République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed BoudiafDe M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par

Soltani Housseyne

Sujet

Les suites (p,q) - sommants

Date de soutenance :19 Juin 2018

Devant le jury :

Mr. **DahiaElhadj**	M.C.A. U. de M'sila	Président
Mr. **Achour Dahmen**	Prof. U. de M'sila	Rapporteur
Mr. **Heraiz Rabeh**	M.C.B. U. de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

Table des matières

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu,à ALLAH tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues annéesde formation.

Je tiens à remercier sincérement prof.ACHOUR Dahmane, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues, et pour leurs aides et leurs encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Merci

Résumé

Dans ce mémoire, on essaie de présenter la notion mathématique des suites (p,q)-sommants à celle d'opérateurs linéaires. Aussi l'étude de quelques propriétés relatives aux opérateurs linéaires.

Mots-clés : espace de suites, Opérateurs (p,q)-sommant, suites (p,q)-sommants, suites d'opérateurs (p,q)-sommats.

Abstract

In this memory, we try to present the mathematical notion of (p,q)-summing sequences are in that of linear operators. Also the study of some properties related to linear operators.

Keywords : sequences space, (p,q)-summing operators, (p,q)-summing sequences, (p,q)-summing sequences of operators.

Notations générale

X, Y	Deux espaces de Banach.
X^*	Le dual topologique de X.
B_X	La boule unité fermé de X.
$L(X, Y)$	Espace des opérateurs linéaire de X dans Y.
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espace des opérateurs linéaire continue de X dans Y.
$\ell_p^n(X)$	Espace des suites $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X absolument p-sommables.
$\ell_{p,w}^n(X)$	Espace des suites $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X faiblement p-sommables.
$\Pi_{p,q}(X, Y)$	Espace de Banach des opérateurs linéaire (p, q)-sommants de X dans Y.
$\Pi_p(X, Y)$	Espace de Banach des opérateurs linéaire p-sommants de X dans Y.
$\ell_{p,q}(X)$	Espace de Banach des suites (p, q)-sommants
$\ell_{p,q}(X, Y)$	Espace de Banach des suites d'opérateurs (p, q)-sommants

Introduction

Les travaux de ce mémoire se situent dans le cadre de la théorie de sommabilité. Ils portent essentiellement sur les suites (p, q)-sommants. Ces dernières sont bien étudies par José Luis Arregui et Oscar Blasco [2]. Historiquemen, Précisément, dans ce travail, on s'intéresse à ce dernier concept dont on étudiera les suites (p, q)- sommants et les suites des opérateurs (p, q)- sommants. Le mémoire s'articule autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donnant un aparçu général sur les opérateurs (p, q)-sommants, l'espace des suites p - sommables et l'espace des suites faiblements p - sommables. On terminera par rappeler la définition des opérateurs linéaires (p, q)-sommants (ceux sont des opérateurs entre des espaces de Banach, qui tansforment les suites faiblement q - sommables en des suites fortement p - sommables).

Dans le deuxième chapitre, on étudiera les suites (p, q)-sommants pour $p, q \in [1, \infty)$. La suite $(x_j)_j$ dans un espace de Banach X est (p, q) - sommants si pour toute suite faiblement q- sommable $(x_j^*)_j$ dans un espace dual on obtient une suite p- sommante des scalaires $(x_j^*(x_j))_j$.

Dans le troisième chapitre, on introduit l'espace des suites d'opérateurs linéaires (p, q)-sommants, qui a été bien étudié par [3]. Dans lequel, on va traiter l'espace des suites multiplicateurs ayaur pour symbole $(E(X), F(Y))$ où $E(X)$ et $F(Y)$ sont deux espaces des suites (X et $Y, E(X), F(Y)$ des espaces de Banach). On dit que (u_n) est une suite d'opérateurs multiplicateurs entre $E(X)$ et $F(Y)$ s'il existe $C > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, ..., x_n \in X$. On a

$$\|(u_j(x_j))_{j=1}^n\|_{F(Y)} \leq C\|(x_j)_{j=1}^n\|_{E(X)}.$$

Si $F(Y) = \ell_p(Y)$ et $E(X) = \ell_q^w(X)$, $1 \leq q \leq p < \infty$. On a

$$\|(u_j x_j)\|_{\ell_p(Y)} \leq C\|(x_j)\|_{\ell_q^w(X)}.$$

On dira que (u_j) est une suite d'opérateurs linéaires (p, q) - sommants. On termine par donner quelques propriétés.

Chapitre 1

Opérateurs $(p, q)-$sommants

1.1 Espaces de suites

Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$. Rappelons que $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$ est l'espace vectoriel des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p$ converge. Alors $\ell_p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_p$ définie par : pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, on a

$$\|x\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté $\ell_\infty(\mathbb{N})$ ou tout simplement ℓ_∞. On notera $c_0(\mathbb{N})$ ou tout simplement c_0 le sous-espace fermée de ℓ_∞ des suites qui convergent vers zéro. On désignera par X, Y deux espaces de Banach et X^*, Y^* sont leurs espaces duaux . Soit $1 \leq p^* \leq \infty$ le conjugue de p telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Espaces des suites p-sommable

Tout d'abord, si X un espace de Banach, nous noterons $X^{\mathbb{N}}$ espace de toute les suites

$(x_i)_i$ d'éléments de X. L'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ est espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition

$$(x_i)_i + (y_i)_i := (x_i + y_i)_i$$

et la loi

$$\lambda.(x_i)_i := (\lambda x_i)_i, \text{ou } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.1.1 *(L'espace de suites p-sommables) Une suite (x_n) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est absolument p-sommables si la suite scalaire $(\|x_n\|)$ (resp.$(\|x_i\|)_{1\leq i\leq n}$) est dans ℓ_p.*

On note $\ell_p(X)$(resp.$\ell_p^n(X)$) l'espace des suites (x_n) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument p-sommables muni de la norme :

$$\|(x_n)_n\|_{\ell_{p(X)}} = \|(x_n)_n\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad si \;\; 1 \leq p < \infty$$
$$\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)} = \|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n \|x_n\| \qquad si \;\; p = \infty$$

Espaces de suites faiblement p-sommable

Définition 1.1.2 *(L'espace de suites faiblement p-sommables)*

Une suite (x_n)(resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est faiblement p-sommables si la suite scalaire $(x^*(x_n))$ (resp.$(x^*(x_i)_{1\leq i\leq n}$) est dans ℓ_p pour tout $x^* \in X^*$.

On note $\ell_p^w(X)$(resp.$\ell_{p,w}^n(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X faiblement p-sommables telle que

$$\ell_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : (\langle x^*, x_n\rangle)_n \in \ell_p, x^* \in X^*\}$$

muni de la norme :

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x^*, x_n\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad si \;\; 1 \leq p < \infty$$
$$\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty^w(X)} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_n |\langle x^*, x_n\rangle| \qquad si \;\; p = \infty$$

Nous considérons les relations entre les espaces de suites p-sommables (voir par exemple [4]).

Théorème 1.1.3 *i)* $\ell_\infty^w(X) = \ell_\infty(X)$,

ii) $\ell_p^w(X)$ *est un espace de Banach ;*

iii) Soit $1 \leq p < \infty$, *alors,* $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$ *de plus* $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ *si et seulement si* $dim(X)$ *est finie.*

Proposition 1.1.4

1- Si $1 \leq p < \infty$ *; on a*

$$\|(x_n)_n\|_p = sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n)\right| : (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in X^*, \|(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*} \leq 1\right\}, \tag{1.3.2}$$

particuliérement, pour $X = \mathbb{K}$ *; on a*

$$\|(\alpha_n)_n\|_p = sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n\right| : \|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*} \leq 1\right\}.$$

2- $\|(x_n)_n\|_{p,w} = sup\left\{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\right\| : \|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*} \leq 1\right\}$

Proposition 1.1.5

1- Si $1 \leq p < \infty$, *on a* $\ell_p^w(X) = \mathcal{L}(\ell_{p^*}; X)$ *isometriquement.*

2- Si $p = 1$ *on a* $\ell_p^w(X) = \mathcal{L}(c_0; X)$ *isometriquement.*

1.2 Opérateurs $(p, q)-$sommants

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1 *Soient* $1 \leq p, q < \infty$ *et* X, Y *deux espaces de Banach, un opérateur linéaire* $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ *est absolument* (p, q)*-sommant (ou* (p, q)*-sommant) si* $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ *pour tout* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$ *i.e : l' opérateur*

$$\begin{array}{rccc} \bar{u}: & \ell_{q,w}(X) & \longrightarrow & \ell_p(Y) \\ & (x_n)_{n=1}^{\infty} & \longrightarrow & (u(x_n))_{n=1}^{\infty}. \end{array}$$

est bien définit

La classe des opérateurs linéaires (p,q)-sommants de X dans Y, noté $\Pi_{p,q}(X,Y)$. Pour $p=q$, on note $\Pi_p(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y.

