



N° d'ordre : .....

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et**  
**de la Recherche Scientifique**

**Université de M'sila**  
**Faculté des Sciences**  
**Département de Physique**

## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

## **MASTER**

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Sciences des Matériaux**

Par

**BENNOUI Oussama**

THEME

---

# **Dénombrement des groupes spatiaux issus de la classe $4/m$ du système quadratique**

---

Soutenue le : 18/06/2014

Devant le jury composé de :

A. Boussendel	MCA Univ. de M'sila	Président
H. Latelli	MCA Univ. de M'sila	Rapporteur
B. Assaous	MAA Univ. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2014

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier vivement Monsieur **H. Latelli** le directeur de mon travail, pour avoir dirigé l'ensemble de mon travail, pour son aide, ses conseils avisés, et la motivation qu'il a su m'insuffler tout au long de la réalisation de la thèse.

Je remercie très sincèrement Monsieur **A. Boussendel** Maître de conférences à l'université de M'sila, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements les plus sincères sont également adressés à Monsieur **B. Assaous**, de l'université de M'sila pour avoir accepté de juger mon travail.

Je remercie également tout mes camarades et mes amies et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

O. Bennaoui

# Sommaire

Introduction

## Chapitre I : Etat cristallin

I.1. Notions fondamentales, définition	1
I.2. Réseau ponctuel	1
I.2.1. Réseau à une dimension	1
I.2.2. Réseau à deux dimensions	2
I.2.3. Réseau à trois dimensions	2
I.3. Notion de maille	2
I.4. Réseau réciproque	3
I.4.1. Définition	3
I.4.2. Intérêt du réseau réciproque	4
I.4.3. Volume de la maille du réseau réciproque	4
I.4.4. Valeurs des paramètres réciproques	5
I.5. Systèmes cristallins	5
I.5.1. Systèmes bidimensionnels (systèmes plans)	5
I.5.2. Systèmes tridimensionnels (systèmes cristallins)	6

## Chapitre II : Eléments de symétrie

II.1. Eléments et opération de symétrie ponctuelle	10
II.1.1. Opération d'inversion – Centre de symétrie	10
II.1.2. Opération de rotation – Axe de symétrie	10
II.1.3. Opération de rotation- Inversion	10
II.1.4. Représentation graphique des éléments de symétrie	11
II.1.5. Représentation stéréographique des opérateurs	12
II.1.5.1. Axes directs	12
II.1.5.2. Axes inversion	12
II.1.5.3. Représentation matricielle des opérateurs de symétrie	13
II.2. Axes hélicoïdaux	18
II.2.1. Représentation matricielle	18
II.3. Plans de glissement	24
II.3.1. Représentation matricielle	25

### **Chapitre III : Réseaux de Bravais**

III.1. Introduction	29
III.2. Les modes de réseaux de Bravais	29
III.3. Dénombrement des modes de réseaux de Bravais	31

### **Chapitre IV : Groupes spatiaux**

IV.1. Introduction	33
IV.2. Directions de symétrie	33
IV.3. Dénombrement des groupes spatiaux du système quadratique de la classe 4/m	33
IV.4. Coordonnées des positions équivalentes	43
<b>Conclusion générale</b>	47

## Introduction

La cristallographie est la science des cristaux. Elle concerne la forme extérieure, la structure interne, la croissance et les propriétés physiques des cristaux.

Le mot « cristal » d'origine grecque (krustallas) signifie « solidifié par le froid ». Les grecs pensaient que le cristal de roche, le quartz, provenait de la transformation par le froid de la glace.

A l'origine, la cristallographie était purement descriptive et constituait une branche de la minéralogie. Par la suite on a constaté que l'état cristallin n'était pas réservé aux minéraux et que c'était un état de la matière très répandu.

Depuis très longtemps on pense que la forme extérieure des cristaux est liée à un ordonnancement interne régulier de la matière. La première loi quantitative de la cristallographie, la loi sur la constance des angles, a été pressentie par le Danois Nicolas Sténon en 1669 à partir de mesures des angles entre les faces de cristaux de quartz. Elle a été formalisée en 1772 par Jean-Baptiste Romé de l'Isle.

La seconde loi (loi des indices rationnels) a été énoncée en 1774 par René-Just Haüy. Il avait remarqué que lorsqu'il clivait des cristaux de calcite il obtenait des morceaux dont la forme était rigoureusement semblable à celle du cristal initial. Il a alors introduit la notion de « molécules intégrantes » en admettant que les cristaux étaient constitués d'assemblage de parallélépipèdes identiques. Il découle de cette notion que la position de chaque face d'un cristal peut être repérée dans l'espace par trois nombres entiers.

C'est en 1849 qu'Auguste Bravais énonce le postulat qui constitue la base de la cristallographie : « Etant donné un point P, quelconque dans un cristal, il existe dans le milieu, une infinité discrète, illimitée dans les trois directions de l'espace de points, autour desquels l'arrangement de la matière est la même qu'autour du point P »

De ce postulat résulte la notion de réseau tridimensionnel cristallin et toutes les propriétés de symétrie qui en découlent.

**Chapitre I :**  
**Etat cristallin**

## I.1. Notions fondamentales, définitions

Un cristal est constitué de la répétition tridimensionnelle périodique d'un motif atomique. Le motif est un assemblage, a priori quelconque, d'atomes ou d'ions. Ce peut être un simple atome (cas fréquent pour les métaux) ou un ensemble de molécules ou d'ions.

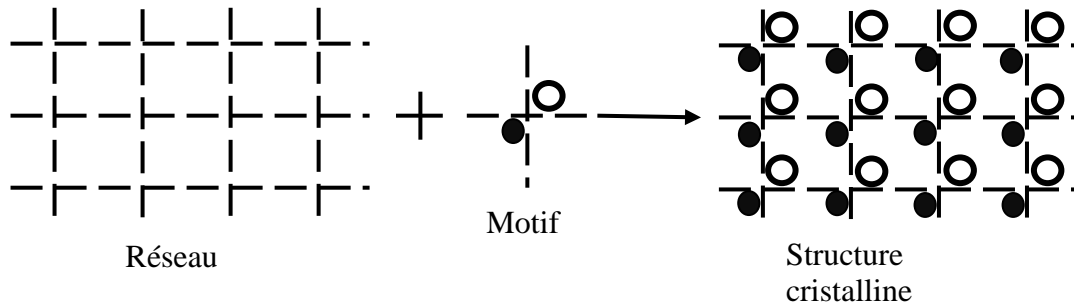


Figure I.1 : Réseau de motifs

Supposons que chaque motif est représenté par un point : on obtient un réseau de points (Figure I.2) que l'on appelle nœuds du réseau. A chaque nœud sera associée une opération de translation qui, appliquée au cristal l'amène en coïncidence avec lui-même (ici  $\vec{a}$  ou  $\vec{b}$  par exemple).

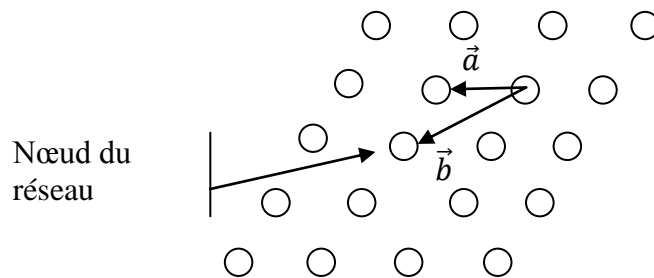


Figure I.2 : Réseau de points

## I. 2. Réseau ponctuel

Un réseau ponctuel (réseau de points) est une répartition périodique de points .il est uni - bi - ou tridimensionnel.

### I.2.1. Réseau à une dimension :

Il n'y a qu'un seul réseau possible une succession de nœud équidistant. Le vecteur de translation est donné par

$$r = u\vec{a}$$



Figure I.2.1. : Réseau à une dimension

### I.2.2. Réseau à deux dimensions:

On peut les construire sur deux vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$ , c'est-à-dire sur trois paramètres  $a, b$  et  $\gamma$ .  $\vec{a}, \vec{b}$  Sont les nomes des plus petites translations le long de rangées parallèles, et  $\gamma$  l'angle que celle-ci forment entre elles. Ou le vecteur de translation est.

$$r = u\vec{a} + v\vec{b}$$

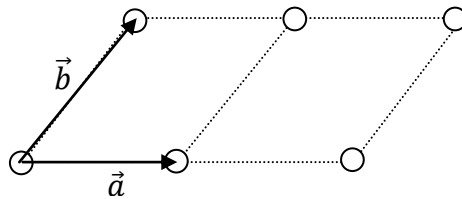


Figure I.2.2 : Réseau bidimensionnel

### I.2.3. Réseau à trois dimensions :

En général, il est représenté par les vecteur  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  et les angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , le vecteur de translation est donné par

, Avec  $u, v, w$  entiers relatifs

$$r = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$$

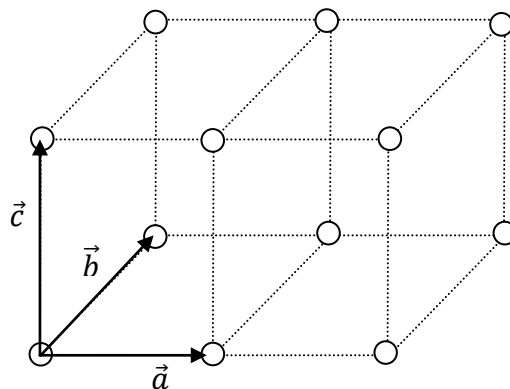


Figure I.2.3 : Réseau tridimensionnel

### I.3. Notion de maille

On appelle maille la structure géométrique la plus simple qui par translation dans les trois directions de l'espace, permet de générer le réseau dans son ensemble [1].

Les vecteurs de base.  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  (ou  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  dans le cas tridimensionnel) déterminent un parallélogramme (ou un parallélépipède dans le cas tridimensionnel) appelé maille ou maille élémentaire du réseau(Figure I.3) [2].

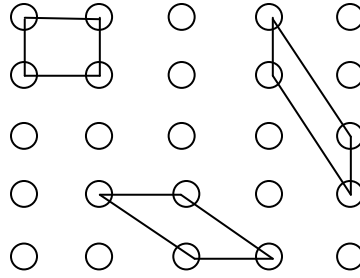


Figure I.3.1 : mailles élémentaires

La figure ci-dessus montre quelques mailles élémentaires bidimensionnelles qui sont dites simples ou plus souvent primitives car elles contiennent un nœud.

Conventionnellement on désigne par  $a, b, c$  la norme des vecteur  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  respectivement par  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles entre  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}$  et  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  respectivement. Le volume de la maille (Figure I.3.2).

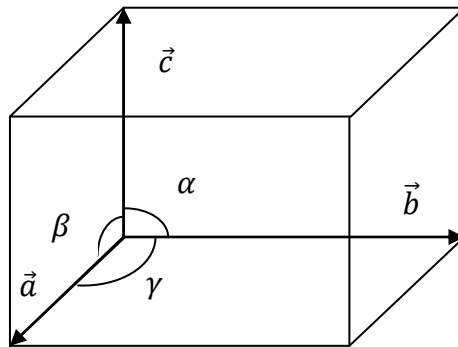


Figure I.3.2: Volume de la maille  $V = \|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}\|$

#### I.4. Réseau réciproque

A tout réseau que nous appelons Réseau direct, peut être associé un réseau réciproque. Ce dernier est un réseau imaginaire, introduit par Bravais, sous le nom de réseau polaire, pour simplifier l'étude physique de l'état cristallin.

##### I.4.1. Définition

Si  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sont les de base du réseau direct et si  $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$  sont ceux du réseau réciproque, on peut définir les vecteurs de base du réseau réciproque, d'après deux groupes de relations :

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b} = \vec{a}^* \cdot \vec{c} = \vec{b}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{c} = \vec{c}^* \cdot \vec{a} = \vec{c}^* \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{b} = \vec{c}^* \cdot \vec{c} = n$$

Où  $n$  est une constante précise en général égal à 1 en cristallographie et à  $2\pi$  en physique du solide. Dans notre cas, nous prendrons  $n = 1$ .

Le premier group fixe l'orientation des supports des vecteur  $\vec{a}^*$ ,  $\vec{b}^*$ ,  $\vec{c}^*$  qui sont respectivement normaux aux plans  $\vec{b}\vec{c}$ ,  $\vec{c}\vec{a}$  et  $\vec{a}\vec{b}$  (Figure I.4.1.).

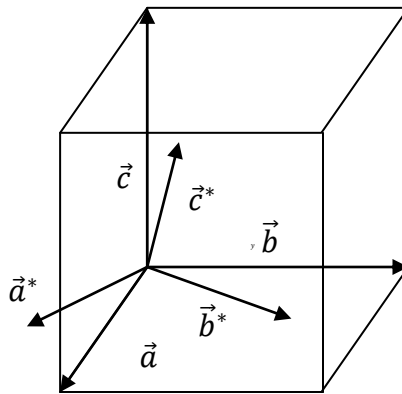


Figure I.4.1 : définition du réseau réciproque

### I.4.2. Intérêt du réseau réciproque

L'intérêt du réseau réciproque vient de ce que tout vecteur  $\vec{r}_{hkl}^*$  joignant l'origine de ce réseau à l'un de ses nœud de coordonnées  $h\vec{a}^*$ ,  $k\vec{b}^*$ ,  $l\vec{c}^*$  et qui est donc défini par :

$\vec{r}_{hkl}^* = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$ , ( $h, k$  et  $l$  étant des entiers simples), est normal au plan réticulaire ( $hkl$ ) du réseau et que sa longueur est l'inverse de la distance inter-réticulaire  $d_{hkl}$ .

