

## REMERCIEMENTS

Avant tout je remercie Allah le tout puissant d'avoir éclairé ma vie, raffermi mon courage et ma volonté pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier particulièrement ma directrice de thèse et encadreur Amina KHIRANI, pour toute l'aide et les conseils qu'elle a bien voulu m'apporter avec patience et pour m'avoir dirigé dans ce travail avec persévérance et beaucoup d'attention.

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département mathématiques pour leur générosité, ainsi qu'à ma famille, mes proches, mes collègues et en particulier à Yahia ZOUAREG pour leurs respectifs encouragements.

Enfin, je me permets d'exprimer ici ma sincère et entière reconnaissance à MM. NADIR Mostefa et GAGUI Bachir, lesquels ont bien voulu examiner et apprécier ce mémoire.

# Table des matières

<b>NOTATIONS</b>	<b>I</b>
<b>Introduction</b>	<b>I</b>
<b>1 Définitions et classifications des Equations intégrales</b>	<b>2</b>
1.1 Notions fonctionnelle . . . . .	2
1.1.1 Espace $L_2([a, b])$ . . . . .	2
1.1.2 Espace $C^k([a, b])$ . . . . .	2
1.1.3 Espace complets . . . . .	3
1.2 Notions sur les opérateurs . . . . .	4
1.2.1 Opérateurs intégrales linéaires . . . . .	4
1.2.2 Opérateurs compacts . . . . .	5
1.2.3 Opérateurs adjoints . . . . .	6
1.3 Classification des équations intégrales . . . . .	6
1.3.1 Equations intégrales de Volterra . . . . .	6
1.3.2 Equations intégrales de Fredholm . . . . .	8
1.3.3 Equations intégrales de singulier . . . . .	9
1.3.4 Equations intégrales de Hammerstein . . . . .	10
1.3.5 Equations intégrales de Hammerstein-Volterra . . . . .	10
1.3.6 Equations intégrales de Lalesco . . . . .	11

<b>2</b>	<b>Existence et unicité des solutions des équations intégrales</b>	<b>12</b>
2.1	Existence de la solution pour des EILF . . . . .	12
2.1.1	Théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm . . . . .	12
2.2	Existence de la solution pour des EINLF[[ <i>Abdul – Majid_Wazwaz</i> ] <i>_Linear_and_Nonlinear_I</i>	
2.2.1	Théorème du point fixe de Banach . . . . .	14
2.2.2	Existence de la solution pour des EINLF . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Analyse numérique des équations intégrales</b>	<b>18</b>
3.1	Méthode des approximations successives . . . . .	18
3.2	Intégration numérique . . . . .	20
3.3	Equations intégrales de Fredholm linéaire . . . . .	21
3.3.1	Méthode de Trapèze . . . . .	21
3.3.2	Méthode de Simpson . . . . .	24
3.3.3	Méthode de Simpson Modifiée . . . . .	27
3.3.4	Méthode adaptative 1 . . . . .	31
3.3.5	Méthode adaptative 2 . . . . .	34
3.4	Equations intégrales de Fredholm non linéaire . . . . .	37
3.4.1	Méthode des approximations successives . . . . .	37
3.4.2	Méthode de Trapèze . . . . .	38
3.4.3	Méthode adaptative 1 . . . . .	41
3.4.4	Méthode adaptative 2 . . . . .	44
3.4.5	Méthode de simpson . . . . .	45
3.4.6	Méthode de simpson Modifiée . . . . .	48
3.5	Implémentations numériques et comparaisons . . . . .	51
3.5.1	Les équations intégrales de Fredholm linéaire . . . . .	51
3.5.2	Les équations intégrales de Fredholm non linéaire . . . . .	54
	<b>Conclusion générale</b>	<b>58</b>



## NOTATIONS

$C([a; b])$	L'espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a, b]$
$[a; b]$	Intervalle réel
$\varphi$	Fonction inconnue
$\varphi^*$	Solution approximée
$A$	Opérateur linéaire
$H$	Espace de Hilbert
$X$	Espace normé
$I$	Opérateur d'identité
$K(x, t)$	Noyau de l'intégrale linéaire
$K(x, t, \varphi(t))$	Noyau de l'intégrale Non linéaire
$T$	Opérateur linéaire compact
$T$	Opérateur Linéaire ou $T = I - A$ :
EILV	Equations Intégrales Linéaire de Volterra
EINLV	Equations Intégrales Non Linéaire de Volterra
EILF	Equations Intégrales Linéaire de Fredholm
EINLF	Equations Intégrales Non Linéaire de Fredholm

.

# Introduction générale

Les méthodes numériques de résolution des équations intégrales jouent un rôle très important dans plusieurs investigations scientifiques. Avec l'avantage des machines de computation numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour attaquer les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé.

Ainsi, en ce qui concerne notre sujet, il existe un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique, de ce fait, il est impossible alors de recouvrir le tout, ce qui implique que notre présentation ne se veut ni exhaustive, ni trop théorique, cependant le but est d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées que l'on peut regrouper :

- La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de solution et surtout d'exhiber des méthodes efficaces d'approximation.
- L'analyse numérique, qui étudie ces méthodes, principalement dans le cadre des mathématiques discrètes (approximation des quantités qui se présentent sous le signe intégrale via des règles de quadratures, interpolation polynomial, . . . ) et la résolution itérative des systèmes linéaires.
- La programmation sur machine, qui retranscrit ses méthodes sous forme d'algorithmes efficaces.

Nous avons commencé dans le premier chapitre par une classification entre les équations

tions intégrales linéaires et non-linéaires, comme nous avons donné quelques concepts aux opérateurs.

Le deuxième chapitre, quant à lui, démontre l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm de deuxième espèce.

Dans notre dernier chapitre nous allons procéder à une résolution numérique de ces équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm par différentes méthodes puis faire une comparaison avec la solution exacte.

## Chapitre 1

# Définitions et classifications des Equations intégrales

## Introduction

Ce chapitre présente les définitions de base de l'analyse fonctionnelle, L'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé. Nous donnons donc quelques concepts aux opérateurs, et classification des équations intégrales.

### 1.1 Notions fonctionnelle

#### 1.1.1 Espace $L_2([a, b])$

**Définition 1.1.1** On dit qu'une fonction  $f$  est carrée intégrable sur  $[a, b]$  si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty$$

On désigne par  $L_2([a, b])$  l'ensemble de toutes les fonctions carrée intégrable sur  $[a, b]$

#### 1.1.2 Espace $C^k([a, b])$

**Définition 1.1.2** Les élément de cet espace sont tous les fonctions définies est possédant sur cet intervalle  $[a, b]$  des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $k$ , la norme d'un élément



$f \in C^k([a, b])$  est défini par la formule

$$\|f\| = \sum_{i=0}^k \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(i)}(x)|$$

### 1.1.3 Espace complets

**Définition 1.1.3** Une suite  $(x_n)$  de  $X$  est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \text{ on a } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Il est aisé de voir que toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas forcément vérifié. Puisqu'il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas, à savoir :

**Exemple 1.1.1** Dans  $X = ]-1, 1[$ , la suite  $\{1 - \frac{1}{n}\}$  est de Cauchy puisque la même suite converge vers 1 dans  $\mathbb{R}$  mais  $1 \notin X$

**Lemme 1.1.1** Soit  $x_n$  une suite de Cauchy dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  contient une sous suite  $x_{n_k}$  convergente vers  $x$  alors la suite  $x_n$  est aussi convergente vers le même élément  $x$ .

**Preuve.** Soit  $x_n$  une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \text{ on a } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

et comme  $x_n$  une suite de Cauchy dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \text{ on a } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

en particulier pour  $n_k > n_0$ , on a

$$\forall n_k, m \geq n_0 \quad \|x_m - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite  $x_{n_k}$  vers  $x$

$$\forall n_k > n_0 \quad \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon'$$

D'où la convergence de la suite  $x_n$  vers l'élément  $x$

$$\begin{aligned} \forall n_k, m \geq n_0 \quad \|x_m - x\| &= \|x_m - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_m - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit complet, si toute suite de Cauchy  $x_n$  d'éléments de  $E$  est une suite convergente dans  $E$ .

**Lemme 1.1.2** [1] *Tout espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  de dimension finie est complet.*

**Preuve.** Soit  $x_n$  une suite de Cauchy dans un espace de dimension finie cette dernière est bornée d'ou, on peut extraire une sous suite  $x_{n_k}$  convergente vers  $x$  ce qui implique à son tour que la suite  $x_n$  est aussi convergente vers  $x$ . D'ou l'espace  $E$  est complet  $\blacksquare$

## 1.2 Notions sur les opérateurs

### 1.2.1 Opérateurs intégrales linéaires

**Définition 1.2.1** Soit  $K : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire  $A$  sur  $C[a, b]$  est défini par :

$$\begin{aligned} A : \varphi \in C[a, b] &\rightarrow A\varphi \in C[a, b] \\ (A\varphi)(x) &= \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

où la fonction  $K(x, t)$  s'appelle noyau de l'opérateur intégrale  $A$ .

**Définition 1.2.2** Soit  $G$  un sous-ensemble de espace normé  $E$  est dit compactes si de tout recouvrement ouvert de  $G$  on peut extraire un sous recouvrement finie C'est à dire :

$$\begin{aligned} \forall H &= \{u_j, j \in J; u_j \text{ ouvert}\} \text{ telles que } G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i \\ \exists H_k &= \{u_{j_k}, j_k = 1, 2, \dots, n\} \text{ telles que } G \subset \bigcup_{i=1}^n u_{i_k} \end{aligned}$$

### 1.2.2 Opérateurs compacts

**Définition 1.2.3** Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $F$ . Autrement dit, la fermeture  $\overline{A(G)}$  est compact.

**Définition 1.2.4** On dit qu'un Opérateur  $A \in L(E, E)$  est compact si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée de  $E$ ,  $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contient une sous suite  $(Ax_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge de  $F$

**Théorème 1.2.1** Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

**Théorème 1.2.2** Une combinaison linéaire  $A = A_1 + A_2$  des opérateurs compacts est un opérateur compact

**Théorème 1.2.3 (opérateur complètement continu)** L'opérateur  $A$  est dit complètement continu, s'il est continu et compact.

**Théorème 1.2.4** le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $A$  et  $B$  est compact si l'un des opérateurs  $A$  ou  $B$  est compact.

La condition nécessaire et suffisante pour que la famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact  $[a, b]$  soit compacte dans  $C([a, b])$ , est que cette famille soit uniformément compacte.

**Théorème 1.2.5** L'opérateur intégral  $A$  de  $G(G)$  dans  $G(G)$  à noyau continu est un opérateur compact.

**Preuve.** [1] ■

### 1.2.3 Opérateurs adjoints

**Définition 1.2.5** Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert  $H_1$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $H_2$ , l'opérateur linéaire noté  $A^*$  défini de  $H_2$  dans  $H_1$  est dit opérateur adjoint de  $A$  si l'on a pour tout  $\varphi \in H_1$  et  $\psi \in H_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}$$

## 1.3 Classification des équations intégrales

### 1.3.1 Equations intégrales de Volterra

**Définition 1.3.1** On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire (EINV) de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt + f(x) \quad (1.1)$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel

1. Une équation de la forme

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x) \quad (1.2)$$

où  $\varphi(t)$  est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce .

2. On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra (EIV) de seconde espèce une équation de la form

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt + f(x) \quad (1.3)$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel.

3. si  $f(x) = 0$  l'équation s'écrit.

$$\lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = \varphi(x)$$

elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

4. Une équation à une inconnue  $\varphi(x)$ , de la forme

$$-\lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

Equations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_0^x (x^2 t^2 - xt) \varphi(t) dt &= x^2 + 1 \\ -\lambda \int_0^x (x^2 t^2 - xt) \varphi(t) dt &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Equations intégrales linéaires homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^x (x^2 t^2 - xt) \varphi(t) dt &= \varphi(x) \\ \lambda \int_0^x (x^2 t^2 - xt) \varphi(t) dt &= 0 \end{aligned}$$

**Remarque 1.3.1** L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau  $K(x, t) = 0$  pour  $t > x$ .

### 1.3.2 Equations intégrales de Fredholm

On appelle une équation intégrale de Fredholm non linéaire (EINF) de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt + f(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.4)$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel.

Si  $f(x) = 0$  l'équation s'écrit

$$\lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = \varphi(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.5)$$

elle dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce homogène, si dans le cas contraire

Si  $f(x) \neq 0$  elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce non homogène.

1. On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm (EIF) de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt + f(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.6)$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel.

Si  $f(x) = 0$  l'équation s'écrit

$$\lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = \varphi(x), \quad x \in [a, b]$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène si dans le cas contraire  $f(x) \neq 0$  elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde non homogène.

