UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIORAT
ECOLE DOCTORALE
Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Magister

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

par

KHADRAOUI Abdelmalek

Sujet

STABILISATION NON DISSIPATIVE D'UN SYSTEME DE TIMOSHENKO

Soutenu publiquement le :01/07/2010 devent le jury composé de :

Abdelhamid AYADI	Professeur	U. O. BOUAGUI	Président
Aïssa GUESMIA	M.C.H.D.R	U. METZ-France	Directeur
Brahim BOUDERAH	Professeur	U. M'SILA	Examinateur
Lahcène MEZRAG	Professeur	U. M'SILA	Examinateur
Noureddine BENHAMIDOUCHE	Professeur	U. M'SILA	Examinateur

Promotion : 2006/2007

Didicaces

A l'âme de ma soeur DALILA, et à mes soeurs MIMOUNA et SOUMIA, ainsi qu'à la petite ISRÂA.

Et à tous les membres de ma famille .

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à témoigner ma vive reconnaissance au Docteur Aïssa GUESMIA, le directeur de mon mémoire de magister, pour tout ce qu'il m'a apporté scientifiquement et humainement, et pour avoir accepté la direction de mon mémoire.

Je tiens aussi à remerecier tout particulièrement le Professeur Abdelhamid AYADI d'avoir accepté la présidence du jury, ainsi que le Professeur MEZREG Lahcène d'être membre du jury et aussi le Professeur Brahim BOUDERAH et le Professeur Noureddine BENHMIDOUCHE. Mes remerciements vont aussi aux enseignants du département de Mathématiques de l'université de M'SILA.

SOMMAIRE

Introduction

Dans [20] Timoshinko, a donné le système de deux équations hyperboliques couplées suivant :

$$\begin{aligned} &\rho u_{tt} = (K(u_x - \varphi))_x, && \text{dans(0,L)}\times\text{(0,}+\infty\text{)}, \\ &I_\rho \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + K(u_x - \varphi), && \text{dans(0,L)}\times\text{(0,}+\infty\text{)} \end{aligned} \tag{1}$$

comme un modèle simple décrivant les vibrations d'un poutre, où t est la variable du temps, x la variable de l'espace au long du poutre de longueur L dans sa configuration d'equilibre, u est le déplacement transverse du poutre, et φ est l'angle de rotation du filement du poutre.

Les cofficients : ρ, I_ρ, E, I et K sont respectivement la masse linéaire (la masse par unité de longueur), le moment polaire d'inertie de la section efficace, le module d'Young de l'élasticité, le moment d'inertie d'une section efficace et le module d'étirement.

Ce système a été étudié par beaucoup de mathématiciens et des resultats concernant l'existence et le comportement asymptotique ont été obtenus. Kim et Renardy [09] ont considéré (1) ensemble avec deux conditions linéaire aux bords de la forme

$$\begin{aligned} &k\varphi(L,t) - k\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \alpha\frac{\partial u}{\partial t}(L,t), && \forall t \geq 0 \\ &EI\frac{\partial \varphi}{\partial x}(L,t) = -\beta\frac{\partial \varphi}{\partial t}(L,t), && \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Les auteurs ont établit un résultat de stabilité exponentielles. Ils ont aussi donné des éstimations numériques aux valeurs propres de l'opérateur associé au système (1). Un résultat analogue a été aussi établit par Feng et al. [04] où la stabilité d'un système de Timoshenko a été étudié. Raposo et al. [12] ont étudié (1) avec des conditions de Dirichlet homogénes sur le bord et deux contrôles linéaires internes et ont prouvé que l'énergie décroit exponentiellement, ce résultat est similaire à celui donné par Taylor et al. [19]. Mais comme ils l'ont mentionné, l'originalité de leur travail repose sur la méthode de la théorie des semigroupes qui a été développée par Liu et Zheng [11]. Soufyane et Wehbe [16] ont montré qu'il est possible de stabiliser uniformement (1) en utilisant un feedback unique localement distribué. Ils ont considéré

$$\begin{aligned}
&\rho u_{tt} = (K(u_x - \varphi))_x, && \text{dans}(0, L) \times (0, +\infty) \\
&I_\rho \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + K(u_x - \varphi) - b\varphi_t, && \text{dans}(0, L) \times (0, +\infty) \\
&u(0, t) = u(L, t) = \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0, && \forall t > 0
\end{aligned} \tag{3}$$

où b est une fonction positive et continue vérifiant

$$b(x) \geq b_0 > 0 \quad \forall x \in [a_0, a_1] \subset [0, L].$$

En réalité, Ils ont prouvé que la stabilité uniforme de (3) tient si et seulement si les vitesses de propogation sont égales $\left(\dfrac{K}{\rho} = \dfrac{EI}{I_\rho}\right)$; autrement, c'est seulement la stabilité asymptotique qui a été prouvé. Ce résultat améliore un ancien résultat de Soufyane [18] et Shi et Feng [15], où une décroissance exponentielle de l'énergie de la solution de (1) ensemble, avec deux feedbacks distribués et locaux, a été prouvé. Ammar-Khodja et al. [02] ont considéré un système de type Timoshenko linéaire avec une mémoire de la forme :

$$\begin{aligned}
&\rho_1 u_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x = 0, && \text{dans} \quad (0,\mathrm{L})\times(0,+\infty) \\
&\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int\limits_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + K(\varphi_x + \psi) = 0, && \text{dans} \quad (0,\mathrm{L})\times(0,+\infty\ )
\end{aligned} \tag{4}$$

ensemble avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogène.