### I.4.3. Symétrie du réseau réciproque

Le réseau réciproque peut avoir un mode différent de celui du réseau direct mais qu'il possède toujours la même symétrie que le réseau direct.

### I.4.3. Volume de la maille du réseau réciproque

Etant donné un réseau direct de base  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  le volume de sa maille est déterminé par l'expression suivante :

$$V = \|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}\|$$

Tandis que la maille du réseau réciproque possède un volume :

$$V^* = \|(\vec{a}^* \wedge \vec{b}^*) \cdot \vec{c}^*\|$$

#### I.4.4. Valeur des paramètres réciproque

Les paramètres métriques se calculent en remarquant à partir du premier groupe de relation que  $\vec{a}^*$  est perpendiculaire au plan  $\vec{b}\vec{c}$ . Le module de  $\vec{a}^*$  doit être égal à l'inverse de la hauteur du parallélépipède élémentaire.

La hauteur de ce parallélépipède est donné par :  $\left\| \frac{V}{b\Lambda c} \right\|$ , on en déduit la valeur de  $a^*$

$$a^* = \|\vec{a}^*\| = \left\| \frac{\vec{b}\Lambda\vec{c}}{V} \right\|$$

De même pour les relations de  $b^*$  et  $c^*$

$$b^* = \|\vec{b}^*\| = \left\| \frac{\vec{c}\Lambda\vec{a}}{V} \right\|$$

$$c^* = \|\vec{c}^*\| = \left\| \frac{\vec{a}\Lambda\vec{b}}{V} \right\|$$

#### I.5. Système cristallins

Les cristaux se classent en système cristallins suivant la symétrie de leur faces, définie par des axes de symétrie autour desquels le cristal peut tourner en présentant toujours le même aspect. Ces systèmes se subdivisent à leur tour en plusieurs sous – systèmes (le réseau de Bravais). Ceci conduit à quatre systèmes bidimensionnels et a sept systèmes cristallins tridimensionnels, j'aborderai ici seulement les systèmes avec leur forme géométrique primitive.

##### I.5.1. Systèmes bidimensionnels (systèmes plan)

Il n'existe que quatre combinaisons linéaires de pions qui peuvent créer un système à deux dimensions. Le système le plus général est oblique (figure I.5.1), un parallélogramme, et ne possède aucune relation spéciale entre les axes cristallographique,  $a$  et  $b$ , et l'angle  $\gamma$ , le système rectangulaire, le système carré et système hexagonal.

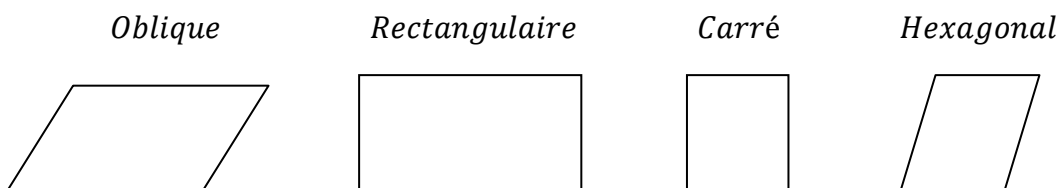


Figure I.5.1 : Réseau bidimensionnels

Le tableau I.5.1 décrit les caractéristiques des systèmes bidimensionnels lorsqu'ils sont décrits à l'aide de mailles élémentaires conventionnelles.

Système	Forme de la maille élémentaire	Condition sur les paramètres	
		Métriques	Angulaires
Oblique	Parallélogramme quelconque	Aucune	Aucune
Rectangulaire	Rectangle	Aucune	$\gamma = \frac{\pi}{2}$
Carré	Carré	$a = b$	$\gamma = \frac{\pi}{2}$
Hexagonal	Losange	$a = b$	$\gamma = \frac{2\pi}{3}$

Tableau I.5.1 : Caractéristiques des systèmes bidimensionnels

### I.5.2. Systèmes tridimensionnels (systèmes cristallins)

Sept systèmes d'axes suffisent pour repérer les quatorze réseaux de Bravais. Ce sont les sept systèmes cristallins : le triclinique, le monoclinique, l'orthorhombique, le quadratique (ou tétragonal), le rhomboédrique (ou trigonal), l'hexagonal et le cubique.

Le réseau cristallin est naturellement décrit par une maille (figure I.3.2). Cette maille est caractérisée par :

Les paramètres métriques :  $a, b$  et  $c$ , cotés du parallélépipède.

Les paramètres angulaires :  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$

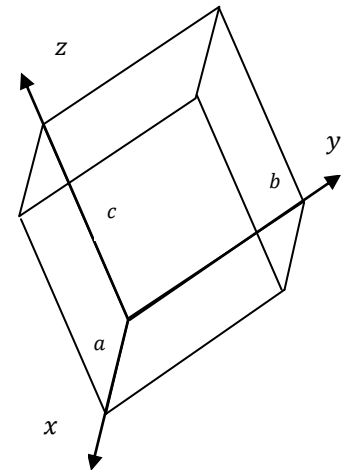
Les caractéristiques des sept systèmes sont décrites par le tableau I.5.2 et leurs formes sont montrées dans le diagramme qui suit.

Système	Forme de la maille élémentaire	Condition sur les paramètres	
		Métrique	Angulaire
Triclinique	quelconque	Aucune	Aucune
Monoclinique	Prisme droit a base quelconque	Aucune	$\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}, \beta \neq \frac{\pi}{2}$
Orthorhombique	Prisme droit a base rectangulaire	Aucune	$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$
Quadratique	Prisme droit a base carré	$a = b$	$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$
Rhomboédrique	Prisme droit a base losange	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq \frac{\pi}{2}$
Hexagonal	rhomboèdre	$a = b$	$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{2\pi}{3}$
Cubique	cube	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$

Tableau I.5.2 : Caractéristiques des systèmes tridimensionnels

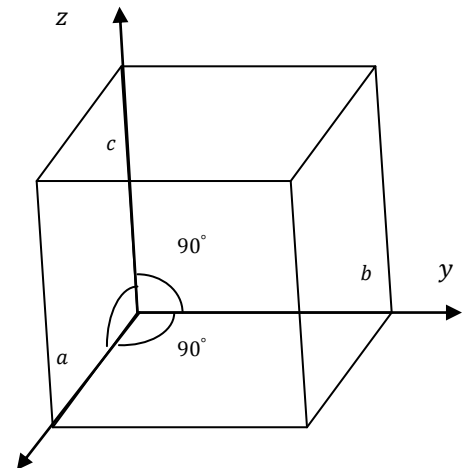
### **Système triclinique**

Minéraux cristallisant dans ce système : épidote, disthène axinite, babingtonite, kaolinite, labradorite.....



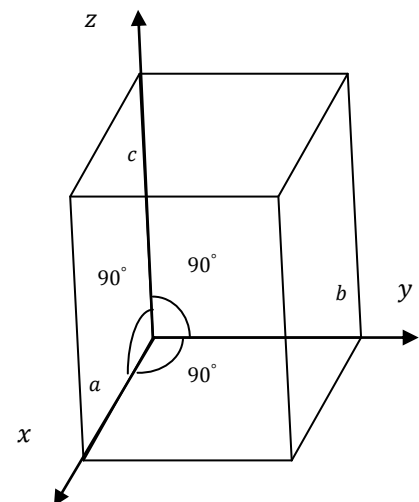
### **Système monoclinique**

Minéraux cristallisant dans ce système : gypse, augite, malachite Baumhauerite, azurite, fornacite, orthose, micas.....



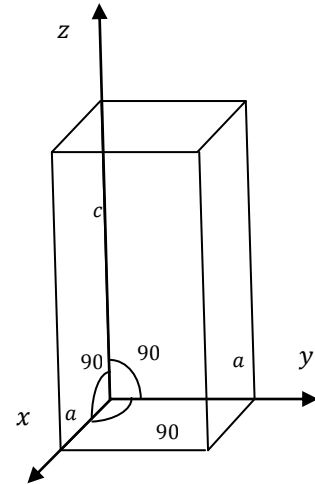
### **Système orthorhombique**

Minéraux cristallisant dans ce système : soufre, stibine, orpiment, Aragonite, barytine, atacamite.....



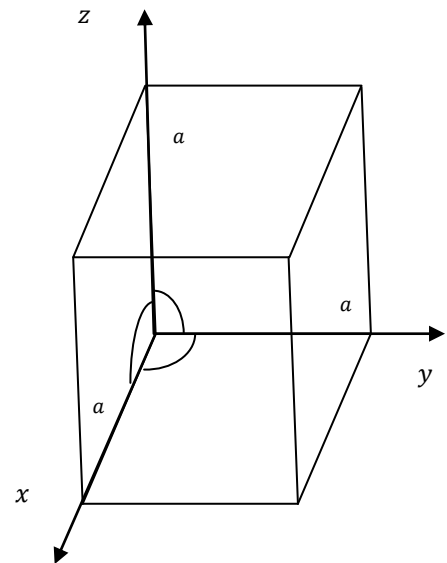
### Système quadratique

Minéraux cristallisant dans ce système : rutile, zircon, leucite, cassitérite, wulfénite, apophyllite,



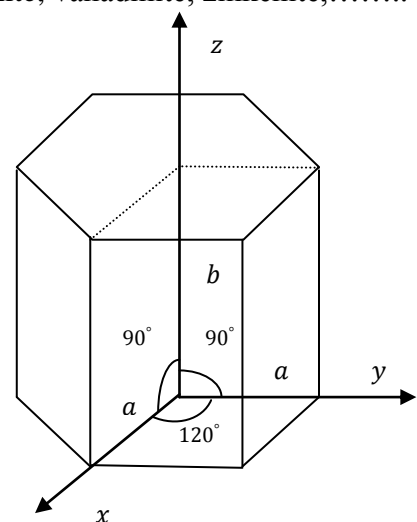
### Système rhomboédrique

Minéraux cristallisant dans ce système : quartz, calcite, corindon..



### Système hexagonal

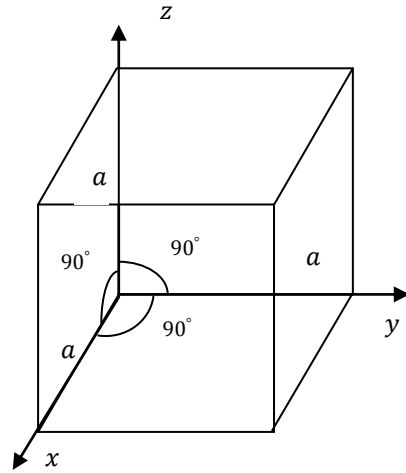
Minéraux cristallisant dans ce système : apatite, béryls, graphite, vanadinite, zinkenite,.....



### Systeme cubique

Mineraux cristallisant dans ce systeme : fluorite, sel gemme, pyrite, diamant, grenats, analcime, uraninite,.....

Galene, diamant, pyrite, grenats, analcime.....



**Chapitre II :**  
**Éléments de symétrie**

## II.1. Eléments et opération de symétrie ponctuelle

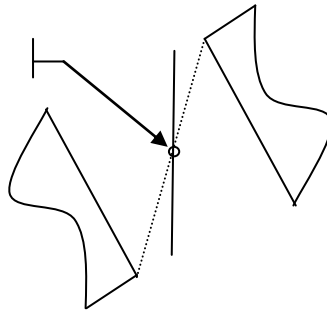
Si une figure possède un élément de symétrie, l'opération associée à cet élément produit une figure équivalente à la figure initiale, c'est-à-dire indiscernable de celle-ci. De plus, il est nécessaire que la symétrie de la base de chaque point du réseau soit compatible avec la symétrie du réseau Bravais. Cette condition de compatibilité réduit considérablement le nombre de structure possible dans le cristal et les seules opérations de symétrie qui soient compatibles avec l'existence de réseau sont :

- Les axes directs ( $n$ ) d'ordre  $n$  : 1, 2, 3, 4, 6,
- Les axes inverses ( $\bar{n}$ ) d'ordre  $n$  :  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$ .

### II.1.1. Opération d'inversion – centre de symétrie

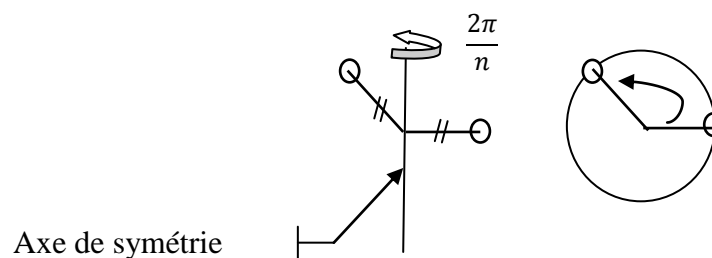
A tout nœud  $uvw$  d'un réseau, on peut faire correspondre le nœud  $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$  symétrique du premier par rapport à un centre placé sur un nœud  $O$ . Comme l'origine est arbitraire, tout point de l'espace peut être nœud du réseau et donc centre de symétrie. La figure suivante schématise l'opération dans l'espace et en projection.