2. Une équation de la forme

$$-\lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b]$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

Equations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de la seconde espèce et la première espèce

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= x^2 - 1, \quad x \in [-1, 1] \\ -\lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= x^2 + 1, \quad x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

### 1.3.3 Equations intégrales de singulier

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

**Définition 1.3.2** *Considérons l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_T M(x, t) K(x, t) \varphi(t) dt.$$

*On dit que (3.20) est singulière si  $M(x, t)$  admet une singularité ou le domaine  $T$  n'est pas bornée.*

### Singularité de type Volterra et Fredholm

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x M(x, t) K(x, t) \varphi(t) dt, \quad a \leq x < \infty. \quad (1.7)$$

où  $K(x, t)$  est faiblement singulier, en générale  $K(x, t)$  donnons par

$$K(x, t) = \begin{cases} |x - t|^{-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ \log |x - t| \end{cases}$$

Alors

- i) L'équation (1.7) est de Volterra.
- ii) Si  $x = b$ , l'équation (1.7) est de Fredholm.
- iii) Le cas où  $K(x, t) = |x - t|^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  s'appelle singularité algébriques.
- iv) Le cas où  $K(x, t) = \log |x - t|$ , s'appelle singularité logarithmiques.

#### 1.3.4 Equations intégrales de Hammerstein

On appelle une équation intégrale non-linéaire de Hammerstein une équation de la forme :

$$h(x) \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) F(t, \varphi(t)) dt = f(x) \quad (1.8)$$

#### 1.3.5 Equations intégrales de Hammerstein-Volterra

on appelle une équation intégrale non-linéaire de Hammerstein-Volterra une équation de la forme :

$$h(x) \varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) F(t, \varphi(t)) dt = f(x) \quad (1.9)$$



### 1.3.6 Equations intégrales de Lalesco

on appelle une équation intégrale non-linéaire de Lalesco une équation de la forme :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x [K_1(x, t) \varphi(t) + K_2(x, t) \varphi^2(t) + \dots K_n(x, t) \varphi^n(t)] dt + f(x) \quad (1.10)$$

## Chapitre 2

# Existence et unicité des solutions des équations intégrales

## Introduction

Le deuxième chapitre, présente une étude l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire et non- linéaire de Fredholm.

### 2.1 Existence de la solution pour des EILF

#### 2.1.1 Théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm

Soit un opérateur compact  $A : E \rightarrow E$  tel que  $E$  est un espace normé.

Alors l'opérateur  $L = I - A$ , (l'opérateur étudié dans le cadre des équation intégral) a les propriétés suivantes :

- $Ker(L)$  est de dimension finie.

$$Ker(L) = \{\varphi \in E : L\varphi = 0\}$$

- $Im(L)$  est fermé, et de co-dimension fini.

$$Im(L) = \{L\varphi : \varphi \in E\}$$

-Il existe un unique  $r \in \mathbb{R}$  appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$ ,

$$\{0\} \subset Ker(L^0) \subset Ker(L^1) \subset Ker(L^2) \subset \dots \subset Ker(L^r) = Ker(L^{r+1}) = Ker(L^{r+2}) = \dots$$

et

$$\dots = Im(L^{r+2}) = Im(L^{r+1}) = Im(L^r) \subset \dots \subset Im(L^1) \subset Im(L^0) \subset E$$

D'autre part, on a la somme directe

$$E = Ker(L^r) \oplus Im(L^r)$$

**Théorème 2.1.1** *De même conditions dans les théorèmes précédents, alors*

1. **Théorème 2.1.2** (a)  *$I - A$  est injectif si et seulement s'il est surjectif.*

(b) *Si  $I - A$  est injectif, alors l'opérateur inverse  $(I - A)^{-1} : E \rightarrow E$  est borné.*

**Preuve.** [1] ■

**Théorème 2.1.3 (Alternative de Fredholm)** [5]

.On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autres, issues d'un noyau  $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , qui sont donc définies par :

$$\text{trouver } \varphi \in [a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{trouver } \psi \in [a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

On considère pour  $f \in C[a, b]$  et  $g \in C[a, b]$  les équations intégrales avec seconds membres

$$\text{trouver } \varphi \in [a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.3)$$

$$\text{trouver } \psi \in [a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt = g(x) \quad (2.4)$$

**Théorème 2.1.4** *Alors on a l'alternative :*

- Ou bien les équations (2.1) et (2.2) n'ont que les solutions triviales  $\varphi \equiv 0$  et  $\psi \equiv 0$ , et dans ces cas les équations (2.3) et (2.4) admettent une unique solution  $\varphi \in [a, b]$  et  $\psi \in [a, b]$  pour chaque  $f \in C[a, b]$  et  $g \in C[a, b]$ .

- Ou bien les équations (2.1) et (2.2) ont le même nombre fini  $m$  de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (2.3) et (2.4) sont résolubles si et seulement si pour toute solution  $\varphi$  de (2.1) et toute solution  $\psi$  de (2.2) on a

$$\int_a^b f(x) \psi(x) dx = \int_a^b g(x) \varphi(x) dx = 0$$

Dans ces conditions, la solution générale de (2.3) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i$$

où  $\tilde{\varphi}$  est une solution particulière de (2.3) et les  $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}$  forme une famille libre de solution de (2.1).

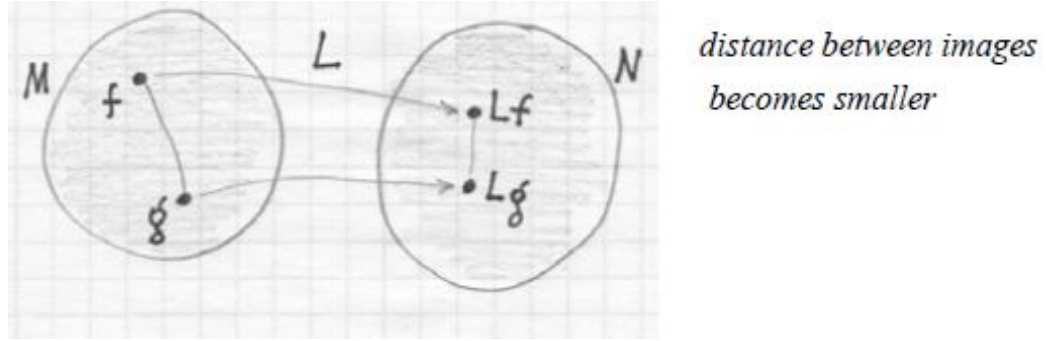
## 2.2 Existence de la solution pour des EINLF[[Abdul – Majid \_Wazwaz] \_Linear \_and \_N

### 2.2.1 Théorème du point fixe de Banach

**Définition 2.2.1** *Soit  $L$  un opérateur d'un espace de Banach  $E$  dans lui même,  $L$  est une contraction (ou application contractante), S'il existe une constante  $0 \leq k < 1$  telle*

que, pour tout  $f, g \in E$ , on'ait

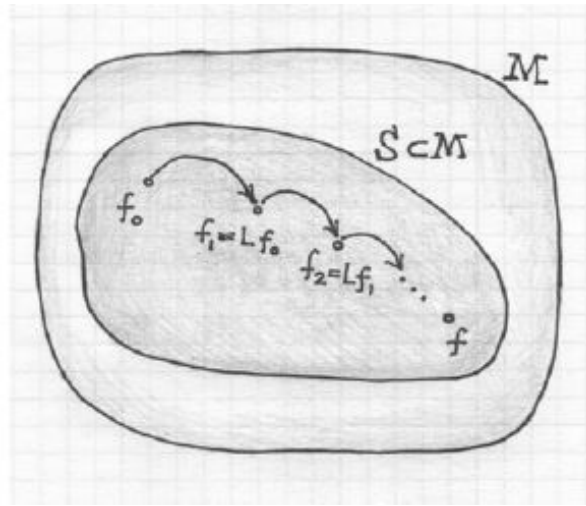
$$\|Lf - Lg\| \leq K \|f - g\|$$



soit  $S$  un sous-ensemble de l'espace de Banach  $M$   $S \subset M$  et  $S \neq \emptyset$  et soit :  
 $L : S \rightarrow S$  opérateur contractant s'il existe une constante  $0 \leq k < 1$

cette suite des approximations successives  $\{f_n | f_n = Lf_{n-1}, f_0 \in S\}$  converge vers un point fixe unique  $f \in S, f = Lf$ , soit  $f_0 \in S$  une fonction arbitraire  $f_n \rightarrow f$  and the following estimate is valid

$$\|f_n - f\| \leq \frac{1}{k} \|f_n - f_{n+1}\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|f_0 - f_1\|$$



**Preuve.**

– L'utilisation de l'induction mathématique, montrent que  $\|f_n - f_{n+1}\| \leq K^n \|f_0 - f_1\|$

Pour vérifier  $n = 0$  :  $\|f_0 - f_1\| = K^0 \|f_0 - f_1\| = \|f_0 - f_1\|$  Vrai

Supposons que pour  $n$  :  $\|f_n - f_{n+1}\| \leq K^n \|f_0 - f_1\|$

Pour afficher  $n + 1$  :  $\|f_{n+1} - f_{n+2}\| \leq K^{n+1} \|f_0 - f_1\|$

En effet,  $\|f_{n+1} - f_{n+2}\| = \|Lf_n - Lf_{n+1}\|$  définition de la s.a.

$$\begin{aligned}
&\leq K \|f_n - f_{n+1}\| \text{condition Lipschitz} \\
&\leq K K^n \|f_0 - f_1\| \text{ hypothèse} \\
&= K^{n+1} \|f_0 - f_1\| \blacksquare
\end{aligned}$$

– Montrez que  $\{f_n\}$  est un ordre Cauchy, c'est-à-dire.

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|$$

Envisager

$$f_m - f_n = f_m - Lf_m + Lf_m - Lf_n + Lf_n - f_n \quad (\text{ajoutez et soustrayez})$$

Appliquez l'inégalité Minkowski deux fois

$$\begin{aligned}
\|f_m - f_n\| &\leq \|f_m - Lf_m\| + \|Lf_m - Lf_n\| + \|Lf_n - f_n\| \\
&\leq \|f_m - Lf_m\| + K \|f_m - f_n\| + \|Lf_n - f_n\| \quad \text{condition Lipschitz} \\
&\leq \frac{\|f_m - Lf_m\| + \|Lf_n - f_n\|}{1-K} \\
&\leq \frac{\|f_m - Lf_{m+1}\| + K \|f_n - f_{n+1}\|}{1-K} \quad \text{hypothèse} \\
&\leq \frac{K^m \|f_0 - f_1\| + K^n \|f_0 - f_1\|}{1-K} \\
&= \frac{K^m + K^n}{1-K} \|f_0 - f_1\| \rightarrow 0 \text{ quand } m, n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

– Parce que l'espace vectoriel  $M$  est complet, séquence de Cauchy  $\{f_n\}$  Converge vers certains  $f \in M$ . et parce que  $f_n \in S$  et l'ensemble  $S$  est fermé (comprend tous les points limitant),  $f \in S$

Donc dans une limite, l'équation d'approximations successives

$$f_{n+1} = Lf_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} = L \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)$$

Converge vers

$$f = Lf$$

et donc,  $f \in S$  est un point fixe

### 2.2.2 Existence de la solution pour des EINLF

Les conditions spécifiques dans lesquelles il existe une solution pour l'équation intégrale de Fredholm non linéaire sont :

- La fonction  $f(x)$  est bornée,  $|f(x)| < \Re$ , in  $a \leq x \leq b$ .
- La fonction  $K(x, t, \varphi(t))$  est intégrable et borné où  $|K(x, t, \varphi(t))| < \delta$ , in  $a \leq x \leq b$ .
- La fonction  $K(x, t, \varphi(t))$  satisfait la condition Lipschitz  $|K(x, t, z) - K(x, t, z')| < M|z - z'|$ .

En utilisant la méthode d'approximations successives, il est prouvé dans [H.T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover Publications, New York, (1962).] que la série obtenue par cette méthode converge uniformément pour toutes les valeurs de  $\lambda$  pour :

$$\lambda < \frac{1}{\delta(b-a)}$$

Où  $\delta$  est le plus grand des deux nombres  $K\left(1 + \frac{\Re}{|\lambda| \delta(b-a)}\right)$  et  $M$

## Chapitre 3

# Analyse numérique des équations intégrales

## Introduction

Dans cette partie essentiellement pratique, nous exposerons en détail quelques méthodes très usuelles pour la résolution numérique des équations intégrales (non linéaire, linéaire), tout en élucidant les étapes de la discrétisation de l'équation, et pour chaque méthode, on donne un exemple d'application numérique. Ainsi, dans l'objectif d'interpréter nos résultats, il est commode de l'est schématisé, dans ce dernier, nous comparons les résultats des méthodes numériques.