Ils ont utilisé les techniques du multiplicateurs et ont prouvé que, pour une fonction de relation de décroissance uniforme, le système est uniformement stable si et seulement si les vitesses de propogation sont égales, c'est à dire $\dfrac{K}{\rho_1} = \dfrac{b}{\rho_2}$, précisement, ils ont prouvé une décroissance exponentielle si g satisfait à une relation de la forme

$$-k_0 g \leq g' \leq -k_1 g, \quad |g''| \leq k_2 g$$

pour $K_0, K_1, K_2 > 0$, et un résultat de décroissance polynomiale si g satisfait à une relation de la forme

$$-b_1 g^{(p+1)/p} \leq g' \leq -b_2 g^{(p+1)/p}, \quad \forall p > 2$$

$$-b_3|g'|^{(p+2)/(p+1)} \leq g'' \leq -b_4|g'|^{(p+2)/(p+1)}, \quad \forall p > 2$$

pour b_1, b_2, b_3, $b_4 > 0$. Le feedback du type mémoire a été aussi utilisé par Santos [13]. Ils ont considéré un système de Timoshenko et ont montré que la présence de deux feedbacks de type mémoire sur une portion du bord stabilise le système uniformément.

Il ont aussi obtenu le taux de décroissance de l'énergie qui est exactement le taux de décroissance des fonctions de relaxtion. Shi et Feng [14] ont étudier un système de Timoshenko et ont montré que, sous quelques contrôles localement distribués, la solution du système décroit exponentiellement.

Pour arriver à leur but, les auteurs ont utilisé la méthode de multiplicateurs de fréquences.

Dans le présent travail, on est concerné par

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - K_1(\varphi_x + \psi)_x = 0, & (0,\text{L})\times \mathbb{R}_+ \\ \rho_2\psi_{tt} - K_2\psi_{xx} + K(\varphi_x + \psi) + \int\limits_0^L g(t-s)\psi_{xx}(s)ds = 0, & (0,\text{L})\times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0, & \forall \text{ t} \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), & x \in (0,\text{L}) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), & x \in (0,\text{L}) \end{cases}$$

oùρ_1, ρ_2, K_1, K_2, $L > 0$ et $K \in$ R vérifient $\dfrac{K_1}{\rho_1} = \dfrac{K_2}{\rho_2}$. (même vitesse de propogation).

Sont perte de généralité, on considère le cas

$$\rho_1 = \rho_2 = K_1 = K_2 = L = 1.$$

Le cas $K = 1$ donne le système considérè par A. Guesmia et S. Messaoudi [07], alors le système (5) est dissipatif (son energie décroissante). Par contre, si $K \neq 1$, n'est plus dissipatif. Lobjectif principal de ce travail est de montrer que (5) reste stable si $|K-1|$ est assez proche de 0. La metôde utilisée pour démontrer ce resultat est basée sur la methôde de multiplicateurs (voir V. Komornik [10]) et des inégalités intégrales démontrées par A. Guesmia [05].

Chapitre 1

Les espaces de Sobolev

Nous rappelons ici quelques définitions concernent les espaces $L^p(\Omega)$, de Sobolev.........
Pour plus détails   Voir [01].

Définition 1 : Les espaces $C^k(\Omega)$

Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω dans $\mathbb{R}$, k fois continûment dérivables,

et par $C^\infty(\Omega)$ on désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

On désigne par $C_c^k(\Omega)$ les éléments de $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω.

On désigne par $C_c^\infty(\Omega)$ les éléments de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.

Définition 2 : Les espaces $L^p(\Omega)$

Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$. On définit $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable tel que : } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$: $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que : $\exists\ c \in \mathbb{R}^+$verifiant $|f| \leq c$ p.p sur $\Omega\}$.

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c \in \mathbb{R}^+ \text{tel que} : |f| \leq c \ \text{ p.p sur } \ \Omega\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach, et l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire :

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Définition 3 : Les espaces de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}, p \in [1, +\infty]$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ($\Rightarrow \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$).

On note : $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{tel que} : \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ \textit{avec} \ |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \ \ \textit{vrifiant}$$

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}.$$

On pose $g_\alpha = D^\alpha v$ et on note

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou de la norme equivalente : $\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}$, si $1 \leq p < \infty$, et

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{si } \ p = +\infty.$$

Remarques : 1. $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

2. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

On munit l'espace $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$< u, v >_{H^1(\Omega)} = < u, v >_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} >_{L^2(\Omega)} .$$

On a : $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport à la norme engendrée.

On définit l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. par la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Si Ω est de classe C^1, alors :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \;\; \textit{tel que} : u = 0 \;\; \text{sur} \;\; \partial\Omega\}.$$

Définition 4 : Inégalité de Hölder

Soient p, $q \in [1, +\infty]$ tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (si $p = 1$, alors $q = +\infty$, et inversement).

Alors :

$\forall f \in L^p(\Omega), \forall g \in L^q(\Omega) : fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

c.à.d., si $p, q \in]1, +\infty[$,

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

et si $p = 1$ et $q = \infty$,

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int\limits_\Omega |f(x)|dx.$$

Définition 5 : Inégalité de Young

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors $\forall \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$|\alpha\beta| \leq \frac{1}{p}|\alpha|^p + \frac{1}{q}|\beta|^q.$$

Définition 6 : Inégalité de Poincaré

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert borné . Il existe une constante $c > 0$ vérifiant :

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \quad \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c \parallel \nabla f \parallel_{L^2(\Omega)} \quad \text{où } \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Cette inégalité montre que $\|\nabla f \|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalante à la norme de $H^1(\Omega)$, et par conséquent $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$< f, g >_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f(x).\nabla g(x) dx,$$

où le . sinifie le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ $(X.Y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j)$.

