

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE Des Science

DEPARTEMENT De Physique

N° :



DOMAINE : Science de la Matière

FILIERE : Physique

OPTION : Physique Des Particules a
Haut énergie

**Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique**

Par: Bouchlaleg Ibtissem

Intitulé

**Résolution de l'équation de Klein-Gordon
pour des potentiels de forme exponentielle
par la méthode de supersymétrie**

Soutenu le 01/06/2017 devant le jury composé de:

Mr. DEBABI MOURAD

Université De Msila

Président

Melle. BESKRI SALIHA

Université De Msila

Rapporteur

Mr. GHOMAID ALI

Université De Msila

Examineur

Année universitaire : 2016/2017

Remerciements

Au-dessus de Louange à Dieu qui m'a guidé pour compléter notre travail qui Il a été combiné de son premier et dernier dans ce succès.

Je tiens à remercier mes parents qui avait deux grand mérite à la fin de Ce travail . Dieu l'âge de prolonger.

Je remercie sincèrement et gratitude ma directrice madame

" BESKRI Saliha "

qui n'a ménagé aucun effort pour me aider et n'a pas épargné les avertissements pour la valeur et l'orientation .

Je remercie aussi tous les membres du jury pour acceptant de juger mon travaille .

Aussi ,je remercie à tous mes professeurs, en particulier les enseignants et les étudiants du Département de physique,

Celui qui m'a appris un caractère tout au long de mon école de carrière .Je voudrais aussi remercier tous ceux qui m'a aidé à terminer ce travail près ou de loin.

Merci

Table des matières

Introduction	1
0.1 Introduction générale	1
1 la supersymétrie en mécanique quantique non relativiste	4
1.1 introduction	4
1.2 la théorie supersymétrique	5
1.2.1 Définitions	5
1.2.2 Algeber de la SUSY	6
1.3 Formulation de la supersymétrie	6
1.3.1 Factorisation d'un Hamiltonien quelconque	6
1.3.2 Lien entre les valeurs et fonctions propres des hamiltoniens partenaires :	9
1.4 Hiérarchie d' Hamiltoniens partenaires supersymétriques	12
1.5 Invariance de forme:	16
1.5.1 Définition	16
1.5.2 Invariance de forme et hiérarchie de potentiels superpartenaires	17
2 La supersymétrie en méquanique quantique relativiste	21
2.1 Introduction	21
2.2 La supersymétrie et l'équation de Dirac	22
2.3 La supersymétrie et l'équation de Klein-Gordon	22

2.3.1	introduction	22
2.3.2	La formulation de l'Hamiltonien de SUSY QM et la méthode de fac- torisation	23
2.4	L'équation de Klein-Gordon tridimensionnelle	24
3	Les états d'une particule de Klein-Gordon dans des potentiels scalaire et vectorielle du type exponentiel	27
3.0.1	Spectre d'énergie de l'équation de Klein-Gordon avec le potentiel de Titz-Wei	29
3.0.2	Les Fonctions d'onde	31
3.1	Conclusion générale	33

0.1 Introduction générale

La supersymétrie(SUSY), est une symétrie supposée de la physique des particules qui montre une relation profonde entre les fermions (particules de spin demi-entier) qui constituent la matière et les bosons (particules de spin entier) qui véhiculent les interactions. Dans le cadre de la SUSY , chaque fermion est associé à un ou plusieurs « super-partenaires » de spin entier, alors que chaque boson est associé à un ou plusieurs « super-partenaires » de spin demi-entier.elle est l'une des puissantes méthodes algébriques qui a largement contribué dans l'étude des systèmes quantiques et qui a conduit les physiciens à établir un nouveau domaine qui est connu maintenant par le nom de la mécanique quantique super symétrique (SUSYQM). C'est une symétrie extraordinaire puisque les fermions et les bosons ont des propriétés différentes.

La SUSY a été utilisée pour la première fois dans la théorie des champs dans les années soixante-dix(1970) par plusieurs auteurs [1, 2, 3, 4], dans le but d'obtenir une description unifiée des interactions fondamentales de la nature.

Au cours des 10 dernières années, les idées de la SUSY ont stimulé de nouvelles approches à d'autres branches de la physique, telles que des applications de la SUSY dans l'atomique, la matière condensée et la physique statistique[4].

En 1983, le concept d'un potentiel invariable de forme dans la structure de la $MQSUSY$ a été présenté par Gendenshtein [5]. On l'a bientôt réalisé que le formalisme de la $MQSUSY$ plus l'invariance de forme ont été intimement reliés à la méthode de factorisation d'Infeld et Hull [2].

La méthode de factorisation a été présentée la première fois par Schrödinger [6] pour résoudre algébriquement le problème d'atome d'hydrogène . Plus tard, Infeld et Hull ont généralisé cette méthode et ont obtenu une classe large des potentiels solubles en considérant six différentes formes de factorisation.

Il s'avère que la méthode de factorisation aussi bien que les méthodes de la $MQSUSY$ comprenant le concept de l'invariance de forme, sont les deux reformulations [7] de l'idée de 4 Riccati pour employer l'équivalence entre les solutions de l'équation de Riccati et

l'équation différentielle linéaire de second ordre relative. Cette méthode a été employée pour la première fois par Bernoulli, et l'histoire est discutée en détail par Stahlhofen [7].

Dans un autre développement, plusieurs personnes ont prouvé que la *SUSYMQ* offre une manière simple d'obtenir des potentiels isospectraux en employant l'une des techniques de Darboux [8] ou d'Abraham-Moses [9] ou de Pursey [10], de ce fait offrir un aperçu du profond raccordement entre les méthodes de la diffusion inverse quantique [11], et la *MQSUSY*.

Des méthodes approximatives basées sur la *SUSYMQ* ont été également développées. Plusieurs aspects de l'équation de Dirac ont été également étudiés dans le formalisme de la *SUSYMQ* [12], [13] et [14]. Le problème célèbre de la particule de Dirac dans un champ coulombien a été également résolu algébriquement en employant les concepts de la SUSY et de l'invariance de forme [15].

Le potentiel de type exponentiel (potentiel de Morse [16,], Hulthén déformé, Woods-Saxon) a été très utile dans de nombreux domaines de la physique et de la chimie qui comprennent, entre autres, la physique nucléaire [17], la physique moléculaire, et la chimie quantique .

En 1999, Sun avait proposé un nouveau potentiel dépendant de quatre paramètres comme modèle destiné à remplacer le potentiel de Morse pour ajuster les courbes RKR (Rydberg - Klein - Rees) [18 – 19 – 20] expérimentales de l'énergie potentielle et pour déterminer les niveaux d'énergie des états de rotation et des états de vibration des molécules diatomiques avec une meilleure précision des résultats théoriques comparés aux données expérimentales.

Il y a une littérature très abondante sur l'utilisation du potentiel de Hulthén [21] comme approximation du potentiel d'interaction entre deux corps dans de nombreux domaines de la physique, entre autres la physique nucléaire , la physique atomique et la physique moléculaire .

Durant ces dernières années, il y a eu un regain d'intérêt pour la recherche des solutions exactes de l'équation de Klein-Gordon avec des potentiels vecteur et scalaire dont la forme est une modification du potentiel de Hulthén ou de celui de Woods-Saxon [22] en utilisant des techniques de résolution différentes.

Le problème d'une particule chargée dans des potentiels vecteur et scalaire standard de Hulthén à été étudié à travers la résolution de l'équation de Klein-Gordon pour les états s et dans le cadre de l'intégrale de chemin [23]. les solutions des états s de l'équation de Klein-Gordon avec des potentiels vecteur et scalaire du type Hulthén modifié ont été obtenues dans l'approche de la mécanique quantique supersymétrique.

Ce mémoire comporte trois chapitres, est organisée comme suit :

Le première chapitre est consacré à un rappel succinct de la l'algebre et la formulation de la supersymétrie en mécanique quantique en insistant particulièrement sur la méthode de factorisation et la condition d'invariance de forme avec translation des paramètres qui nous permettent de déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde du système quantique.