Centre de symétrie



### II.1.2. Opération de rotation – Axe de symétrie

L'opération est une rotation de  $\frac{2\pi}{n}$  autour d'une droite qu'on appelle axe de rotation d'ordre  $n$  ou axe direct d'ordre  $n$ . La figure suivante schématise l'opération dans l'espace et en projection.

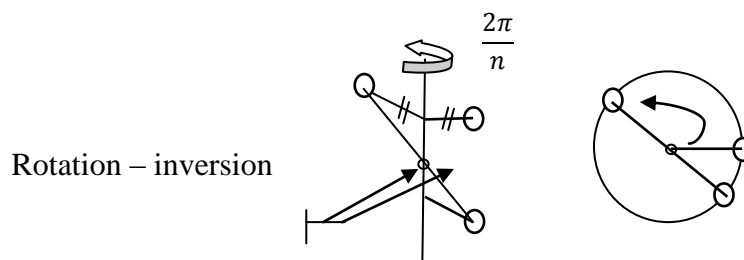


Axe de symétrie

### II.1.3. Opération de rotation – inversion

La rotation–inversion ou parfois inversion rotatoire est une opération qui peut être décomposée en deux opérations : rotation de  $\frac{2\pi}{n}$  autour d'une droite suivie ou précédée de l'inversion par rapport à un point situé sur cette droite. En symétrie d'orientation, ce point

coïncide nécessairement avec le point invariant  $O$ . L'élément noté  $\bar{n}$  appelé axe inverse d'ordre  $n$  :  $\bar{n} = n \times \bar{1} = \bar{1} \times n$ . la figure ci-dessous illustre cette opération dans l'espace et en projection. Le plan de projection est perpendiculaire à l'axe de rotation au centre d'inversion.



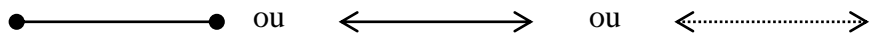
#### II.1.4. Représentation graphique des éléments de symétrie

Un axe d'ordre  $n$  est le plus souvent orienté perpendiculairement au plan de la figure excepté l'axe d'ordre 2 qui est parfois dans le plan de la figure. la nomination ainsi que les symboles de ces opérations sont regroupés dans le tableau( II.1.4.).

<i>Axe</i>	<i>Nomination</i>	<i>Symbole graphique</i>	<i>Interpétation</i>
1	<i>Identité</i>	Néant	Rotation de $\frac{2\pi}{1}$
2	<i>Binaire</i>	●	Rotation de $\frac{2\pi}{2}$
3	<i>Ternaire</i>	▲	Rotation de $\frac{2\pi}{3}$
4	<i>Quaternaire</i>	◆	Rotation de $\frac{2\pi}{4}$
6	<i>Sénaire</i>	⬠	Rotation de $\frac{2\pi}{6}$
$\bar{1}$	<i>Centre de symétrie</i>	○	<i>Inversion</i>
$\bar{2} = m$	<i>Axe inverse d'orde 2</i>	◐	Rotation de $\frac{2\pi}{2}$ suivie de l'inversion
$\bar{3}$	<i>Axe inverse d'orde 3</i>	◓	Rotation de $\frac{2\pi}{3}$ suivie de l'inversion
$\bar{4}$	<i>Axe inverse d'orde 4</i>	◑	Rotation de $\frac{2\pi}{4}$ suivie de l'inversion
$\bar{6}$	<i>Axe inverse d'orde 6</i>	◒	Rotation de $\frac{2\pi}{6}$ suivie de l'inversion

Tableau II.1.4 : représentation graphique et symboles des différents éléments de symétrie

Un axe d'ordre 2, quant – il est dans le plan de la figure, est représenté par les symboles suivants :



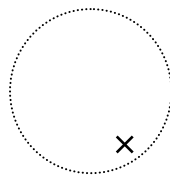
Un axe d'ordre  $\bar{2} = 2 \times \bar{1} = \bar{1} \times 2 = m$ , équivalent à une réflexion par rapport à un plan. Un symbole particulier est employé pour désigner le plan de symétrie (miroir). Sa représentation graphique est :

- Pour  $m$  perpendiculaire au plan de la figure :
- Pour  $m$  dans le plan de la figure :

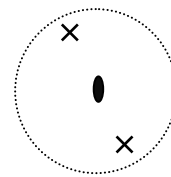
### II.1.5. Représentation stéréographique des opérateurs

Lorsqu' il n'existe qu'un seul axe de rotation, direct ou inverse, il est commode de choisir l'axe des pôles selon cette direction. Les figure (II.1.5) ci – dessous, donnent la projection stéréographique des positions équivalentes obtenies en appliquant les différents axes de symétrie.

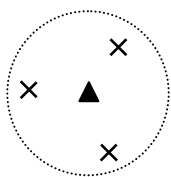
#### II.1.5.1. Axes directs



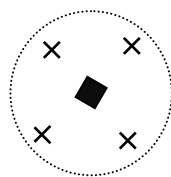
1 : Identité



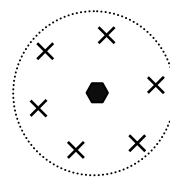
2 : Axe direct d'ordre 2



3 : Axe direct d'ordre 3

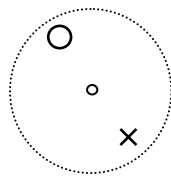


4 : Axe direct d'ordre 4

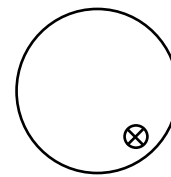


6 : Axe direct d'ordre 6

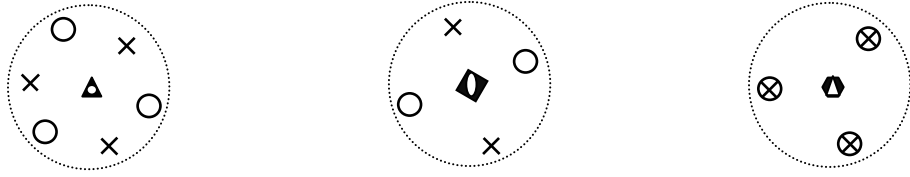
#### II.1.5.2. Axes inverses



$\bar{1}$  : Centre d'inversion



$\bar{2}$  : Axe inverse d'ordre 2

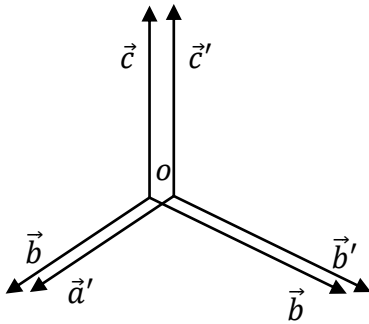


$\bar{3}$  : Axe inverse d'ordre 3     $\bar{4}$  : Axe inverse d'ordre 4     $\bar{6}$  : Axe inverse d'ordre 6

Figure II.1.5. : Projections stéréographiques des différents axes de symétrie

### II.1.5.3. Représentation matricielle des opérateurs de symétrie

Opérateur identité :  $\frac{2\pi}{1}$



$$\begin{aligned}\vec{a}' &= 1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= 0\vec{a} + 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} + 1\vec{c}\end{aligned}$$

La matrice de transformation est :

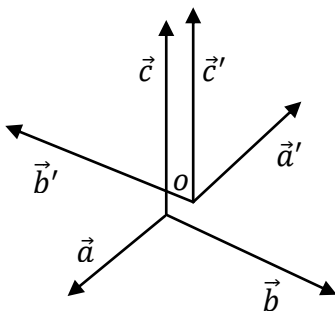
$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quelque soit le repère,  $x, y, z$  se transforment en  $x', y', z'$  par la rotation de  $2\pi$  de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Opérateur binaire :  $\frac{2\pi}{2}$

Pour l'axe 2 selon  $\vec{c}$ , et  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  perpendiculaire à  $\vec{c}$



$$\begin{aligned}\vec{a}' &= -1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= 0\vec{a} - 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} + 1\vec{c}\end{aligned}$$

La matrice de transformation est :

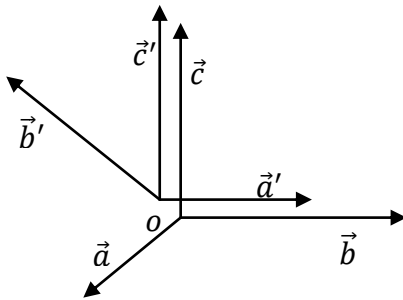
$$[R] = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quelque soit le repère,  $x, y, z$  se transforment en  $x', y', z'$  par la rotation de  $\pi$  de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix}$$

**Opérateur ternaire :  $\frac{2\pi}{3}$**

$\vec{c}$  selon l'axe 3,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  perpendiculaire à  $\vec{c}$  et forment entre eux l'angle  $\frac{2\pi}{3}$



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= -1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= 0\vec{a} - 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} + 1\vec{c} \end{aligned}$$

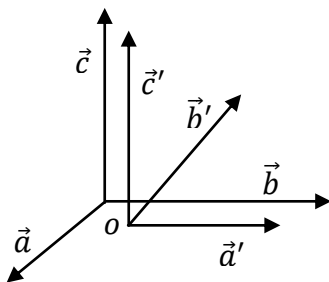
La matrice de transformation est :

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x, y, z$  Se transforment en  $x', y', z'$  par la rotation de  $\frac{2\pi}{3}$  de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x - y \\ z \end{bmatrix}$$

**Opération quaternaire :  $\frac{2\pi}{4}$**



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= 0\vec{a} + 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= -1\vec{a} - 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} + 1\vec{c} \end{aligned}$$

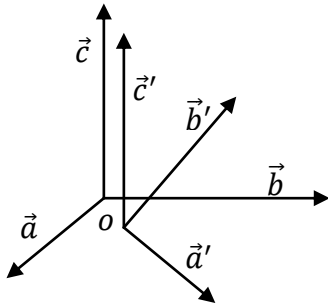
La matrice de transformation est :

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x, y, z$  Se transforment en  $x', y', z'$  par la rotation de  $\frac{2\pi}{4}$  de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}$$

Opération sénaire :  $\frac{2\pi}{6}$



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= 1\vec{a} + 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= -1\vec{a} - 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} + 1\vec{c} \end{aligned}$$

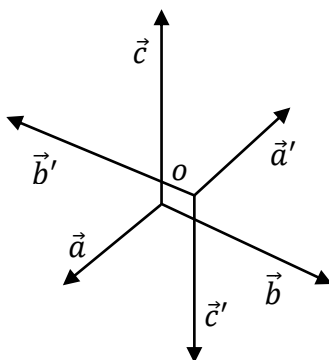
La matrice de transformation est :

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x, y, z$  Se transforment en  $x', y', z'$  par la rotation de  $\frac{\pi}{3}$  de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x \\ z \end{bmatrix}$$

Centre d'inversion : rotation de  $2\pi$  + inversion



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= -1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= 0\vec{a} - 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} - 1\vec{c} \end{aligned}$$

La matrice de transformation est :

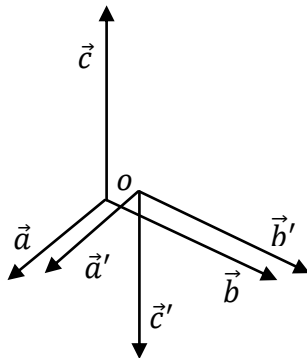
$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x, y, z$  Se transforment en  $x', y', z'$  par l'inversion de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

**Miroir  $m \equiv \bar{2}$  : rotation de  $\pi$  + inversion**

Pour  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  dans le plan  $m$  et  $\vec{c}$  perpendiculaires à  $m$



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= 1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= 0\vec{a} + 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} - 1\vec{c} \end{aligned}$$

La matrice de transformation est :

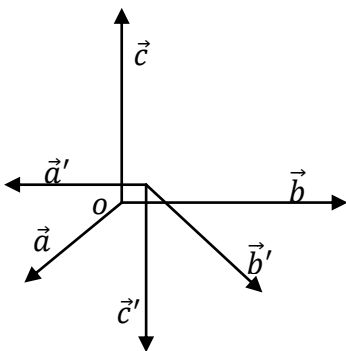
$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix}$$

Quelque soit le repère,  $x, y, z$  Se transforment en  $x', y', z'$  par la réflexion, par rapport au plan  $\vec{a}\vec{b}$ , de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

**Opérateur  $\bar{3}$  : rotation de  $\frac{2\pi}{3}$  + inversion**

$\vec{c}$  selon l'axe 3,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  perpendiculaires à et forment entre eux l'angle  $\frac{2\pi}{3}$



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= 0\vec{a} - 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= 1\vec{a} + 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} - 1\vec{c} \end{aligned}$$

La matrice de transformation est :

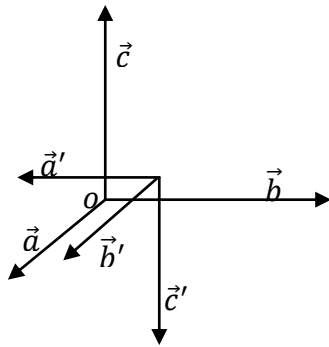
$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix}$$

$x, y, z$  Se transforment en  $x', y', z'$  par l'inversion  $\bar{3}$ , de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y - x \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

#### Opérateur $\bar{4}$ : rotation de $\frac{\pi}{2}$ + inversion

L'axe 4 selon  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  perpendiculaires à  $\vec{c}$  et forment entre eux l'angle droit.