Définition 7 : Produit de convolution

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

On pose :

$$(f * g)(x) = \int_\Omega f(x-y) g(y) dy, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Alors $f * g \in L^p(\Omega)$ et on a

$$\|f * g\|_{L^p(\Omega)} \leq \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)} \parallel g \parallel_{L^p(\Omega)} .$$

Chapitre 2

INEGALITES INTEGRALES

Dans ce chapitre, on donne quelques inégalités intégrales appliquées dans les deux cas (dissipatif et non dissipatif).

$a)$ Cas dissipatif

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement appliquées à la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs.

Les résultats des nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants, dûs à A. Haraux, V. Komornik et P. Martinez.

Lemme 1.1. (Haraux 1978, Komornik 1994 et Martinez 1998 [05])

Soit $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue décroissante et* $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction strictement croissante de classe* $C^1(\mathbb{R}_+)$ *tel que :* $\phi(0) = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty$.

Supposons que : $\exists p \geq 0$ *et* $d > 0$ *tel que*

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t) E^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0) E(s), \forall s \geq 0.$$

Alors

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0)e^{1-d\phi(t)} & \forall t \geq 0 \ si \ p = 0 \\ E(t) \leq E(0)\left(\dfrac{1+p}{1+pd\phi(t)}\right)^{\dfrac{1}{p}} & \forall t \geq 0 \ si \ p > 0 \end{cases}$$

Cas particuliers 1. $\phi(t) = t$ *et* $p = 0$

$$E(t) \leq E(0)e^{1-dt}, \quad \forall t \geq 0$$

estimation exponentielle (voir Haraux [08]).

2. $\phi(t) = t$ *et* $p > 0$

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+p}{1+pdt}\right)^{\dfrac{1}{p}}, \quad \forall t \geq 0$$

estimation polynomiale (voir Komornik [10]).

Lemme 1.2. (M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise 2003 [05])

Soit $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue décroissante vérifiant*

$$\int_s^{+\infty} \varphi(E(t)) \leq \frac{1}{d}\ E(s), \quad \forall s \geq 0,$$

où d *est un réel strictement positif et* $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant* $\varphi(0) = 0$.

Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 *et* c_1 *tels que*

$$E(t) \leq \varphi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t}\right), \quad \forall\ t \geq t_0,$$

où $\psi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est définie par :*

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\varphi(t)} dt, \quad \forall s > 0.$$

Lemme 1.3. (F. Alabau-Boussouria 2005 [05])

Soit $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue décroissante vérifiant*

$$\int_s^{+\infty} E(t)F^{-1}(E(t)) \leq \frac{1}{d}\, E(s), \quad \forall s \geq 0$$

où $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0, b[$ *est une fonction strictement croissante vérifiant, pour un réel* $b > E(0)$,

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} F(t) = b.$$

Alors il existe trois réels strictement positifs $t_0,\ c_0$ *et* c_1 *tels que*

$$E(t) \leq F\left(\frac{1}{\psi^{-1}(c_0 t)}\right), \quad \forall\ t \geq t_0$$

où $\psi : [c_0 t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie par :*

$$\psi(s) \;=\; s + \int_{F(\frac{1}{s})}^{c_1} \frac{1}{\varphi(t)} dt, \qquad \forall s \geq c_0 t_0.$$

b) Cas non dissipatif

On rappelle ici quelques inégalités intégrales appliquées à la stabilisation des systèmes d'evolution non dissipatifs.

Lemme 1.4. (Aïssa Guesmia [05])

Soient $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction dérivable,* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $a_3, r, p, \lambda \in \mathbb{R}_+$. *Supposons que*

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)dt \leq a_1 E(s) + a_2 E^{p+1}(s) + a_3 E^{r+1}(t), & \forall\ 0 \leq s \leq T, \\ E'(t) \leq \lambda E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Si $a_3\lambda(r+1) < 1$, *alors il existe deux constantes strictement positives* w *et* c *telles que,* $\forall t \geq 0$,

$$E(t) \leq c\ e^{-wt} \quad \text{si} \quad r = 0,$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{-\frac{1}{r}} \quad \text{si} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0,$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad \text{si} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \lambda > 0.$$

Lemme 1.5. (Aïssa Guesmia [05])

Soit $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction dérivable,* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *et* $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction convexe et strictement croissante vérifiant :* $\varphi(0) = 0$.

Supposons que

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))dt \leq E(s), & \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Alors E *vérifie l'estimation suivante*

$$E(t) \leq e^{\tau_0 \lambda} g^{-1}\left[e^{\lambda(t-h(t))}\varphi\left(\psi^{-1}[h(t) + \psi(E(0))]\right)\right], \quad \forall t \geq 0 \qquad (*)$$

où
$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\varphi(s)} ds, \quad \forall t > 0,$$

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si} \ \ \lambda = 0 \\ \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds & \text{si} \ \ \lambda > 0 \end{cases} \qquad \forall t \geq 0,$$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \in [0, T_0], \\ K^{-1}(D(t)), & \forall t > T_0. \end{cases}$$

$$D(t) = \int_0^t e^{\lambda s} ds, \ \forall t \geq 0,$$

$$K(t) = D(t) + \frac{\psi^{-1}[t + \psi(E(0))]}{\varphi\left(\psi^{-1}[t + \psi(E(0))]\right)} e^{\lambda t}, \qquad \forall t \geq 0,$$

$$\tau_0 = \begin{cases} 0, & \forall t > T_0, \\ T_0, & \forall t \in [0, T_0], \end{cases}$$

$$T_0 = D^{-1}\left(\frac{E(0)}{\varphi(E(0))}\right).$$

Remarques

1) $(*) \Rightarrow E(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$

2) Si $\lambda = 0$ ($\Leftrightarrow E$ est décroissante) et $\varphi(t) = dt^{r+1}$ avec

$p \geq 0$ et $d > 0$, alors

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} E(t) \leq E(0) e^{1-dt}, & p = 0, \\ E(t) \leq E(0) \left(\dfrac{1+p}{1+pdt}\right)^{\frac{1}{p}}, & p > 0. \end{cases}$$

Chapitre 3

STABILITE DU SYSTEME DE Timoshenko

Dans ce chapitre, on donne le resultat d'existence et régularité de solution de système de Timoshenko et on démontre la stabilité du système (5) en utilisant la méthode de multiplicateurs et les inégalités intégrales concernant le cas non dissipatif données dans le chapitre précédent.