Le sujet principal dans le deuxième chapitre l'étude quantique d'un système physique exactement soluble par la structure supersymétrique dans le domaine relativiste. En particulier nous étudions l'équation Klien-Gordon, nous allons voir que pour quelque problème physique ont été étudiés par la méthode *SUSYQM*, nous transformons l'équation de Klien-Gordon en forme de l'équation de Schrödinger afin de résoudre ce problème par la structure de la supersymétrie.

le troisième chapitre concerne un commentaire sur le traitement du problème des états liés d'une particule chargée en présence d'un champ à symétrie sphérique composé d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur égaux et dont la forme est celle de exponentiel.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

la supersymétrie en mécanique quantique non relativiste

1.1 introduction

La supersymétrie SUSY est une symétrie supposée de la physique des particules qui postule une relation profonde entre les particules de spin demi-entier (les fermions) qui constituent la matière et les particules de spin entier (les bosons) véhiculant les interactions. Dans le cadre de la SUSY, chaque fermion est associé à un « superpartenaire » de spin entier, alors que chaque boson est associé à un « superpartenaire » de spin demi-entier. Elle a été introduite dans la physique des hautes énergies dans le but d'obtenir une description unifiée de toutes les interactions fondamentales de la nature.

En mécanique quantique, la supersymétrie peut être considérée comme un procédé mathématique qui permet de construire de nouvelles formes de potentiels solubles analytiquement. La base du développement de la mécanique quantique supersymétrique (MQSUSY) est la méthode de factorisation de Schrödinger [1].

Dans ce Chapitre, nous décrirons la forme générale de la supersymétrie pour déterminer la solubilité exacte d'un système physique en mécanique quantique; cette forme est basée sur la factorisation du système.

1.2 la théorie supersymétrique

La mécanique quantique supersymétrique est apparue il y a une vingtaine d'années avec les travaux de Nicolai et Witten . Un système supersymétrique est caractérisé par une décomposition de l'espace de Hilbert en deux sous-espaces en somme directe (un espace dit « bosonique » et un espace dit « fermionique ») et un opérateur Q qui transforme les états bosoniques en états fermioniques et vice-versa.

mais à un système constitué d'un nombre indéterminé ou variable de particules, on le décrit par un vecteur d'un espace de Fock associé à l'espace de Hilbert.

1.2.1 Définitions

Un système quantique (\mathcal{H}, H) est dit supersymétrique s'il existe un nombre fini d'opérateurs auto-adjoints $Q_i (i \in \{1, 2, \dots, N\})$ ainsi qu'une involution (c'est-à-dire un opérateur auto-adjoint non borné) agissant sur satisfaisant :

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{i,j} H \quad \text{avec} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (1.1)$$

$$[Q_i, H] = 0 \quad \text{avec} \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (1.2)$$

Les opérateurs Q_i sont aussi appelés supercharges.

H est alors supersymétrique en ce sens qu'il commute avec les opérateurs de supercharges, c'est-à-dire qu'il est inchangé par les transformations engendrées par Q et Q^+ .

Cette symétrie permet d'expliquer certaines dégénérescences dans le spectre de H et elle permet d'appliquer des méthodes algébriques pour déterminer ce spectre. A partir de (1.1), on peut écrire :

$$H = 2Q_i^2 \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (1.3)$$

Le hamiltonien de ce système supersymétrique, défini comme suivant :

$$H = \frac{2}{N} \sum_i^N Q_i^2 \quad (1.4)$$

1.2.2 Algeber de la SUSY

Comme on vu précédemment, la *SUSYQM* peut être définie par les données de deux opérateurs auto-adjoints Q_1 et Q_2 qui vérifient (1.1). Maintenant nous allons introduire une paire d'opérateurs, appelés Supercharges complexes, Q et Q^+ , définis par :

$$\begin{cases} Q = \frac{(Q_1 + iQ_2)}{\sqrt{2}} \\ Q^+ = \frac{Q_1 - iQ_2}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (1.5)$$

On peut démontrer que ces nouveaux opérateurs, avec l'Hamiltonien, obéissent aux relations suivantes, qui découlent directement de (1.1), et (1.5) :

$$Q^2 = (Q^+)^2 = 0 \quad (1.6)$$

et

$$\begin{cases} \{Q, Q^+\} = H \\ [Q, H] = [Q^+, H] = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans ce cas, l'ensemble $\{H, Q, Q^+, \mathcal{H}\}$ est alors supersymétrique. en ce sens qu'il commute avec les opérateurs des charges.

Un système supersymétrique vérifie plusieurs propriétés :

- Son spectre est entièrement positif .
- L'espace des états peut se décomposer en somme directe : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_f$.
- Q_i envoie un état \mathcal{H}_b sur un état de \mathcal{H}_f et réciproquement.

1.3 Formulation de la supersymétrie

1.3.1 Factorisation d'un Hamiltonien quelconque

Depuis l'introduction de l'équation fondamentale de la mécanique quantique par Schrödinger, on n'a pas cessé d'essayer de lui trouver des méthodes de résolution adéquates. De nos jours plusieurs techniques existent, chacune peut être mieux adaptées à une situation particulière.

La méthode de factorisation, qui fut établie par Schrödinger en 1941 [24] pour résoudre le problème de l'atome d'Hydrogène et qui a connue des ramifications plus tard par Hull et Infeld est l'une des plus anciennes. Elle s'applique principalement dans les problèmes à une dimension de l'espace ou lorsque le potentiel est central.

Considérons un potentiel à une dimension $V(x)$, défini sur un intervalle $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ et satisfaisant aux contraintes d'existence d'états localisés. Soient $\{\psi(x)\}$ et $\{E_n\}$ l'ensemble des fonctions propres localisées et les énergies correspondantes d'une particule de masse m placée dans ce potentiel. L'équation de Schrödinger relative dans le cas générale s'écrit comme :

$$H \Psi_n(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x) \quad (1.8)$$

avec l'hamiltonien à une dimension

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (1.9.1)$$

D'une particule de masse m sous la forme d'un produit de deux opérateurs différentiels du premier ordre.

Si $\psi_0(x)$ (l'état fondamental) tend vers zéro pour $x \rightarrow \pm\infty$ et ne possède aucun problème, et si on choisit l'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien H_- comme étant zéro ($E_0^- = 0$). Alors L'équation de Schrödinger (1.8) est alors équivalente à une nouvelle équation de Schrödinger à l'état fondamental , donnée par :

$$H_- \Psi_0(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \right) \Psi_0(x) = 0 \quad (1.9.2)$$

En mécanique quantique supersymétrique, et dans un but de résolution de l'équation de Schrödinger par cette approche (invariance de forme), on choisit toujours ($E_0^- = 0$) , A partir de cette équation, on trouve facilement une expression de $V_-(x)$

$$V_-(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \quad (1.9.3)$$

Il est maintenant très simple de factoriser l'hamiltonien en utilisant A et A^+ :

$$\begin{aligned} H_- &= A^+ A & (1.10) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \end{aligned}$$

où

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + w(x) \quad (1.11)$$

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + w(x) \quad (1.12)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation A^+ et A sont une généralisation des opérateurs a^+ et a .

Ils sont dépendent du potentiel $V(x)$ et de l'énergie E_0 du niveau fondamental. satisfait la relation suivent

$$[\hat{A}, \hat{A}^+] = 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dw(x)}{dx} \quad (1.13)$$

Donc la relation de commutation de ces opérateurs A , A^+ n'est pas en général égale à l'unité comme le cas des opérateurs $(a^+; a)$ de l'oscillateur harmonique ($[a, a^+] = 1$).

Ceci nous permet d'identifier par substitutions (1.11) et (1.12) dans((1.10)) on trouve

$$V_-(x) = w^2(x) - \frac{\hbar}{2m} \frac{dw(x)}{dx} \quad (1.14)$$

Cette équation est l'équation bien connue de " *Riccati* ". Où $w(x)$ est généralement connu sous le nom de " *superpotentiel* " en littérature de la *SUSYMQ*, le superpotentiel $w(x)$ est un solution de l'équation du type Riccati.

La solution pour $w(x)$ en termes de fonction d'onde d'état fondamental est obtenue que la condition ($A\psi_0 = 0$) est satisfaite :

$$w(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\Psi'_0(x)}{\Psi_0(x)} \quad (1.15)$$

La fonction propre de l'état fondamental de H_- peut être facilement obtenu à partir de $\{A\psi_0(x) = 0\}$ où :

$$H_- \psi_0 = A^+ A \psi_0 = 0 \quad (1.16)$$

En effet, en reportant (1.15) dans l'équation précédent et après intégration, on obtient :

$$\Psi_0(x) = \Psi_0^-(x) = N_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{-x}^x w(x') dx'\right) \quad (1.17)$$

N_0 est une constante de normalisation.