### 3.1 Méthode des approximations successives

**Définition 3.1.1** *soit  $S$  un sous-ensemble de l'espace de Banach  $M$   $S \subset M$  et soit  $L : S \rightarrow S$  operator*

Des approximations successives est une séquence  $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$  Construit de la manière suivante :

$$f_0 \in S$$

$$f_1 = Lf_0$$

$$f_2 = Lf_1$$

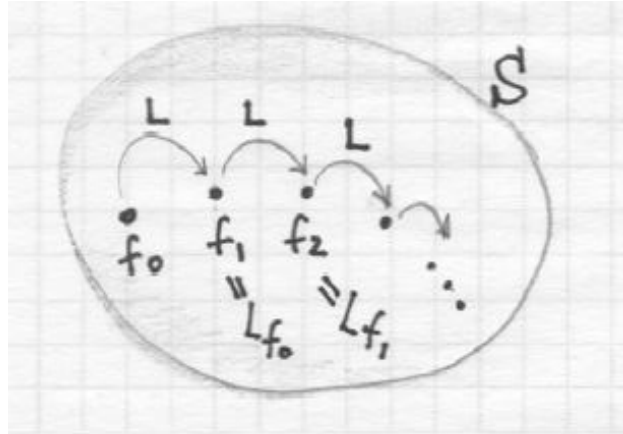
$$\vdots$$

$$\vdots$$

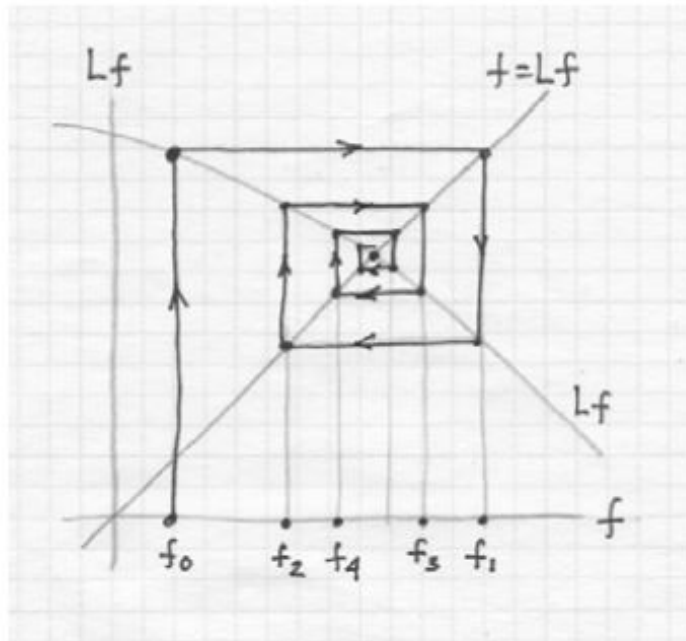
$$f_{n+1} = f_n$$



Des approximations successives peuvent être utilisées pour la solution de l'équation de l'opérateur  $f = Lf$



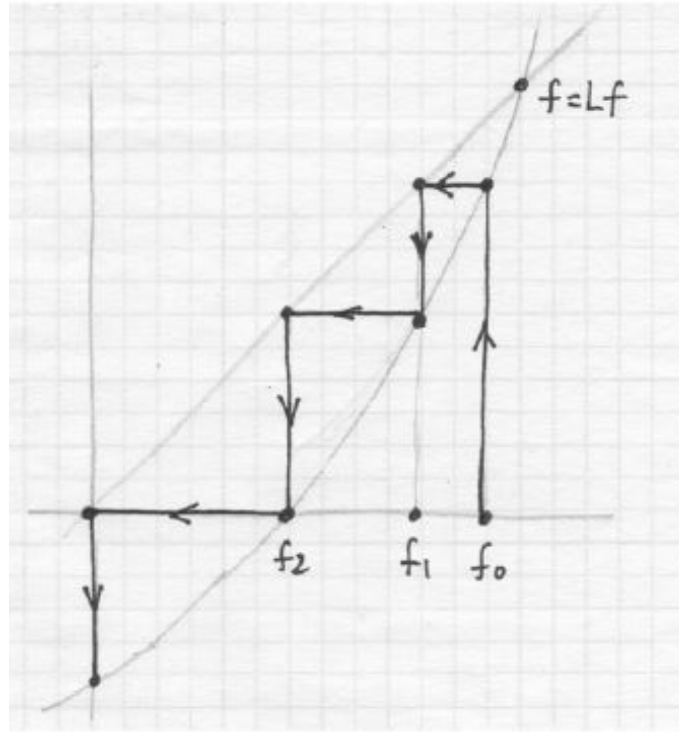
**Exemple 3.1.1** *les approximations successives convergent vers le fixe point*



**Remarque 3.1.1** *Mais ils ne convergent pas toujours vers le point fixe de l'équation de l'opérateur.*

Cet exemple montre que même le choix du point de départ proche du point fixe donne

la séquence divergente d'approximations successives (apparemment elles ne sont pas très successives)



### 3.2 Intégration numérique

soit  $f : x \in [a, b] \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$  une fonction continue donnée sur un intervalle  $[a, b]$ . Nous désirons approcher numériquement la quantité  $\int_a^b f(x)dx$ . Pour ce faire, nous commençons par partitionner l'intervalle  $[a, b]$  en petits intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  tels que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ . Soit  $h = x_{i+1} - x_i$ , le réel positif caractérisant la finesse de la partition. Il est clair que lorsque  $N$  augmente, nous pouvons placer les points  $x_i$  de sorte à ce que  $h$  soit petit.

Nous posons  $h = \frac{b-a}{N}$  et  $x_i = a + ih$  avec  $i = 0, 1, \dots, N$ . Il est naturel d'écrire

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

### 3.3 Equations intégrales de Fredholm linéaire

#### 3.3.1 Méthode de Trapèze

##### règle de trapèze

La méthode de trapèze, Simpson, ...etc sont des méthode d'intégration numérique qui consiste à approcher , sur un intervalle  $I = [a, b]$ , une fonction  $f$  par un polynôme  $P_n(x)$  de degré  $n$  prenant les mêmes valeurs que  $f$  aux points d'abscisses  $x_i$ , pour déterminer ce polynôme soit on utilise le polynôme d'interpolation de Lagrange, soit le polynôme d'interpolation de Newton.

Soit  $a < b \in \mathbb{R}$ . On divise l'intervalle  $(a, b)$  en  $n$  sous-intervalles de longueurs égale  $h = \frac{b-a}{N}$  on note  $x_i = a + (i-1)h, 1 \leq i \leq N+1$ , alors la méthode de trapèze s'écrit comme suit :

$$\int_b^a f(x)dx = h \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=2}^N f(x_i) \right]$$

L'erreur de cette méthode :

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M \quad M = \max_{[a,b]} |f^{(2)}(\zeta)|$$

#### Méthode Trapèze

Pour la solution numérique de l'équation intégrale de Fredholm linéaire de .Le choix des points avec équidistante Considérons l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt + f(x), x \in [a, b]$$

Tout d'abord, on commence par la discrétisation de l'intervalle  $[a, b]$  en sous intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = \overline{1, N+1}$  , c'est à dire nous choisissons des points  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N+1$  (des Neuds) tel que

$$a = x_1 < \dots < x_j < x_{N+1} = b$$

la méthode des Trapèze, nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration  $t$  :

On pose  $t = (x_i)_{1 \leq i \leq N+1}$  , il vient

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=1}^{N+1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x_i, t) \varphi(t) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \frac{\lambda h}{2} \sum_{j=1}^{N+1} [k(x_i, t_{j+1}) \varphi(t_{j+1}) + k(x_i, t_j) \varphi(t_j)]$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \frac{\lambda h}{2} k(x_i, t_1) \varphi(t_1) + \frac{\lambda h}{2} k(x_i, t_{N+1}) \varphi(t_{N+1}) + \lambda h \sum_{j=2}^N k(x_i, t_j) \varphi(t_j)$$

On notons  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$  et  $k_{ij} = k(x_i, t_j)$  alors la formule précédente devient :

$$\varphi_i - \frac{\lambda h}{2} \left( k_{i,1} \varphi_1 + k_{i,N+1} \varphi_{N+1} + \sum_{j=2}^N k_{ij} \varphi_j \right) = f_i$$

A cette fin, on obtient le système linéaire suivant

$$A \overline{\Phi} = B \tag{3.1}$$

$$B = \left[ f(x_1 = a), f(x_2), \dots, f(x_{N+1} = b) \right]^T$$

$$\overline{\Phi} = \left[ \varphi(x_1 = a), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_{N+1}) \right]^T$$

**Remarque 3.3.1** Une condition suffisante de convergence du processus itératif ( 3.1) est

que la matrice  $q$  soit à diagonale dominante. Ce qui équivaut à dire  $\|q\| < 1$ .

### Exemple

considérons l'équation

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^1 x^4 t^4 \varphi(t) dt$$

la solution exacte de cette équation est :

$$\varphi^*(x) = x$$

$n$	$x$	Solution exact	Solution app	Erreur	(3.2)
1	-1.000000	-1.000000	-1.000000	$2.220446e - 16$	
2	-0.800000	-0.800000	-0.800000	$0.000000e + 00$	
3	-0.600000	-0.600000	-0.600000	$1.110223e - 16$	
4	-0.400000	-0.400000	-0.400000	$1.665335e - 16$	
5	-0.200000	-0.200000	-0.200000	$0.000000e + 00$	
6	0.000000	0.000000	0.000000	$0.000000e + 00$	
7	0.200000	0.200000	0.200000	$2.498002e - 16$	
8	0.400000	0.400000	0.400000	$1.110223e - 16$	
9	0.600000	0.600000	0.600000	$2.220446e - 16$	
10	0.800000	0.800000	0.800000	$0.000000e + 00$	

**TAB-1**-Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation

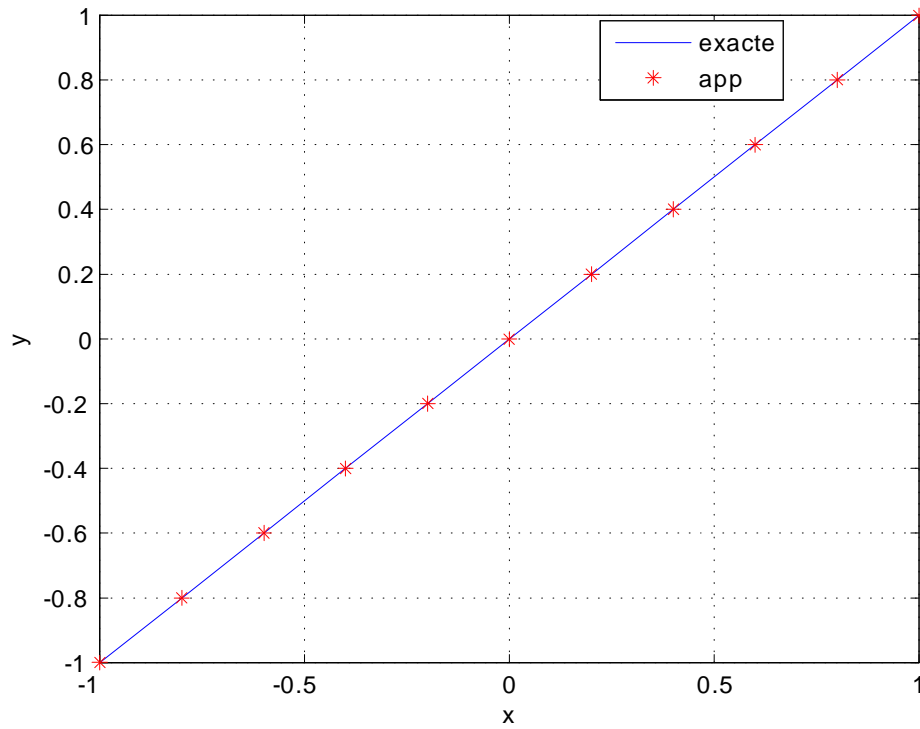


Figure-1-

### 3.3.2 Méthode de Simpson

règle de Simpson

$$\int_b^a f(x)dx = \frac{h}{3} \left[ f(a) + 4 \sum_{i_{\text{impair}}} f(x_i) + 2 \sum_{i_{\text{pair}}} f(x_i) + f(b) \right]$$

En utilisant cette approximation pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm

#### Méthode de Simpson

Dans cette partie nous allons appliquer la méthode de Simpson généralisée pour la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm de second espèce à noyau régulier.

Soit l'équation :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt + f(x), x \in [a, b] \quad (3.3)$$

ona d'après la règle de Simpson concernant l'estimation de l'erreur sur un sous-intervalle  $[\tau, \tau + 2h]$ .