L'objectif de cette partie est d'étudier la question de la stabilité, i.e :
montrer que $E(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$ et donner une estimation sur sa vitesse de convergence.
E est l'energie du système (5) (définie ci-après).

Nous donnons le système de Timoshenko suivant

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, & (0{,}1)\times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + K(\varphi_x + \psi) + \int\limits_0^1 g(t-s)\psi_{xx}(s)ds = 0, & (0{,}1)\times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, & \forall \text{ t} \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), & x \in (0{,}1) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), & x \in (0{,}1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, & (0{,}1)\times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + \varphi_x + \psi + \int\limits_0^1 g(t-s)\psi_{xx}(s)ds = (1-K)(\varphi_x + \psi), & (0{,}1)\times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, & \forall \text{ t} \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), & x \in (0{,}1) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), & x \in (0,1)\ . \end{cases}$$

On considère les hypothèses suivantes

(H_1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction dérivable est vérifiant les conditions suivantes

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int\limits_0^{+\infty} g(s)ds = l > 0.$$

(H_2) Il existe une fonction $\xi(t)$ décroissante et dérivable vérifiant : $\lim\limits_{t\to+\infty} \xi(t) > 0$ et

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Nous remarquons que si : g converge vers 0 exponentielement, i.e :

$$g(t) \leq ae^{-bt}, \quad \forall t \geq 0$$

$(a, b > 0)$ alors (H_2) est vérifiée avec $\xi(t) = b$.

Proposition 3.1.

Soient (φ_0, φ_1), $(\psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ *donnés.*

Supposons que l' hypothèse (H_1) *vérifiée. Donc le système* (5), *admet une solution globale unique (faible)*

$$\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}_+; H_0^1(0,1)) \bigcap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)).$$

Si

$$(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in (H^2(0,1) \bigcap H_0^1(0,1)) \times H_0^1(0,1),$$

alors la solution (classique) vérifie

$$\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}_+; H^2(0,1) \bigcap H_0^1(0,1)) \bigcap C^1(\mathbb{R}_+; H_0^1(0,1)) \bigcap C^2(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)).$$

Remarque 3.2 .

Ce resultat pout être prové en utilisant des arguments standards tel que la méthode de Galarkin.

Stabilité de (5)

Pour définir l'énergie E du système (5) on multiplie les deux première équations de (5) par les fonctions φ_t et ψ_t respectivement, on applique l'intégration par partie sur $(0,1)$ et on utilise (H$_1$) *et* (H$_2$), on trouve :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\varphi_t^2 + \psi_t^2 + (1 - \int_0^t g(s)ds)\psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2\right) + \frac{1}{2} g \circ \psi_x\right]$$
$$= -\frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{2}g' \circ \psi_x + (1-K)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx,$$

où

$$g \circ v = \int_0^1 \int_0^t g(t-s)\left(v(t) - v(s)\right)^2 dsdx \ , \qquad \forall v \in L^2(0,1).$$

On définit alors E par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\varphi_t^2 + \psi_t^2 + (1 - \int_0^t g(s)ds)\psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2\right) + \frac{1}{2} g \circ \psi_x$$

et on a :

$$E'(t) \quad = \quad -\frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{2}g' \circ \psi_x + (1-K)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx \tag{3.1}$$

Si $K = 1$ (le cas considéré par A. Guesmia et S. Messaoudi [20]), alors $E' \leq 0$ et donc (5) est dissipatif. Dans notre cas, $K \neq 1$ en général, et par conséquent notre système (5) n'est pas forcément dissipatif.

Théorème 3.3 *Supposans que* $|K-1|$ *est assez petit,et supposons que les hypothèses* (H_1) *et*(H_2) *sont satisfaites.*
Etant donné (φ_0, φ_1), $(\psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. *Alors il existe deux constantes positives* c *et* ω *telles que la solution du système* (5) *vérifie*

$$E(t) \leq ce^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Remarque 3.4 Dans toute la suite, c désigne une constante générique qui peut changer d'une ligne à une autre mais qui ne dépend pas de K.
Pour démontrer la stabilité du système (5) on démontre les lemmes suivants qui nons seront utiles.

Lemme 3.5.
$\forall u \in H_0^1(]0,1[), \exists c > 0$ *tel que*

$$\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)ds) \right)^2 dx \quad \leq \quad cg \circ u_x \quad . \tag{3.2}$$

Démonstration

On a

$$\int_0^1 \left[\int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))ds \right]^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^t \sqrt{g(t-s)}\sqrt{g(t-s)}(u(t)-u(s))ds \right]^2 dx.$$

D'aprés l'inégalité de Hölder on trouve

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds \right) dx$$
$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^t g(\tau)d\tau \right) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))^2 dsdx.$$

Donc, d'aprés (H_1), on obtient

$$\int_0^1 \left[\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)) \right]^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau \right) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))^2 dsdx \text{ (car } \int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau < 1)$$
$$\leq \int_0^t g(t-s) \int_0^1 (u(t)-u(s))^2 dxds.$$

Maintenant, d'aprés l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\int_0^1 \left[\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)) \right]^2 dx \leq c \int_0^t g(t-s) \int_0^1 (u_x(t)-u_x(s))^2 dxds$$
$$\leq c \int_0^1 \int_0^t g(t-s)(u_x(t)-u_x(s))^2 dsdx$$
$$\leq cg \circ u_x \quad .$$

Lemme 3.6.