Nous considérons maintenant les opérateurs supercharges Q et Q^+ sous la forme $Q = af^+$ et $Q^+ = a^+f$ dans un cadre général [32], ce qui est équivalent à :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

avec f^+ et f respectivement, des opérateurs de création et d'annihilation fermionique de la même manière que les opérateurs bosoniques a et a^+ .

On peut maintenant écrire et considérer une matrice hamiltonienne *SUSY* de la forme:

$$H_{susy} = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & AA^+ \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Cette matrice hamiltonienne fait partie d'une algèbre fermée qui contient les opérateurs bosoniques et fermioniques avec des relations de commutation et d'anti-commutation.

Les états propres de H_{susy} s'écrivent eux aussi en notation à deux composantes :

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \Psi_n^{(-)}(x) \\ \Psi_n^{(+)}(x) \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

alors

$$H_{susy} \Psi_n(x) = \begin{pmatrix} E_n^{(-)} \\ E_n^{(+)} \end{pmatrix} \Psi_n(x) \quad (1.21)$$

1.3.2 Lien entre les valeurs et fonctions propres des hamiltoniens partenaires :

La prochaine étape en construisant la théorie SUSY liée à l'hamiltonien original H_- est de définir l'opérateur $H_+ = AA^+$ obtenu en renversant l'ordre de A et de A^+ . Une peu de simplification prouve que l'opérateur H_+ est en fait la correspondance hamiltonienne à un nouveau potentiel $V_+(x)$.

$$\begin{aligned} H_+ &= AA^+ \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x) \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Notez que les valeurs propres d'énergie de H_- et de H_+ sont semi-définies positif ($E^-, E^+ \geq 0$).

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_n^{(-)}; \Psi_n^{(-)}(x)) \\ (E_n^{(+)}; \Psi_n^{(+)}(x)) \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Pour $n > 0$, l'équation de Schrödinger pour H_- Ainsi :

$$H_- \psi_n^{(-)}(x) = A^+ A \Psi_n^{(-)}(x) = E_n^{(-)} \Psi_n^{(-)} \quad (1.23)$$

implique

$$H_+ \psi_n^{(+)}(x) = AA^+ \Psi_n^{(+)}(x) = E_n^{(+)} \Psi_n^{(+)} \quad (1.24)$$

Nous montrons les relations que si l'on connaît toutes les fonctions propres de H_- ; on peut déterminer les fonctions propres de H_+ en appliquant l'opérateur A à l'équation 1.23 , et si l'on connaît toutes les fonctions propres de H_+ ; on peut déterminer les fonctions propres de H_- (mis à part l'état fondamental, qui n'a pas de SUSY-partenaire) en appliquant l'opérateur A^+ à l'équation 1.24 comme suit:

$$\begin{aligned} H_+ (A \Psi_n^{(-)}(x)) &= AA^+ A \Psi_n^{(-)}(x) \\ &= AH_- \Psi_n^{(-)}(x) \\ &= E_n^{(-)} (A \Psi_n^{(-)}(x)) \end{aligned} \quad (1.25)$$

et

$$\begin{aligned} H_- (A^+ \Psi_n^{(+)}(x)) &= A^+ AA^+ \Psi_n^{(+)}(x) \\ &= A^+ H_+ \Psi_n^{(+)}(x) \\ &= E_n^{(+)} (A^+ \Psi_n^{(+)}(x)) \end{aligned} \quad (1.26)$$

D'après les éqs (1.25) et (1.26) et du fait que ($E_0^- = 0$), il est clair que les valeurs propres E_n^- , E_n^+ et les fonctions propres $\Psi_n^{(-)}(x)$, $\Psi_n^{(+)}(x)$ des deux hamiltoniens H_- et H_+ sont reliées par :

$$E_{n+1}^{(-)} = E_n^{(+)} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

$$\Psi_n^{(+)}(x) = N_{n+1}^{(-)} A \Psi_{n+1}^{(-)}(x) \quad (1.28)$$

$$\Psi_{n+1}^{(-)}(x) = N_n^{(+)} A^+ \Psi_n^{(+)}(x) \quad (1.29)$$

$N_{n+1}^{(-)}$ et $N_n^{(+)}$ sont des constantes de normalisation.

la norme de la fonction propre $A \Psi_0^{(-)}(x) = 0$

$$\| A \Psi_0^{(-)}(x) \|^2 = 0 \quad (1.30)$$

ce qui ne se réalise que si la fonction elle-même est nulle

$$A \Psi_0^{(-)}(x) = 0 \quad (1.31)$$

En normalisant à l'unité toutes les fonctions propres, on utilise la relation (1.28)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^{(+)*}(x) \Psi_n^{(+)}(x) dx &= |N_{n+1}^{(-)}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{n+1}^{(+)*}(x) (A^+ A) \Psi_{n+1}^{(-)}(x) dx \\ &= |N_{n+1}^{(-)}|^2 E_{n+1}^{(-)} \int_{-\infty}^{-\infty} \Psi_{n+1}^{(-)*}(x) \Psi_{n+1}^{(-)}(x) dx \end{aligned} \quad (1.32)$$

donc

$$|N_{n+1}^{(-)}| = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(-)}}} \quad (1.33)$$

de la même manière on utilise(1.29)

$$|N_n^{(+)}| = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(+)}}} \quad (1.34)$$

On peut alors réécrire (1.28)et(1.29)comme:

$$\Psi_n^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(-)}}} A \Psi_{n+1}^{(-)}(x) \quad (1.35)$$

et

$$\Psi_{n+1}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(+)}}} A^+ \Psi_n^{(+)}(x) \quad (1.36)$$

En conclusion, la connaissance des fonctions propres de l'un des hamiltoniens partenaires suffit pour déterminer celles de l'autre, par action des opérateurs A et A^+ .

1.4 Hiérarchie d' Hamiltoniens partenaires supersymétriques

Dans le paragraphe précédent nous avons trouver qu'une fois qu'on connaît la fonction d'onde de l'état fondamental qui correspond à H_1 , on peut trouver le superpotentiel de l'équation (1.15). On sait aussi que la fonction d'onde de l'état fondamental du partenaire hamiltonien H_2 est déterminée par le premier état excité H_1 en appliquant l'opérateur A_1 , donc on vient de voir qu'on peut déterminer H_2 si l'on connaît H_1 . On peut dès lors aussi refactoriser H_2 pour déterminer son partenaire H_3 , puis refactoriser H_3 pour déterminer son partenaire H_4 , et ainsi de suite. Chaque nouvel Hamiltonien a un état lié de moins que le précédent. $\{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ pour simplifier les expressions on prend $\hbar = 2m = 1$

Soit donc le hamiltonien de départ :

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} \quad (1.37)$$

Où $E_0^{(1)}$ l'énergie de son niveau fondamental, A_1^+ et A_1 sont deux opérateurs adjoint l'un de l'autre, définis par :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{d}{dx} + w_1(x) \\ A_1^+ = -\frac{d}{dx} + w_1(x) \end{cases} \quad (1.38)$$

tel que $w_1(x)$ est la solution de l'équation de Riccati

$$w_1^2(x) - \frac{dw_1(x)}{dx} = V_1(x) - E_0^{(1)} \quad (1.39)$$

Une fois l'équation (1.39) résolue, on obtient la fonction de l'état fondamental a partir de cette expression

$$w_1(x) = -\frac{d}{dx} \ln \left(\Psi_0^{(1)}(x) \right) \quad (1.40)$$

Le partenaire SUSY Hamiltonien est donné alors :

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (1.41)$$

où

$$w_1^2(x) + \frac{dw_1(x)}{dx} = V_2(x) - E_0^{(1)} \quad (1.42)$$

donc

$$V_2(x) = V_1(x) + 2\frac{dw_1(x)}{dx} \quad (1.43)$$

on remplace $w_1(x)$ on trouve :

$$V_2 = V_1 - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\Psi_0^1(x)) \quad (1.44)$$