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= 0\vec{a} - 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= 1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} - 1\vec{c} \end{aligned}$$

La matrice de transformation est :

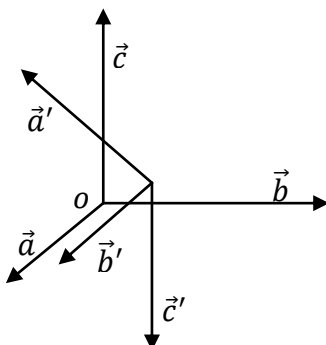
$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix}$$

$x, y, z$  Se transforment en  $x', y', z'$  par l'inversion  $\bar{4}$ , de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

#### Opération $\bar{6}$ : rotation de $\frac{\pi}{3}$ + inversion

$\vec{c}$  selon l'axe 6,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  perpendiculaires à  $\vec{c}$  et forment eux l'angle  $\frac{\pi}{3}$



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= -1\vec{a} - 1\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{b}' &= 1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \\ \vec{c}' &= 0\vec{a} + 0\vec{b} - 1\vec{c} \end{aligned}$$

La matrice de transformation est :

$$[R] = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix}$$

$x, y, z$  Se transforment en  $x', y', z'$  par l'inversion  $\bar{6}$ , de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - x \\ \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

## II.2. Axes hélicoïdaux

Il s'agit de chercher dans quelles conditions une rotation de  $2\pi/n$  autour d'un axe  $n$  suivie (ou précédée) d'une translation  $\vec{t}$  parallèle à cet axe, peut amener une maille du réseau à coïncider avec une autre. On en déduit que les seules axes hélicoïdaux qui puissent exister sont :

$$2_1; 3_1; 3_2; 4_1; 4_2; 4_3; 6_1; 6_2; 6_3; 6_4; 6_5$$

Le tableau II.2 suivant indique la représentation graphique conventionnelle ainsi que la part translatrice de ces axes lorsqu'ils sont perpendiculaires au plan de la figure.

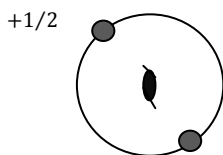
Axe	Symbole graphique	Nature de la translation
$2_1$		1/2
$3_1$		1/3
$3_2$		2/3
$4_1$		1/4
$4_2$		1/2
$4_3$		3/4

Axe	Symbole graphique	Nature de la translation
$6_1$		1/6
$6_2$		1/3
$6_3$		1/2
$6_4$		2/3
$6_5$		5/6

Tableau II.2 : symboles et représentations graphique des axes hélicoïdaux

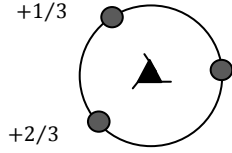
### II.2.1. Représentation matricielle

Opération  $2_1$  :  $2_1 \parallel \vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{c}$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix}$$

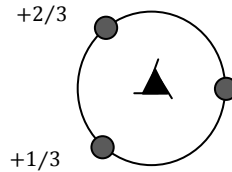
**Opération 3<sub>1</sub> : 3<sub>1</sub>//  $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{1}{3}\vec{c}$**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x - y \\ \frac{1}{3} + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x - y \\ \frac{1}{3} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y \\ \bar{x} \\ \frac{2}{3} + z \end{bmatrix}$$

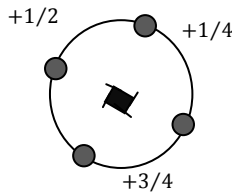
**Opération 3<sub>2</sub> : 3<sub>2</sub> //  $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{2}{3}\vec{c}$**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x - y \\ \frac{2}{3} + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x - y \\ \frac{2}{3} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y \\ \bar{x} \\ \frac{2}{3} + z \end{bmatrix}$$

**Opération 4<sub>1</sub> : 4<sub>1</sub>//  $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{1}{4}\vec{c}$**

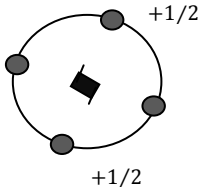


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x \\ \frac{1}{4} + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x \\ \frac{1}{4} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \\ \frac{3}{4} + z \end{bmatrix}$$

**Opération 4<sub>2</sub> : 4<sub>2</sub>//  $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{c}$**

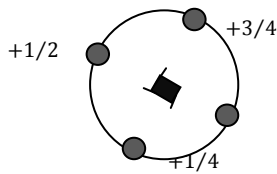


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix}$$

**Opération 4<sub>3</sub> : 4<sub>3</sub>//  $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{3}{4}\vec{c}$**

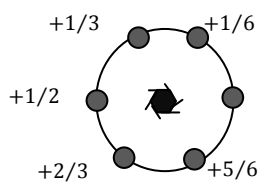


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x \\ \frac{3}{4} + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x \\ \frac{3}{4} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \\ \frac{1}{4} + z \end{bmatrix}$$

**Opération 6<sub>1</sub> : 6<sub>1</sub>//  $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{1}{6}\vec{c}$**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x \\ \frac{1}{6} + z \end{bmatrix}$$

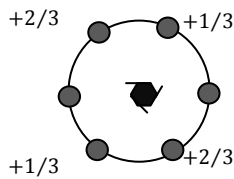
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{1}{6}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ \frac{1}{3}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ \frac{1}{6}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ \bar{x} \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^5 \\ y^5 \\ z^5 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x+y \\ \bar{x} \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x+y \\ \frac{5}{6}+z \end{bmatrix}$$

**Opération 6<sub>2</sub> : 6<sub>2</sub>// $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{1}{3}\vec{c}$**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{1}{3}+z \end{bmatrix}$$

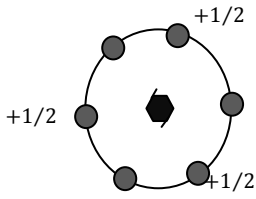
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{1}{3}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ \bar{x} \\ \frac{1}{3}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^5 \\ y^5 \\ z^5 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x+y \\ \bar{x} \\ \frac{1}{3}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x+y \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix}$$

**Opération 6<sub>3</sub> : 6<sub>3</sub> //  $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{c}$**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{1}{2}+z \end{bmatrix}$$

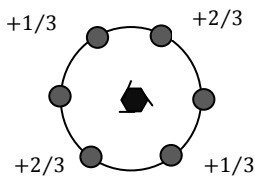
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{1}{2}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ \bar{x} \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^5 \\ y^5 \\ z^5 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x+y \\ \bar{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x+y \\ \frac{1}{2}+z \end{bmatrix}$$

**Opération 6<sub>4</sub> : 6<sub>4</sub> //  $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{2}{3}\vec{c}$**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix}$$

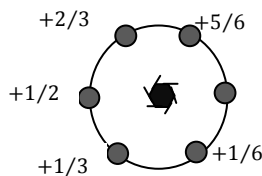
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ \frac{1}{3}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ \frac{1}{3}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ \bar{x} \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^5 \\ y^5 \\ z^5 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x+y \\ \bar{x} \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x+y \\ \frac{1}{3}+z \end{bmatrix}$$

**Opération 6<sub>5</sub> : 6<sub>5</sub>// $\vec{c}$ , la translation  $\vec{t} = \frac{5}{6}\vec{c}$**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{5}{6}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ \frac{5}{6}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ \frac{2}{3}+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2}+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y \\ \bar{x} \\ \frac{1}{3} + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^5 \\ y^5 \\ z^5 \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x + y \\ \bar{x} \\ \frac{1}{3} + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x + y \\ \frac{1}{6} + z \end{bmatrix}$$

### II.3. plans de glissement

Une autre opération  $(m, \vec{t})$  de symétrie est la réflexion par rapport à un plan  $m$  (miroir) suivie ou précédée d'une translation  $\vec{t}$  parallèle au plan.  $\vec{t}$  doit être compatible avec l'état cristallin, c'est donc une fraction de la période dans la direction de  $\vec{t}$ , orienté selon une rangée parallèle au plan  $m$ .

Tout comme pour les axes hélicoïdaux, il y a une stricte limitation des translations possibles, qui est due au caractère périodique du cristal.

Ces conditions restreignent fortement le nombre de plans de glissement possibles. On en distingue cinq :  $a, b, c, n, d$ .

#### Plans $a, b$ et $c$

On désigne les plans de glissement par les symboles  $a, b, c$  si le glissement s'effectue le long des axes  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  respectivement et sa grandeur est  $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{b}, \frac{1}{2}\vec{c}$ .

#### Plans $n$ et $d$

Dans le cas où le glissement est dirigé le long de la diagonale du parallélogramme construit sur la base  $\vec{a}, \vec{b}$  porté par le plan suivant lequel s'effectue le glissement. Le plan est noté  $n$  si le transport est égal à la moitié de la longueur de la diagonale du parallélogramme :  $\vec{t} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$  ou  $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ , il est noté  $d$  s'il est égal au quart de la diagonale :  $\vec{t} = \frac{1}{4}(\vec{a} \pm \vec{b}), \frac{1}{4}(\vec{b} \pm \vec{c}), \frac{1}{4}(\vec{c} \pm \vec{a})$  ou  $\frac{1}{4}(\pm\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c})$

On a donné dans le tableau II.3 toutes les représentations usuelles de plans de glissement adoptés par le système international.


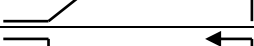
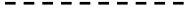

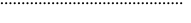
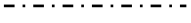



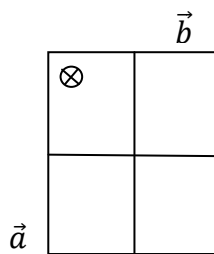
plan	Symbole graphique		Nature de la translation
	Normal au plan de la figure	Parallèle au plan de la figure	
<i>m</i>			Plan ordinaire, sans translation
<i>a, b</i>			$\frac{1}{2}\vec{a}$ le long de <i>x</i> ou $\frac{1}{2}\vec{b}$ le long de <i>y</i>
<i>c</i>		Néant	$\frac{1}{2}\vec{c}$ le long de <i>z</i> ; $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ le long de [111]
<i>n</i>			$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ ou $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ ou $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ ou $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
<i>d</i>			$\frac{1}{4}(\vec{a} \pm \vec{b})$ ou $\frac{1}{4}(\vec{b} \pm \vec{c})$ ou $\frac{1}{4}(\vec{c} \pm \vec{a})$ ou $\frac{1}{4}(\pm\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c})$

Tableau II.3 : symboles et représentations graphiques des plans de glissement

### II.3.1. Représentation matricielle

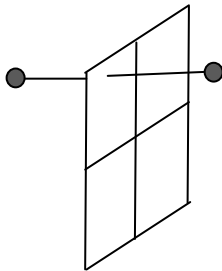
#### Plan de type *m* :

Le plan est parallèle au plan de la figure



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

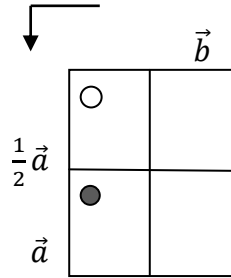
Le plan perpendiculaire au plan de la figure



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix}$$

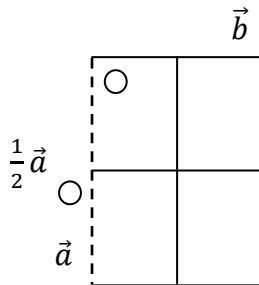
**Plan de type a**

Si  $a \in (\vec{a}, \vec{b})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

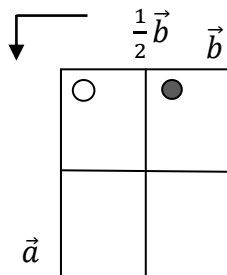
Si  $a \in (\vec{a}, \vec{c})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + x \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix}$$

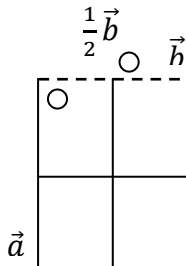
**Plan de type b**

Si  $b \in (\vec{a}, \vec{b})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2} + y \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

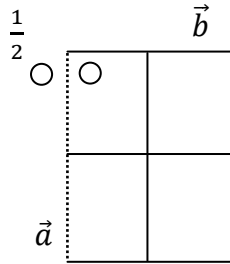
Si  $b \in (\vec{b}, \vec{c})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \frac{1}{2} + y \\ z \end{bmatrix}$$

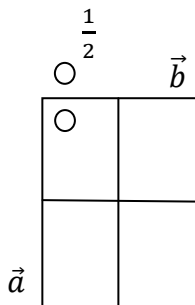
**Plan de type c**

Si  $c \in (\vec{a}, \vec{c})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \bar{y} \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix}$$

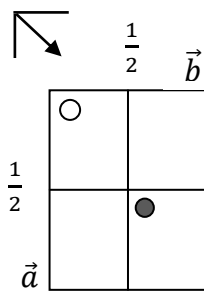
Si  $c \in (\vec{b}, \vec{c})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ y \\ \frac{1}{2} + z \end{bmatrix}$$

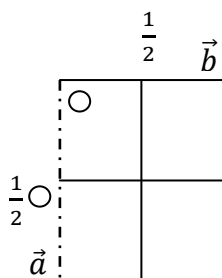
**Plan de type n**

Si  $n \in (\vec{a}, \vec{b})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + x \\ 1 + y \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

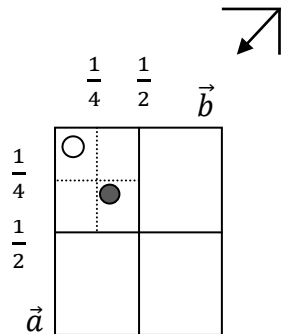
Si  $n \in (\vec{a}, \vec{c})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + x \\ 1 - y \\ z \end{bmatrix}$$

**Plan de type d**

Si  $d \in (\vec{a}, \vec{b})$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [m] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + x \\ \frac{1}{4} + y \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

**Chapitre III :**  
**Réseaux de Bravais**

### III.1. Introduction

Le réseau se déduisant de la structure, celui-ci présente des symétries (de position) qui se déduisent des symétries de la structure, on peut dire que le réseau est plus symétrique que la structure atomique. On peut d'ailleurs facilement vérifier qu'un réseau est toujours très symétrique, dans le sens où les symétries qu'il présente sont toujours évidentes. Par exemple les axes de symétrie que présente un réseau sont toujours des axes de symétrie directe.