Example 1.2.2 *Soit K un espace compact de Hausdorff, et μ une mesure positive sur K. On concèdere $1 \leq p < \infty$, alors*
L'opérateur Diagonal

$$\begin{array}{cccc} D_\lambda: & \ell_\infty & \longrightarrow & \ell_p \\ & a_n & \longrightarrow & (\lambda_n a_n) \end{array}$$

est p - sommant de plus $\pi_q(D_\lambda) = \|\lambda\|_p$

Théorème 1.2.3 *(Théorème d'inclusion)*

Soient X,Y deux espaces de Banach et $0 < p < q < \infty$. on a $\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$, et pour tout $u \in \Pi_p(X,Y)$, $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$.

Proposition 1.2.4 *Soit $u \in \mathcal{L}(X,Y)$ les propriétés suivantes sont équivalentes*
i) u est (p,q)-sommants
ii) il existe une constante $k>0$ telle que

$$(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq k \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.4}$$

pour tout suite $x_1,...,x_n$ dans X et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
iii) il existe une constante $k>0$ telle que

$$(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq k \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}},$$

pour $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$.
iv) il existe $k>0$ telle que

$$(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq k \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}},$$

pour $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$.

où

$$\ell_{q,u}(X) = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X);\ \lim_{n \longrightarrow \infty} \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} = 0\}.$$

v) $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ *quand* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$.

on pose

$$\pi_{p,q}(u) = \inf\{k \text{ vérifiant } 1.4\},$$

de plus on a $\pi_{p,q}(u) = \|\bar{u}\|$.

Démonstration. $(i) \Longrightarrow (ii)$ supposons que u est (p,q) - sommant et on suppose que $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ converge vers $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $\ell_{q,w}(X)$ et $\bar{u}(x^{(k)})$ converge vers $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $\ell_p(Y)$.comme $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ converge vers $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que

$$k \geq N \Longrightarrow \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi(x_n^{(k)} - x_n)\right|^q)^{\frac{1}{q}} = \|x^{(k)} - x\|_{q,w} < \varepsilon,$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi(x_n^{(k)} - x_n)\right|^q < \varepsilon^p \tag{1.5}$$

pour tout $\varphi \in B_{X^*}$.

On a alors

$$k \geq N \Longrightarrow \|x_n^{(k)} - x_n\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left|\varphi(x_n^{(k)} - x_n)\right| < \varepsilon$$

et pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, on a $(x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ converge vers x_n dans X et comme u est continue donc

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} u(x_n^{(k)}) = u(x_n) \tag{1.6}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme $(\bar{u}(x_n^{(k)}))_{k=1}^{\infty}$ converge vers $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $\ell_p(Y)$, il existe N' telle que

$$k \geq N' \Longrightarrow \|\bar{u}(x^{(k)}) - y\|_p < \varepsilon,$$

et donc

$$k \geq N' \Longrightarrow \|(\ \bar{u}(x_n^{(k)}))_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty}\|_p < \varepsilon,$$

alors

$$k \geq N^{'} \Longrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n^{(k)}) - y_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Par suite

$$k \geq N^{'} \Longrightarrow \|u(x_n^{(k)}) - y_n\| < \varepsilon,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} u(x_n^{(k)}) = y_n \tag{1.7}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après (1.6) et (1.7) on a $u(x_n) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De sorte

$$\bar{u}(x) = (u(x_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} = y.$$

Comme $\bar{u}$ est linéaire et par le théorème du graphe fermé, u est continue et pour toute suite fini $(x_k)_{k=1}^{n}$ dans X, on a

$$\begin{aligned} (\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= \|(u(x_k))_{k=1}^{n}\|_p \\ &= \|\bar{u}((x_k))_{k=1}^{n}\|_p \\ &\leq \|\bar{u}\|\|(x_k))_{k=1}^{n}\|_{q,w} \\ &= \|\bar{u}\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} \mid \varphi(x_k) \mid^q)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

De plus

$$\pi_{p,q}(u) \leq \|\bar{u}\|.$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ supposons que pour $x_1, ..., x_n$ dans X et $n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$, donc

$$\begin{aligned}
\|(u(x_k))_{k=1}^{\infty}\|_p &= (\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_n (\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.9)\\
&\leq \sup_n [K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}}]\\
&= K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_n (\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}}\\
&= K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}} = K\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w}
\end{aligned}$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$ De toute évidence de (iii) que $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$, alors $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$.

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}\| &= \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \|(\ \bar{u}(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_p = \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} (\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.10)\\
&\leq \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} K\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w}\\
&= k.
\end{aligned}$$

De plus

$$\|\bar{u}\| \leq \pi_{p,q}(u). \qquad (1.11)$$

De (1.8) et (1.11) on trouve $\pi_{p,q}(u) = \|\bar{u}\|$.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$ est évidente.

$(iv) \Longrightarrow (v)$ évidente.

$(v) \Longrightarrow (ii)$ soit $(u(x_k))_{k=1}^{n} \in \ell_p(Y)$ telle que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$, l'applicatoion

$$\bar{u} : \ell_{q,u}(X) \longrightarrow \ell_p(Y), (x_k)_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \bar{u}((x_k)_{k=1}^{n}) = (u(x_k))_{k=1}^{n}$$

est bien définie, de la meme façon de $(i) \Longrightarrow (ii)$, $\bar{u}$ est continue. On remarque que, si $x_1, ..., x_n \in X$ on prend

$$(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in \ell_{q,u}(X).$$

Alors

$$
\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= \|(u(x_k))_{k=1}^{n}\|_p \\
&= \|\bar{u}(x_k)_{k=1}^{n}\|_p \\
&\leq \|\bar{u}\|\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q,w} \\
&= \|\bar{u}\| \sup_{\varphi\in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

■

Remarque 1.2.5 *Si $p < q$ et u est un opérateur (p,q)-sommant, alors $u = 0$.*
En effet, soit $X \neq \{0\}$, $p < q$ et soit $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ dans $\ell_q - \ell_p$. Pour $0 \neq x \in X$, $(\lambda_k x)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}$. On supppose que $u \neq 0$ est absolument (p,q)-sommant, alors il existe $K > 0$ telle que

$$(\sum_{k=1}^{n}\|u(\lambda_k x)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n}|\varphi(\lambda_k x)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

pour toute $n \in \mathbb{N}$

$$\|u(x)\|(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x)| \, (\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q)^{\frac{1}{q}},$$

alors

$$\|u(x)\|(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq K\|x\|(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

on prend $\sup_{\|x\|\leq 1}$ on obtient

$$\|u\|(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq K(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q)^{\frac{1}{q}},$$

donc $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$ (absurd).

Remarque 1.2.6 *Comme $\pi_{p,q}(u) = \|\bar{u}\|$ et $\|\bar{u}((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_p \leq \|\bar{u}\|\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w}$, on a*

$$(\sum_{k=1}^{\infty}\|u(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi\in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_k)|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Proposition 1.2.7 $(\Pi_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(.))$ *est un espace vectoriel normé.*

Démonstration. Soient $u, v \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.on a :

$$(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^q)^{\frac{1}{q}},$$

$$(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(v) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^q)^{\frac{1}{q}},$$

pour tout $x_1, ..., x_m$ dans X, par l'inégalité de Minkowski nous donne

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{m} \|(u+\lambda v)(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq (\sum_{i=1}^{m} (\|u(x_i)\| + \|\lambda v(x_i)\|)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} + |\lambda| (\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\pi_{p,q}(u) + |\lambda| \pi_{p,q}(v)) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{1.12}$$

donc $u + \lambda v \in \Pi_{p,q}(X,Y)$.

Soit $u \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\pi_{p,q}(\lambda u) = \|\widetilde{\lambda u}\| = |\lambda| \|\bar{u}\| = |\lambda| \pi_{p,q}(u)$$

et $\pi_{p,q}(u) \geq 0$,

$$\pi_{p,q}(u) = 0 \Leftrightarrow \|\bar{u}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

De sorte que $\pi_{p,q}$ est une norme. ∎

Remarque 1.2.8 *Pour tout* $u \in \Pi_{p,q}(X,Y)$, *on a*

$$\|u\| \leq \pi_{p,q}(u).$$

En effet, pour $n = 1$ *dans (1.4), on a*

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)| \\ &= \pi_{p,q}(u) \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| = \pi_{p,q}(u). \end{aligned}$$

1.2.2 L'Idéal des opérateurs linéaire

Définition 1.2.9 *(opérateur de rang fini) un opérateur linéaire u continue de X dans Y est de rang fini s'il est somme fini d'opérateur de la forme*

$$\begin{array}{rccc} u: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \mapsto & x^*(x)y \end{array}$$

où $x^* \in X$ et $y \in Y$. L'espace des opérateurs linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X,Y)$.