On doit introduire la notion $E_n^{(m)}$, n est le niveau d'énergie et m refert le m ' ième hamiltonien H_m . Les valeurs propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens H_1 et H_2 :

$$\begin{cases} E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \\ \Psi_n^{(2)}(x) = \frac{A_1}{\sqrt{(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)})}} \Psi_{n+1}^{(1)}(x) \\ \Psi_{n+1}^{(1)}(x) = \frac{A^+}{\sqrt{E_n^{(2)} - E_0^{(1)}}} \Psi_n^{(2)}(x) \end{cases} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \quad (1.45)$$

Maintenant commençant par factoriser l'hamiltonien H_2 dont l'énergie fondamentale est $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$, pour déterminer son partenaire H_3 . d'après ceci nous pouvons écrire H_2 sous la forme :

$$\begin{aligned} H_2 &= A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} \\ &= A_2^+ A_2 + E_1^{(1)} \end{aligned} \quad (1.46)$$

où

$$A_2 = \frac{d}{dx} + w_2(x) \quad (1.47)$$

$$A_2^+ = -\frac{d}{dx} + w_2(x) \quad (1.48)$$

$w_2(x)$ satisfait l'équation de Riccati :

$$w_2^2(x) - \frac{dw_2(x)}{dx} = V_2(x) - E_0^{(2)} \quad (1.49)$$

et

$$w_2(x) = -\frac{d}{dx} \ln \left(\Psi_0^{(2)}(x) \right) \quad (1.50)$$

On continuant de la même manière on obtient :

$$H_3 = A_2 A_2^+ + E_0^2 = A_2 A_2^+ + E_1^{(1)} \quad (1.51)$$

et on a :

$$H_3 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (1.52)$$

D'après les relations (1.47), (1.48), (1.51), (1.52) on trouve :

$$V_3 = w_2^2(x) + \frac{dw_2(x)}{dx} - E_0^{(2)} \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} &= V_2(x) + 2\frac{dw_2(x)}{dx} \\ &= V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\Psi_0^{(2)}(x) \right) \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\Psi_0^{(1)}(x) \Psi_0^{(2)}(x) \right) \quad (1.55)$$

Donc on peut écrire les relation entre les valeurs propres et les fonctions propres de H_1 et H_2 et H_3 comme :

$$E_{n+2}^{(1)} = E_{n+1}^{(2)} = E_n^{(3)} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(3)}(x) &= \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)} \right)^{-\frac{1}{2}} A_2 \Psi_{n+1}^{(2)}(x) \\ &= \left(E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} A_2 \Psi_{n+1}^{(2)}(x) \\ &= \left(E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} A_2 A_1 \Psi_{n+2}^{(1)}(x) \end{aligned} \quad (1.57)$$

et ainsi de suite , chaque nouvel Hamiltonien à un état lié de moins que le précédent.

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^{(2)}(x) &= \frac{A_2^+}{\sqrt{E_n^{(3)} - E_0^{(2)}}} \Psi_n^{(3)}(x) \\ &= \frac{A_2^+}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}}} \Psi_n^{(3)}(x) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Dans le classement des Hamiltoniens H_2, H_3, H_4, \dots , chaque nouvel Hamiltonien a un état lié de moins que le précédent. Si l'Hamiltonien de départ H_1 a un nombre p d'états liés,

aux valeurs propres $E_n^{(1)}$ et aux fonctions propres $\psi_n^{(1)}$ avec $0 \leq n \leq p-1$, alors nous pouvons toujours générer une hiérarchie de $(p-1)$ Hamiltoniens $H_1, H_2, H_3, \dots, H_p$ telle que H_m (où $m = 2, 3, \dots, p$) a le même spectre des valeurs propres que H_1 , à l'exception que H_m n'a pas les $(m-1)$ premières valeurs propres de H_1 [33 – 34] . Pour $2 \leq m \leq p$, l'Hamiltonien H_m est alors donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} H_m &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) \\ &= A_m^+ A_m + E_{m-1}^{(1)} \end{aligned} \quad (1.59)$$

où

$$\begin{cases} A_m = \frac{d}{dx} + w_m(x) \\ A_m^+ = -\frac{d}{dx} + w_m(x) \end{cases} \quad (1.60)$$

on a aussi :

$$w_m(x) = -\frac{d}{dx} \ln \left(\Psi_0^{(m)}(x) \right) \quad (1.61)$$

Donc

$$w_m^2(x) - \frac{dw_m(x)}{dx} = V_m(x) - E_0^{(m)} \quad (1.62)$$

Où $\Psi_0^{(m)}(x)$ est la fonction propre de l'état fondamental de H_m .

De la factorisation (1.59) résulte l'hamiltonien partenaire H_{m+1} tel que

$$H_{m+1} = A_m A_m^+ + E_0^{(m)} \quad (1.63)$$

Les énergies propres et fonctions propres des hamiltoniens H_m et H_{m+1} sont reliées par :

$$E_n^{(m)} = E_n^{(m+1)} \quad (1.64)$$

les relations entre les valeurs propres et les fonctions propres des m Hamiltoniens de la hiérarchie est :

$$\begin{cases} E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \\ \Psi_n^{(m)}(x) = \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \dots \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} A_{m-1} \dots A_1 \Psi_{n+m-1}^{(1)}(x) \\ V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\Psi_0^{(1)} \dots \Psi_0^{(m-1)} \right). \end{cases} \quad (1.65)$$

Dans ce chemin, connaître tout les valeurs propres et fonctions propres de H_1 on sera directement tout les valeurs propres d'énergie et les fonctions propres de la hiérarchie de $(p-1)$ Hamiltonien.

1.5 Invariance de forme:

L'invariance de forme pour un potentiel stationnaire à une dimension a été introduite en 1983 par Gendshstein [25]. Cette propriété fondamentale, combinée aux résultats de la hiérarchie abordés dans la section précédente, permet d'obtenir toutes les énergies quantifiées de l'hamiltonien par une formule simple et unifiée. Les fonctions propres associées aux niveaux excités peuvent également être déduites directement de la fonction propre de l'état fondamental.

1.5.1 Définition

Considérons que le potentiel supersymétrique de départ dépend de certains paramètres qu'on dénote simplement par a_1 . Il s'écrit donc explicitement $V_-(x, a_1)$. Les équations de Riccati pour les potentiels partenaires associés à $V_+(x, a_2)$ s'écrivent donc comme suit :

$$V_-(x, a_1) = w^2(x, a_1) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w'(x, a_1) \quad (1.66)$$

et

$$V_+(x, a_2) = w(x, a_2) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w'(x, a_2) \quad (1.67)$$

Donc la même forme et ne diffèrent que par un ensemble fini des paramètres, on dit que ce sont des "potentiels invariants de formes". Simplement, l'invariance de forme se caractérise par la relation suivante :

$$V_+(x, a_1) = V_-(x, a_2) + R(a_1) \quad (1.68)$$

où $R(a_1)$ est une fonction indépendante de x , appelée " Reste ".

Où a_1 et a_2 sont deux jeux finis des paramètres, reliés par :

$$a_2 = f(a_1) \quad (1.69)$$

La fonction f peut être une fonction quelconque, mais jusqu'à présent toutes les études effectuées sur les différents potentiels connus qui sont analytiquement solubles, ont conduit seulement à trouver deux formes principales.

La première forme relie a_1 et a_2 par une relation de translation, de la forme:

$$a_2 = a_1 + \alpha \quad (1.70)$$

où α est une constante finie arbitraire.

La plupart des potentiels que nous pouvons rencontrer dans les études des systèmes quantiques (non relativistes) appartiennent à la première catégorie.