Pour un système cristallin donné, les réseaux associés aux structures appartenant à ce système vont donc présenter des axes de symétrie directe dont les ordres sont ceux qui définissent ce système. Par exemple le réseau d'une structure quadratique présente un axe direct d'ordre 4.

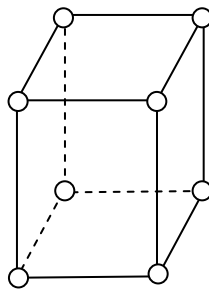
Il en résulte pour chacun de ces réseaux la possibilité de choisir une maille dont la géométrie mettra en évidence la symétrie principale du réseau (et donc celle de la structure), par exemple la maille de la chalcopryrite a la géométrie d'un prisme droit à base carrée qui met bien en évidence, parallèlement à  $\vec{c}$  l'axe de symétrie d'ordre 4 du réseau. On remarque cependant que cette maille possède un nœud en son centre. Ce qui lui donne au total deux nœuds en propre. On aurait donc pu choisir une autre maille. Avec un seul nœud en propre, Mais cette maille n'aurait pas mis en évidence la symétrie quaternaire [2].

### III.2. Les modes de réseaux de Bravais

Pour un système cristallin donné, la géométrie de la maille correspondante peut s'adapter à plusieurs réseaux. Ces différents réseaux correspondent à différents agencements de nœuds dans la maille, qui respectent les symétries caractéristiques du système. Ces différents agencements de nœuds s'appellent des modes [3].

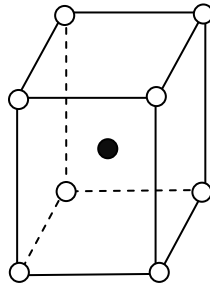
Ainsi, par exemple, pour le système cubique, on dénombre trois modes de réseau possible :

**Le mode primitif  $P$**  : correspondant aux réseaux définis par une maille caractéristique de ce mode ne possédant des nœuds qu'à ses 8 sommets (soit un seul nœud en propre).



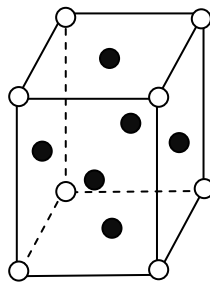
Maille élémentaire primitive, un seul nœud

**Le mode centré (ou corps centré  $I$ ) :** qui présente un nœud au centre de la maille en plus des nœuds a ses sommets (ce qui lui donne deux nœuds en propre).



Maille élémentaire centrée

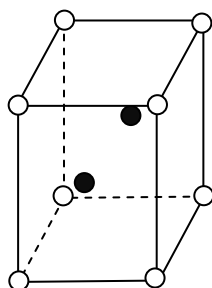
**Le mode faces centrées  $F$  :** qui présente un nœud au centre de chaque face de la maille en plus des nœuds a ses sommets (ce qui lui donne quatre nœuds en propre).



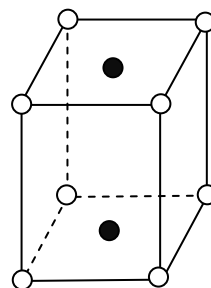
Maille élémentaire dont toutes les faces sont centrées

**Mode  $A, B, C$**

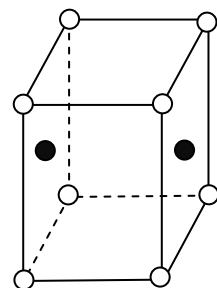
Maille multiple où les motifs sont placés aux sommets, au centre d'une face et au centre de la face opposée.



Mode A



Mode B



Mode C

Maille 2 faces centrées

### III.3. Dénombrement des modes de réseaux de Bravais pour le système quadratique [4]

La maille du réseau primitif (P) est définie par :  $a = b \neq c$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 90$ , l'axe quaternaire  $A_4$  est parallèle à  $c$ .

Parmi le réseau quadratiques possibles, cherchons ceux qui remplissent les conditions pour être un réseau de Bravais.

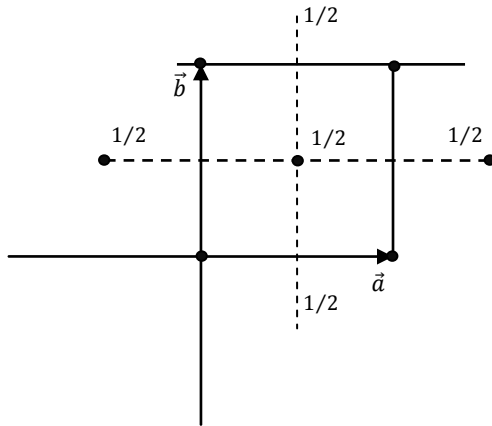


Figure III.1

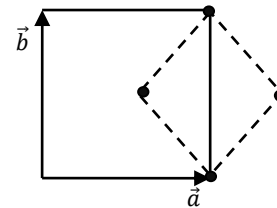


Figure III.2

**Corps centré : Oui**

Figure III.1 : les nœuds de coordonnées entières et demi-entières ont le même environnement

**Face C centrée : Non**

Figure III.2 : la maille est réductible à une maille quadratique de paramètres : on retrouve le mode simple  $a' = a/\sqrt{2}$   $b' = b/\sqrt{2}$   $c' = c$

**Face A ou B centrée : Non**

Cette disposition ne respecte pas la symétrie du système quadratique.

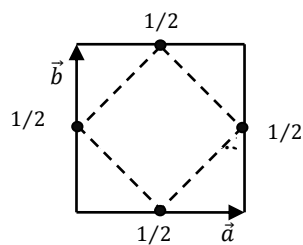


Figure III.3

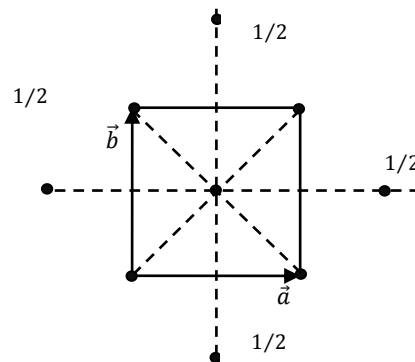


Figure III.4

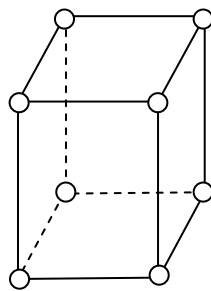
**Faces A et B centrée : Non**

Figure III.3 : les trois faces sont centrées. La maille est réductible à une maille quadratique corps centré : de paramètres  $a' = a/\sqrt{2}$   $b' = b/\sqrt{2}$   $c' = c$

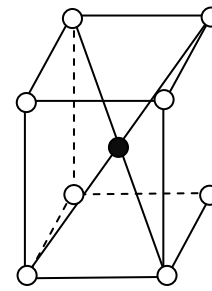
**Face C centrée et corps centré : Non**

Figure III.4 : Tous les nœuds n'ont pas le même voisinage.

En conclusion : il ne peut exister que deux modes de réseaux : primitif (P) et corps centré (I)



Quadratique P



Quadratique I

**Chapitre VI :**  
**Groupe spatiaux**

## IV.1. Introduction

Il existe 230 groupes de recouvrement, répartis entre 32 classes de symétrie d'orientation dans 7 systèmes cristallins.

Ici encore, le groupe spatial résulte de la combinaison d'un mode de réseau avec une classe de symétrie d'orientation appartenant au même système. A chacune des 32 classes de symétrie vont donc correspondre plusieurs groupes spatiaux, pour les dénombrer on utilise, là aussi, la notation de Hermann-Mauguin. Elle consiste à faire précéder le symbole international de la classe ponctuelle de la majuscule *P*, *C*, *I*, *F* ou *R* précisant le mode de réseau de Bravais. Ce mode indique bien sur les translations internes de la maille élémentaire.

## IV. 2. Directions de symétrie du système quadratique

Le groupe spatial sera donc composé de la lettre majuscule *P*, *A*, *B*, *C*, *I* ou *F* suivi de :

Chiffre éventuellement suivi de /lettre, tous deux relatifs à  $\vec{c}$ ,

Éventuellement suivi de deux symboles :

Chiffre ou lettre relatifs à  $\vec{a}$ ,

Chiffre ou lettre relatifs à [110].

Dans notre cas, nous avons un axe d'ordre 4 relatif à  $\vec{c}$ , suivi de /lettre. Cette lettre peut être un miroir *m* ou un plan de glissement .

## IV.3. Dénombrement des groupes spatiaux du système quadratique de la classe 4/m

Le dénombrement des groupes spatiaux peut se faire à l'aide d'une méthode géométrique. Ainsi pour la classe 4/m du système quadratique (deux modes : *P* et *I*) correspond à priori, pour le mode *P*, 24 groupes :

$P 4/m$ ,  $P 4/a$ ,  $P 4/b$ ,  $P 4/c$ ,  $P 4/n$ ,  $P 4/d$ ,  $P 4_1/m$ ,  $P 4_1/a$ ,  $P 4_1/b$ ,  $P 4_1/c$ ,  $P 4_1/n$ ,  
 $P 4_1/d$ ,  $P 4_2/m$ ,  $P 4_2/a$ ,  $P 4_2/b$ ,  $P 4_2/c$ ,  $P 4_2/n$ ,  $P 4_2/d$ ,  $P 4_3/m$ ,  $P 4_3/a$ ,  $P 4_3/b$ ,  
 $P 4_3/c$ ,  $P 4_3/n$ ,  $P 4_3/d$ .

Au mode *I* devraient correspondre, dans un premier temps, 24 groupes également :

$I 4/m$ ,  $I 4/a$ ,  $I 4/b$ ,  $I 4/c$ ,  $I 4/n$ ,  $I 4/d$ ,  $I 4_1/m$ ,  $I 4_1/a$ ,  $I 4_1/b$ ,  $I 4_1/c$ ,  $I 4_1/n$ ,  
 $I 4_1/d$ ,  $I 4_2/m$ ,  $I 4_2/a$ ,  $I 4_2/b$ ,  $I 4_2/c$ ,  $I 4_2/n$ ,  $I 4_2/d$ ,  $I 4_3/m$ ,  $I 4_3/a$ ,  $I 4_3/b$ ,  $I 4_3/c$ ,  
 $I 4_3/n$ ,  $I 4_3/d$ .

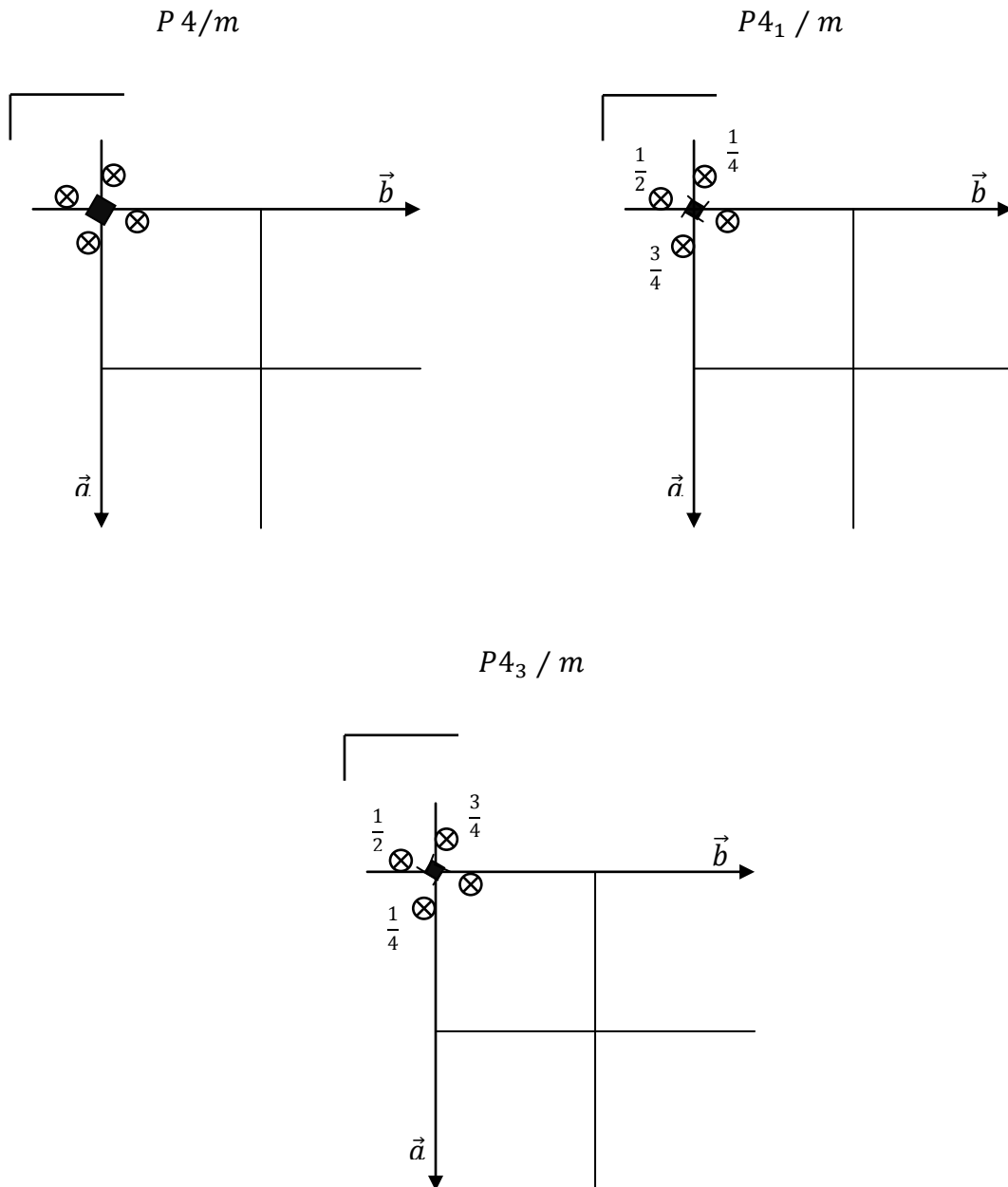
Il est géométriquement impossible de considérer les groupes spatiaux contenant le plan de glissement de type *c*. Les groupes :

$P 4/c$ ,  $P 4_1/c$ ,  $P 4_2/c$ ,  $P 4_3/c$ ,  $I 4/c$ ,  $I 4_1/c$ ,  $I 4_2/c$ ,  $I 4_3/c$

Puis ce que la translation du plan *c* doit être parallèle à l'axe d'ordre 4. Ces groupes sont donc rejetés.