Définition 1.2.10 *(Idéal des opérateurs linéaires) . Un Idéal des opérateurs linéaires I est un classe d'opérateurs linéaires borné telle que pour tout X et Y des espaces de Banach on a :*

(a) L'ensemble $\mathrm{I}(X,Y)$ est un sous ecpace de $\mathcal{L}(X,Y)$ qui contient $\mathcal{L}_f(X,Y)$.

(b) Propriété d'idéal :si $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, $v \in I(Y,G)$ et $t \in \mathcal{L}(G,H)$ alors $t \circ v \circ u \in I(X,H)$.

De plus, si $\|.\|_I : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait :

(i) $(I(X,Y), \|.\|_I)$ est un Banach.

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\| = 1$ tel que $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ donné par $id_{\Bbbk}(x) = x$.

(iii) $\|t \circ v \circ u\|_I \leq \|t\|\|v\|_I\|u\|$, alors $(I(X,Y), \|.\|_I)$, s'appelle idéal de Banach des opérateurs linéaires.

Théorème 1.2.11 *Soit $1 \leq q \leq p < \infty$,alors $(\Pi_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(.))$ est un idéal normé (de Banach) des opérateurs linéaires.*

Démonstration. D'après la proposition (1.2.7), l'ensemble $\Pi_{p,q}(X,Y)$ est un sous espace vectoriel normé. Il suffit de montrer que :

(i) $\mathcal{L}_f(X,Y) \subset \Pi_{p,q}(X,Y)$, il suffit de montrer que tout opérateur de rang 1 est (p,q)-sommant. Soit $u : X \longrightarrow Y$ donné par $u = \varphi(.)y$, pour tout $0 \neq \varphi \in X^*$ et $y \in Y$.

Soit $x_1, ..., x_m$ dans X.

$$\begin{aligned}(\sum_{n=1}^{m}\|u(x_n)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{n=1}^{m}\|y\varphi(x_n)\|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{n=1}^{m}\|y\|^p\frac{\|\varphi\|}{\|\varphi\|}|\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|y\|\|\varphi\|(\sum_{n=1}^{m}\frac{|\varphi(x_n)|^p}{\|\varphi\|})^{\frac{1}{p}} \leq \|y\|\|\varphi\|\sup_{\psi\in B_{X^*}}(\sum_{n=1}^{m}|\psi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|y\|\|\varphi\|\sup_{\psi\in B_{X^*}}(\sum_{n=1}^{m}|\psi(x_n)|^q)^{\frac{1}{q}},\end{aligned} \tag{1.13}$$

alors $u \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et de plus $\pi_{p,q}(u) \leq \|y\|\|\varphi\|$, d'autre part $\|y\|\|\varphi\| = \|u\| \leq \pi_{p,q}(u)$, donc

$$\|y\|\|\varphi\| = \pi_{p,q}(u).$$

pour $v : X \longrightarrow Y$ est un opérateur de rang fini on a

$$v = \sum_{n=1}^{m}\varphi_j(.)y_j$$

où $\varphi_j \in X^*$ et $y_j \in Y$, $j = 1, ..., m$.Comme $\varphi_j(.)y_j \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ pour tout $j = 1, ..., m.$, et comme $\Pi_{p,q}(X,Y)$ est un espace vectoriel, alors $v \in \Pi_{p,q}(X,Y)$.

(ii) Propriété d'idéal.

Soient $w \in \mathcal{L}(X_0,Y), v \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et $u \in \mathcal{L}(Y,Y_0)$. On considere les opérateurs

$\hat{w}^w : \ \ell_{q,w}(X_0) \longrightarrow \ell_{q,w}(X)$, $\hat{v} : \ \ell_{q,w}(X) \longrightarrow \ell_p(Y)$ et $\bar{u}^s : \ \ell_p(Y) \longrightarrow \ell_p(Y_0)$

Nous avons que $\|\hat{w}^w\| = \|w\|$, $\|\hat{v}\| = \pi_{p,q}(v)$ et $\|\bar{u}^s\| = \|u\|$, on obtient

$$\bar{u}^s\hat{v}\hat{w}^w : \ell_{q,w}(X_0) \longrightarrow \ell_p(Y_0).$$

Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X_0)$ on obtient

$$\begin{aligned}\bar{u}^s\hat{v}\hat{w}^w((x_n)_{n=1}^{\infty}) &= \bar{u}^s\hat{v}((w((x_n)_{n=1}^{\infty})) \\ &= \bar{u}^s(vw((x_n)_{n=1}^{\infty})) \\ &= (uvw(x_n))_{n=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Alors nous voyons que $\widehat{uvw}$ est bien défini, donc $uvw \in \Pi_{p,q}(X_0,Y_0)$ et

$$\pi_{p,q}(uvw) = \|\widehat{uvw}\| \leq \|\bar{u}^s\|\|\hat{v}\|\|\hat{w}^w\| = \|u\|\pi_{p,q}(v)\|w\|.$$

(iii) $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{k}}) = 1$.

Pour toute x dans K, on a

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x,0,0,...)\|_p = \|(id_{\mathbb{k}}x, id_{\mathbb{k}}0, id_{\mathbb{k}}0,...)\|_p \\ &\leq \pi_{p,q}(id_{\mathbb{k}})\|(x,0,0,...)\|_{q,w} = \pi_{p,q}(id_{\mathbb{k}})\|x\|, \end{aligned} \tag{1.14}$$

donc $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{k}}) \geq 1$. Comme $q \leq p$ on a

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^{\infty} |id_{\mathbb{k}}(x_j)|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq (\sum_{j=1}^{\infty} |id_{\mathbb{k}}(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{k}^*}} (\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}},\ \forall (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(\mathbb{k}). \end{aligned} \tag{1.15}$$

alors

$$1 \leq^{(1.14)} \pi_{p,q}(id_{\mathbb{k}}) \leq^{(1.15)} 1.$$

$v)$ Soit $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de cauchy dans $(\Pi_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(.))$. on a $\|.\| \leq \pi_{p,q}(.)$, donc $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de cauchy dans $\mathcal{L}(X,Y)$. on pose $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = u \in \mathcal{L}(X,Y)$
je démontre que $u \in \Pi_{p,q}(X,Y)$. u_n est (p,q) - sommant, alors on défini

$$\begin{array}{rccc} \bar{u}: & \ell_{q,w}(X) & \longrightarrow & \ell_{p,w}(Y) \\ & (x_k)_{k=1}^{\infty} & \longrightarrow & (u(x_k))_{k=1}^{\infty} \end{array}$$

notez que $\bar{u}$ est un opérateur linéaire fini, comme $q \leq p$; on a

$$\|\bar{u}((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_{p,w} = \|(u(x_k))_{k=1}^{\infty}\|_{p,w} \leq \|u\|\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w}$$

pour toute $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{array}{rccc} \bar{u}_n: & \ell_{q,w}(X) & \longrightarrow & \ell_p(Y) \\ & (x_k)_{k=1}^{\infty} & \longrightarrow & (u(x_k))_{k=1}^{\infty} \end{array}$$

est bien défini, de plus $\|\bar{u}_n\| = \pi_{p,q}(u_n)$; $(\bar{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de cauchy dans $\mathcal{L}(\ell_{q,w}(X), \ell_p(Y))$ et comme $\ell_p(Y)$ est complet, alors $\mathcal{L}(\ell_{q,w}(X), \ell_p(Y))$ est un espace de Banach. et $(\bar{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ converge pour $w \in \mathcal{L}(\ell_{q,w}(X), \ell_p(Y))$ On pose, pour tout $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$ soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que

$$N \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|\bar{u}_n((x_k)_{k=1}^{\infty}) - w((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_p < \varepsilon.$$

soit

$$(y_k)_{k=1}^{\infty} = w((x_k)_{k=1}^{\infty}) \in \ell_p(Y).$$

alors

$$n \geq N \Longrightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} \|u_n(x_k) - y_k\|^p)^{\frac{1}{p}} = \|(u_n(x_k))_{k=1}^{\infty} - (y_k)_{k=1}^{\infty}\|_p < \varepsilon.$$

pour toute $k \in \mathbb{N}$, on a

$$n \geq N \Longrightarrow \|u_n(x_k) - y_k\| < \varepsilon, \tag{1.16}$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x_k) = y_k, \tag{1.17}$$

pour toute $k \in \mathbb{N}$ comme $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{L}(X, Y)$ alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x_k) = y_k \tag{1.18}$$

pour toute $k \in \mathbb{N}$. de (1.17) et (1.18) on a

$$(u(x_k))_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$$

donc

$$\bar{u}((x_k)_{k=1}^{\infty}) = (ux_k)_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} = w((x_k)_{k=1}^{\infty})$$

pour tout $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$. alors, $\bar{u} = w \in \mathcal{L}(\ell_{q,w}(X), \ell_p(Y))$ est bien défini et $u \in \Pi_{p,q}(X, Y)$, donc $\Pi_{p,q}(X, Y)$ est un idéal de Banach. ■