Notre objectif est de chercher la solution approchée de cette équation sur un ensemble de points de  $[a, b]$  en utilisant la règle de quadrature de Simpson cétée dans le paragraphe précédent :

$$\int_{\tau}^{\tau+2h} K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{\lambda h}{3} [K(x, \tau) \varphi(\tau) + 4K(x, \tau + h) \varphi(\tau + h) + 2K(x, \tau + 2h) \varphi(\tau + 2h)]$$

soit  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2j-1} < x_{2j} < \dots < x_{2N}$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . En exigeant que l'équation (3.4) soit vérifiée sur chaque nœud  $x_{2j}$ , et on écrit :

$$\varphi(x_{2j}) - \lambda \int_a^b K(x_{2j}, t) \varphi(t) dt = f(x_{2j})$$

qui s'écrit aussi :

$$\varphi(x_{2j}) - \lambda \sum_{i=0}^{N-1} \int_a^b K(x_{2j}, t) \varphi(t) dt = f(x_{2j})$$

Dans la suite, pour la simplicité on utilise les notations  $f(x_{2j}) = f_{2j}$ ,  $K(x_{2j}, t_{2i}) = K_{2j,2i}$ ,  $\varphi(x_{2j}) = \varphi_{2j}$

En utilisant la règle de Simpson alors :

$$\varphi_{2j} = f_{2j} + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda h}{3} [K_{2j,2i} \varphi_{2i} + 4K_{2j,2i+1} \varphi_{2i+1} + K_{2j,2i+2} \varphi_{2i+2}]$$

cette fin, on obtient le système linéaire suivant :

$$A\overline{\Phi} = B$$

### Exemple

considérons l'équation  $\text{SimFre}(0,1,10,-1, \text{'sqrt(x.*t)'}, \text{'sqrt(x)'}, \text{'(2.*sqrt(x))./3'})$

$$\varphi(x) = \sqrt{x} - \int_0^1 \sqrt{xt} \varphi(t) dt$$

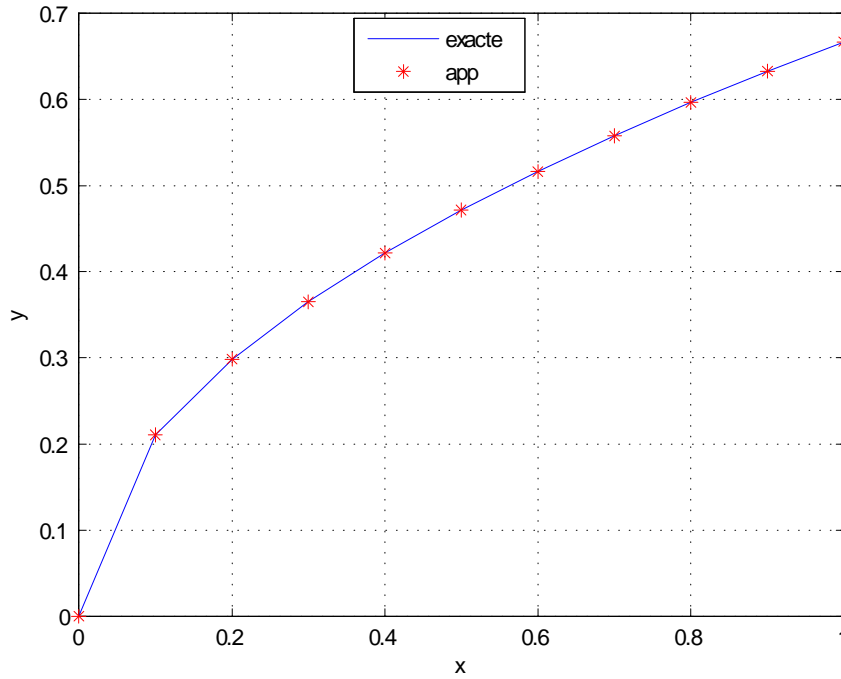
la solution exacte de cette équation est :

$$\varphi^*(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

n	x	Solution exact	Solution app	Erreur
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.100000	0.210819	0.210819	$8.326673e-17$
3	0.200000	0.298142	0.298142	$5.551115e-17$
4	0.300000	0.365148	0.365148	$5.551115e-17$
5	0.400000	0.421637	0.421637	$3.330669e-16$
6	0.500000	0.471405	0.471405	$3.330669e-16$
7	0.600000	0.516398	0.516398	$0.000000e+00$
8	0.700000	0.557773	0.557773	$1.110223e-16$
9	0.800000	0.596285	0.596285	$0.000000e+00$
10	0.900000	0.632456	0.632456	$1.110223e-16$
11	1.00000	0.666667	0.666667	$0.000000e+00$

**TAB-2-**Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée





**Figure-2-**

### 3.3.3 Méthode de Simpson Modifiée

Dans cette partie nous allons appliquer la méthode de Simpson modifiée généralisée pour la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm de second espèce à noyau régulier. Soit l'équation :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt + f(x), x \in [a, b] \quad (3.4)$$

ona d'après la règle de Simpson concernant l'estimation de l'erreur sur un sous-intervalle  $[\tau, \tau + 2h]$  .

Notre objectif est de chercher la solution approchée de cette équation sur un ensemble de points de  $[a, b]$  en utilisant la règle de quadrature de Simpson cétée dans le paragraphe précédent :

$$\int_{\tau}^{\tau+2h} K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{\lambda h}{3} [K(x, \tau) \varphi(\tau) + 4K(x, \tau + h) \varphi(\tau + h) + 2K(x, \tau + 2h) \varphi(\tau + 2h)]$$

soit  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2j-1} < x_{2j} < \dots < x_{2N}$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . En exigeant que l'équation (3.4) soit vérifiée sur chaque nœud  $x_{2j}$ , et on écrit :

$$\varphi(x_{2j}) - \lambda \int_a^b K(x_{2j}, t) \varphi(t) dt = f(x_{2j})$$

qui s'écrit aussi :

$$\varphi(x_{2j}) - \lambda \sum_{i=0}^{N-1} \int_a^b K(x_{2j}, t) \varphi(t) dt = f(x_{2j})$$

Dans la suite, pour la simplicité on utilise les notations  $f(x_{2j}) = f_{2j}$ ,  $K(x_{2j}, t_{2i}) = K_{2j,2i}$ ,  $\varphi(x_{2j}) = \varphi_{2j}$

En utilisant la règle de Simpson alors :

$$\varphi_{2j} = f_{2j} + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda h}{3} [K_{2j,2i} \varphi_{2i} + 4K_{2j,2i+1} \varphi_{2i+1} + K_{2j,2i+2} \varphi_{2i+2}]$$

pour  $h$  suffisamment petit, une approximation de  $\varphi_{2j}$  devient possible, en approchant la solution  $\varphi_{2i+1}$  nœud  $x_{2i+1}$  par la moyenne  $\frac{\varphi_{2i+1} + \varphi_{2i}}{2}$  donc on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{2j} &= f_{2j} + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda h}{3} \left[ K_{2j,2i} \varphi_{2i} + 4K_{2j,2i+1} \frac{\varphi_{2i+1} + \varphi_{2i}}{2} + K_{2j,2i+2} \varphi_{2i+2} \right] \\ &= f_{2j} + \lambda \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\lambda h}{3} (K_{2j,2i} + 2K_{2j,2i+1}) \varphi_{2i} + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda h}{3} (2K_{2j,2i-1} + K_{2j,2i}) \varphi_{2i} \end{aligned}$$

on écrit :

$$\varphi_{2j} = f_{2j} + \frac{\lambda h}{3} (K_{2j,0} + 2K_{2j,1}) \varphi_0 + \frac{\lambda h}{3} (2K_{2j,2i-1} + K_{2j,2i}) \varphi_{2i} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2\lambda h}{3} (2K_{2j,2i-1} + K_{2j,2i} + K_{2j,2i+1}) \varphi_{2i}$$

D'où, pour  $j = 1, \dots, N+1$

$$\varphi_{2j} \left[ 1 - \frac{\lambda h}{3} (2K_{2j,2i-1} + K_{2j,2i}) \right] = f_{2j} + \frac{\lambda h}{3} (K_{2j,0} + 2K_{2j,1}) \varphi_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2\lambda h}{3} (2K_{2j,2i-1} + K_{2j,2i} + K_{2j,2i+1}) \varphi_{2i} \quad (3.5)$$

A cette fin, on obtient le système linéaire suivant :

$$A\bar{\Phi} = B$$

Où la matrice  $A = (a_{ij}), 0 \leq i, j \leq 2N$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{01} & \dots & \dots & a_{0,2N} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & \dots & \vdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{2N,1} & a_{2N,1} & \dots & \dots & a_{2N,2N} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{00} = a_{2N,2N} = 1 - \frac{\lambda h K_{11}}{3} \\ a_{jj} = 1 - \frac{4\lambda h K_{ii}}{3} & \text{si } i \text{ impair} \\ a_{jj} = 1 - \frac{2\lambda h K_{ii}}{3} & \text{si } i \text{ pair} \\ a_{j1} = -\frac{\lambda h K_{j1}}{3} & 1 \leq j \leq 2N \\ a_{ji} = -\frac{4\lambda h K_{ji}}{3} & \text{si } i \text{ impair} \\ a_{ji} = -\frac{2\lambda h K_{ji}}{3} & \text{si } i \text{ pair} \end{array} \right.$$

$$B = [f(x_1 = a), f(x_2), \dots, f(x_{2N} = b)]^T$$

$$\overline{\Phi} = [\varphi(x_1 = a), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_{2N})]^T$$

### Exemple

considérons l'équation

$$\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^4 t^4) \varphi(t) dt$$

la solution exacte de cette équation est :

$$\varphi^*(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$$

n	x	Solution exact	Solution app	Erreur
1	-1.000000	2.111111	2.119370	8.258460e-03
2	-0.800000	1.711111	1.716397	5.285414e-03
3	-0.600000	1.400000	1.402973	2.973046e-03
4	-0.400000	1.177778	1.179099	1.321354e-03
5	-0.200000	1.044444	1.044775	3.303384e-04
6	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000e+00
7	0.200000	1.044444	1.044775	3.303384e-04
8	0.400000	1.177778	1.179099	1.321354e-03
9	0.600000	1.400000	1.402973	2.973046e-03
10	0.800000	1.711111	1.716397	5.285414e-03
11	1.000000	2.111111	2.119370	8.258460e-03

(3.6)

**TAB-3-**Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation

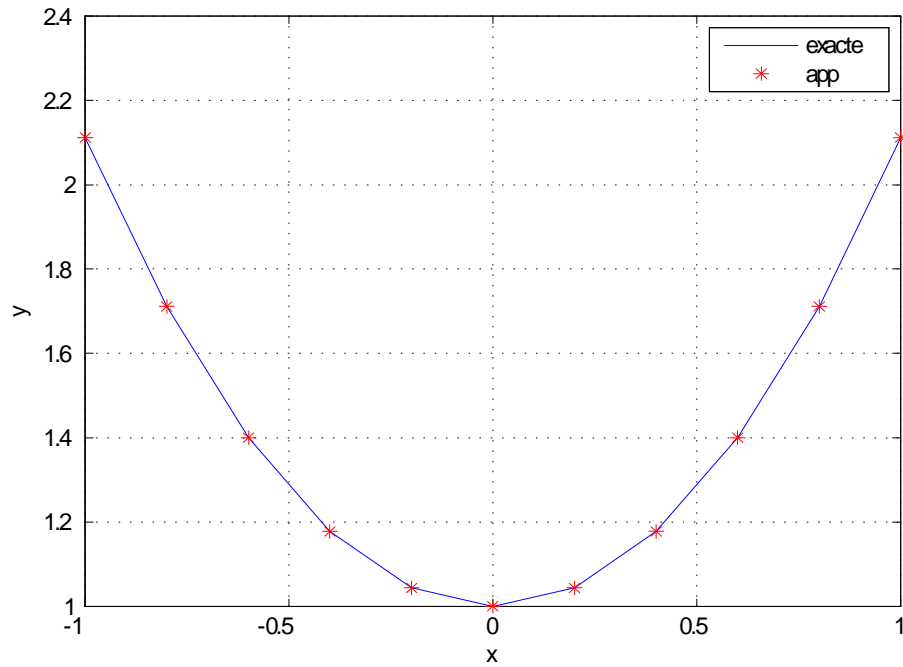


Figure-3-

### 3.3.4 Méthode adaptative 1

L'intérêt de cette méthode est de diminuer l'erreur de précision, dans le but d'obtenir une solution plus fine.

dans chaque étape  $i$ , qui correspond à une solution  $\varphi_i$ , on applique la même subdivision que la méthode de Trapèze sur l'intervalle  $x_j = a + (j - 1)h, 1 \leq j \leq N + 1$ . Sauf sur le dernier sous intervalle, il intervient un nouveau neoud intermédiaire  $x_{N+\frac{1}{2}}$  en fait cette méthode applique un raffinement plus fine sur la méthode de Trapeze.