La seconde forme relie a_1 et a_2 par un facteur d'échelle sous la forme :

$$a_2 = qa_1 \quad \text{avec } 0 < q < 1 \quad (1.71)$$

Il existe, toutefois, d'autres possibilités pouvant, peut être, conduire à d'autres classes des potentiels invariants de forme. L'une est une généralisation de la seconde forme, considérée ci-dessus :

$$a_2 = qa_1^p \quad \text{avec } 0 < q < 1 \text{ et } p = 2, 3, 4, \dots \quad (1.72)$$

Une autre relation est proposée sous la forme :

$$a_2 = \frac{qa_1}{1 + p\alpha} \quad \text{avec } 0 < q < 1 \text{ et } p\alpha \lll 1 \quad (1.73)$$

1.5.2 Invariance de forme et hiérarchie de potentiels superpartenaires

On peut dès lors appliquer le concept d'invariance de forme à la SUSY. supposons que les deux potentiels partenaires V_1 et V_2 , déjà définis par (1.66), sont invariants de formes on peut donc écrire :

$$V_2(a_1) = V_1(a_2) + R(a_1) \quad (1.74)$$

Les relations (1.41) et (1.74) entraînent que :

$$\begin{aligned}
 H_2(a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_1) \\
 &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_2) + R(a_1) \\
 &= H_1(a_2) + R(a_1)
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

Qui signifie le spectre de $H_2(a_0)$ est le même que celui de $H_1(a_1)$ mais décalé d'un facteur constant $R(a_0)$. Ceci veut dire aussi que les fonctions propres $\psi_n^{(2)}(x, a_1)$ et $\psi_n^{(1)}(x, a_2)$ sont identiques, on écrit :

$$\begin{cases} \psi_n^{(2)}(x, a_1) = \psi_n^{(1)}(x, a_2) \\ E_n^{(2)}(a_1) = E_n^{(1)}(a_2) + R(a_1) \end{cases} \tag{1.76}$$

maintenant cette relation Combinant sous la forme :

$$A_2^+(a_1) A_2(a_1) + E_0^{(2)} = A_1^+(a_2) A_1(a_2) + E_0^{(1)} + R(a_1) \tag{1.77}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} E_0^{(2)} = E_1^{(1)} = R(a_1) \\ A_2(a_1) = A_1(a_2) \end{cases} \tag{1.78}$$

Appliquons encore une fois la condition d'invariance de forme aux deux partenaires V_2 et V_3 . On trouve :

$$\begin{aligned}
 V_3(x, a_1) &= V_2(x, f(a_1)) + R(a_1) \\
 &= V_1(x, f(f(a_1))) + R(f(a_1)) + R(a_1) \\
 &= V_1(x, a_3) + R(a_2) + R(a_1)
 \end{aligned} \tag{1.79}$$

de même méthode en peut écrire $H_3(a_0)$ en fonction $H_1(a_2)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
 H_3(a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_2) + R(a_1) \\
 &= H_2(a_2) + R(a_1) \\
 &= H_1(a_2) + R(a_1) + R(a_2)
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

Nous avons exprimé les caractéristiques de $H_3(a_0)$ en fonction de $H_1(a_2)$ comme :

$$\begin{cases} \psi_n^{(3)}(x, a_1) = \psi_n^{(1)}(x, a_3) \\ E_n^{(3)}(a_1) = E_n^{(1)}(a_2) + R(a_0) + R(a_1) \end{cases} \quad (1.81)$$

maintenant cette relation Combinant sous la forme :

$$A_3^+(a_1) A_3(a_1) + E_0^{(3)}(a_1) = A_1^+(a_3) A_1(a_3) + E_0^{(1)}(a_3) + R(a_1) + R(a_2) \quad (1.82)$$

Il vient que :

$$\begin{cases} E_0^{(3)}(a_1) = E_2^{(1)}(a_1) = R(a_1) + R(a_2) \\ A_3(a_1) = A_1(a_3) \end{cases} \quad (1.83)$$

On peut à présent procéder à une généralisation en considérant deux potentiels partenaies successifs V_{m+1} et V_m de la hiérarchie. On peut écrire donc :

$$\begin{aligned} V_{m+1}(x, a_1) &= V_m(x, f(a_1)) + R(a_1) \\ &= V_{m-1}(x, f^2(a_1)) + R(f(a_1)) + R(a_1) \\ &= V_{m-2}(x, f^3(a_1)) + R(f^{(2)}(a_1)) + R(f(a_1)) + R(a_1) \\ &\vdots \\ &= V_1(x, f^{(m)}(a_1)) + \sum R(f^{(k)}(a_1)) \\ &= V_1(x, a_{m+1}) + \sum R(a_{k+1}) \end{aligned} \quad (1.84)$$

Ce qui conduira, par analogie :

$$\begin{aligned} H_{m+1}(x, a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_{m+1}(x, a_1) \\ &= A_m(a_1) A_m^+(a_1) + E_0^{(m)} \\ &= A_{m-1}^+(a_1) A_{m-1}(a_1) + E_0^{(m-1)} \end{aligned} \quad (1.85)$$

Par conséquent, on obtient

finalement :

$$\begin{aligned} H_p(x, a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_p) + \sum_{k=0}^{p-1} R(a_k) \\ &= H_1(a_p) + \sum_{k=0}^{p-1} R(a_k) \end{aligned}$$

où $a_p = f^{p-1}(a_1)$ est la fonction f appliquée $(p - 1)$ fois.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=0}^{p-1} R(a_k) \\ \psi_n^{(p+1)}(x, a_1) = \psi_n^{(1)}(x, a_p) \text{ avec } n \geq 1 \\ A_{p+1}(a_0) = A_1(a_p) \end{array} \right. \quad (1.87)$$

$$E_0^{(p)} = \sum_{k=1}^{p-1} R(a_k) \quad (1.88)$$

Alors, on obtient les spectres et les fonctions propres de l'Hamiltonien original H sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_n(x, a_1) = \prod_{k=1}^n \left(\left[E_n(a_1) - E_{k-1}^{(1)} \right]^{-\frac{1}{2}} A_1^+(a_{k-1}) \right) \psi_0^{(1)}(x, a_n) \text{ avec } n \geq 1 \\ E_n(a_1) = E_0 + \sum_{k=0}^{n-1} R(a_k) \end{array} \right. \quad (1.89)$$

Enfin, on arrive à un résultat très intéressant; pour obtenir tous les niveaux excités de H_1 , il suffit d'obtenir la fonction d'onde $\psi_0^{(1)}(x, a_0)$ de son état fondamental par le biais de (1.17), puis calculer $\psi_0^{(1)}(x, a_n)$, et après on applique la condition d'invariance de forme pour trouver les restes $R(a_k)$.

Chapitre 2

La supersymétrie en mécanique quantique relativiste

2.1 Introduction

Depuis la fondation de la mécanique quantique au début du siècle dernier, un développement considérable est réalisé dans la construction de modèles des potentiels pour décrire des interactions nucléaires en physique nucléaire ou des interactions interatomiques en physique atomique ou moléculaire et en chimie quantique grâce à de nombreuses méthodes de résolution des équations d'onde employées dans le cadre non relativiste ou dans un contexte relativiste.

En mécanique quantique, la SUSY est une nouvelle technique qui permet de résoudre une classe de potentiel en introduisant des superhamiltoniens qui permettent le passage d'une potentiel vers une autre. C'est une méthode assez puissante qui permet de retrouver presque tous les résultats déjà obtenus par les méthodes habituelles. Le sujet principal dans ce mémoire est de revoir cette technique dans le domaine relativiste.

Dans la structure mathématique relative à la physique à deux dimensions, les solutions exactes, de l'équation de Dirac et l'équation de Klein-Gordon et leur spectres ont un intérêt particulier. Beaucoup d'études ont été faite sur le mouvement des particules de Klein-Gordon et de Dirac. Nous Utilisons ici des techniques standard de mécanique quantique supersymétrique pour résoudre exactement l'équation de Klein-Gordon et l'équation

de Dirac. Dans ce travail, nous allons présenter un schéma généralisé de supersymétrie en mécanique quantique (*SUSYMQ*) pour obtenir des solutions exactes et les spectres d'énergie.

2.2 La supersymétrie et l'équation de Dirac

L'équation de Dirac permet de décrire les problèmes mécaniques quantiques de façon relativiste. Une procédé matriciel unidimensionnel supersymétrique, du même type que précédemment, a été utilisé entre les équations de Dirac et les équations de Schrodinger dans la physique des particules qui est décrit dans les limites générales. Par ce moyen, nous pouvons présenter le procédé qui est une prolongation du raccordement supersymétrique connu entre l'équation matricielle de Dirac et l'équation de Schrodinger [26]. Une discussion détaillée sur l'équation de Dirac par l'approche supersymétrique est fournie par Cooper et autres.

En 1988 [27], qui a montré que L'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz est associée à une paire supersymétrique d' Hamiltoniens de Schrodinger.