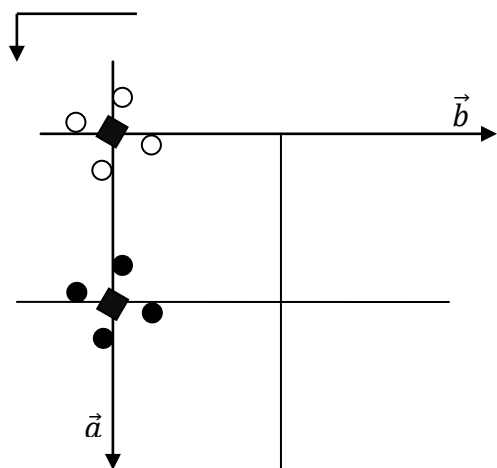
Les plans  $d$  sont propres à la structure du diamant et ne peuvent être observés que dans les groupes spatiaux:  $Fm\bar{3}m$ ,  $I4/m\bar{3}m$ ,  $Im\bar{3}m$  et  $Fm\bar{3}m$ .

Etant donné que les axes  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont interchangeables dans le système quadratique, on peut observer sur les stéréogrammes ci-dessous que les groupes  $P4/m$  et  $P4_1/m$  et  $P4_3/m$  sont identiques.

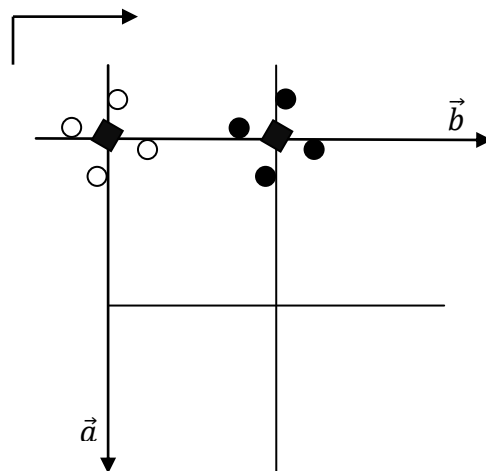


On peut observer que la projection des positions équivalentes des groupes  $P4/a$ ,  $P4/b$ ,  $P4_1/a$ ,  $P4_1/b$ ,  $P4_2/a$ ,  $P4_2/b$ ,  $P4_3/a$ ,  $P4_3/b$ ,  $P4/n$ ,  $P4_1/n$ ,  $P4_3/n$ .  
Sont identiques du fait que les axes  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont interchangeables.

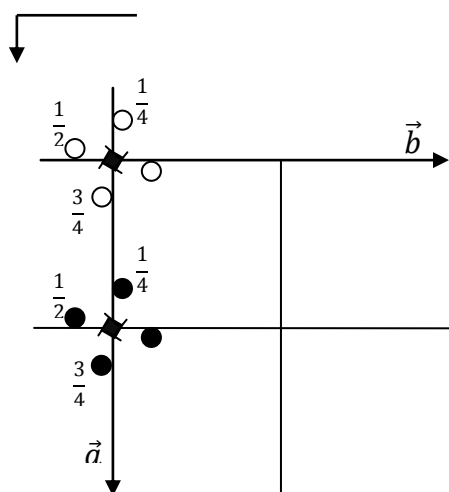
$P4/a$



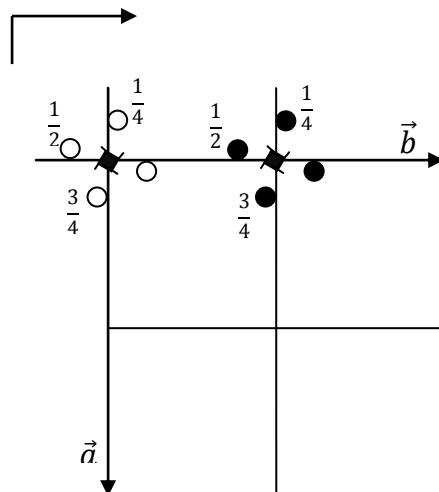
$P4/b$



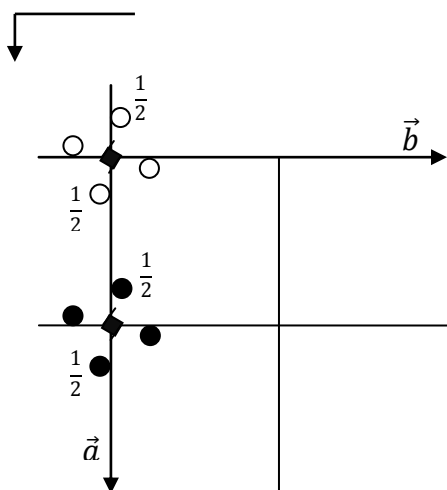
$P4_1/a$



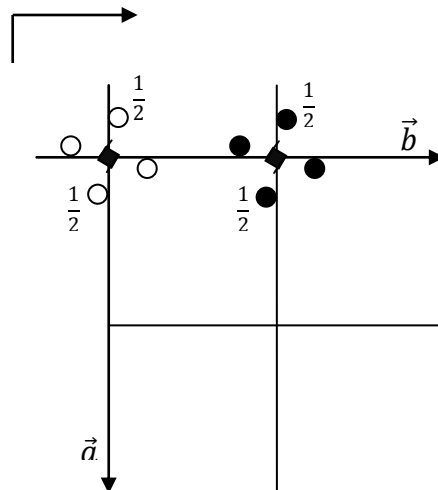
$P4_1/b$



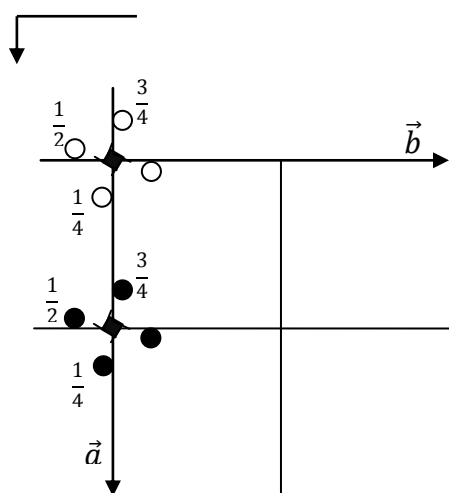
$P4_2/a$



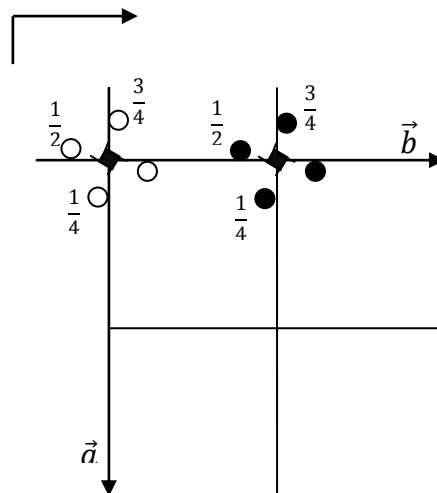
$P4_2/b$



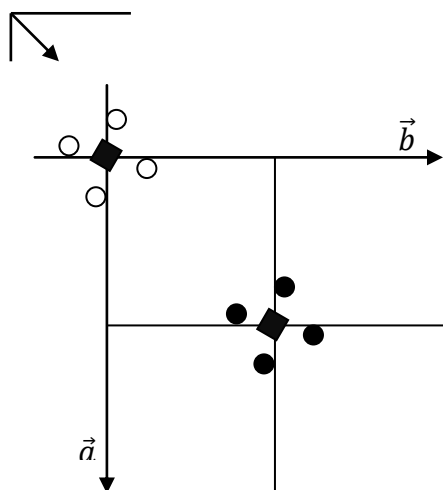
$P4_3/a$



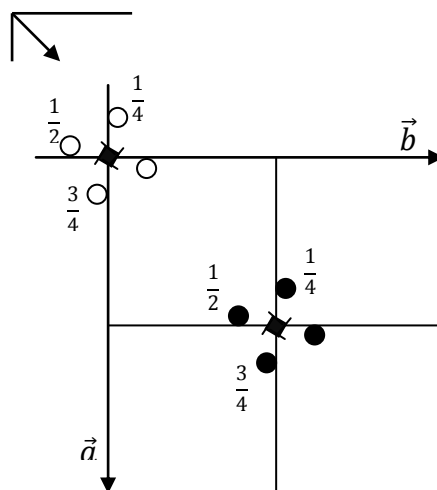
$P4_3/b$



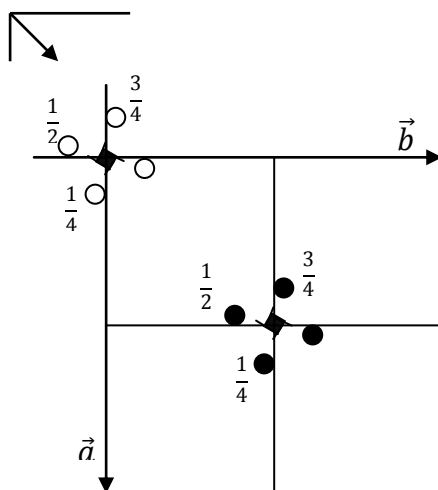
$P4/n$



$P4_1/n$

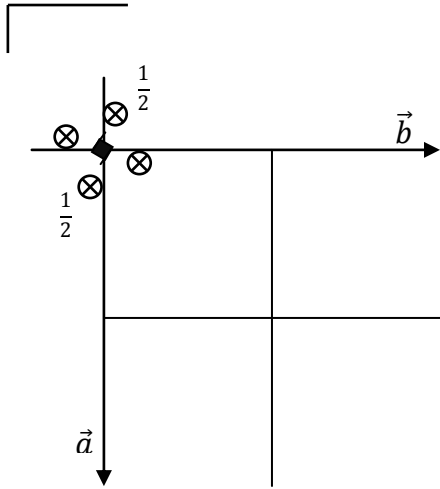


$P4_3/n$

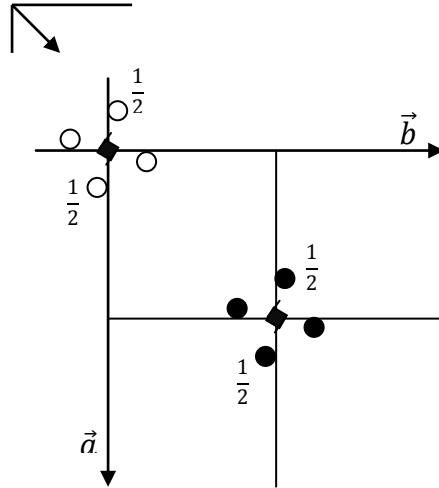


$P4_2/m$  et  $P4_2/n$  ne ressemblent à aucun autre groupe sont donc présent en compte