- On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $N$  sous-intervalles équidistants, avec  $x_1 = a, x_{N+1} = b$ , et  $h = \frac{b - a}{N}$
- On écrit  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx$  puis on applique la règle de trapèze à chaque sous-intervalle.

$$\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = \int_{x_1}^{x_N} K(x, t) \varphi(t) dt + \int_{x_N}^{x_{N+\frac{1}{2}}} K(x, t) \varphi(t) dt + \int_{x_{N+\frac{1}{2}}}^{x_{N+1}} K(x, t) \varphi(t) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze

$$= \frac{h}{2} \left[ K_N(x) \varphi_N + K_1(x) \varphi_1 + 2 \sum_{j=2}^{N-1} K_j(x) \varphi_j \right] + \frac{h}{4} \left[ K_{N+\frac{1}{2}}(x) \varphi_{N+\frac{1}{2}} + K_N(x) \varphi_N \right] \\ + \frac{h}{4} \left[ K_{N+\frac{1}{2}}(x) \varphi_{N+\frac{1}{2}} + K_{N+1}(x) \varphi_{N+1} \right]$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{h}{2} \left[ K_{i,1} \varphi_1 + \frac{3}{2} K_{i,N} \varphi_N + K_{i,N+\frac{1}{2}} \varphi_{N+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} K_{i,N+1} \varphi_{N+1} + 2 \sum_{j=2}^{N-1} K_{i,j} \varphi_j \right]$$

pour remplacer dans (1.6)

$$\varphi_i - \frac{\lambda h}{2} \left[ K_{i,1} \varphi_1 + \frac{3}{2} K_{i,N} \varphi_N + K_{i,N+\frac{1}{2}} \varphi_{N+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} K_{i,N+1} \varphi_{N+1} + 2 \sum_{j=2}^{N-1} K_{i,j} \varphi_j \right] = f_i$$

on note par  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$ ,  $K(x_i, t_j) = K_{i,j}$ , pour  $1 \leq i, j \leq N+1$

A cette fin, on obtient le système linéaire suivant

$$A\bar{\Phi} = B$$

$$B = \left[ f(x_1 = a), f(x_2), \dots, f(x_{N+1} = b) \right]^T \\ \bar{\Phi} = \left[ \varphi(x_1 = a), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_{N+1}) \right]^T$$

### Exemple

considérons l'équation

$$\varphi(x) = e^{2x + \frac{1}{3}} + \int_0^1 e^{2x - \frac{5}{3}t} \varphi(t) dt$$

la solution exacte de cette équation est :

$$\varphi^*(x) = e^{2x}$$

n	x	Solution exact	Solution app	Erreur
1	0	1.000000	0.999976	2.396943e-05
2	0.100000	1.221403	1.221373	2.927633e-05
3	0.200000	1.491825	1.491789	3.575819e-05
4	0.300000	1.822119	1.822075	4.367516e-05
5	0.400000	2.225541	2.225488	5.334495e-05
6	0.500000	2.718282	2.718217	6.515567e-05
7	0.600000	3.320117	3.320037	7.958132e-05
8	0.700000	4.055200	4.055103	9.720085e-05
9	0.800000	4.953032	4.952914	1.187214e-04
10	0.900000	6.049647	6.049502	1.450066e-04

(3.7)

**TAB-4** Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

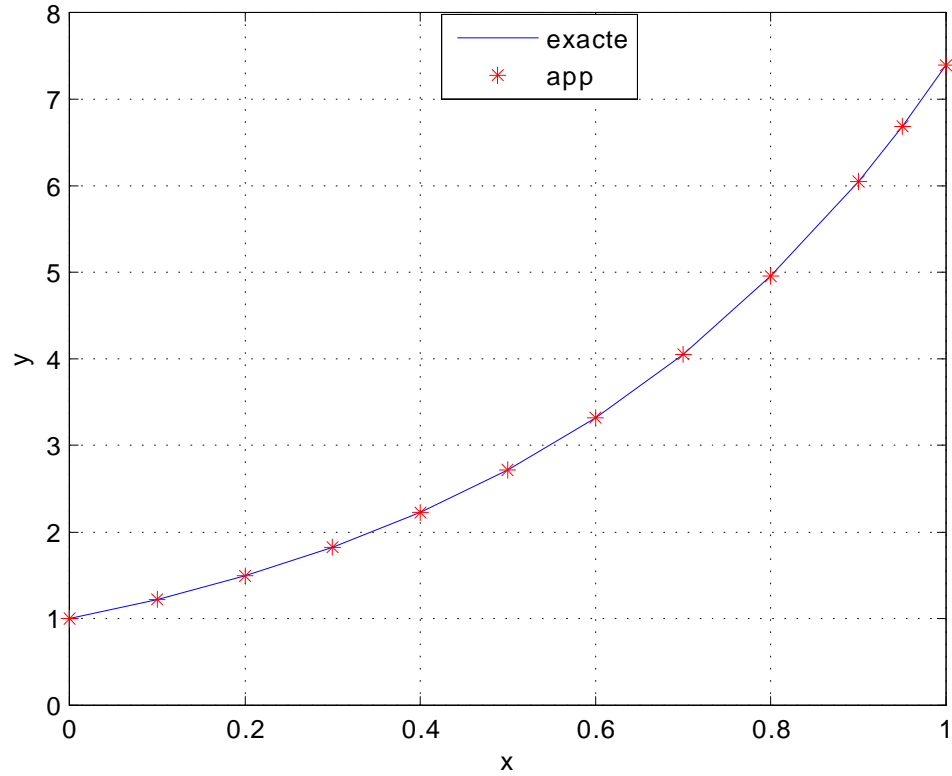


Figure-4-

### 3.3.5 Méthode adaptative 2

L'intérêt de cette méthode est de diminuer l'erreur de précision, dans le but d'obtenir une solution plus fine

dans chaque étape  $i$ , qui correspond à une solution  $\varphi_i$ , on applique la même subdivision que la méthode de Trapèze sur l'intervalle  $[x_1, x_N]$  sauf sur le dernier sous intervalle (i.e.  $[x_N, x_{N+1}]$ ), On subdivise l'intervalle  $[x_N, x_{N+1}]$  en  $m$  sous-intervalles équidistants, en fait cette méthode applique un raffinement plus fin sur la méthode de Trapeze.

$$\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = \int_{x_1}^{x_{N+1}} K(x, t) \varphi(t) dt$$



$$= \int_{x_1}^{x_N} K(x, t) \varphi(t) dt + \int_{x_N}^{x_{N+1}} K(x, t) \varphi(t) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze

$$= \frac{h}{2} \left( K_N(x) \varphi_N + K_1(x) \varphi_1 + 2 \sum_{j=2}^{N-1} K_j(x) \varphi_j \right) \\ + \frac{h}{2(m+1)} \left( K_{N+1}(x) \varphi_{N+1} + K_N(x) \varphi_N + 2 \sum_{j=1}^m K_{N+\frac{jh}{m+1}}(x) \varphi_{N+\frac{jh}{m+1}} \right)$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$= \frac{h}{2} \left[ K_{i,1} \varphi_1 + \frac{m+2}{m+1} K_{i,N} \varphi_N + 2 \sum_{j=2}^{N-1} K_{i,j} \varphi_j + \frac{1}{m+1} \left( K_{i,N+1}(x) \varphi_{N+1} + 2 \sum_{j=1}^m K_{i,N+\frac{jh}{m+1}} \varphi_{N+\frac{jh}{m+1}} \right) \right]$$

alors

$$\varphi_i - \frac{\lambda h}{2} \left[ K_{i,1} \varphi_1 + \frac{m+2}{m+1} K_{i,N} \varphi_N + 2 \sum_{j=2}^{N-1} K_{i,j} \varphi_j + \frac{1}{m+1} \left( K_{i,N+1}(x) \varphi_{N+1} + 2 \sum_{j=1}^m K_{i,N+\frac{jh}{m+1}} \varphi_{N+\frac{jh}{m+1}} \right) \right] =$$

On notons  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$ ,  $K(x_i, t_j) = K_{i,j}$ , pour  $1 \leq i, j \leq N+1$

A cette fin, on obtient le système linéaire suivant

$$A\bar{\Phi} = B$$

$$B = \left[ f(x_1 = a), f(x_2), \dots, f(x_{N+1} = b) \right]^T$$

$$\bar{\Phi} = \left[ \varphi(x_1 = a), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_{N+1}) \right]^T$$

### Exemple

considérons l'équation  $\text{adpm\_trapFre}(0,1,10,10,-1, '(x)*\exp(t)', '\exp(-x)', '\exp(-x)-(x/2)')$

$$\varphi(x) = e^{-x} - \int_0^1 x e^t \varphi(t) dt$$

la solution exacte de cette équation est :

$$\varphi^*(x) = e^{-x} - \frac{x}{2}, m = 5$$

n	x	Solution exact	Solution app	Erreur
1	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000e+00
2	0.100000	0.854837	0.854914	7.651722e-05
3	0.200000	0.718731	0.718884	1.530344e-04
4	0.300000	0.590818	0.591048	2.295517e-04
5	0.400000	0.470320	0.470626	3.060689e-04
6	0.500000	0.356531	0.356913	3.825861e-04
7	0.600000	0.248812	0.249271	4.591033e-04
8	0.700000	0.146585	0.147121	5.356206e-04
9	0.800000	0.049329	0.049941	6.121378e-04
10	0.900000	-0.043430	-0.042742	6.886550e-04
11	1.000000	-0.132121	-0.131355	7.651722e-04

**TAB-5-**Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

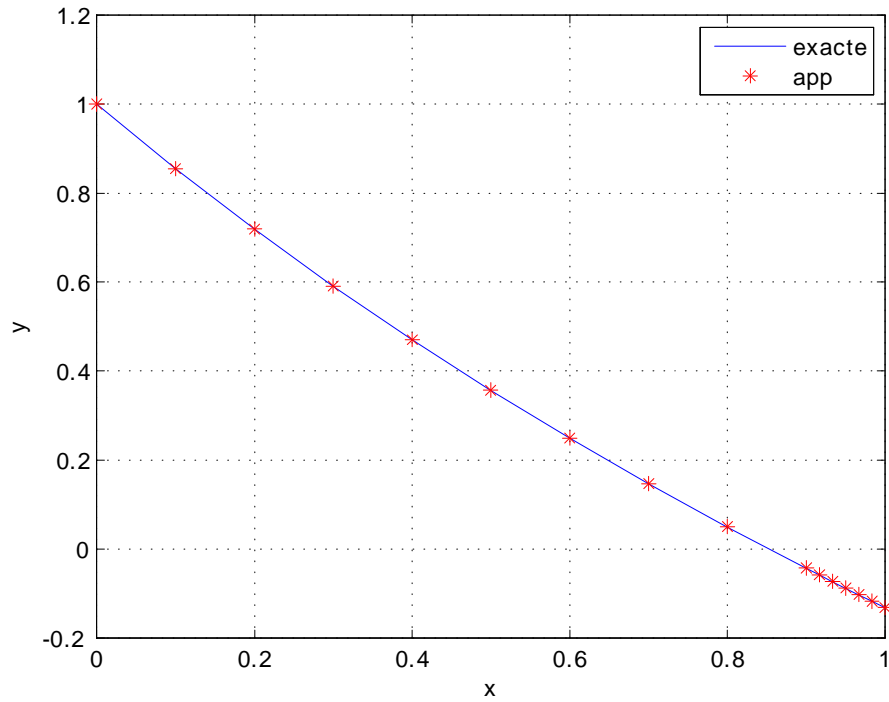


Figure-5-

### 3.4 Equations intégrales de Fredholm non linéaire

#### 3.4.1 Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives peut, a priori, être appliquée tous les problèmes non linéaires.

On considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt \quad (3.8)$$

La méthode des approximations successives introduit la Relation réccurente

$$\varphi_{N+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi_N(t)) dt, \quad N \geq 1 \quad (3.9)$$

Nous commençons toujours par une estimation initiale pour  $\varphi_1(x)$  , la plupart du temps nous sélectionnons 0, 1, x pour  $\varphi_1(x)$ , et en utilisant (1.4), plusieurs approximations successives  $\varphi_k$ ,  $k \geq 1$

sera déterminé comme

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)dt \\ \varphi_3(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_2(t)dt \\ \varphi_4(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_3(t)dt \\ &\dots \\ \varphi_{N+1}(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_N(t)dt\end{aligned}$$

par conséquent

$$\varphi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{N+1}(x)$$

### 3.4.2 Méthode de Trapèze

Pour le faire, on a toujours besoin de discrétiser l'intervalle  $[a, b]$  en sous intervalles  $[x_i; x_{i+1}]$ ,  $i = 1 : N + 1$  équidistants, **i.e** :

$$x_i = a + (i - 1) h \quad i = 1, 2, \dots, n + 1$$

Rappelons que l'équation non linéaire de Fredholm (l'EIFNL) s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt$$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{l+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi_l(t)) dt \quad \text{tel que } l = 1, 2, \dots, m$$

Notons qu'on va calculer la solution approchée en tous les nœuds  $x_i$  ;  $i = 1, 2, \dots, N + 1$ , donc on écrit l'équation comme suit :

$$\varphi_{l+1}(x_i) = f(x_i) + \lambda \int_a^b k(x_i, t, \varphi_l(t)) dt \quad \text{tel que } i = 1, 2, \dots, n + 1$$

Approchons numériquement l'intégrale en utilisant la méthode du trapèze

$$\varphi_{l+1}(x_i) = \lambda \int_{x_1}^{x_{N+1}} k(x_i, t, \varphi_l(t)) dt + f(x_i)$$

$$\varphi_{l+1}(x_i) = \frac{\lambda h}{2} \left[ k(x_i, t_1, \varphi_l(t_1)) + k(x_i, t_{N+1}, \varphi_l(t_{N+1})) + 2 \sum_{j=2}^N k(x_i, t_j, \varphi_l(t_j)) \right] + f(x_i)$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$\varphi_{l+1i} = \frac{\lambda h}{2} \left[ k_{i,1,l_1} + k_{i,N+1,l_{N+1}} + 2 \sum_{j=2}^{N-1} k_{i,j,l_j} \right] + f_i$$