Plusieurs aspects de l'équation de Dirac ont été également étudiés dans le formalisme de la MQ SUSY [28], [29] . Le problème célèbre de la particule de Dirac dans un champ coulombien a été également résolu algébriquement en employant les concepts de la SUSY et de l'invariance de forme [30]. La SUSY de l'électron de Dirac dans un champ magnétique monopole a été également étudié[31].

2.3 La supersymétrie et l'équation de Klein-Gordon

2.3.1 introduction

Il est bien connu que la solution analytique de l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac jouent un rôle important dans Mécanique quantique relativiste, car la fonction d'onde Contient toutes les informations à la description d'un système quantique. Ces dernières années, il y a eu beaucoup de discussions sur l'équation de Klein Gordon avec les divers types de potentiels en utilisant des méthodes variées pour résoudre l'équation et obtenir

le spectre du système. Seulement, quelques problèmes physiques ont été étudiés par la méthodes SUSYMQ. Il s'agit de transformer l'équation de Klein Gordon en une forme similaire à l'équation de Schrödinger utilisant la supersymétrie en mécanique quantique.

2.3.2 La formulation de l'Hamiltonien de SUSY QM et la méthode de factorisation

En mécanique relativiste, la solution de L'équation de Klein-Gordon joue un rôletres important de la physique nucléaire et d'autres domaines . Cette équation relativiste contiennent deux objets, Le vecteur $V(x)$ et le potentiel scalaire $S(x)$ ($c = \hbar = 1$). Alors cette equation avec les potentiels scalaires et vectoriel peut être écrite comme Suit:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + (E - V(r))^2 - (M + S(r))^2 \right] \psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

Avec M est la masse de la particule ,et E l'énergie. Dans le cas où le potentiel vectoriel est égal au potentiel scalaire, c'est-à-dire $V(x) = S(x)$, donc l'équation (2.1) devient une équation de Schrödinger bien connue :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + E^2 - M^2 - 2(E + M)V(x) \right] \psi(x) = 0 \quad (2.2)$$

avec

$$V_{eff}(x) = 2(E + M)V(x) \quad (2.3)$$

Alors l'équation(2.1) prend la forme suivante :

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(x) \right] \psi(x) = \lambda \psi(x) \quad (2.4)$$

Où λ est le paramètre d'énergie donné par :

$$\lambda = M^2 - E^2 \quad (2.5)$$

Pour résoudre l'équation (2.4), Dans le cadre de la supersymétrie en mécanique quantique, la fonction d'onde réduite de l'état fondamental est définie par :

$$\psi_0(x) = N \exp \left[\int W(x) dx \right] \quad (2.6)$$

Où N est une constante de normalisation et $W(x)$ est le superpotentiel défini par :

$$W^2(x) - W'(x) = V_{eff}(x) - \lambda_0 \quad (2.7)$$

Où λ_0 est l'énergie de l'état fondamental. L'équation(2.7) est une équation de Riccati non-linéaire qui donne les fonctions d'onde du système.

2.4 L'équation de Klein-Gordon tridimensionnelle

En général, l'équation de Klein-Gordon pour une potentiel scalaire $S(r)$ et une potentiel vectorielle $V(r)$ à symétrie sphérique s'écrit dans le système d'unités naturelles $\hbar = c = 1$ sous la forme suivante :

$$[\nabla^2 + (V(r) - E)]^2 + (S(r) + M)^2 \psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (2.8)$$

où E est l'énergie, M est la masse de la particule, $\psi(r, \theta, \varphi)$ est la fonction d'onde, ∇^2 est l'opérateur de Laplace.

Comme $V(r)$ et $S(r)$ sont des potentiels à symétrie sphérique, il convient de chercher les solutions particulières de l'équation (2.8) par séparation des variables en coordonnées sphériques.

L'expression de laplacien en coordonnées sphériques est :

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (2.9.1)$$

Si l'on utilise l'expression du carré du moment cinétique orbital \vec{L}^2 , en coordonnées sphériques est :

$$\vec{L}^2 = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$L_z = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

On voit que laplacien peut se mettre sous la forme :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2}$$

Où

$$\begin{cases} H\psi = E\psi \\ L^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi \\ L_z\psi = m\hbar\psi \end{cases} \quad (2.9.2)$$

Finalement, l'équation de Klein-Gordon avec les coordonnées sphériques deviennent comme suite :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2} - 2\{EV(r) + MS(r)\} + V^2(r) - S^2(r) + E^2 - M^2 \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (2.10)$$

Si on attribue la fonction d'onde totale sphérique correspondante :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.11)$$

Où

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (2.12)$$

Ensuite, L'équation (2.10) séparée en variables , les équations résultantes deviennent :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + [E^2 - M^2 - 2\{EV(r) + MS(r)\} + V^2(r) - S^2(r) - \frac{\lambda}{r^2}]R(r) = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} (\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}) \Theta(\theta) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (2.15)$$

Où m^2 et $\lambda = l(l + 1)$ sont des constantes de séparation.

Chapitre 3

Les états d'une particule de Klein-Gordon dans des potentiels scalaire et vectorielle du type exponentiel

Dans ce chapitre nous réexaminons la solution du problème d'une particule relativiste sans spin ($spin = 0$), de masse M qui se déplace sous l'action d'un champ à symétrie sphérique composé d'un potentiel scalaire $S(r)$ et d'un potentiel vectorielle $V(r)$ égaux.

L'équation de Klein-Gordon décrit le mouvement d'une particule de *Spin-zero* [32–33]. Les niveaux d'énergie et les valeurs propres de L'équation de Klein-Gordon a déterminé avec une simple Potentiel .

Il est clair que cette équation différentielle n'admet aucune solution exacte pour les états de moment cinétique orbital l différent de zéro à cause du terme centrifuge. Les solutions de cette équation peuvent être trouvées uniquement pour les ondes s ($l = 0$) dans le cas des potentiels de Hulthén ou de Woods-Saxon déformés [34 – 35].

En réalité, l'équation de Klein-Gordon dans le cas ($l \neq 0$) est trop compliquée et ne se laisse pas traiter exactement. Il faut alors avoir recours à une résolution basée sur une méthode d'approximation qui permet d'obtenir analytiquement une solution approchée de l'équation.

Les potentiels de type exponentiel comme le potentiel de *Titz – Wei* jouent un rôle très important en physique microscopique car ils sont largement utilisés comme une bonne approximation du potentiel d'interaction dans de nombreux domaines de la physique et de la chimie notamment en physique nucléaire, physique atomique et moléculaire et en chimie quantique.

Le potentiel Titz-Wei est de la forme [36]

$$V(r) = v_0 \left(\frac{1 - e^{-2\alpha r}}{1 - qe^{-2\alpha r}} \right)^2 \quad (3.1)$$

Où V_0 est une profondeur potentielle, q paramètre de déformation ($0 < q < 1$, l'introduction du paramètre q peut servir comme un paramètre supplémentaire dans la description des interactions inter-atomiques).

Le but de ce travail est de résoudre approximativement l'équation de Klein-Gordon pour les états l avec la méthode de SUSY et la symétrie de spin (dans l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac la symétrie de spin : $\Delta(r) = V(r) - S(r) = const$, la symétrie de pseudospin: $\Sigma(r) = V(r) + S(r) = const$).

Pour expliquer les caractéristiques des noyaux déformés et la super déformation, les concepts des symétries de spin et de pseudospin sont introduits dans la théorie nucléaire [37, 38]) dans les potentiels des types exponentiel.

Dans la solution de l'équation de Klein-Gordon pour les états l d'une particule dans des potentiels scalaire et vecteur du type exponentiel donne d'après la substitution de l'expression (3.1) dans l'équation (2.13) . la Partie radiale de l'équation de Klein-Gordon pour la symétrie de spin, elle vient :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left(E^2 - M^2 - 2(E + M) V_0 \left(\frac{1 - e^{-2ar}}{1 - qe^{-2ar}} \right)^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (3.2)$$

Nous savons bien que cette équation n'admet pas de solutions analytiques pour ($l \neq 0$) à cause du potentiel centrifuge. Mais, à défaut de la résolution rigoureuse de cette équation, nous pouvons utiliser des méthodes d'approximation qui permettent d'obtenir analytiquement des solutions approchées de l'équation (3.2).

