords:** Fractional Sobolev space, fractional Laplacien, non-local operator, Neumann condition.