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_1(x) = f(x)$$

### Exemple

considérons l'équation

$$\varphi(x) = e^x - (e^2 + 1) \frac{x^2}{192} + \frac{1}{48} \int_0^1 xt\varphi^2(t) dt$$

la solution exacte de cette équation est :

$$\varphi^*(x) = e^x$$

n	x	Solution exact	Solution app	Erreur
1	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000e + 00
2	0.100000	1.105171	1.105209	3.784934e - 05
3	0.200000	1.221403	1.221478	7.569868e - 05
4	0.300000	1.349859	1.349972	1.135480e - 04
5	0.400000	1.491825	1.491976	1.513974e - 04
6	0.500000	1.648721	1.648911	1.892467e - 04
7	0.600000	1.822119	1.822346	2.270960e - 04
8	0.700000	2.013753	2.014018	2.649454e - 04
9	0.800000	2.225541	2.225844	3.027947e - 04
10	0.900000	2.459603	2.459944	3.406441e - 04
11	1.000000	2.718282	2.718660	3.784934e - 04

**TAB-6-**Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

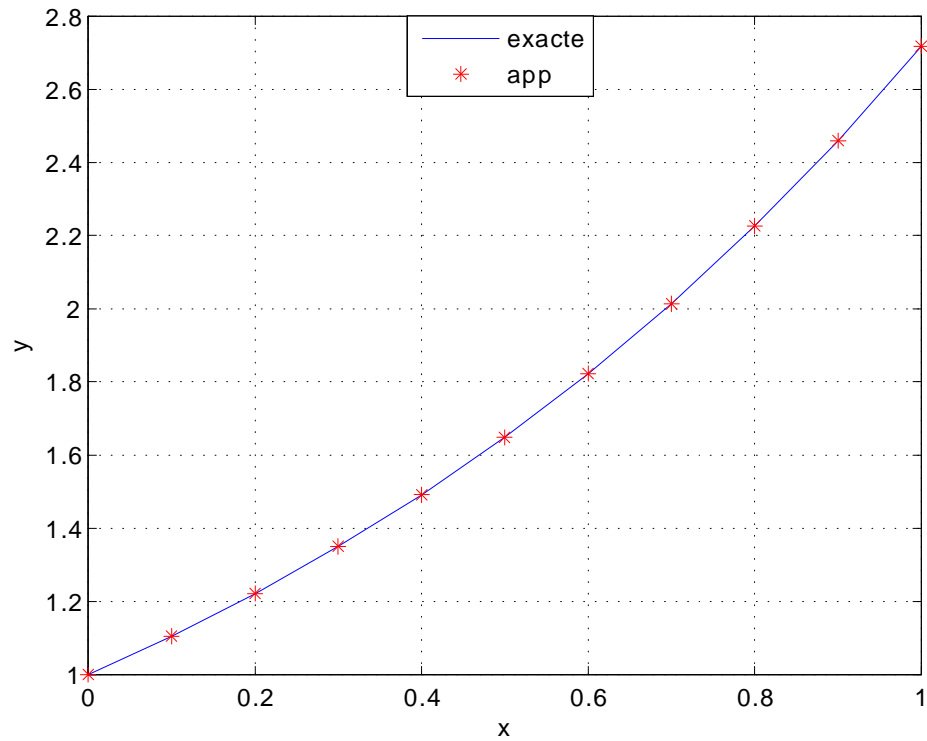


Figure-6-

### 3.4.3 Méthode adaptative 1

Comme dans la méthode des Trapèze, Le problème à de trouver la fonction  $\varphi$  (la solution)

Considérons l'EIFNL de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt$$

Alors

$$\varphi_i = f_i + \int_{x_1}^{x_N} k(x, t, \varphi(t)) dt + \int_{x_N}^{x_{N+\frac{1}{2}}} k(x_j, t, \varphi(t)) dt + \int_{x_{N+\frac{1}{2}}}^{x_{N+1}} k(x_j, t, \varphi(t)) dt$$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{l+1,i} = f_i + \int_{x_1}^{x_N} k(x, t, \varphi_l(t)) dt + \int_{x_N}^{x_{N+\frac{1}{2}}} k(x_i, t, \varphi_l(t)) dt + \int_{x_{N+\frac{1}{2}}}^{x_{N+1}} k(x_i, t, \varphi_l(t)) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze

$$\begin{aligned} \varphi_{l+1}(x_i) &= f(x_i) + \frac{h}{2} \left( k(x_i, t_N, \varphi_l(t_N)) + k(x_i, t_1, \varphi_l(t_1)) + 2 \sum_{j=2}^{N-1} k(x_i, t_j, \varphi_l(t_j)) \right) + \frac{h}{4} k(x_i, t_N, \varphi_l(t_N)) \\ &\quad + \frac{h}{4} \left( k(x_i, t_{N+\frac{1}{2}}, \varphi_l(t_{N+\frac{1}{2}})) + k(x_i, t_{N+\frac{1}{2}}, \varphi_l(t_{N+\frac{1}{2}})) + k(x_i, t_{N+1}, \varphi_l(t_{N+1})) \right) \\ &= f(x_j) + \frac{h}{2} \left( k(x_i, t_N, \varphi_l(t_N)) + k(x_i, t_1, \varphi_l(t_1)) + 2 \sum_{j=2}^{N-1} k(x_i, t_j, \varphi_l(t_j)) \right) \\ &\quad + \frac{h}{4} \left( 2k(x_i, t_{N+\frac{1}{2}}, \varphi_l(t_{N+\frac{1}{2}})) \right) + \frac{h}{4} (k(x_i, t_N, \varphi_l(t_N)) + k(x_i, t_{N+1}, \varphi_l(t_{N+1}))) \end{aligned}$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$\varphi_{l+1,i} = f_i + \frac{h}{2} \left( k_{i1l} + 2 \sum_{j=2}^{N-1} k_{ji+1l} + \frac{3}{2} k_{i,N,l} + k_{i,N+\frac{1}{2},l} + \frac{1}{2} k_{i,N+1,l} \right)$$

On notons  $\varphi_{l+1,i} = \varphi_{l+1}(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$  et  $k_{ijl} = k(x_i, t_j, \varphi_l(t_j))$

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_1(x) = f(x)$$

### Exemple

considérons l'équation

$$\varphi(x) = e^x - (e^2 + 1) \frac{x^2}{192} + \frac{1}{48} \int_0^1 x t \varphi^2(t) dt$$



la solution exacte de cette équation est :

$$\varphi^*(x) = e^x$$

n	x	Solution exact	Solution app	Erreur
1	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000e+00
2	0.100000	1.105171	1.105200	2.876120e-05
3	0.200000	1.221403	1.221460	5.752240e-05
4	0.300000	1.349859	1.349945	8.628359e-05
5	0.400000	1.491825	1.491940	1.150448e-04
6	0.500000	1.648721	1.648875	1.542040e-04
7	0.600000	1.822119	1.822304	1.850448e-04
8	0.700000	2.013753	2.013969	2.158856e-04
9	0.800000	2.225541	2.225788	2.467263e-04
10	0.900000	2.459603	2.459881	2.775671e-04
11	1.000000	2.718282	2.718590	3.084079e-04

**TAB-7-**Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

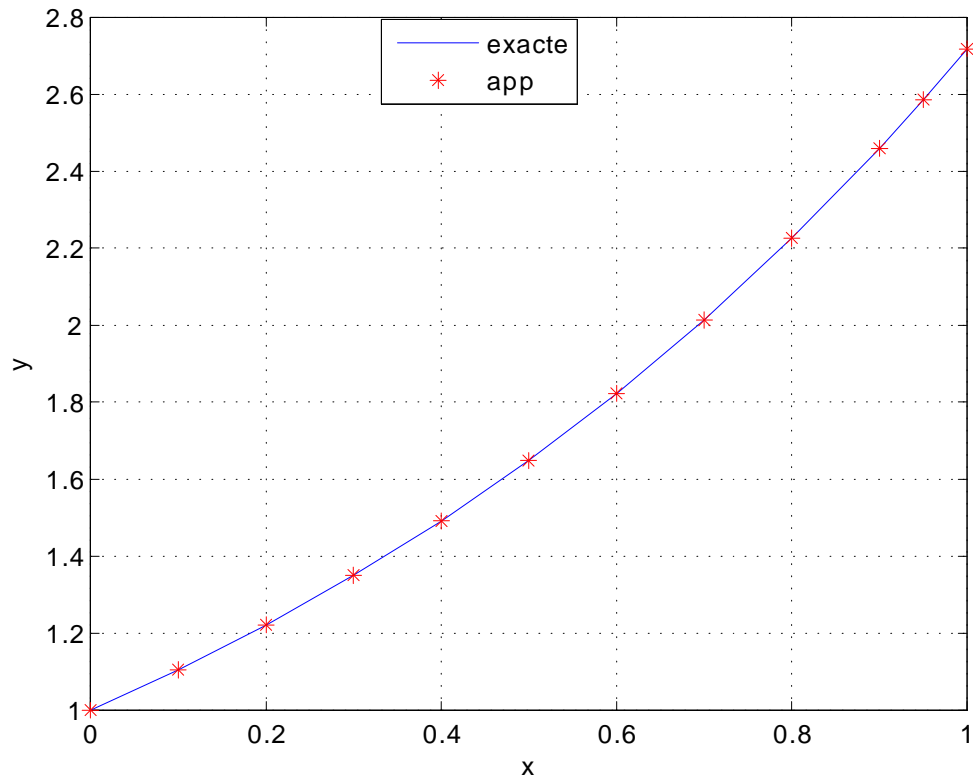


Figure-7-

### 3.4.4 Méthode adaptative 2

L'intérêt de cette méthode est de diminuer l'erreur de précision, dans le but d'obtenir une solution plus fine

dans chaque étape  $i$ , qui correspond à une solution  $\varphi_i$ , on applique la même subdivision que la méthode de Trapèze sur l'intervalle  $[x_1, x_N]$  sauf sur le dernier sous intervalle (i.e.  $[x_N, x_{N+1}]$ ), On subdivise l'intervalle  $[x_N, x_{N+1}]$  en  $r$  sous-intervalles équidistants, en fait cette méthode applique un raffinement plus fin sur la méthode de Trapeze.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt$$

Alors

$$\varphi_i = f_i + \int_{x_1}^{x_N} k(x_i, t, \varphi(t)) dt + \int_{x_N}^{x_{N+1}} k(x_i, t, \varphi(t)) dt$$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{l+1,i} = f_i + \int_{x_1}^{x_N} k(x_i, t, \varphi_l(t)) dt + \int_{x_N}^{x_{N+1}} k(x_i, t, \varphi_l(t)) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze

$$\begin{aligned} \varphi_{l+1}(x_i) = & f(x_i) + \frac{h}{2} \left[ k(x_i, t_N, \varphi_l(t_N)) + k(x_i, t_1, \varphi_l(t_1)) + 2 \sum_{j=2}^{N-1} k(x_i, t_j, \varphi_l(t_j)) \right] \\ & + \frac{h}{2(r+1)} \left[ k(x_i, t_N, \varphi_l(t_N)) + k(x_i, t_{N+1}, \varphi_l(t_{N+1})) + 2 \sum_{j=1}^r k(x_i, t_{N+\frac{jh}{r+1}}, \varphi_l(t_{N+\frac{jh}{r+1}})) \right] \end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_1(x) = f(x)$$

### 3.4.5 Méthode de simpson

Rappelons que l'équation non linéaire de Fredholm (l'EIFNL) s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt$$

Alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x_1}^{x_N} k(x, t, \varphi(t)) dt$$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{l+1}(x) = f(x) + \lambda \int_{x_1}^{x_{2N}+1} k(x, t, \varphi_l(t)) dt$$

$$\varphi_{l+1}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^N \int_{2j-1}^{2j+1} k(x, t, \varphi_l(t)) dt.$$

$$\varphi_{l+1}(x) = f(x) + \frac{\lambda h}{6} \left[ \sum_{j=1}^N k(x, t_{2j+1}, \varphi_l(t_{2j+1})) + k(x, t_{2j-1}, \varphi_l(t_{2j-1})) + 4k(x, t_{2j}, \varphi_l(t_{2j})) \right]$$

utilisons la méthode de simpson

$$\begin{aligned} \varphi_{l+1}(x_{2i-1}) &= \frac{\lambda h}{6} \left[ \sum_{j=1}^N k(x_{2i-1}, t_{2j+1}, \varphi_l(t_{2j+1})) + k(x_{2i-1}, t_{2j-1}, \varphi_l(t_{2j-1})) + 4k(x_{2i-1}, t_{2j}, \varphi_l(t_{2j})) \right] \\ &\quad + f(x_{2i-1}) \end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_1(x) = f(x)$$