Nous pouvons par exemple remplacer le potentiel centrifuge par une expression semblable aux termes du potentiel contenu dans l'équation (l'approximation de *Pekeris*). Il est commode de prendre[39]

$$\frac{1}{r^2} \cong 4\alpha^2 \left[C_0 + \frac{e^{-2ar}}{(1 - qe^{-2ar})^2} \right] \quad (3.3)$$

Où C_0 est une constante sans dimension.

Donc l'équation (3.2) devient une équation du type Schrödinger.

En substituant l'expression (3.3) dans l'équation (3.2), il vient :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left[E^2 - M^2 - 2(E + M)V_0 \left(\frac{1 - e^{-2ar}}{1 - qe^{-2ar}} \right)^2 - \lambda 4\alpha \left(C_0 + \frac{e^{-2ar}}{(1 - qe^{-2ar})^2} \right) \right] R(r) = 0 \quad (3.4)$$

On peut écrire l'equation (3.4) comme l'equation de Schrödinger :

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V_1 \frac{e^{-2ar}}{(1 - qe^{-2ar})^2} + V_2 \left(\frac{1 - e^{-2ar}}{1 - qe^{-2ar}} \right)^2 \right] R(r) = E_0 R(r) \quad (3.5)$$

avec

$$\begin{cases} V_1 = 4\alpha^2 \lambda \\ V_2 = 2(E + M)V_0 \\ E_0 = E^2 - M^2 - 4\alpha^2 \lambda C_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

3.0.1 Spectre d'énergie de l'équation de Klein-Gordon avec le potentiel de Titz-Wei

Nous appliquerons la supersymétrie en mécanique quantique et nous utiliserons l'approche de l'invariance de forme avec le potentiel du type exponentiel à six paramètres (SPEP) pour déterminer le spectre d'énergie du système.

Comparer l'equation. (3.5) avec l'equation (1.14), on obtient :

$$V_-(r) = W^2(r) - \frac{dW(r)}{dr} = V_1 \left(\frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - qe^{-2\alpha r})^2} \right) + V_2 \left(\frac{1 - e^{-2\alpha r}}{1 - qe^{-2\alpha r}} \right)^2 - E_0 \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) équivalente à une équation de Riccati non-linéaire si en utilisant la méthode de *SUSY* nous pouvons mettre le superpotentiel comme suite :

$$\begin{aligned} W(r) &= W(x - x_e) \\ &= - \left(Q_1 + \frac{Q_2}{e^{b(x-x_e)} - qe^{bx_e}} \right) \\ &= - \left(Q_1 + \frac{Q_2 e^{-b(x-x_e)}}{(1 - qe^{-b(x-2x_e)})} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Avec $r = x - x_e$ et x_e est constante sans dimension .

Donc

$$W^2(x) - W'(x) = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 \left(\frac{e^{-b(x-x_e)}}{1 - qe^{-b(x-2x_e)}} \right) + \frac{(Q_2 e^{-b(x-x_e)})^2 - b e^{-b(x-x_e)}}{(1 - qe^{-b(x-2x_e)})^2} \quad (3.9)$$

En identifier les deux équations (3.7) et (3.9) on obtiennent :

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{qQ_2} (q(2V_2(q-1)e^{bx_e} + V_1e^{bx_e}) + (V_2(q-1)^2 e^{2bx_e} + V_1e^{2bx_e}) - Q_2^2) \\ Q_2 = q \left[-\frac{b}{2} \pm \left[\frac{b^2}{4} + \frac{1}{q^2} (V_2(q-1)^2 e^{2bx_e} + V_1e^{2bx_e}) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \end{cases} \quad (3.10)$$

Par conséquence

$$\begin{cases} V_+(x - x_e) = W^2(x) + \frac{dW(x)}{dx} = \left(Q_1 + \frac{Q_2 e^{-b(x-x_e)}}{(1 - qe^{-b(x-2x_e)})} \right)^2 + \frac{bQ_2 e^{-b(x-x_e)}}{(1 - qe^{-b(x-2x_e)})^2} \\ V_-(x - x_e) = W^2(x) - \frac{dW(x)}{dx} = \left(Q_1 + \frac{Q_2 e^{-b(x-x_e)}}{(1 - qe^{-b(x-2x_e)})} \right)^2 - \frac{bQ_2 e^{-b(x-x_e)}}{(1 - qe^{-b(x-2x_e)})^2} \end{cases} \quad (3.11)$$

les potentiels $V_-(x, a_2)$ et $V_+(x, a_1)$ satisfont la condition de l'invariance de forme :

$$V_+(x, a_1) = V_-(x, a_2) + R(a_1) \quad (3.12)$$

Alors les niveaux d'nergie donné comme suit :

$$\begin{aligned} E_n &= V_2 - \frac{(1-q^2)b^2}{16q} \\ &\times \left[\frac{V_2}{\frac{b^2}{4} \left(2n+1 + \frac{1}{q} \sqrt{q^2 + \frac{4(q-1)}{b^2} V_2 + \frac{4q}{b^2} V_1} \right)} + \left(2n + 1 + \frac{1}{q} \sqrt{q^2 + \frac{4(q-1)}{b^2} V_2 + \frac{4q}{b^2} V_1} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

avec $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

En remplaçant l'équation (3.13) dans l'équation (3.6) on trouve :

$$E^2 + M^2 - 4\alpha\lambda C_0 = 2(E + M)V_0 - \frac{(1-q^2)b^2}{16q} \times \left[\frac{2(E+M)V_0}{-\frac{b^2}{4}\left(2n+1+\frac{1}{q}\sqrt{q^2+\frac{8(q-1)}{b^2}(E+M)V_0+\frac{16q}{b^2}\alpha^2\lambda}\right)} + \left(2n+1+\frac{1}{q}\sqrt{q^2+\frac{8(q-1)}{b^2}(E+M)V_0+\frac{16q}{b^2}\alpha^2\lambda}\right) \right]^2 \quad (3.14)$$

si $(q = 0, 1)$, $(C_0 = \frac{1}{12})$ et $(l = 1)$ en remplaçant les conditions précédent dans l'équation (3.14) :

$$E^2 - M^2 - \frac{2}{3}\alpha^2 = 2(E + M)V_0 - 2.475\alpha^2 \times \left[\frac{2(E+M)V_0}{-\alpha^2\left(2n+1+10\sqrt{0.18-\frac{1.98}{\alpha^2}(E+M)V_0}\right)} + \left(2n+1+10\sqrt{0.18-\frac{1.98}{\alpha^2}(E+M)V_0}\right) \right]^2 \quad (3.15)$$

3.0.2 Les Fonctions d'onde

Par le changement

$$y = e^{-2ar} \quad (3.16)$$

on réduit (3.5) à (3.16) on obtient :

$$\left[-y^2 \frac{d^2}{d^2y} - y \frac{d}{dy} + \frac{1}{(2\alpha)^2 (1-xy)^2} \left[(V_1 - 2V_2)y + V_2y^2 - E_0(1-xy)^2 + V_2 \right] \right] R(y) = 0 \quad (3.17)$$

Posons ensuite :

$$R(y) = y^{\frac{\mu}{2}} (1-xy)^{\frac{1+\nu}{2}} (1-2xy) F(y) \quad (3.18)$$

avec

$$\mu = 2i\sqrt{\frac{E_0}{4\alpha^2}} \quad (3.19)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4\alpha^2}(E^2 - M^2) + \frac{E_0}{4\alpha^2} + \frac{V_1}{4\alpha^2}q^2 + \frac{V_2}{4q\alpha^2V_0}}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}\mu &= 2i\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2}(E^2 - M^2) - l(l+1)C_0} \\ \nu &= \sqrt{\frac{1}{4} - l(l+1)(C_0 + q^2) + \frac{1}{2q\alpha^2}(E + M)}\end{aligned}\quad (3.20)$$

Après quelques calculs on trouve $F(y)$ vérifier l'équation différentielle de Legendre, donc la solution de l'équation (3.5) comme une fonction de Legendre P_n :

$$R(r) = N (e^{-2\alpha r})^{\frac{\mu}{2}} (1 - qe^{-2\alpha r})^{\frac{1+\nu}{2}} P_n^{(\mu+\nu)} \times (1 - 2qe^{-2\alpha r}) \quad (3.21)$$

N constant de normalization.