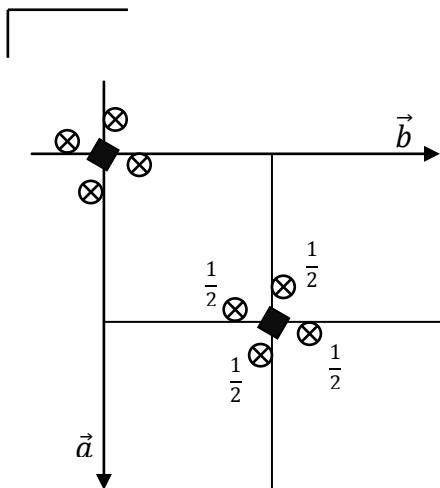
$P4_2/m$



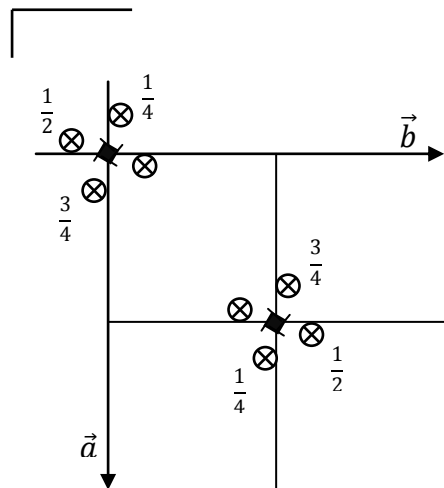
$P4_2/n$

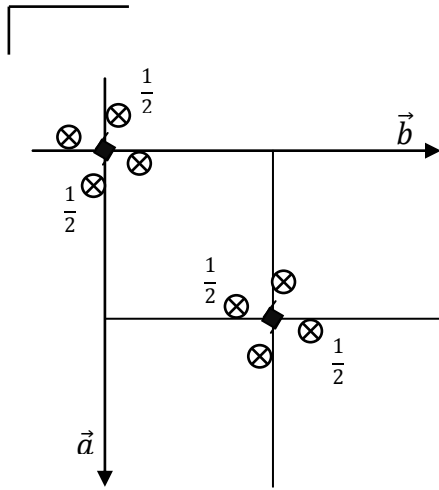
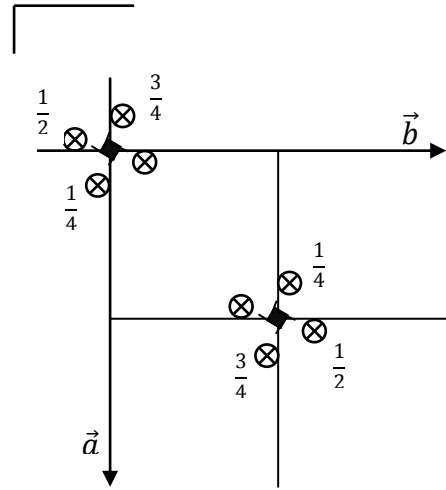
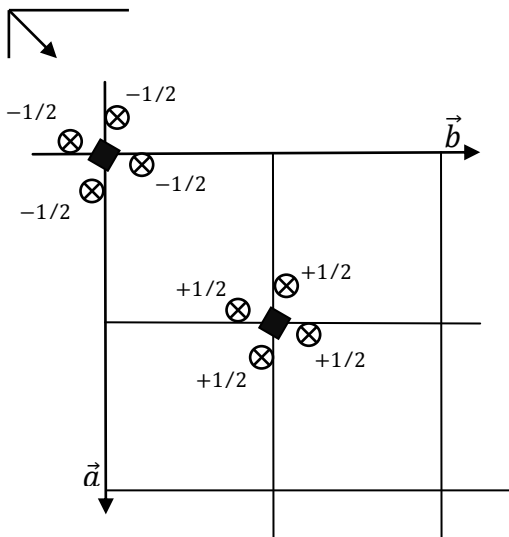
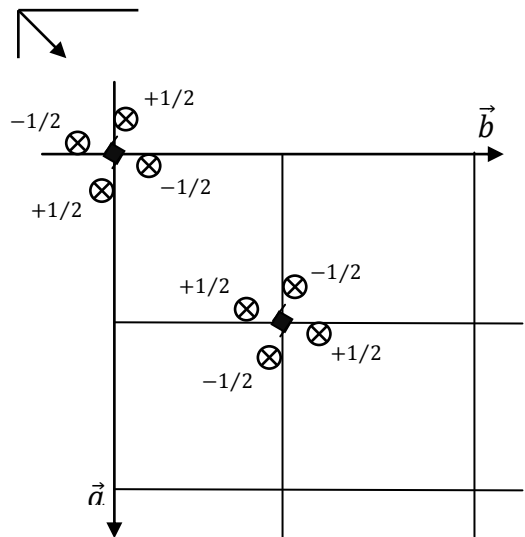


$I4/m$

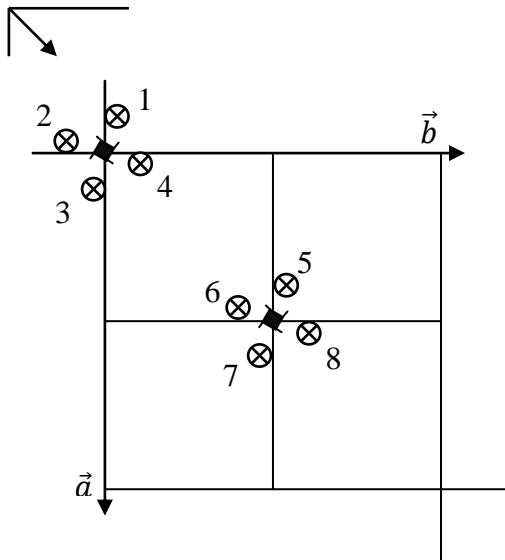


$I4_1/m$

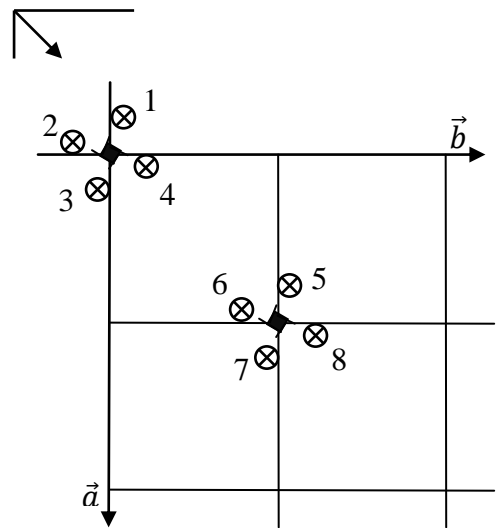


$I4_2/m$  $I4_3/m$  $I4/n$  $I4_2/n$ 

$I4_1/n$

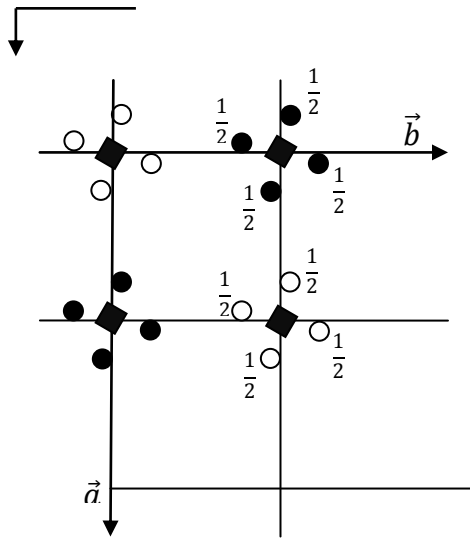


$I4_3/n$

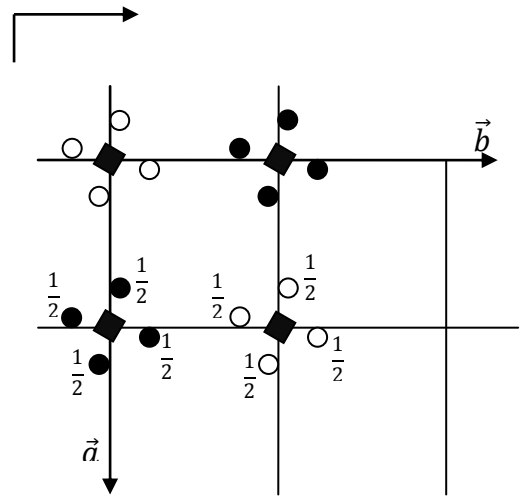


- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1 : $\frac{1}{4}$ $\otimes$ $\frac{3}{4}$ | 2 : $\otimes$ $\frac{1}{2}$               | 3 : $\frac{1}{4}$ $\otimes$ $\frac{3}{4}$ |
| 4 : $\frac{1}{2}$ $\otimes$               | 5 : $\frac{3}{4}$ $\otimes$ $\frac{1}{4}$ | 6 : $\frac{1}{2}$ $\otimes$               |
| 7 : $\frac{1}{4}$ $\otimes$ $\frac{3}{4}$ | 8 : $\otimes$ $\frac{1}{2}$               |   |

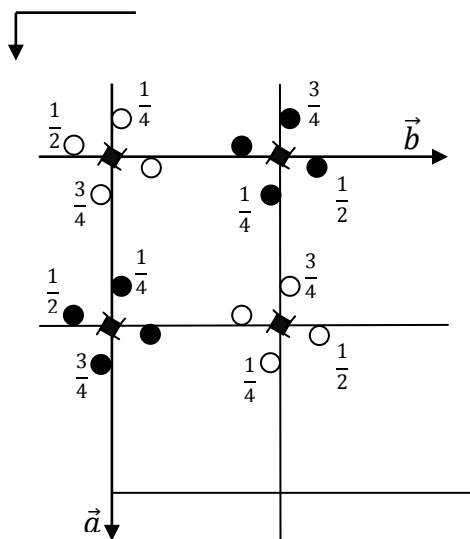
$I4/a$



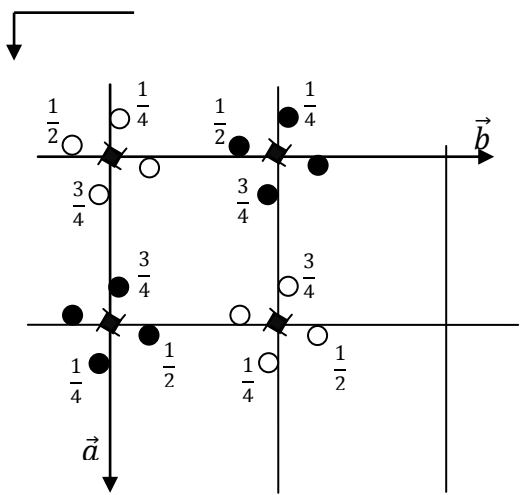
$I4/b$



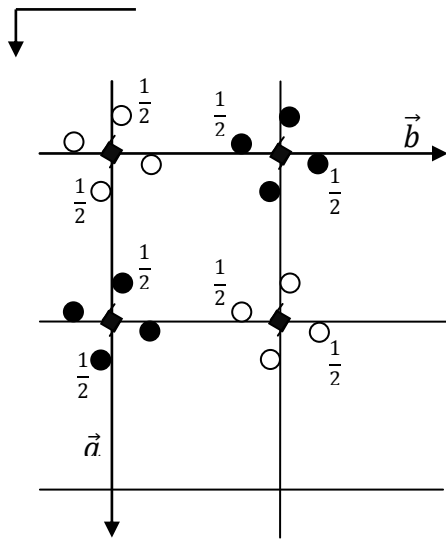
$I4_1/a$



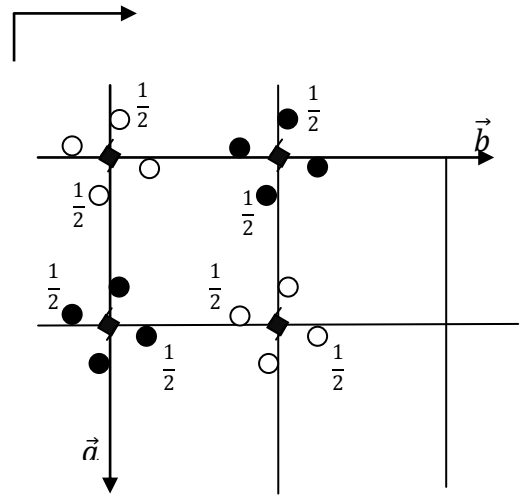
$I4_1/b$



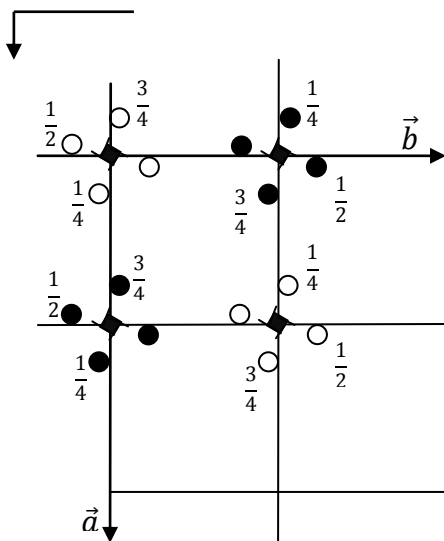
$I4_2/a$



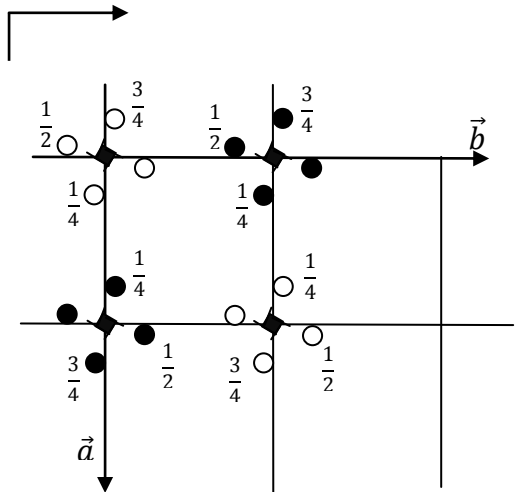
$I4_2/b$



$I4_3/a$



$I4_3/b$



Il en est de même pour le mode de réseau  $I$ , les seuls groupes de recouvrement qui restent sont :