Soit I la fonction définie par

$$I(t) = -\int_0^1 \psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))dsdx.$$

Alors, pour tout $\delta > 0$,

$$I'(t) \leq -\left(\int_0^t g(s)ds - \delta\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + \delta\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + c\delta\int_0^1 \psi_x^2 dx \quad (3.3)$$
$$+c(\delta+\frac{1}{\delta})g\circ\psi_x - \frac{c}{\delta}g'\circ\psi_x + c\frac{K^2}{\delta}g\circ\psi_x.$$

Démonstration

En utilisant le système (5) on obtient

$$I'(t) = -\int_0^1 \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t)-\psi(s))dsdx - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx$$
$$-\int_0^1 \left[\psi_{xx} - \int_0^1 g(t-s)\psi_{xx}(s)ds - K(\varphi_x+\psi)\right]\int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))dsdx$$
$$= -\int_0^1 \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t)-\psi(s))dsdx - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx$$
$$+\int_0^1 \psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi_x(t)-\psi(s))dsdx + \int_0^1 K(\varphi_x+\psi)\int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))dsdx$$
$$-\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\psi(s)ds\right)\left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t)-\psi_x(s))ds\right)dx.$$

D'aprés (H_1), l'inégalité de Young et l'inégalité de Hölder et en utilisant le Lemme 3.5 pour $-g'$ on obtient, pour tout $\delta > 0$

$$-\int_0^1 \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t)-\psi(s))dsdx \leq \delta\int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{c}{\delta}g'\circ\psi_x,$$

$$\int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s)(\psi_x(t)-\psi_x(s))dsdx \leq \delta\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\delta}g\circ\psi_x$$

$$K\int_0^1(\varphi_x+\psi)\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t)-\psi(s))dsdx \le \delta\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+\frac{c}{\delta}K^2 g\circ\psi_x$$

et, pour tout $\grave{\delta}>0$,

$$\begin{aligned}
&-\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)\left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t)-\psi_x(s))ds\right)dx\\
&\le \grave{\delta}\int_0^1\left[\int_0^t \sqrt{g(t-s)}\sqrt{g(t-s)}(\psi_x(s)-\psi_x(t)+\psi_x(t))\right]^2\\
&\qquad +\frac{c}{\grave{\delta}}\left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t)-\psi_x(s))ds\right)^2dx\\
&\le 2\grave{\delta}\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)ds\right)\left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t)-\psi(s))^2ds\right)\\
&+\frac{c}{\grave{\delta}}\left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t)-\psi_x(s))ds\right)^2dx+2\grave{\delta}\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)ds\right)^2\psi_x^2dx\\
&\le \grave{\delta}\left(\int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau\right)g\circ\psi_x+2\grave{\delta}\left(\int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau\right)\int_0^1\psi_x^2dx+\frac{c}{\grave{\delta}}g\circ\psi_x\\
&\le \grave{\delta}g\circ\psi_x+c\grave{\delta}\int_0^1\psi_x^2dx+\frac{c}{\grave{\delta}}g\circ\psi_x\\
&\le c(\delta+\frac{1}{\delta})g\circ\psi_x+\delta\int_0^1\psi_x^2dx \qquad (\text{où on choisit } \ c\grave{\delta}=\delta).
\end{aligned}$$

Donc

$$I'(t)\le(\int_0^t g(s)ds-\delta)\int_0^1\psi_x^2dx+\delta\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+c\delta\int_0^1\psi_x^2dx+c(\delta+\frac{1}{\delta})g\circ\psi_x$$
$$-\frac{c}{\delta}g'\circ\psi_x+\frac{c}{\delta}K^2g\circ\psi_x.$$

Lemme 3.7.

Soit $K_1(t)$ *la fonction définie par*

$$K_1(t) = -\int_0^1 (\psi\psi_t + \varphi\varphi_t)dx.$$

Alors

$$K_1'(t) \leq -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)dx + \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 + c\int_0^1 \psi_x^2 dx + cg \circ \psi_x \tag{3.4}$$

$$+(K-1)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi)dx$$

Démonstration

En utilisant (5), (H_1) et (H_2) on trouve

$$K_1'(t) = -\int_0^1 (\psi_t^2+\varphi_t^2)dx - \int_0^1 \varphi(\psi_x+\varphi_{xx})dx - \int_0^1 \psi\left[\psi_{xx} - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds - K(\varphi_x+\psi)\right]dx$$

$$= -\int_0^1 (\psi_t^2+\varphi_t^2)dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx - \int_0^1 \psi_x\left[\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right] + \int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2 + (K-1)\int_0^1 \psi(\psi+\varphi_x)dx$$

$$\leq -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)dx + \int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2 dx + c\int_0^1 \psi_x^2 dx + cg\circ\psi_x + (K-1)\int_0^1 \psi(\varphi_x+\psi)dx.$$

Lemme 3.8.