Alors la fonction d'onde totale $\psi(r, \theta, \varphi)$ pour le potentiel *Titz - Wei* sous la forme :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = N (e^{-2\alpha r})^{\frac{\mu}{2}} (1 - qe^{-2\alpha r})^{\frac{1+\nu}{2}} P_n^{(\mu+\nu)} \times (1 - 2qe^{-2\alpha r}) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (3.22)$$

Enfin, nous considérons en mécanique quantique la fonction d'onde contient toute l'information de description d'un système quantique. Il est très important dans plusieurs branches de la physique théorique ainsi qu'en chimie quantique. Parce qu'ils sont plus généraux et utiles pour étudier le rayon de charge nucléaire, le spin, Diffusion nucléaire et etc.

Conclusion 3.0.1

3.1 Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté un traitement précis de l'équation de Klein-Gordon avec une potentielle de forme exponentielle par la méthode supersymétrique où la connexion supersymétrique entre l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Schrödinger et l'application de cette technique dans le domaine relativiste.

Nous avons étudié ce système dans une formulation basée sur l'équation de Klein-Gordon pour déterminer la condition de quantification transcendante pour les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde des états liés.

Nous concerne la résolution de l'équation de Klein-Gordon pour une particule sans spin qui se déplace sous l'action d'un champ à symétrie sphérique composé d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vectorielle égaux généralisant le potentiel de type exponentielle. Nous avons examiné l'extension de ce traitement au cas des ondes $l \neq 0$ au moyen d'une expression approximative (l'approximation de Pekeris) du potentiel centrifuge.

Les niveaux d'énergie du système ont été obtenus ainsi que les fonctions d'onde pour le potentiel de Titz-Wei. Les résultats obtenus sont importants dans plusieurs branches de la physique théorique ainsi qu'en chimie quantique. parce qu'ils sont plus général et utile pour étudier le rayon de charge nucléaire, le spin, Diffusion nucléaire et etc.

.....

Bibliographie

-
- [1] F. Abe and al. CDF collaboration,
 - [2] L. Infeld and T.E Hull, *Rev. Mod. Phys.* 23 (1951) 21.
 - [3] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, LAUR- 94-569. (2004).
 - [4] V.A. Kostelecky and D. K. Campbell, *Supersymmetry in Physics*, North Holland (1985).
 - [5] F. Cooper and B. Freedman, *Ann. Phys.* 146 (1983) 262.
 - [6] P. Salomonson and J. van Holten, *Nucl. Phys.* B196 (1982) 509.
 - [7] M. Bernstein and L. Brown, *Phys. Rev. Lett.* 52 (1984) 1933.
 - [8] F. Cooper, A. Khare, R. Musto, and A. Wipf, *Ann. Phys.* 187(1988).
 - [9] C. Blockley and G. Stedman, *Euro. Jour. Phys.* 6 (1985) 218.
 - [10] L. Gendenshtein, *JETP Lett.* 38 (1983) 356.
 - [11] E. Schrödinger, *Proc. Roy. Irish Acad.* A46 (1940) 9.
 - [12] G. Darboux, *C.R. Academy Sc. (Paris)* 94 (1882) 1456.
 - [13] P. Abraham and H. Moses, *Phys. Rev.* A22 (1980) 1333.
 - [14] D. Pursey, *Phys. Rev.* D33 (1986) 1098, 1103, 2267 ; M. Luban and D. Pursey, *ibid.* D33 (1986) 431.
 - [15] K. Chadan and P.C. Sabatier, *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*, Springer Verlag (1977).
 - [16] P. M. Morse, *Phys. Rev.* 34 (1929) 57.
 - [17] T. F. Hammann, G. Obertechnner, G. Trapp and J. Yoccoz, *J. Physique* 28 (1967) 755 ; T.F. Hammann and Q. Ho-Kim, *Nuovo cimento* 64 B (1969) 367 ; T. F. Hammann, P.Desgrolard and L. Chetouani, *Nuovo Cimento* 29A (1975) 19.
 - [18] R. Rydberg, *Z. Phys.* 73 (1931) 376.
 - [19] O. Klein, *Z. Phys.* 76 (1932) 226.
 - [20] A. L. G. Rees, *Proc. Roy. Soc. London* 59 (1947) 998

- [21] E. A. Hylleraas and V. Risberg, Avh. Nor. Vidensk. Akad. Oslo Mat. Naturvidensk. Kl. 1, n^o3 (1941).
- [22] R.D. Woods and D.S. Saxon, Phys. Rev. 95 (1954) 577.
- [23] L. Chetouani, L. Guechi, A. Lecheheb, T.F. Hamman and A. Messouber, Physica A 234 (1996) 289.
- [24] F. Cooper, A. Khare et U. Sukhatme, Phys. Rep. 251 (1995) 267.
- [25] Y. Nogami and F. Toyama, Phys. Rev. A 47 (1993) 1708.
- [26] H.C. Rosu, O. Cornejo-Pérez, R. López-Sandoval, J. Phys. A 37, 11699 (2004).
- [27] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. 251, 267 (1995).
- [28] B. Thaller, The Dirac Equation, Springer Verlag (1992).
- [29] F. Cooper, A. Khare, R. Musto, and A. Wipf, Ann. Phys. 187 (1988) 1.
- [30] C.V. Sukumar, Jour. Phys. A 18 (1985) L697.
- [31] E. D'Hoker and L. Vinet, Phys. Lett. B 137 (1984) 72.
- [32] Egrifes H., Sever R., 2005. Bound states of the Dirac equation for PT-symmetric generalized Hulthen potential by Nikiforov-Uvarov method, Phys. Lett. A 344 117-126.
- [33] Alhaidari A.D., 2004. L2 series solution of the relativistic Dirac-Morse problem for all energies, Phys. Lett. A 326 58-69.
- [34] M. Simsek and H. Egrifes, J. Phys. A : Math. Gen. 37 (2004) 4379.
- [35] Olson J.A., Micha D.A., 1978. Transition operators for atom-atom potentials: The Hilbert-Schmidt expansion, Chem. J. Phys. 68 4352.
- [36] Ikhdair S.M., Sever R., 2010. Solutions of the spatially dependent mass Dirac equation with the spin and pseudo-spin symmetry for the coulomb-like potential, Appl. Math. comp. 46 545-555.
- [37] Chen C.Y., 2005. Exact solutions of the Dirac equation with scalar and vector Hartmann potentials, Phys. Lett. A 339 283-287.
- [38] Qiang W.C., Dong S. H., 2009. The Manning-Rosen potential studied by a new approximate scheme to the centrifugal term, Phys

Scr. 79 045004.

- [39] Wei G.F., Dong S.H,2010.Pseudo-spin symmetry in the relativistic Manning-Rosen potential including a Pekeristype approximation to the pseudo-centrifugal term, Phys. LeF. B 686288-292.

ملخص

يتعلق هذا العمل بتذكير للتناظر الفائق في ميكانيكا الكمي غير النسبي والنسبي .
في إطار الميكانيك النسبي قمنا بدراسة معادلة كلين جوردين في وجود كمون أسي بواسطة التناظر الفائق وذلك بواسطة تقريب مناسب للكمون الطارد المركزي في حالة الامواج $l \neq 0$.

كلمات مفتاحية :

التناظر الفائق , معادلة كلين-جوردين , طريقة invariance de forme , كمون titz-wei .

Résumé

Ce travail Concerne un rappel sur la supersymétrie en mécanique quantique non relativiste et relativiste.

Dans le cadre de la mécanique quantique relativiste, nous avons étudié l'équation de Klein-Gordon avec potentiel de type exponentielle, par la méthode de supersymétrie au moyen d'une approximation appropriée du potentiel centrifuge dans le cas des ondes $l \neq 0$.

Mots clés :

Supersymétrie, équation de Klein-Gordon , invariance de forme, le potentiel de Titz-wei .

Abstract

This work is concerned with a reminder of supersymmetry in non-relativistic and relativistic quantum mechanics.

In the framework of relativistic quantum mechanics, we studied the Klein-Gordon equation with exponential potential, By the supersymmetry method by means of an appropriate approximation of the centrifugal potential in the case of waves $l \neq 0$.

Keywords :

Supersymetry, the Klein-Gordon equation , Shape invariance, potential titz-wei .