Corollary 1.2.12 *Soient X_0 un sous espace d'un Banach X et $u \in \Pi_{p,q}(X, Y)$. Alors, $u_{/X_0} \in \Pi_{p,q}(X_0, Y)$ et $\pi_{p,q}(u_{/X_0}) \leq \pi_{p,q}(u)$.*

Proposition 1.2.13 *Soient* $1 \leq q < p < \infty$ *et* X, Y *deux espaces de Banach. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) L'opérateur u est (p, q)- sommant et $\pi_{p,q}(u) \leq C$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathcal{L}(\ell_{q^*}^n, X)$ on a $uv \in \Pi_{p,q}(\ell_{q^*}^n, Y)$ et $\pi_{p,q}(uv) \leq C\|v\|$.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons $u \in \Pi_{p,q}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}(u) \leq C$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v : \ell_{q^*}^n \to X$, d'après la Propriété d'idéale on a $uv \in \Pi_{p,q}(\ell_{q^*}^n, Y)$ et $\pi_{p,q}(uv) \leq \pi_{p,q}(u)\|v\|$ où $\pi_{p,q}(u) \leq C$

donc $\pi_{p,q}(uv) \leq C\|v\|$.

$\Leftarrow$) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$. On définit v par $v(e_j) = x_j$, $j \in \{1, ..., n\}$ où (e_j) est la base canonique de ℓ_q^n. On a

$$\|v\| = \|x_j\|_{\ell_q^{nw}(X)} = \sup_{\zeta \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, \zeta\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \|ux_j\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{j=1}^{n} \|uv(e_j)\|^p)^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq C\|v\|, \\
&\leq C \sup_{\zeta \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, \zeta\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Donc $u \in \Pi_{p,q}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}(u) \leq C$. ■

Théorème 1.2.14 *(théoréme d'inclusion) Soit* X *et* Y *deux espaces de Banach. Supposons que* $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ *satisfait*

$$\begin{cases} q_1 & \leq q_2 \\ p_1 & \leq p_2 \\ \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} & \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2} \end{cases} \tag{1.19}$$

alors

$$\Pi_{p_1,q_1}(X, Y) \subset \Pi_{p_2,q_2}(X, Y).$$

De plus, on a $\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u)$*.pour tout* $u \in \Pi_{p_1,q_1}(X, Y)$.

Démonstration. Soit $q_1 = q_2 = q$; $\Pi_{p_1,q}(X,Y) \subset \Pi_{p_2,q}(X,Y)$ est clair (car $\ell_{p_1}(Y) \subset \ell_{p_2}(Y)$).

Si $q_1 \leq q_2$, $p_1 \leq p_2$., quand $q_1 \leq q_2$, on a

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \geq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} > 0.$$

On définie les indices $1 < q$, $p < \infty$ par

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \text{ et } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}. \tag{1.20}$$

Soit $u \in \Pi_{p_1,q_1}(X,Y)$ et $x_1, ..., x_n$ dans X, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et posons $\lambda_k = \|ux_k\|^{\frac{p_2}{p}}$ $(1 \leq k \leq n)$, donc

$$\|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1} = \|u(\|u(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}} x_k)\|^{p_1}$$

et

$$(\|u(x_k)\|\|u(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}})^{p_1} = \|u(x_k)\|^{(\frac{p_2 p_1}{p})+p_1} = \|u(x_k)\|^{p_2}$$

comme u est (p_1, q_1) - sommant, alors

$$(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2})^{\frac{1}{p_1}} = (\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{q_1} |\varphi(x_k)|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}}.$$

Puisque, $\frac{1}{\frac{q}{q_1}} + \frac{1}{\frac{q_2}{q_1}} = 1$, alors en appliquant l'inégalité de Hölder sur les indices $\frac{q}{q_1}$et $\frac{q_2}{q_1}$, on a :

$$\begin{aligned}(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2})^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u)(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{q})^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)\|(\lambda_k)_{k=1}^{n}\|_q \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w}.\end{aligned}$$

Comme $p \leq q$, on a

$$\begin{aligned}(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2})^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u)(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{p})^{\frac{1}{p}} \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w}. \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2})^{\frac{1}{p}} \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w}\end{aligned}$$

et $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}$, alors

$$(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u)\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w}.$$

Donc $u \in \Pi_{p_2,q_2}(X,Y)$ et $\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u)$. ■

Chapitre 2

Espace de suites $(p, q)-$sommants

2.1 L'espace $\ell_{\pi_{p,q}}(X)$

Définition 2.1.1 *Soient* $1 \leq p, q < \infty$ *;* X *un espace de Banach et* (x_j) *une suite dans* X*. On dit que* (x_j) *est* (p, q) *- sommant si*

$$\begin{cases} \exists C \geq 0, \qquad \textit{telle que} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1^*, ..., x_n^* \in X^* \\ \qquad (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x \in B_X} (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

On note

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \{\textit{des suites } (x_j) \subset X, (p, q) \textit{-sommants}\},$$

et $\pi_{p,q}[x_j, X] = \pi_{p,q}[x_j] = inf\{C,$*vérifiant la définition* 2.1.1$\}$.

Remarque 2.1.2

1- L'espace $\ell_{\pi_{p,q}}(X)$ *est un espace de Banach muni de la norme* $\pi_{p,q}$*. comme un sous espace fermé de* $\mathcal{L}(\ell_{q,w}(X^*), \ell_p)$.

2- les modéfications évidentes dans la définition pour $p = \infty$ *ou* $q = \infty$ *font un sense, mais alors clairement* $\ell_{\pi_{p,\infty}}(X) = \ell_p(X)$.

Notation 2.1.3 *Si* $p = q$*, on note* $\ell_{\pi_{p,p}}(X) = \ell_{\pi_p}(X)$ *et* $\pi_{p,p}[x_j] = \pi_p[x_j]$.

Définition 2.1.4 *Soit X un espace de Banach et $1 \leq p,q < \infty$, $\left(x_j^*\right) \subset X^*$ est une suite (p,q)- sommant si et seulement si*

$$\begin{cases} \exists C \geq 0, \quad \text{telle que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_1,...,x_n \in X \\ (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |x^*(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

en particulier, $\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \ell_{\pi_{p,q}}(X^{**}) \cap \ell_\infty(X)$.

Remarque 2.1.5

(1) Soit X un espace de Banach et $1 \leq q \leq p < \infty$, (x_j) suite dans X. On dit que (x_j) suite (p,q) - sommante si et seulement si

$$\begin{cases} \exists C \geq 0, \quad \text{telle que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_1^*,...,x_n^* \in X^* \\ (\sum_{k=1}^{n} \sup_j |x_k^*(x_j)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x \in B_X} (\sum_{k=1}^{n} |x_k^*(x)|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

(2) Si $p = \infty$ (resp. $q = \infty$) on a $\ell_{\pi_{\infty,q}}(X) = \ell_\infty(X)$ (resp.$\ell_{\pi_{p,\infty}}(X) = \ell_p(X)$).