Soit $K_2(t)$ *la fonction définie par*

$$K_2(t) = \int_0^1 \psi_t(\psi+\varphi_x)dx + \int_0^1 \psi_x\varphi_t dx - \int_0^1 \varphi_t \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)dsdx.$$

Alors, pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$K_2'(t) \leq \left[\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=1} + \varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2 dx \tag{3.5}$$

$$+\int_0^1 \psi_t^2 - \int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{c}{\varepsilon} g'\circ\psi_x + (1-K)\int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2 dx.$$

Démonstration

En utilisant le système (5) et l'intégration par partie et d'aprés l'inégalité de Young et le Lemme 3.6 on trouve

$$K_2'(t) = \int_0^1 (\varphi_x+\psi)\left[\psi_{xx} - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds - K(\varphi_x+\psi)\right]dx + \int_0^1 (\varphi_{xt}+\psi_t)\psi_t dx + \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx$$

$$+\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+\psi)_x dx - \int_0^1 (\varphi_x+\psi)_x \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)dsdx - \int_0^1 \varphi_t\left(g(0)\psi_x + \int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)ds\right)dx$$

$$= \left[\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=1} - K\int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2 + \int_0^1 \psi_t^2 dx - g(t)\int_0^1 \psi_x\varphi_t dx$$

$$-\int_0^1 \left[\varphi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi_x(s)-\psi_x(s))ds\right]dx.$$

D'après l'inégalité de Young on obtient

$$K_2'(t) \leq \left[\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=1} + \varepsilon c\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$-\frac{c}{\varepsilon} g'\circ\psi_x + (1-K)\int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2 dx.$$

Lemme 3.9.

Soit $K_3(t)$ la fonction définie par

$$K_3(t) = \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 m(x)\psi_t\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)dx + \varepsilon\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_x dx$$

où $\varepsilon > 0$ et $m \in C^1([0,1])$ vérifiant : $m(0) = -m(1) = 2$ (on peut prendre $m(x) = 2 - 4x$). Alors

$$K_3'(t) \leq -\frac{1}{4\varepsilon}\left[\left(\psi_x(1,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)ds\right)^2 + \left(\psi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)ds\right)^2\right] \tag{3.6}$$

$$-\varepsilon\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)+(\frac{1}{4}+\varepsilon c)\int_0^1(\psi+\varphi_x)^2dx+\varepsilon c\int_0^1 \varphi_t^2dx+\frac{c}{\varepsilon}\left(\int_0^1 \psi_x^2dx + g\circ\psi_x\right)+\frac{c}{\varepsilon}\int \psi_t^2dx$$

$$-\frac{c}{\varepsilon}g'\circ\psi_x + \frac{1-K}{4\varepsilon}\int_0^1\left[m(x)\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)(\varphi_x+\psi)\right]dx.$$

Démonstration

En utilisant le système (5), l'intégration par partie et l'inégalité $\varphi_x^2 \leq 2(\psi+\varphi_x)^2 + 2\psi^2$ (ainsi que l'inégalité de Poincaré) on trouve

$$K_3'(t) = \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 m(x)\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\right)_x\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)dx$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 m(x)\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)(\varphi_x+\psi)dx$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1\left[m(x)\psi_t\left(\psi_{xt} - g(0)\psi_x - \int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)ds\right)\right]dx$$

$$+\frac{1-K}{4\varepsilon}\int_0^1 m(x)\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\right)(\varphi_x+\psi) + \varepsilon\int_0^1 m(x)\psi_x\varphi_x dx$$

$$+\varepsilon\int_0^1 m(x)\varphi_{xx}\varphi_x dx + +\varepsilon\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_{xt}dx$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon}\left[-\left(\left[\psi_x(1,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)ds\right]^2 + \left[\psi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)ds\right]^2\right)\right]$$

$$-\frac{1}{8\varepsilon}\int_0^1 m'(x)\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)^2 dx$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1\left[m(x)\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)(\varphi_x+\psi)\right]-\frac{1}{8\varepsilon}\int_0^1 m'(x)\psi_t^2dx$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon}\left[\int_0^1\left[m(x)\psi_t\left(\int_0^t g'(t-s)(\psi_x(t)-\psi_x(s)ds\right)\right]dx-g(t)\int_0^1 m(x)\psi_x\psi_t dx\right]$$

$$+\varepsilon\left[\int_0^1 m(x)\psi_x\varphi_x dx-(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t))-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_x^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_t^2dx\right]$$

$$+\frac{1-K}{4\varepsilon}\int_0^1\left[m(x)\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\right)(\varphi_x+\psi)\right]dx.$$

Lemme 3.10.

Soit la fonction $K(t)$ définie par

$$K(t)=3c\varepsilon K_1(t)+K_2(t)+K_3(t)$$

où $\varepsilon>0$ et $c>0$. Alors

$$K'(t)\leq-\frac{1}{2}\int_0^1(\psi+\varphi_x)^2dx-c\int_0^1\varphi_t^2dx+c\int_0^1\psi_x^2dx+cg\circ\psi_x-cg'\circ\psi_x \tag{3.7}$$

$$+(K-1)\left[\int_0^1\left(c\psi(\varphi_x+\psi)-(\psi+\varphi_x)^2\right)dx-c\int_0^1 m(x)(\varphi_x+\psi)\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)dx\right].$$

Démonstration

D'après les Lemmes 3.8, 3.9 et 3.10 et en utilisant l'inégalité suivante

$$\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)\varphi_x\leq\varepsilon\varphi_x^2+\frac{1}{4\varepsilon}\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)^2,$$

on obtient

$K'(t)=3c\varepsilon K_1'(t)+K_2'(t)+K_3'(t)$

$$\leq -3c\varepsilon \int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t)^2 + 3c\varepsilon \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + 3c^2\varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx + (3c^2\varepsilon) g \circ \psi_x$$

$$+3c\varepsilon(K-1) \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx + \left[\left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds \right) \varphi_x \right]_{x=0}^{x=1} + \varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

$$+ \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_x^2 - \frac{c}{\varepsilon} g' \circ \psi_x + (1-K) \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon} \left[\left(\psi_x(1,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(1,t) ds \right)^2 + \left(\psi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s) ds \right)^2 \right]$$

$$-\varepsilon \left(\varphi_x^2(1,t) + \varphi_x^2(0,t) \right) + (\frac{1}{4} + \varepsilon c) \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + \varepsilon c \int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

$$+\frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} g \circ \psi_x + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{c}{\varepsilon} g' \circ \psi_x$$

$$+\frac{1-K}{\varepsilon} \int_0^1 \left[m(x)(\varphi_x + \psi) \left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x ds \right) \right] dx.$$