### Exemple

considérons l'équation

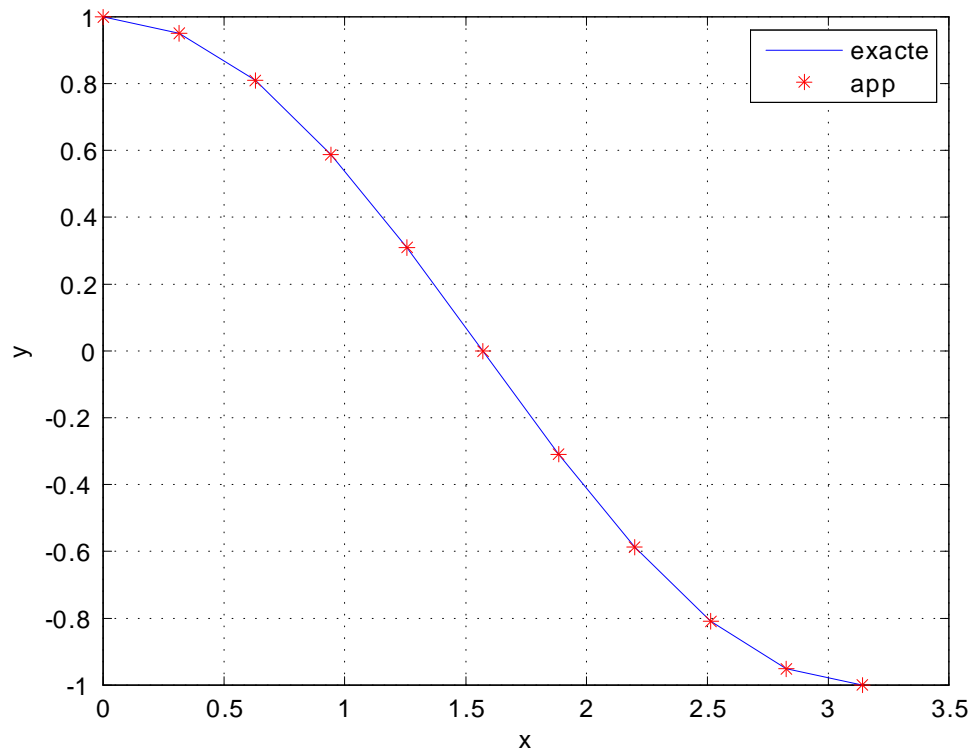
$$\varphi(x) = \cos(x) - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12} \int_0^\pi t \varphi^2(t) dt$$

la solution exacte de cette équation est :

$$\varphi^*(x) = \cos(x)$$

n	x	Solution exact	Solution app	Erreur
1	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000e+00
2	0.314159	0.951057	0.951057	0.000000e+00
3	0.628319	0.809017	0.809017	0.000000e+00
4	0.942478	0.587785	0.587785	0.000000e+00
5	1.256637	0.309017	0.309017	0.000000e+00
6	1.570796	0.000000	0.000000	5.721189e-18
7	1.884956	-0.309017	-0.309017	0.000000e+00
8	2.199115	-0.587785	-0.587785	0.000000e+00
9	2.513274	-0.809017	-0.809017	0.000000e+00
10	2.827433	-0.951057	-0.951057	0.000000e+00
11	3.141593	-1.000000	-1.000000	1.110223e-16

**TAB-8-**Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée



### Figure-8-

#### 3.4.6 Méthode de simpson Modifiée

Rappelons que l'équation non linéaire de Fredholm (l'EIFNL) s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt$$

Alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x_1}^{x_N} k(x, t, \varphi(t)) dt$$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{l+1}(x) = f(x) + \lambda \int_{x_1}^{x_{2N+1}} k(x, t, \varphi_l(t)) dt$$

$$\varphi_{l+1}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^N \int_{2j-1}^{2j+1} k(x, t, \varphi_l(t)) dt.$$

$$\begin{aligned} \varphi_{l+1}(x) &= f(x) + \frac{\lambda h}{6} \left[ \sum_{j=1}^N k(x, t_{2j+1}, \varphi_l(t_{2j+1})) + k(x, t_{2j-1}, \varphi_l(t_{2j-1})) \right] \\ &\quad + \frac{2\lambda h}{3} \sum_{j=1}^N k(x, t_{2j}, \varphi_l(t_{2j})) \end{aligned}$$

utilisons la méthode de simpson

$$\begin{aligned} \varphi_{l+1}(x_{2i-1}) &= \frac{\lambda h}{6} \left[ \sum_{j=1}^N k(x_{2i-1}, t_{2j+1}, \varphi_l(t_{2j+1})) + k(x_{2i-1}, t_{2j-1}, \varphi_l(t_{2j-1})) + 4k(x_{2i-1}, t_{2j}, \varphi_l(t_{2j})) \right] \\ &\quad + f(x_{2i-1}) \end{aligned}$$

une approximation de  $\varphi_{2j}$  devient possible par la moyenne  $\frac{\varphi_{l,2j+1} + \varphi_{l,2j-1}}{2}$

donc on a :

$$\begin{aligned}\varphi_{l+1}(x_{2i-1}) &= f(x_{2i-1}) + \frac{\lambda h}{6} \left[ \sum_{j=1}^N k(x_{2i-1}, t_{2j+1}, \varphi_l(t_{2j+1})) + k(x_{2i-1}, t_{2j-1}, \varphi_l(t_{2j-1})) \right] \\ &\quad + \frac{2\lambda h}{3} \sum_{j=1}^N k(x_{2i-1}, t_{2j}, \frac{\varphi_{l,2j+1} + \varphi_{l,2j-1}}{2})\end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_1(x) = f(x)$$

### Exemple

considérons l'équation

$$\varphi(x) = e^{(x)} - (e^2 + 1) \frac{x}{192} + \frac{1}{48} \int_0^1 xt\varphi^2(t) dt$$

la solution exacte de cette équation est :

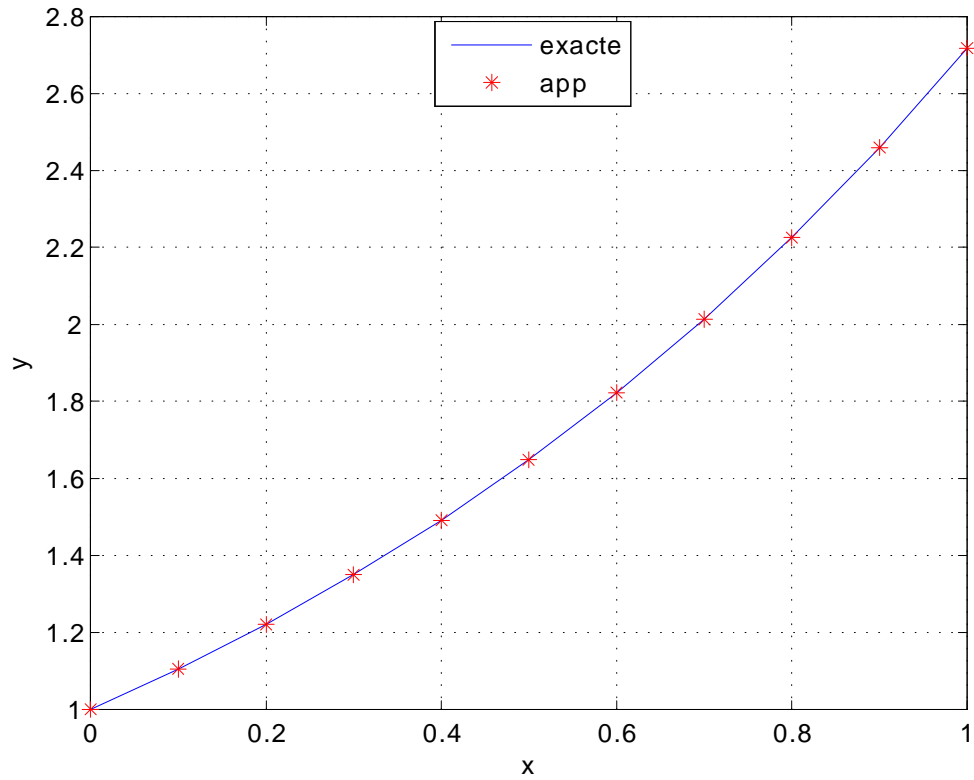
$$\varphi^*(x) = e^{(x)}$$

n	x	Solution exact	Solution app	Erreur
1	0.000000	1.000000	1.000000	$0.000000e + 00$
2	0.100000	1.105171	1.105178	$7.488364e - 06$
3	0.200000	1.221403	1.221418	$1.497673e - 05$
4	0.300000	1.349859	1.349881	$2.246509e - 05$
5	0.400000	1.491825	1.491855	$2.995346e - 05$
6	0.500000	1.648721	1.648759	$3.744182e - 05$
7	0.600000	1.822119	1.822164	$4.493018e - 05$
8	0.700000	2.013753	2.013805	$5.241855e - 05$
9	0.800000	2.225541	2.225601	$5.990691e - 05$
10	0.900000	2.459603	2.459671	$6.739528e - 05$
11	1.000000	2.718282	2.718357	$7.488364e - 05$

**TAB-9-**Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée



M



14.pdf

Figure-9-

### 3.5 Implémentations numériques et comparaisons

**Une étude comparative de cinq méthodes :** Dans cette partie, nous allons tester l'efficacité d'une méthode par rapport à l'autre,

#### 3.5.1 Les équations intégrales de Fredholm linéaire

##### Exemple 1

soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = e^{(-x)} - \int_0^1 x e^{(t)} \varphi(t) dt$$

Avec la solution exacte est

$$\varphi^* = e^{(-x)} - \frac{x}{2}$$

n	x	erreur Trapèze	erreur adp_1	erreur adp_m	erreur simpson M	erreur simpson
1	0.0	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	0.1	9.223064e - 05	8.034908e - 05	7.651722e - 05	4.166851e - 05	1.091620e - 07
3	0.2	1.844613e - 04	1.606982e - 04	1.530344e - 04	8.333702e - 05	2.183240e - 07
4	0.3	2.766919e - 04	2.410472e - 04	2.295517e - 04	1.250055e - 04	3.274860e - 07
5	0.4	3.689225e - 04	3.213963e - 04	3.060689e - 04	1.666740e - 04	4.366480e - 07
6	0.5	4.611532e - 04	4.017454e - 04	3.825861e - 04	2.083426e - 04	5.458100e - 07
7	0.6	5.533838e - 04	4.820945e - 04	4.591033e - 04	2.500111e - 04	6.549721e - 07
8	0.7	6.456145e - 04	5.624436e - 04	5.356206e - 04	2.916796e - 04	7.641341e - 07
9	0.8	7.378451e - 04	6.427927e - 04	6.121378e - 04	3.333481e - 04	8.732961e - 07
10	0.9	8.300757e - 04	7.231417e - 04	6.886550e - 04	3.750166e - 04	9.824581e - 07
11	1.0	9.223064e - 04	8.034908e - 04	7.651722e - 04	4.166851e - 04	1.091620e - 06

TAB-11-

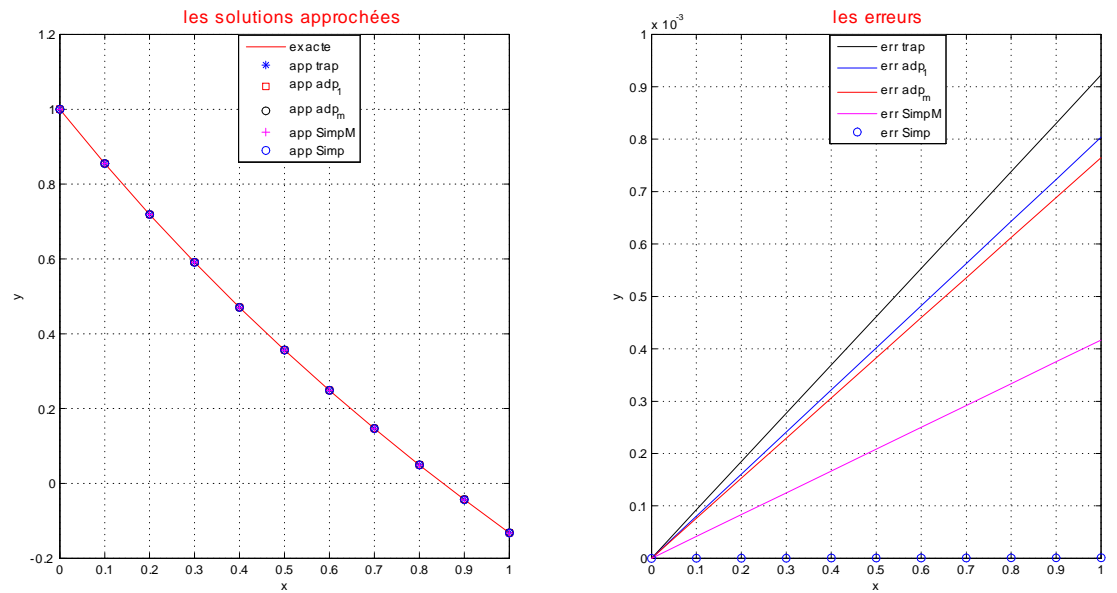


Figure-11-

### comparaison des temps

1. temp de Trapèze :  $2.832613e - 01s$
2. temp de adaptative\_1 :  $2.561659e - 01s$
3. temp de simpson Modifiée :  $3.339624e - 01s$
4. temp de adaptative\_m :  $4.434941e - 01s$
5. temp de simpson :  $2.289026e - 01s$

### Example 2

soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^1 tx + t^2 x^2 \varphi(t) dt$$