Lemme 2.1.6 *soit $1 \leq p,q < \infty.(\alpha_j) \subseteq \mathbb{K}$ et $x \in X.$alors $\pi_{p,p}[\alpha_j x] = \|(\alpha_j)\|_r \|x\|$ .Où $\frac{1}{r} = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})^+$.*

Proposition 2.1.7 *Soient X un espace de Banach et $1 \leq p,q < \infty$. Si $\frac{1}{r} = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})^+$, on a*

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_{\pi_{p,q}}(X) \subseteq \ell_r(X). \tag{2.1}$$

Lemme 2.1.8 *Soient X un espace de Banach, $1 \leq q \leq p < \infty$ et r tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Alors, pour tout $x_1^*,...,x_n^* \in X^*$, on a*

$$(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup\{(\sum_{j=1}^{n} \mid x_j^* x_j \mid^q)^{\frac{1}{q}}, \|(x_j)_j\|_{\ell_r(X)} = 1\}.$$

Démonstration. Pour $q = 1$ c'est juste la dualitée $\ell_p(X^*) = (\ell_{p*}(X))^*$. Pour le cas général, soit

$$(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* x_j\right|^q)^{\frac{1}{q}} = \sup\{\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j x_j^* x_j\right| : \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^{q^*} = 1\}.$$

Notons que, $\ell_{p*}(X) = \ell_{q*}\ell_r(X)$. Donc,

$$\sup\{\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j x_j^* x_j\right| : \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^{q^*} = 1, \|(x_j)_j\|_{\ell_r(X)} = 1\}$$

$$= \sup\{\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* \alpha_j x_j\right| : \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^{q^*} = 1, \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\}.$$

On pose $y_j = \alpha_j x_j$, donc

$$\begin{aligned}
\sup\{\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* \alpha_j x_j\right| \quad &: \quad \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^{q^*} = 1, \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\} \\
&= \quad \sup\{\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* y_j\right| : \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|^{p^*} = 1\}, \\
&= \quad (\sum_{j=1}^{n} \left\|x_j^*\right\|^{p})^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\sup\{(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* x_j\right|^{q})^{\frac{1}{q}} : \| x_j \|_{\ell_r(X)} = 1\} = (\sum_{j=1}^{n} \left\|x_j^*\right\|^{p})^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui démontre le lemme ■

Théorème 2.1.9 *Soient $1 \leq p \leq q < \infty$, X un espace de Banach. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) L'espace X est de dimension finie.

(2) $\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \ell_r(X)$, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Démonstration. (1)$\Longrightarrow$(2)

On suppose que X est de dimension finie, donc $\ell_q(X^*) = \ell_q^w(X^*)$, voir [DJT95, p. 33].

$$(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^{q})^{\frac{1}{q}} = \sup\{(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x)\right|^{q})^{\frac{1}{q}}; \|x\|_X = 1\}.$$

Soit $(x_j) \in \ell_r(X)$, d'après le lemme (2.1.8) on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^{q})^{\frac{1}{q}} \quad &= \quad \sup\{(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|)^{\frac{1}{p}}, \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\}, \\
&= \quad \sup\{(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x)\right|^{q})^{\frac{1}{q}}; \|x\|_X = 1\},
\end{aligned}$$

donc

$$(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup\{(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}; \|x\|_X = 1\}.$$

Ce qui implique$(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$, et par conséquent

$$\ell_r(X) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X). \tag{2.2}$$

D'après (2.1) et (2.2), on a

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \ell_r(X).$$

(2)$\Longrightarrow$(1)

On suppose que $\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \ell_r(X)$, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Donc d'après le Lemme (2.1.1) on a

$$(\sum_{j=1}^{n}\|x_j^*\|^q)^{\frac{1}{q}} = \sup\{(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}}, \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\},$$

comme$(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$, alors

$$\|(x_j^*)\|_{\ell_q(X^*)} \leq C\sup\{(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}; x \in B_X\},$$

$$\leq C\|(x_j^*)\|_{\ell_q^w(X^*)}.$$

Donc

$$\ell_q^w(X^*) \subseteq \ell_q(X^*). \tag{2.3}$$

On a aussi vu le proposition (1.3.3)

$$\ell_q(X^*) \subseteq \ell_q^w(X^*). \tag{2.4}$$

D'après (2.3) et (2.4) on a

$$\ell_q^w(X^*) = \ell_q(X^*).$$

Donc X est de dimension finie. ■

Proposition 2.1.10 *Soit* (x_j) *une suite borneé dans* X*, et soit* $1 \leq p, q$*. alors* $\pi_{p,q}[x_{\sigma(j)}] = \pi_{p,q}[x_j]$ *pour tout bijection* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

la preuve découle de la définition et du fait que p-norm et les q-norm faibles sont réordonner invariant

Quand $p \geq q$ *nous pouvons en dire plus :*

Proposition 2.1.11 *Soit* (x_j) *une suite borneé dans* X*, et soit* $1 \leq q \leq p < \infty$*. alors* $\pi_{p,q}[x_{\sigma(j)}] \leq \pi_{p,q}[x_j]$ *pour tout application* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

Démonstration. on donne $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$, on a

$$\begin{aligned}
(\sum_j \left|x_j^*(x_{\sigma(j)})\right|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_k (\sum_{\sigma(j)=k} \left|x_j^*(x_k)\right|^p))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sum_k (\sum_{\sigma(j)=k} \left|x_j^*(x_k)\right|^q)^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_k \left|(\sum_{\sigma(j)=k} \alpha_j x_j^*)(x_k)\right|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{ Où } (\alpha_j)_{\sigma(j)=k} \in B_{\ell_{q'}}) \\
&= (\sum_k |y_k^*(x_k)|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{avec } y_k^* = \sum_{\sigma(j)=k} \alpha_j x_j^* \in X^*) \\
&\leq \pi_{p,q}[x_j] \, \|(y_k^*)\|_{\ell_q^w(X^*)} = \pi_{p,q}[x_j] \sup_{\|(\beta_k)\|_{q'} \leq 1} \left\| \sum_k \beta_k y_k^* \right\| \\
&= \pi_{p,q}[x_j] \sup_{\|(\beta_k)\|_{q'} \leq 1} \left\| \sum_j \alpha_j \beta_{\sigma(j)} y_j^* \right\| \\
&\leq \pi_{p,q}[x_j] \sup_{\|(\gamma_j)\|_{q'} \leq 1} \left\| \sum_j \gamma_j x_j^* \right\| = \pi_{p,q}[x_j] \left\|(x_j^*)\right\|_{\ell_q^w(X^*)} .
\end{aligned}$$

■

Le résultat netient pas si $1 \leq p < q$: prendre σ une application constante.

Proposition 3 implique que tous les suites (p, q) - sommant satisfont quelque chose apparemment plus fort que la condition dans la définition 1 :

2.2 Théorèmes d'iclusion

Proposition 2.2.1 (Inclusion) *Soient X un espace de Banach,* $1 \leq p_1 \leq p_2$,*et* $1 \leq q_1 \leq q_2, 1 \leq p \leq q < \infty$. *Alors*

(1) $\ell_{\pi_{p_1,q}}(X) \subseteq \ell_{\pi_{p_2,q}}(X)$, *et* $\pi_{p_2,q}[x_j] \leq \pi_{p_1,q}[x_j]$,

(2) $\ell_{\pi_{p,q_2}}(X) \subseteq \ell_{\pi_{p,q_1}}(X)$, *et* $\pi_{p,q_1}[x_j] \leq \pi_{p,q_2}[x_j]$,

(3) $\ell_{\pi_p}(X) \subseteq \ell_{\pi_q}(X)$, *et* $\pi_q[x_j] \leq \pi_p[x_j]$,

en particulier, pour $1 \leq p, q < \infty$, *on a*

$$\ell_{\pi_{1,q}}(X) \subseteq \ell_{\pi_1}(X) \subseteq \ell_{\pi_p}(X)\ell_{\pi_{p,1}}(X).$$

Démonstration. (1) Soient $1 \leq p_1 \leq p_2$ et $1 \leq q < \infty$, $(x_j) \in \ell_{\pi_{p_1,q}}(X)$, on a

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}} &\leq (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}, \\ &\leq \pi_{p_1,q}[x_j] \sup_{x \in B_X} (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x)\right|^{q})^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

Donc, $(x_j) \in \ell_{\pi_{p_2,q}}(X)$ et $\pi_{p_2,q}[x_j] \leq \pi_{p_1,q}[x_j]$.

(2) Soient $1 \leq q_1 \leq q_2$ et $1 \leq p < \infty$, $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q_2}}(X)$,

alors

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^{p})^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{p,q_2}[x_j] \sup_{x \in B_X} (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x)\right|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}}, \\ &\leq \pi_{p,q_2}[x_j] \sup_{x \in B_X} (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x)\right|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}}.\end{aligned}$$

On conclut, $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q_1}}(X)$ et $\pi_{p,q_1}[x_j] \leq \pi_{p,q_2}[x_j]$.

(3) Claire d'après le Théorème d'inclusion (1.2.3). ■

Théorème 2.2.2 *Soient X un espace de Banach;* $1 \leq p, q, r, s < \infty$ *tels que* $p \leq r$ *et* $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{s}$ *Alors,* $\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X)$.

Démonstration. (a) Si $1 \leq s \leq q$ on a, $\ell_s^w(X^*) \subseteq \ell_q^w(X^*)$. Si $1 \leq p \leq r$ on a, $\ell_p(X) \subseteq \ell_r(X)$. Soit $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$, alors

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{p,q}[x_j]\|(x_j^*)\|_{\ell_q^w(X^*)}, \\ &\leq \pi_{p,q}[x_j]\|(x_j^*)\|_{\ell_s^w(X^*)},\end{aligned}$$

donc $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,s}}(X)$.