Alors

$$K'(t) \leq (4\varepsilon c - \frac{3}{4}) \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx - \varepsilon c \int_0^1 \varphi_t^2 dx + (\frac{c}{\varepsilon} - 3\varepsilon c) \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$+(3c^2\varepsilon + \frac{2c}{\varepsilon}) \int_0^1 \psi_x^2 dx + (3c^2\varepsilon + \frac{c}{\varepsilon}) g \circ \psi_x - \frac{2c}{\varepsilon} g' \circ \psi_x$$

$$(K-1) \left[\int_0^1 \left(3c\varepsilon(\varphi_x + \psi)\psi - (\psi + \varphi_x)^2 \right) dx - \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 m(x)(\varphi_x + \psi) \left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds \right) dx \right].$$

On choisit $4c\varepsilon < \dfrac{1}{4} \Longrightarrow 4c\varepsilon - \dfrac{3}{4} \leq -\dfrac{1}{2}$, on trouve

$$K'(t) \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx - c \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + cg \circ \psi_x - cg' \circ \psi_x$$

$$+(K-1)\left[\int_0^1 \left(c\psi(\varphi_x+\psi)-(\psi+\varphi_x)^2\right)dx - c\int_0^1 m(x)(\varphi_x+\psi)\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)dx\right].$$

Lemme 3.11.

Soit ω la fonction définie par

$$-\omega_{xx}=\psi_x \tag{3.8}$$

avec $\omega(0)=\omega(1)=0$. La fonction ω vérifie les inégalités suivantes

$$\int_0^1 \omega_x^2 dx \le \int_0^1 \psi^2 dx$$

et

$$\int_0^1 \omega_t^2 dx \le \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

Démonstration

La fonction ω est donnée par

$$\omega(x)=-\int_0^x \psi(y)dy + x\int_0^1 \psi(y)dy$$

En multipliant l'équation $-\omega_{xx}=\psi_x$ par ω et en intégrant par partie, on obtient

$$-\int_0^1 \omega_{xx}\omega dx = \int_0^1 \psi_x \omega dx.$$

D'après l'intégration par partie

$$\int_0^1 \omega_x^2 dx = -\int_0^1 \psi\omega_x dx.$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz donne alors

$$-\int_0^1 \psi\omega_x \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \omega_x^2 dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \omega_x^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \omega_x^2 dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \omega_x^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \omega_x^2 \Rightarrow \int_0^1 \omega_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx.$$

D'autre part, en dérivant l'équation $-\omega_{xx} = \psi_x$ par rapport à t, on obtient

$$\int_0^1 \omega_{xt}^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré on aura

$$\int_0^1 \omega_t^2 dx \leq \int_0^1 \omega_{xt}^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Lemme 3.12.

Soit J la fonction définie par

$$J(t) = \int_0^1 (\psi\psi_t + \omega\varphi_t) dx.$$

Alors

$$J'(t) \leq -\frac{l}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_0}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_0 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + cg\circ\psi_x + (1-K)\int_0^1 \psi(\varphi_x+\psi) dx \tag{3.9}$$

où $0 < \varepsilon_0 < l$ *et* l *est définie en* (H_1) .

Démonstration

on a

$$J'(t) = \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx + \int_0^1 \omega_t\varphi_t dx + \int_0^1 \omega\varphi_{tt} dx.$$

En utilisant le système (5) on trouve

$$J'(t) = \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \left[\psi\left(\psi_{xx} - K(\varphi_x+\psi) - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds\right)\right] dx$$
$$+ \int_0^1 \omega_t\varphi_t + \int_0^1 \omega(\varphi_{xx}+\psi_x)dx.$$

En utilisant l'intégration par partie et d'après l'inégalité de Young, l'inégalité de Hölder et (H_1) on trouve

$$J'(t) \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{l}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + cg\circ\psi_x + \int_0^1 (\omega_x^2 - \psi^2)dx + \varepsilon_0 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_0^1 \omega_t^2$$
$$+(1-K)\int_0^1 \psi(\varphi_x+\psi)dx.$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré et le Lemme 3.11 on obtient

$$J'(t) \leq \frac{-l}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_0}\int_0^1 \psi_t^2 dx + cg\circ\psi_x + (1-K)\int_0^1 \psi(\varphi_x+\psi)dx + \varepsilon_0\int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

Maintenant nous démontrons le Théoréme 3.3

Pour N_1, N_2, $N_3 > 1$, soit $\mathcal{L}(t)$ la fonction définie par

$$\mathcal{L}(t) = N_1E(t) + N_2I(t) + N_3J(t) + K(t),$$

et soit $g_0 = \int_0^{t_0} g(s)ds > 0$ pour $t_0 > 0$ fixé. En combinisant (3.1), (3.3), (3.7), (3.9) et en prenant $\delta = \dfrac{1}{4N_2}$ (dans (3.3)) on trouve

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\left(\frac{lN_3}{2} - c\right) \int_0^1 \psi_x^2 dx - (c - \varepsilon_0 N_3) \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \tag{3.10}$$

$$-(N_2 g_0 - \frac{1}{4} - c\frac{N_3}{\varepsilon_0} - c) \int_0^1 \psi_t^2 dx + (4cN_2^2 + cN_3 + c) g \circ \psi_x + (\frac{N_1}{2} - 4cN_2^2 - c) g' \circ \psi_x$$

$$(\star) \begin{cases} +ck^2 N_2^2 (g \circ \psi_x) + N_3(1-K) \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx + N_1(1-K) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t + \\ \\ (K-1) \left[\int_0^1 (c\psi(\varphi_x + \psi) - (\psi + \varphi_x)^2) - c \int_0^1 m(\varphi_x + \psi) \left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds \right) dx \right], \forall t \geq t_0 \end{cases}$$

pour tout $t \geq t_0$ et $0 < \varepsilon_0 < l$.