$I4/m$  et  $I4_1/a$

#### IV.4. Coordonnées des positions équivalente

Groupe	Coordonnée des positions équivalentes
$P 4/m$	$x, y, z ; \bar{y}, x, z ; \bar{x}, \bar{y}, z ; y, \bar{x}, z$ $x, y, \bar{z} ; \bar{y}, x, \bar{z} ; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ; y, \bar{x}, \bar{z}$
$P 4/a$	$x, y, z ; \bar{y}, x, z ; \bar{x}, \bar{y}, z ; y, \bar{x}, z$ $\frac{1}{2} + x, y, \bar{z} ; \bar{y}, \frac{1}{2} + x, \bar{z} ; \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \bar{z} ; y, \frac{1}{2} + \bar{x}, \bar{z}$
$P 4/b$	$x, y, z ; \bar{y}, x, z ; \bar{x}, \bar{y}, z ; y, \bar{x}, z$ $x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, x, \bar{z} ; \bar{x}, \frac{1}{2} - y, \bar{z} ; \frac{1}{2} + y, \bar{x}, \bar{z}$
$P 4/n$	$x, y, z ; \bar{y}, x, z ; \bar{x}, \bar{y}, z ; y, \bar{x}, z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \bar{z} ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \bar{z} ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \bar{z}$
$P 4_1/m$	$x, y, z ; \bar{y}, x, \frac{1}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{3}{4} + z$ $x, y, \bar{z} ; \bar{y}, x, \frac{1}{4} - z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} - z ; y, \bar{x}, \frac{3}{4} - z$
$P 4_1/a$	$x, y, z ; \bar{y}, x, \frac{1}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{3}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, y, \bar{z} ; \bar{y}, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \frac{1}{2} - z ; y, \frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} - z$
$P 4_1/b$	$x, y, z ; \bar{y}, x, \frac{1}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{3}{4} + z$ $x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, x, \frac{1}{4} - z ; \bar{x}, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \bar{x}, \frac{3}{4} - z$
$P 4_1/n$	$x, y, z ; \bar{y}, x, \frac{1}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{3}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} - z$
$P 4_2/m$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{1}{2} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ; y, \bar{x}, \frac{1}{2} + z$ $x, y, \bar{z} ; \bar{y}, x, \frac{1}{2} - z ; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ; y, \bar{x}, \frac{1}{2} - z$
$P 4_2/a$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{1}{2} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ; y, \bar{x}, \frac{1}{2} + z$ $\frac{1}{2} + x, y, \bar{z} ; \bar{y}, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \bar{z} ; y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - z$
$P 4_2/b$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{1}{2} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ; y, \bar{x}, \frac{1}{2} + z$ $x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, x, \frac{1}{2} - z ; \bar{x}, \frac{1}{2} - y, ; \frac{1}{2} + y, \bar{x}, \frac{1}{2} - z$
$P 4_2/n$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{1}{2} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ; y, \bar{x}, \frac{1}{2} + z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \bar{z} ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - z$
$P 4_3/m$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} + z$ $x, y, \bar{z} ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} - z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} - z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} - z$

$P 4_3/a$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, y, \bar{z} ; \bar{y}, \frac{1}{2} + x, \frac{3}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \frac{1}{2} - z ; y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{4} - z$
$P 4_3/b$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} + z$ $x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, x, \frac{3}{4} - z ; \bar{x}, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \bar{x}, \frac{1}{4} - z$
$P 4_3/n$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{3}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{4} - z$
$I 4/m$	$x, y, z ; \bar{y}, x, z ; \bar{x}, \bar{y}, z ; y, \bar{x}, z$ $x, y, \bar{z} ; \bar{y}, x, \bar{z} ; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ; y, \bar{x}, \bar{z}$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} + z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - z$
$I 4/a$	$x, y, z ; \bar{y}, x, z ; \bar{x}, \bar{y}, z ; y, \bar{x}, z$ $\frac{1}{2} + x, y, \bar{z} ; \bar{y}, \frac{1}{2} + x, \bar{z} ; \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \bar{z} ; y, \frac{1}{2} + \bar{x}, \bar{z}$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} + z$ $x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - y, x, \frac{1}{2} - z ; \bar{x}, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \bar{x}, \frac{1}{2} - z$
$I 4/b$	$x, y, z ; \bar{y}, x, z ; \bar{x}, \bar{y}, z ; y, \bar{x}, z$ $x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, x, \bar{z} ; \bar{x}, \frac{1}{2} - y, \bar{z} ; \frac{1}{2} + y, \bar{x}, \bar{z}$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} + z$ $\frac{1}{2} + x, y, \frac{1}{2} - z ; \bar{y}, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \frac{1}{2} - z ; y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - z$
$I 4/n$	$x, y, z ; \bar{y}, x, z ; \bar{x}, \bar{y}, z ; y, \bar{x}, z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \bar{z} ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \bar{z} ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \bar{z}$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} + z$ $x, y, \frac{1}{2} - z ; \bar{y}, x, \frac{1}{2} - z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} - z ; y, \bar{x}, \frac{1}{2} - z$
$I 4_1/m$	$x, y, z ; \bar{y}, x, \frac{1}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{3}{4} + z$ $x, y, \bar{z} ; \bar{y}, x, \frac{1}{4} - z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} - z ; y, \bar{x}, \frac{3}{4} - z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{3}{4} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{3}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \bar{z} ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{4} - z$



$I 4_3/m$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} + z$ $x, y, \bar{z}; \bar{y}, x, \frac{3}{4} - z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} - z; y, \bar{x}, \frac{1}{4} - z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{4} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \bar{z} ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} - z$
$I 4_3/a$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, y, \bar{z} ; \bar{y}, \frac{1}{2} + x, \frac{3}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \frac{1}{2} - z ; y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{4} - z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{4} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} + z$ $x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} - y, x, \frac{1}{4} - z ; \bar{x}, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \bar{x}, \frac{3}{4} - z$
$I 4_3/b$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} + z$ $x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, x, \frac{3}{4} - z ; \bar{x}, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \bar{x}, \frac{1}{4} - z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{4} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, y, \frac{1}{2} - z ; \bar{y}, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \bar{z}; y, \frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} - z$
$I 4_3/n$	$x, y, z, ; \bar{y}, x, \frac{3}{4} + z ; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; y, \bar{x}, \frac{1}{4} + z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \bar{z} ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{3}{4} - z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{4} - z$ $\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z ; \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{4} + z ; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, z ; \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} + z$ $x, y, \frac{1}{2} - z ; \bar{y}, x, \frac{1}{4} - z ; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; y, \bar{x}, \frac{3}{4} - z$

## Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons tenté de dénombrer les groupes spatiaux (ou groupes de recouvrement) issus de la classe  $4/m$  du système quadratique. Le but essentiel de ce travail était, bien entendu, l'initiation à cette technique de dénombrement très pratique.

Dans un premier temps, nous avons d'abord commencé à dénombrer les modes de réseau de Bravais pour le système quadratique. En partant des solutions possibles, nous avons trouvé qu'il ne peut exister que deux modes : le mode simple ou primitif noté : P et le mode centré noté : I.

Puis, nous avons considéré toutes les combinaisons entre les modes P et I d'une part et la classe  $4/m$  d'autre part, sachant que l'axe 4 peut être :  $4$ ,  $4_1$ ,  $4_2$  ou  $4_3$  et  $m$  peut être à son tour :  $m$  ou un plan de glissement de type  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ou  $n$ . A priori, nous sommes partis avec 48 groupes.

Nous avons, donc, été amené à étudier les groupes spatiaux issus de la classe  $4/m$ . En comparant les stéréogrammes des 48 groupes du départ entre eux, nous avons trouvé que seulement 6 sont distincts. Nous avons, bien sur, choisi ceux de la table internationale de cristallographie.

**Références  
Bibliographiques**

## Références bibliographiques

- [1]. N.EL JOUHARI , ‘Cours Cristallographie I’, Univ Mohammed V-Agdal.
- [2]. D.Fargue, J.P.Hénon, K.D.Phan, Cours de cristallographie, Diffraction des rayonnements par les cristaux, Ecole des Mines Paris, Direction des Etudes, cours TC2332 (1996).
- [3]. K.D.Phan , Cours de Minéralogie, Ecole des Mines de Paris (1990).
- [4]. Jean-Pierre.Lauriat. Pagesperso-orange.fr/Cristallog01/Chap09A.pdf

## Bibliographiques générale

- [1]. C.Delepine, ‘Introduction à la cristallographie’ , Dunod, paris 1971.
- [2]. E.Flint, ‘principes de cristallographie’ , Edition MIR , Moscou 1981
- [3]. R.Gay, ‘Cours de cristallographie , Livre I : ‘Cristallographie Géométrique’ , Gauthier-Villars 1959.
- [4]. C.Hammond, ‘ Introduction to cristallography’, Oxford Univ. Press, New York 1990
- [5]. E.Mooser, ‘Introduction à la physique des solides ‘, Presses Polytechniques et universitaires romandes, Lausanne 1993.
- [6]. R.Ouahas, ‘Eléments de radiocristallographie’, Ed. Publisud-Paris, OPU 1984.
- [7]. M.Roubault, ‘Détermination des minéraux des roches au microscope polarisant’, Editions Lamare-Poinat, Paris 1963.
- [8]. J-J. Rousseau, ‘Cristallographie géométrique et radiocristallographie avec exercice corrigés’, Edition Masson, Paris 1995.
- [9]. Y.Sirotine et M.Chaskolskaia, ‘Fondements de la physique des cristaux’, Edition MIR, Moscou 1984.
- [10]. J.Sivardière, ‘La symétrie en Mathématiques, Physique et Chimie’, PUG, Grenoble 1995.
- [11]. M.Van Meerssche et J.Feneau-Dupont, ‘Introduction à la cristallographie et à la chimie structurale’, Peeters Press, Louvain 1984.
- [12]. A.Verbaere, ‘Symétrie et état cristallin’ , Cours DEA , Université de Nantes, France 1985.
- [13]. D.Weigel, ‘Cristallographie et structure des solides, Tome 1 : Algèbre et géométrie cristalline et moléculaire’ , Edition Masson et Cie 1971.
- [14]. H. Latelli, ‘Eléments de cristallographie géométrique’, OPU, 2011.
- [15]. International Tables for Crystallography , Volume A, Edited by Theo Hahn, by Kluwer Academic Publishers 1983.

## ملخص

الهدف الرئيسي في هذا العمل هو معرفة مبادئ تعداد مجموعات الفضاء باستخدام طريقة هندسية بسيطة. في الفصل الأول قمنا بالتعرف على المفاهيم الأساسية ومبادئ البلورات: الخلية الأولية، الشبكة البلورية، وأنظمة الكريستال في الفصل الثاني، ناقشنا التماثل ومختلف عناصر عمليات التناظر. مختلف اشكال التمثيل (المصفوفة، مجسمات التمثيل ...) الفصل الثالث يتمثل في مجموعات الفضاء. تعريف شبكة برافيّة نوع شبكة برافي لنظام رباعي الزوايا. أخيراً، الفصل الرابع، قمنا بتعداد مجموعات الفضاء من فئة نظام  $4/m$ ، مع العلم أن تعداد مجموعات الفضاء يمكن أن يتم ذلك باستخدام طريقة هندسية.

**الكلمات الرئيسية:** عنصر التماثل، رباعي الزوايا، فئة التماثل، نوع شبكة برافي، مجموعة الفضاء.

## Résumé

L'objectif principal de ce travail est de connaître les principes de dénombrement des groupes spatiaux en utilisant une méthode géométrique simple.

Dans le chapitre premier nous avons fait un rappel sur les notions fondamentales, les principes et les concepts de la cristallographie : réseau ponctuel, maille élémentaire, systèmes cristallins ... etc.

Au chapitre deux, nous avons évoqué les éléments de symétrie et les diverses opérations qui en découlent. Les différentes formes de représentations (matricielles, stéréographiques ...) des éléments ont également été évoqué.

Le chapitre trois est consacré aux groupes spatiaux. Un point particulier a été met sur le dénombrement des modes de réseau de Bravais pour le système quadratique.

Enfin, dans le chapitre quatre, nous avons pu dénombrer les groupes spatiaux issus de la classe  $4/m$  du système quadratique, sachant que le dénombrement des groupes spatiaux peut se faire à l'aide d'une méthode géométrique. Cette méthode consiste à établir tous les stéréogrammes de toutes les combinaisons possibles.

**Mots clés:** Elément de symétrie, système quadratique, classe de symétrie, mode de réseau de Bravais, groupe spatial.

## Abstract

The main objective in this work is to know the principles of counting space groups using a simple geometric method.

In the first chapter we have a refresher on the basic concepts, principles and concepts of crystallography: ad hoc network, unit cell, crystal systems ... etc.

In chapter two, we discussed the symmetry elements and the various operations that result. Different forms of representations (matrix, stereographic ...) factors were also mentioned.

Chapter three is devoted to space groups. A particular point has been put on counting modes Bravais lattice for the tetragonal system.

Finally, in chapter four, we could count the space groups from class  $4 / m$  quadratic system, knowing that the enumeration of space groups can be done using a geometric method. This method is to establish all the stereograms of all possible combinations.

**Keywords:** Element of symmetry, tetragonal, symmetry class, Bravais mode lattice, space group.