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{p,s}}(X). \tag{2.5}$$

Aussi pour $1 \leq p \leq r$ et d'après la Proposition (2.2.1) (1), on a

$$\ell_{\pi_{p,s}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X). \tag{2.6}$$

D'après (2.5) et (2.6) on a

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X).$$

(b) Si $1 \leq q < s$ où $s = \infty$ ou $r = \infty$.D'après la Remarque (2.1.5) et la Proposition (2.1.7), on a

si $s = \infty$

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subseteq \ell_{\pi_{r,\infty}}(X) = \ell_r(X).$$

D'où

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subseteq \ell_r(X).$$

Si $r = \infty$

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{\infty,s}}(X) = \ell_\infty(X).$$

D'où

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_\infty(X).$$

(c) Si $1 \leq q < s$ et $r, s < \infty$, alors

$$\begin{array}{l} 1 \leq p \leq r \\ 1 \leq q < s \end{array} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \frac{r}{p} \\ 1 \leq \frac{s}{q} \end{array} \Longrightarrow 1 \leq \frac{r}{p}, \frac{s}{q} < \infty \right\}.$$

Soit a le conjugué de $\frac{r}{p}$ et b le conjugué de $\frac{s}{q}$, alors

$$\frac{1}{a}+\frac{p}{r}=\frac{1}{b}+\frac{q}{s}=1.$$

Pour la suite $(x_j)\in\ell_{\pi_{p,q}}(X)$ il existe $C>0$, $\forall x_1^*,...,x_n^*\in X^*$, telles que

$$(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^p)^{\frac{1}{p}}\leq C\sup_{x^*\in B_{X^*}}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}$$

ce qui implique que $\pi_{p,q}[x_j]\leq C$.
Maintenant soient $\alpha_j\geq 0$, telle que $\sum\alpha_j^a=1$. Alors

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x_j)\right|^r)^{\frac{1}{r}} &= (\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(\alpha_j^{\frac{1}{p}}x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}},\\ &\leq \pi_{p,q}[x_j]\sup_{x^*\in B_{X^*}}(\sum_{j=1}^{n}\left|x^*\alpha_j^{\frac{1}{p}}x_j\right|^q)^{\frac{1}{q}},\\ &\leq \pi_{p,q}[x_j]\sup(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{\frac{q}{p}}\left|x^*(x_j)\right|^q)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Posons $ap\leq bq\Longrightarrow a\leq\frac{bq}{p}$ donc $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{\frac{q}{p}b}$, d'après l'inégalité de Hölder $\frac{q}{s}+\frac{1}{b}=1$, on a

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x_j)\right|^r)^{\frac{1}{r}} &\leq \pi_{p,q}[x_j](\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{\frac{q}{p}b})^{\frac{p}{q}b}\sup_{x^*\in B_{X^*}}(\sum_{j=1}^{n}\left|x^*(x_j)\right|^s)^{\frac{1}{s}},\\ &\leq \pi_{p,q}[x_j]\sup_{x^*\in B_{X^*}}(\sum_{j=1}^{n}\left|x^*(x_j)\right|^s)^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

On déduit que $(x_j)\in\ell_{\pi_{r,s}}(X)$ donc $\ell_{\pi_{p,q}}(X)\subset\ell_{\pi_{r,s}}(X)$ et $\pi_{r,s}[x_j]\leq\pi_{p,q}[x_j]$. ■

Proposition 2.2.3 $[DJT\,95,p.53]$

Soient X, Y deux espaces de Banach, $v\in\Pi_q(X,Y)$ et $1\leq p,q,r<\infty$ telle que $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.Alors pour tout $(x_n)\in\ell_r^w(X)$ il existe $(\sigma_n)\in\ell_q$ et $(y_n)\in\ell_p^w(X)$, $\gamma_n=\|(x_n)\|_{\ell_r^w(X)}$, on a

(1) $v(x_n)=\sigma_n.y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(2) $\|(\sigma_n)\|_q \leq \gamma^{r/q}$.

(3) $\|(yn)\|_{\ell_p^w} \leq \gamma^{r/p}.\pi_q(v)$.

Pour la démonstration, on pourra consulter le livre $[DJT\,95, p.53]$.

Lemme 2.2.4 *Soit X un espace de Banach, et $1 < p < \infty$, on a $\ell_1^w(X) = \ell_p \ell_{p^*}^w(X)$ si et seulement si $\mathcal{L}(c_0, X) = \Pi_p(c_0, X)$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$)On suppose que $\ell_1^w(X) = \ell_p \ell_{p^*}^w(X)$ et soit $u \in \mathcal{L}(c_0, X)$, $u(e_j) = x_j$ où $(x_j) \in \ell_1^w(X)$, et (e_j) est la base canonique de c_0, $u(e_j) = \alpha_j x_j^* = x_j$ telle que $(\alpha_j) \in \ell_p$, et $(x_j^*) \in \ell_{p^*}^w(X)$.

On pose $u = wv$ telle que $v \in \mathcal{L}(c_0, \ell_p)$ avec $v(ej) = \alpha_j e_j$, et $w \in \mathcal{L}(c_0, \ell_p)$. On a v un opérateur diagonal, donc d'après L'exemple (1.2.2) on a v est p - sommant. Donc u est un opérateur p - sommant, d'après la Propriété d'idéal telle que $v \in \Pi_p(c_0, \ell_p)$ et $w \in \mathcal{L}(\ell_p, X)$. Ce qui implique

$$\mathcal{L}(c_0, X) = \Pi_p(c_0, X).$$

$\Longleftarrow$)On suppose que $\mathcal{L}(c_0, X) = \Pi_p(c_0, X)$, et $(x_j) \in \ell_1^w(X)$. Soit $u \in \mathcal{L}(c_0, X)$ telle que

$$\begin{array}{rccc} u: & c_0 & \longrightarrow & X \\ & (e_j) & \longmapsto & u(e_j) = x_j \end{array}$$

donc soit $(e_j) \in \ell_1^w(c_0)$ et $u \in \Pi_p(c_0, X)$, on a d'après la Proposition (2.2.3), $u(e_j) = \alpha_j x_j^* = x_j$ où $(\alpha_j) \in \ell_p$ et $(x_j^*) \in \ell_{p^*}^w(X)$. alors, $\ell_1^w(X) = \ell_p \ell_{p^*}^w(X)$. ∎

Proposition 2.2.5 *Soit X un espace de Banach, telle que $\mathcal{L}(c_0, X^*) = \Pi_{s*}(c_0, X^*)$ pour tout $1 < s < \infty$. Alors $\ell_{\pi_{r,s}}(X) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X)$ pour tout $1 \leq p, q, r, s, t < \infty$ avec $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$.*

Théorème 2.2.6 *Soit X un espace de Banach,telle que $\mathcal{L}(c_0, X^*) = \Pi_{s*}(c_0, X^*)$ pour tout $1 < s < \infty$. Alors $\ell_{\pi_{r,s}}(X) = \ell_{\pi_{p,q}}(X)$ pour tout$1 \leq p, q, r, s, t < \infty$ avec $1 \leq p \leq r$ et $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$.*

Démonstration. D'après le théorème (2.2.2) on a

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X). \tag{2.7}$$

D'après la proposition (2.2.5) on a

$$\ell_{\pi_{r,s}}(X) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X). \tag{2.8}$$

Alors, d'après (2.7) et (2.8) on a

$$\ell_{\pi_{r,s}}(X) = \ell_{\pi_{p,q}}(X).$$

■

Proposition 2.2.7 *[2]Soient X un espace de Banach, $1 \leq q \leq p < \infty$ et $r \geq p^*$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) Id_{X^*} est (p,q)-sommante et $\pi_{p,q}(Id_{X^*}) = \sup\{\pi_{s,q}[x_j] : \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\}$.

(2) $\ell_r(X) \subseteq \ell_{\pi_{s,q}}(X)$pour tout $1 \leq s \leq r$ où $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.

Démonstration. (1)$\Longrightarrow$(2)

Supposons que Id_{X^*} est (p,q)- sommante. Donc pour tout $x_1^*, ..., x_n^*$ dans X^* on a

$$(\sum_{j=1}^{n} \|Id_{X^*}x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(Id_{X^*}) \sup_{\zeta \in B_X} (\sum_{j=1}^{n} |\langle \zeta_j, x_j^* \rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où

$$(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(Id_{X^*}) \|(x_j^*)\|_{\ell_q^w(X^*)}. \tag{2.9}$$

Soit $(x_j) \in B_{\ell_r(X)}$ si $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$ on a

$$(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup\{(\sum_{j=1}^{n} |x_j^*(x_j)|^s)^{\frac{1}{s}} : \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\}.$$

Ceci implique que

$$(\sum_{j=1}^{n} |x_j^*(x_j)|^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.10}$$

et par conséquent d'après (2.9) et (2.10) on a

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x_j)\right|^s)^{\frac{1}{s}} &\leq (\sum_{j=1}^{n}\|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}},\\ &\leq \pi_{p,q}(Id_{X^*})\|(x_j^*)\|_{\ell_q^w(X^*)}.\end{aligned}$$

D'où

$$(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x_j)\right|^s)^{\frac{1}{s}} \leq \pi_{p,q}(Id_{X^*})\sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.11}$$

Ce qui implique $(x_j)\in\ell_{\pi_{s,q}}(X)$ donc $\ell_r(X)\subset\ell_{\pi_{s,q}}(X)$ tq $1\leq s\leq r$ et $\frac{1}{s}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$.