Avec la solution exacte est

$$\varphi^* = 1 + \frac{10}{9}x^2$$

n	x	erreur Trapèze	erreur adp_1	erreur adp_m	erreur simpson M	erreur simpson
1	-1.0	$7.471478e - 02$	$7.292186e - 02$	$7.234557e - 02$	$8.258460e - 03$	$7.906857e - 04$
2	-0.8	$4.781746e - 02$	$4.825016e - 02$	$4.838197e - 02$	$5.285414e - 03$	$5.060389e - 04$
3	-0.6	$2.689732e - 02$	$2.862213e - 02$	$2.916561e - 02$	$2.973046e - 03$	$2.846469e - 04$
4	-0.4	$1.195437e - 02$	$1.403776e - 02$	$1.469650e - 02$	$1.321354e - 03$	$1.265097e - 04$
5	-0.2	$2.988591e - 03$	$4.497048e - 03$	$4.974626e - 03$	$3.303384e - 04$	$3.162743e - 05$
6	0.0	$0.000000e + 00$	$0.000000e + 00$	$0.000000e + 00$	$0.000000e + 00$	$0.000000e + 00$
7	0.2	$2.988591e - 03$	$5.466136e - 04$	$2.273816e - 04$	$3.303384e - 04$	$3.162743e - 05$
8	0.4	$1.195437e - 02$	$6.136889e - 03$	$4.292481e - 03$	$1.321354e - 03$	$1.265097e - 04$
9	0.6	$2.689732e - 02$	$1.677083e - 02$	$1.355959e - 02$	$2.973046e - 03$	$2.846469e - 04$
10	0.8	$4.781746e - 02$	$3.244842e - 02$	$2.757394e - 02$	$5.285414e - 03$	$5.060389e - 04$
11	1.0	$7.471478e - 02$	$5.316968e - 02$	$4.633553e - 02$	$8.258460e - 03$	$7.906857e - 04$

TAB-12-

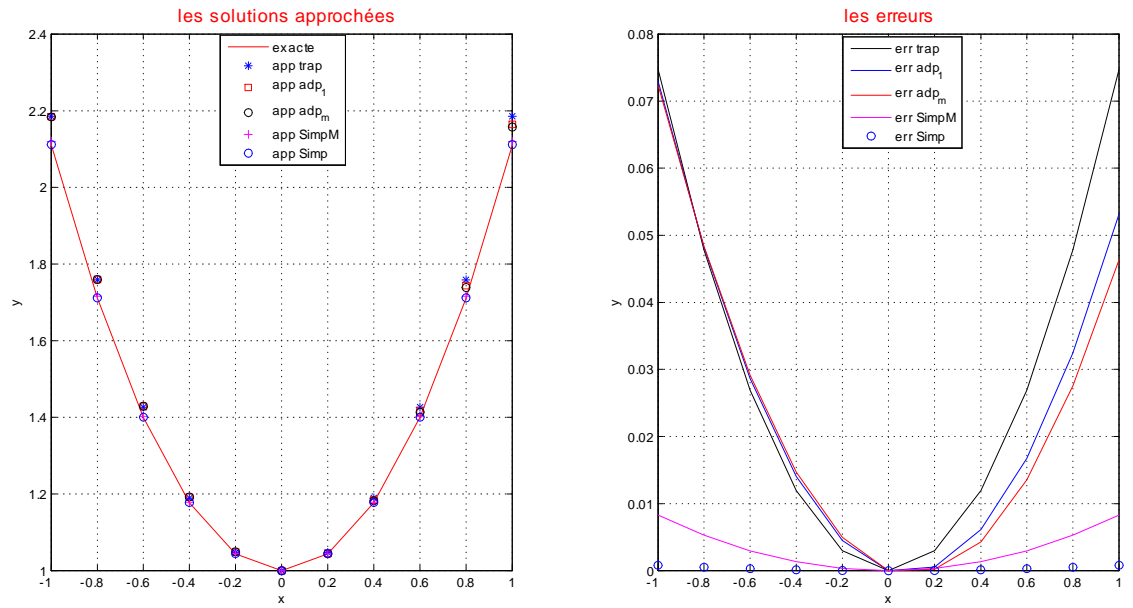


Figure-12-

comparaison des temps

1. temp de Trapèze :4.636473e-01
2. temp de adaptative\_1 :4.502658e-01
3. temp de Simpson modifiée :5.078167e-01
4. temp de adaptative\_m :5.866239e-01
5. temp de simpson :3.534781e-01

### 3.5.2 Les équations intégrales de Fredholm non linéaire

#### Exemple 3.5.1 (1)

soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = e^{(x)} - (e^2 + 1) \frac{x}{192} + \frac{1}{48} \int_0^1 xt\varphi^2(t) dt$$

Avec la solution exacte est

$$\varphi^* = e^{(x)}$$

n	x	erreur Trapèze	erreur adp_1	erreur adp_m	erreur simpson M	erreur simpson
1	0.0	0.00000e + 00	0.00000e + 00	0.00000e + 00	0.00000e + 00	0.000000e + 00
2	0.1	3.78493e - 05	3.08371e - 05	2.85749e - 05	7.48836e - 06	6.630556e - 09
3	0.2	7.56986e - 05	6.16743e - 05	5.71498e - 05	1.49767e - 05	1.326111e - 08
4	0.3	1.13548e - 04	9.25115e - 05	8.57248e - 05	2.24650e - 05	1.989167e - 08
5	0.4	1.51397e - 04	1.23348e - 04	1.14299e - 04	2.99534e - 05	2.652222e - 08
6	0.5	1.89246e - 04	1.54185e - 04	1.42874e - 04	3.74418e - 05	3.315278e - 08
7	0.6	2.27096e - 04	1.85023e - 04	1.71449e - 04	4.49301e - 05	3.978334e - 08
8	0.7	2.64945e - 04	2.15860e - 04	2.00024e - 04	5.24185e - 05	4.641389e - 08
9	0.8	3.02794e - 04	2.46697e - 04	2.28599e - 04	5.99069e - 05	5.304445e - 08
10	0.9	3.40644e - 04	2.77534e - 04	2.57174e - 04	6.73952e - 05	5.967500e - 08
11	1.0	3.78493e - 04	3.08371e - 04	2.85749e - 04	7.48836e - 05	6.630556e - 08

TAB-13-

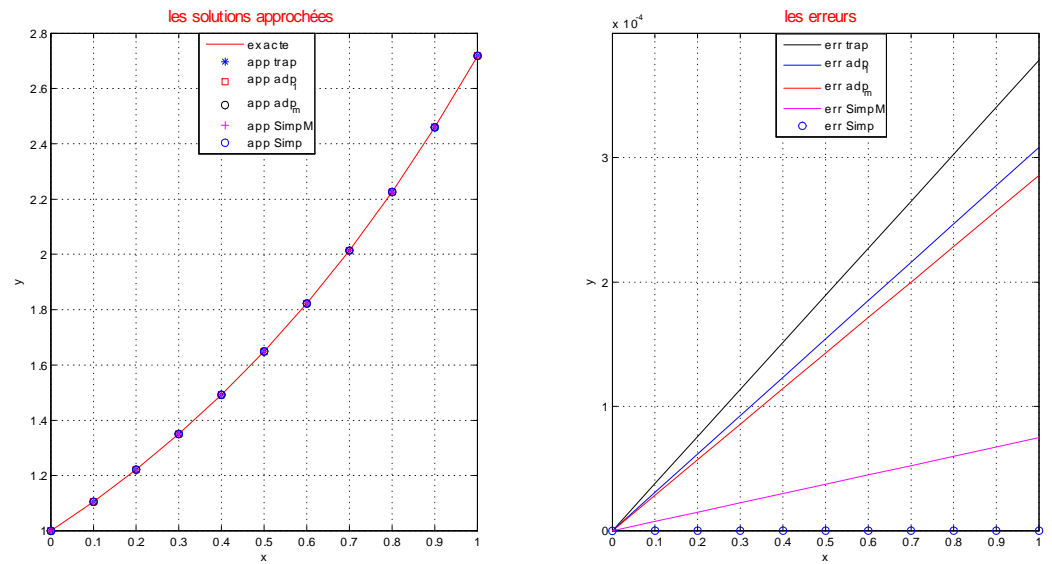


Figure-13-

## comparaison de temps :

1. temp de trap :5.141423e-01
2. temp de adp\_1 :6.559986e-01
3. temp de SimpM :8.646355e-01
4. temp de adp\_m :1.335492e+00
5. temp de Simp :1.308758e+00

soit l'équation intégrale

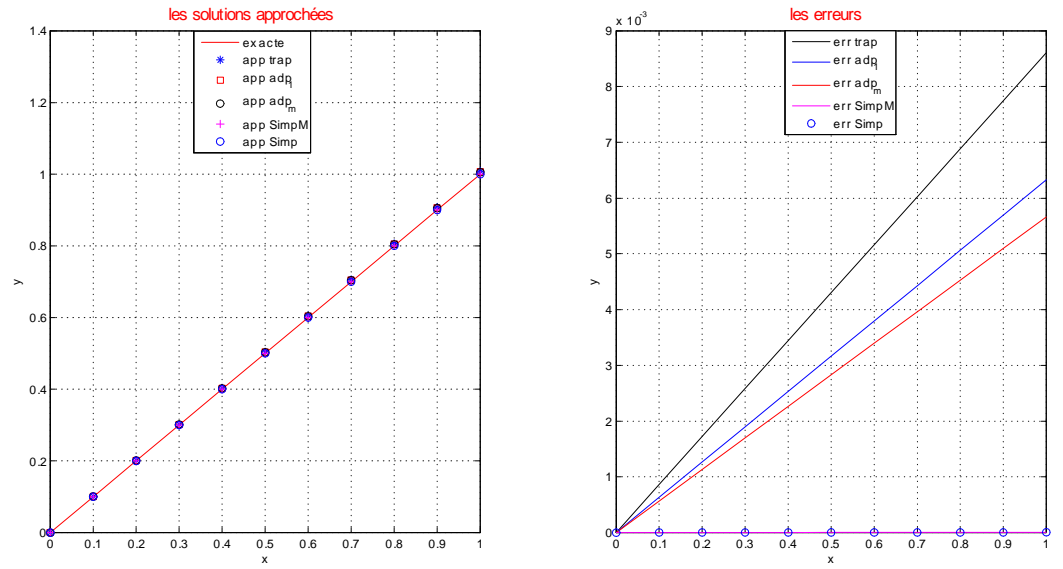
$$\varphi(x) = e^{(x)} - (e^2 + 1) \frac{x}{192} + \frac{1}{48} \int_0^1 xt\varphi^2(t) dt$$

Avec la solution exacte est

$$\varphi^* = e^{(x)}$$

n	x	erreur Trapèze	erreur adp_1	erreur adp_m	erreur simpson M	erreur simpson
1	0.0	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
2	0.1	8.607583e-04	6.328276e-04	5.660199e-04	4.166736e-07	4.166736e-07
3	0.2	1.721517e-03	1.265655e-03	1.132040e-03	8.333472e-07	8.333472e-07
4	0.3	2.582275e-03	1.898483e-03	1.698060e-03	1.250021e-06	1.250021e-06
5	0.4	3.443033e-03	2.531310e-03	2.264080e-03	1.666694e-06	1.666694e-06
6	0.5	4.303791e-03	3.164138e-03	2.830100e-03	2.083368e-06	2.083368e-06
7	0.6	5.164550e-03	3.796966e-03	3.396119e-03	2.500042e-06	2.500042e-06
8	0.7	6.025308e-03	4.429793e-03	3.962139e-03	2.916715e-06	2.916715e-06
9	0.8	6.886066e-03	5.062621e-03	4.528159e-03	3.333389e-06	3.333389e-06
10	0.9	7.746825e-03	5.695449e-03	5.094179e-03	3.750062e-06	3.750062e-06
11	1.0	8.607583e-03	6.328276e-03	5.660199e-03	4.166736e-06	4.166736e-06

**TAB-14-**



**Figure-14-**  
Comparaison de temps

temp de trap	temp de adp_1	temp de SimpM	temp de adp_m	temp de Simp
1.521583e+0	1.725807e+00	3.397308e+00	2.711941e+00	6.293146e+00

## Conclusion générale

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm(non linéaire et linéaire).

Notre travail consiste à trouver la solution approchée, par des différents méthodes de quadratures, comme la méthode de Trapèze, la méthode Simpson,, en comparant pour chaque cas les résultats approchées avec la solution exacte.



## Bibliographie

- [1] NADIR, M. Cours sur les équations intégrales, université de M'sila 2008.
- [2] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.
- [3] A. Karoui, On the Existence of Continuous Solutions of Nonlinear Integral Equations, University of Carthage, Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Bizerte, Jarzouna 7021, Tunisia.Appl.18(2005) 299-305.
- [4] Alfio Quarteroni · Fausto Saleri · Paola Gervasio, Calcul Scientifique Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave © Springer-Verlag Italia 2008 p 124-125
- [5] Gabriel Peyré. Résolution numérique d'équations intégrales, Exemple de radiosité, article. 2001.
- [6] B. Gagni, Résolution des équations intégrales par les méthodes adaptatives, Mémoire de magister université de M'sila 2006.
- [7] A. Rahmoune, Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales, Thèse de docteur en sciences université de M'sila 2011.
- [8] A. Rahmoune, Résolution Numérique des Equations Intégrales, Mémoire de magister université de M'sila 2002.
- [9] Joshua H. Gordis and Beni, Neta. : An adaptive method for the numerical solution of Fredholm integral equations, Naval Postgraduate School, Monterey, CA 93943 <http://www.math.nps.navy.mil>