Aussi

$$\pi_{s,q}[x_j]=inf\{\pi_{p,q}(Id_{X^*}),\text{vérifiant (2.11)}\},$$

et

$$\pi_{p,q}(Id_{X^*})=\sup\{\pi_{s,q}[x_j],\|(x_j)\|_{\ell_r(X)}=1\}.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1)

Soit $\ell_r(X)\subseteq\ell_{\pi_{s,q}}(X)$ avec $1\leq s\leq r$ et $\frac{1}{s}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$. Soit $(x_j)\in\ell_{\pi_{s,q}}(X)$. On a

$$(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x_j)\right|^s)^{\frac{1}{s}} \leq \pi_{s,q}[x_j]\sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}},$$

et

$$\sup\{(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x_j)\right|^s)^{\frac{1}{s}}:\|(x_j)\|_{\ell_r(X)}=1\}$$

$$\leq \sup\{\pi_{s,q}[x_j],\|(x_j)\|_{\ell_r(X)}=1\}\sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Aussi

$$(\sum_{j=1}^{n}\|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup\{\pi_{s,q}[x_j],\|(x_j)\|_{\ell_r(X)}=1\}\sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où

$$(\sum_{j=1}^{n}\|Id_{X^*}x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup\{\pi_{s,q}[x_j],\|(x_j)\|_{\ell_r(X)}=1\}\sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui implique que Id_{X^*} est un opérateur (p,q)- sommant et

$$\pi_{p,q}(Id_{X^*}) = sup\{\pi_{s,q}[x_j], \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\}.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Proposition 2.2.8 *(Fonction de Rademacher)*

On définit les fonctions de Rademacher $r_n : [0;1] \longrightarrow R$, $n \in \mathbb{N}$,

par

$$r_n(t) = sign(sin(2^n \pi t)).$$

La caractéristique la plus importante de ces fonctions est qu'elles ont des propriétés d'orthogonalités.

On peut ajouter d'où elles viennent :

Si $n < m$, r_n *est constant sur chacun des "Périodes" de* r_n, *et* $\int r_n.r_m = 0$.

Si $n_1 < n_2 < ... < n_k$ *et* $p_1, p_2,...\ p_k$ *sont positifs ou nuls, alors*

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t)...r_{n_k}^{p_k}(t)dt = \begin{cases} 1 \text{ si tous les } p_j \text{ sont pairs} \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{si non} \end{cases}$$

Une conséquence immédiate est que les r_n *forment une suite orthonormale dans* $L_2[0;1]$ *et on a :*

$$\int_0^1 \left| \sum_n \alpha_n r_n(t) \right|^2 dt = \sum_n |\alpha_n|^2 \quad \forall (\alpha_n) \in \ell_2.$$

Théorème 2.2.9 *Soit* X *un espace de Banach, si* $q < p$ *et* $\frac{1}{s^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ *on a,* $\ell_s^w(X) \subseteq \ell_{\pi_{p,q}}(X)$.

Démonstration. Si $q < p$ on aura $\frac{1}{s^*} > 0$ donc

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} \Longrightarrow \frac{1}{p^*} - \frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{s^*},$$

et

$$\frac{1}{p^*} - \frac{1}{q^*} = \frac{1}{s^*} \Longrightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{1}{s^*} + \frac{1}{q^*}, \frac{1}{p^*} > \frac{1}{q^*}.$$

Soit $(x_j) \subset X$, $(x_j^*) \subset X^*$ on a

$$(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\|\alpha_j\|_{p^*}=1} (\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j x_j^* x_j\right|).$$

Aussi si $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{s^*} + \frac{1}{q^*}$ on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} (\sum_{j=1}^{n} \left|\beta_j \lambda_j x_j^* x_j\right|), \\
&= \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} (\sum_{j=1}^{n} \left|\left\langle \lambda_j x_j^*, \beta_j x_j \right\rangle\right|), \\
&= \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} (\left|\int_0^1 \left\langle \sum_j r_j(t) \lambda_j x_j^*, \sum_k r_k(t) \beta_j x_j \right\rangle\right|).
\end{aligned}$$

D'après [DJT95, Proposition 11.10] on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^*(x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} (\int_0^1 \left\|\sum r_j(t) \lambda_j x_j^*\right\|^2 dt)(\int_0^1 \left\|\sum r_k(t) \beta_k x_k\right\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} \sup_{t \in [0,1]} \left\|\sum_k r_k(t) \beta_k x_k\right\|_X \left\|\sum_j r_j(t) \lambda_j x_j^*\right\|_{X^*}, \\
&\leq \|x_j\|_{\ell_s^w(X)} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} \sup_{t \in [0,1]} (\left\|\sum_k r_k(t) \lambda_k x_k^*\right\|). \\
&\leq \|x_j\|_{\ell_s^w(X)} \|x_j^*\|_{\ell_q^w(X^*)}, \\
&\leq \|x_j\|_{\ell_s^w(X)} \sup_{x \in B_X} (\sum \left|x_j^*(x)\right|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$ et $\pi_{p,q}[x_j] \leq \|x_j\|_{\ell_s^w(X)}$, et par conséquent $\ell_s^w(X) \subseteq \ell_{\pi_{p,q}}(X)$. ■

Corollary 2.2.10 *Soit X un espace de Banach, alors $\ell_p^w(X) \subset \ell_{\pi_{p,1}}(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. D'après le Théorème (2.2.9) on a

(1) Si $s = p$ et $q = 1$ on a

$$\ell_p^w(X) \subset \ell_{\pi_{p,1}}(X) \text{ tel que } p > 1 \text{ et } \pi_{p,1}[x_j] \leq \|x_j\|_{\ell_p^w(X)}.$$

(2) Si $p = 1$ on a

$$\ell_1^w(X) \subset \ell_{\pi_1}(X)$$

Ceci termine la démonstration. ■

Chapitre 3

Les espace des suites d'opérateurs linéaires (p, q)-sommants

3.1 L'espace $\ell_{\pi_{p,q}}(X, Y)$

Cette section s'article sur [3].

Définition 3.1.1 *Soient X, Y deux espaces de Banach, $E(X)$, $F(Y)$ deux espaces de suites de Banach et $(u_j)_{1\leq j\leq n}$ une suite dans $\mathcal{L}(X, Y)$. On dit que $(u_j)_{1\leq j\leq n}$ est une suite d'opérateurs multiplicateurs entre $E(X)$ et $F(Y)$si*

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x_1, ..., x_n \in X \\ \quad \left\| (u_j(x_j))_{j=1}^n \right\|_{F(Y)} \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{E(X)}. \end{cases}$$

On note
$(E(X), F(Y)) = \{(u_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathcal{L}(X, Y),$ *suites d'opérateurs multiplicateurs*$\}$.

Définition 3.1.2 *Soient $1 \leq q \leq p \leq \infty$, et X, Y deux espaces de Banach, $(u_j)_j$ suite dans $\mathcal{L}(X, Y)$. On dit que (u_j) est une suite d'opérateurs (p, q)-sommants (ou bien suite* *d'opérateurs multiplicateurs (p,q)-sommants) si*

$$\begin{cases} \exists C > 0, \ \textit{telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, ..., x_n \in X \\ (\sum_{j=1}^{n} \|u_j(x_j)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |x^*(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

On note

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) = \{(u_j) \in \mathcal{L}(X,Y), \ \textit{suites d'opérateurs } (p,q)\textit{-sommants}\},$$

et

$$\pi_{p,q}[u_j] = \pi_{p,q}[u_j; X, Y] = inf\{C, \textit{vérifiant la définition 3.1.2}\}.$$

Notation 3.1.3 *Si $p = q$ on note, $\ell_{\pi_{p,p}}(X,Y) = \ell_{\pi_p}(X,Y)$ et $\pi_{p,p}[u_j; X, Y] = \pi_p[u_j; X, Y]$.*

Remarque 3.1.4 *Si $p = \infty$ ou $q = \infty$ on a*

$$\ell_{\pi_{\infty,q}}(X,Y) = \ell_\infty(\mathcal{L}(X,Y)) \ \textit{et } \ell_{p,\infty}(X,Y) = \ell_p(\mathcal{L}(X,Y)).$$

En effet, si $p = \infty$ et $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X,Y)$ on a

$$\begin{aligned} \sup_j \|u_j x_j\| &\leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |x^*(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \infty, \end{aligned}$$

donc $(u_j) \in \ell_\infty(\mathcal{L}(X,Y))$.

Si $q = \infty$ et $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X,Y)$ on a

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^{n} \|u_j(x_j)\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq C \sup_j (\sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |x^*(x_j)|), \\ &\leq \infty, \end{aligned}$$

d'où $(u_j) \in \ell_p(\mathcal{L}(X,Y))$.

Proposition 3.1.5 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $1 \leq q < p < \infty$. Alors*

(1) Si $p < q$ on a $\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) = \{0\}$.

(2) $(\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y), \pi_{p,q})$ est un espace de Banach.

Remarque 3.1.6 *L'inégalité*

$$\| (u_j(x_j))_{j=1}^n \|_{\ell_p(Y)} \leq C \|(x_j)_{j=1}^n\|_{\ell_q^w(X)}$$

implique que

$$(\ell_q^w(X), \ell_p(Y)) = \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y).$$

Proposition 3.1.7 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $1 \leq q < p < \infty$. Alors $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y)$ si et seulement si $(\lambda_j u_j) \in \ell_{\pi_{1,q}}(X, Y)$ pour tout $(\lambda_j) \in \ell_{p*}$ et*

$$\pi_{p,q}[u_j; X, Y] = \sup\{\pi_{1,q}[\lambda_j u_j; X, Y].\|\lambda_j\|_{\ell_{p*}} = 1\}.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$) Soit $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^n \|u_j(x_j)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\|(\lambda_j)\|_{\ell_{p*}}=1} \sum_{j=1}^n \|\lambda_j u_j(x_j)\| \\ &\leq \pi_{p,q}[u_j] \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^n |x^*(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{j=1}^n \|\lambda_j u_j(x_j)\| \leq \sup_{\|(\lambda_j)\|_{\ell_{p*}}=1} (\pi_{p,q}[\lambda_j u_j]) \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^n |x^*(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où,

$$(\lambda_j u_j) \in \ell_{\pi_{1,q}}(X, Y) \text{ et } \pi_{1,q}[u_j; X, Y] \leq \sup\{\pi_{p,q}[\lambda_j u_j; X, Y], \|(\lambda_j)\|_{\ell_{p*}} = 1\}.$$

(2) $\Longleftarrow$) Soit $(\lambda_j u_j) \in \ell_{\pi_{1,q}}(X, Y)$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \|\lambda_j u_j(x_j)\| &\leq \pi_{1,q}[\lambda_j u_j] \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^n |x^*(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}}, \\ \sup\{(\sum_{j=1}^n \|\lambda_j u_j(x_j)\|); \|\lambda_j\|_{\ell_{p*}} &= 1\} \leq \sup_{\|\lambda_j\|_{\ell_{p*}}=1} (\pi_{1,q}[\lambda_j u_j]) \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^n |x^*(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}}, \\ (\sum_{j=1}^n \|u_j(x_j)\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{\|\lambda_j\|_{\ell_{p*}}=1} (\pi_{1,q}[\lambda_j u_j]) \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^n |x^*(x_j)|^q)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

ce qui implique $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}[u_j; X, Y] \leq \sup\{\pi_{1,q}[\lambda_j u_j; X, Y], \|\lambda_j\|_{\ell_{p*}} = 1\}$. ■

3.2 Propriétés

Théorème 3.2.1 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $1 < p$. Alors,*

$$\ell_p^s(\mathcal{L}(X,Y)) \subset \ell_{\pi_{p,1}}(X,Y).$$

Démonstration. On suppose que $u_1, ..., u_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $x_1, ..., x_n \in \ell_1^w(X)$. Alors,

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \|u_j(x_j)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= sup\{\left|\sum_{j=1}^{n} \langle u_j(x_j), y_j^* \rangle\right| : \sum \|y_j^*\|^{p^*} = 1\}, \\
&= sup\{\left|\sum_{j=1}^{n} \langle x_j, u_j^* y_j^* \rangle\right| : \sum \|y_j^*\|^{p^*} = 1\}, \\
&= sup\{\int_0^1 \left|\left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j r_j(t), \sum_{j=1}^{n} u_j^* y_j^* r_j(t) \right\rangle\right| dt : \sum \|y_j^*\|^{p^*} = 1\}, \\
&\leq \|x_j\|_{\ell_1^w(X)} sup\{\int_0^1 \|\sum_{j=1}^{n} u_j^* y_j^* r_j(t)\| dt : \sum \|y_j^*\|^{p^*} = 1\}, \\
&\leq \|x_j\|_{\ell_1^w(X)} sup\{\left|\left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j y_j^* r_j(t), x \right\rangle\right| : \sum_{j=1}^{n} \|y_j^*\|^{p^*} = 1, \|x\| = 1, t \in [0,1]\}
\end{aligned}$$

Donc

$$(\sum_{j=1}^{n} \|u_j(x_j)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_j\|_{\ell_1^w(X)} sup\{\left|\left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j(x) r_j(t), y_j^* \right\rangle\right| : \sum_{j=1}^{n} \|y_j^*\|^{p^*} = 1, \|x\| = 1, t \in [0,1]\}.$$

Soit $u_j \in \ell_p^s(\mathcal{L}(X,Y))$. Ceci implique

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \|u_j(x_j)\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \|x_j\|_{\ell_1^w(X)} \sup_{\|x\|=1} (\sum_{j=1}^{n} \|u_j(x)\|^p)^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} (\sum_{j=1}^{n} \|u_j(x)\|^p)^{\frac{1}{p}} \|x_j\|_{\ell_1^w(X)}, \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} (\sum_{j=1}^{n} \|u_j(x)\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |x^*(x_j)|).
\end{aligned}$$

Donc $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,1}}(X,Y)$. ∎

Proposition 3.2.2 (Inclusion) *Soient X, Y deux espaces de Banach, et $1 \leq q \leq p_1 \leq p_2 < \infty, 1 \leq q_1 \leq q_2 < p < \infty$ et $1 \leq p \leq q < \infty$. Alors,*

(1) $\ell_{\pi_{p_1,q}}(X, Y) \subseteq \ell_{\pi_{p_2,q}}(X, Y)$.

(2) $\ell_{\pi_{p,q_2}}(X, Y) \subseteq \ell_{\pi_{p,q_1}}(X, Y)$.

(3) $\ell_{\pi_p}(X, Y) \subseteq \ell_{\pi_q}(X, Y)$.

(4) $\ell_{\pi_{1,q}}(X, Y) \subseteq \ell_{\pi_1}(X, Y) \subseteq \ell_{\pi_p}(X, Y) \subseteq \ell_{\pi_{p,1}}(X, Y)$.

La preuve est évidente d'après la Proposition (2.2.1).

Théorème 3.2.3 *Soient X, Y deux espaces de Banach, $1 \leq p \leq r$ et $1 \leq q, s$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{s}$. Alors*

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X, Y) \subseteq \ell_{\pi_{r,s}}(X, Y).$$

Pour la démonstration, on utilise le Théorème (2.2.2).

Proposition 3.2.4 *Soit X un espace de Banach tel que $\mathcal{L}(c_0, X) = \Pi_{S^*}(c_0, X)$. Alors*

$$\ell_{\pi_{r,s}}(X, Y) \subseteq \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y), \text{ où } 1 \leq p, q, r, s < \infty \text{ et } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}.$$

Pour tout espace de Banach Y.

La preuve est évidente d'après la Proposition (2.2.5).

On peut donner le Théorème suivant d'après le Théorème (3.2.3) et la Proposition (3.2.4).

Théorème 3.2.5 *Soit X un espace de Banach telle que $\mathcal{L}(c_0, X) = \Pi_{S^*}(c_0, X)$. Alors*

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X, Y) = \ell_{\pi_{r,s}}(X, Y), \text{ où } 1 \leq p, q, r, s < \infty \text{ et } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Bibliographie

[1] M. Aoufi, Opérateurs (p,q)-sommants, Mémoire de master, Université de M'sila, 2014.

[2] J. L. Arregui et O. Blasco, (p,q) - summing sequences of operators. Quaestiones Mathematicae, 26 (4) (2003), 441-452.

[3] J. L. Arregui, O.Blasco, (p,q)-summing sequences, J. Math. Anal. Appl. 274 (2002), 812-827.

[4] J.Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, Cambridge 1955...