Maintenant, on choisit N_3 assez grand tel que $c_1 = \dfrac{lN_3}{2} - c > 0$.

On choisit ensuite ε_0 assez petit tel que $c_2 = c - \varepsilon_0 N_3 > 0$.

Après, on choisit N_2 assez grand tel que $c_3 = N_2 g_0 - \dfrac{1}{4} - c\dfrac{N_3}{\varepsilon_0} - c > 0$.

Finalement, on choisit N_1 assez grand tel que $\dfrac{N_1}{2} - 4cN_2^2 - c > 0$.

Donc (3.10) devient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx - c_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - c_3 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx$$

$$(c + cK^2) g \circ \psi_x + c(1-K) \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi) dx$$

$$(K-1) \left[\int_0^1 (c(\varphi_x + \psi)\psi - (\psi + \varphi_x)^2) - c \int_0^1 m(\varphi_x + \psi) \left(\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds \right) dx \right], \quad \forall t \geq t_0$$

On a :

$$\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\psi^2 + (\varphi_x + \psi)^2\right) dx \leq c \int_0^1 \left(\psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2\right) dx \leq cE(t),$$

$$\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) \leq c \int_0^1 \left(\psi^2 + (\varphi_x + \psi)^2\right) \leq cE(t)$$

$$\text{et} \quad c\int_0^1 m(\varphi_x+\psi)\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)ds\right)dx$$

$$\leq c\int_0^1\left[(\varphi_x+\psi)^2+\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)(\psi_x(s)-\psi_x(t)+\psi_x(t))\right)^2\right]dx$$

$$\leq c\int_0^1[(\varphi_x+\psi)^2+\psi_x^2+g\circ\psi_x]dx \leq cE(t).$$

Alors

$$(\star)\leq c(1+K^2)g\circ\psi_x+c|K-1|E(t).$$

Donc

$$\mathcal{L}'(t)\leq -c_4E(t)+c(1+K^2)g\circ\psi_x+c_5|K-1|E(t), \qquad \forall t\geq t_0.$$

Finalement, si K est assez proche de 1 tel que : $|K-1|<\dfrac{c_4}{c_5}$, (3.11)

alors on trouve

$$\mathcal{L}'(t)\leq -cE(t)+cg\circ\psi_x, \quad \forall t\geq t_0. \tag{3.12}$$

D'autre part, on peut choisir N_1 assez grand (si nécessaire) tel que $\mathcal{L}\sim E$ car $|I|,|J|,|K_1|\leq cE$ alors $\mathcal{L}\leq \alpha E$ avec $\alpha>0$.

Dautre part

$$\mathcal{L}\geq N_1E-cE\geq (N_1-c)E$$

où on peut choisir N_1 assez grand tel que $N_1-c=\beta>0$, et donc on trouve

$$\beta E\leq \mathcal{L}\leq \alpha E$$

d'où on obtient $\mathcal{L}\sim E$.

En utilisant (H_2), (3.1), (3.12) on obtient

$$\xi(t)\mathcal{L}'(t)\leq -c\xi(t)E(t)+c\xi(t)(g\circ\psi_x)$$

$$\leq -c\xi(t)E(t)+c\xi(t)\int_0^1\int_0^t g(t-s)((\psi_x(t)-\psi_x(s))^2\,dsdx$$

$$\leq -c\xi(t)E(t) + c\xi(t)\int_0^1\int_0^t \frac{\xi(t-s)}{\xi(t-s)} g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2 dsdx, \quad \forall t \geq t_0.$$

Comme la fonction $t \longmapsto \xi(t)$ est décroissante,
alors la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\xi(t)}$ est croissante,
et donc la fonction $s \longmapsto \dfrac{1}{\xi(t-s)}$ est décroissante,
et on a

$$\sup_{[0,t]} \frac{1}{\xi(t-s)} = \frac{1}{\xi(t-0)} = \frac{1}{\xi(t)},$$

donc

$$\xi(t)\mathcal{L}'(t) \leq -c\xi(t)E(t) + c\int_0^1\int_0^t \xi(t-s)g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2 dsdx$$

$$\leq -c\xi(t)E(t) - c\int_0^1\int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2 dsdx, \quad \forall t \geq t_0.$$

Comme (d'après (3.1))

$$-g' \circ \psi_x \leq -2E' + c|K-1|E,$$

alors

$$\xi(t)\mathcal{L}'(t) \leq -c\xi(t)E(t) - cE'(t) + c|K-1|E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Donc

$$\xi(t)\mathcal{L}'(t) + cE'(t) \leq -c\xi(t)E(t) + c|K-1|E(t), \quad \forall t \geq t_0,$$

et par conséquent

$$\left(\xi(t)\mathcal{L}(t) + cE(t)\right)' - \xi'(t)\mathcal{L}(t) \leq -c\xi(t)E(t) + c|K-1|E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Donc

$$\left(\xi(t)\mathcal{L}(t) + cE(t)\right)' \leq -c\xi(t)E(t) + c|K-1|E(t) + \xi'(t)\mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Comme $\xi(t)$ est décroissante et $\mathcal{L}(t) \geq 0$, on trouve

$$(\xi(t)\mathcal{L}(t) + cE(t))' \leq -c\xi(t)E(t) + c|K-1|E(t).$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} \xi(t) > 0$ et ξ est décroissante, alors
$\xi(t) \geq \lambda_0 > 0, \forall t \geq 0$. Donc

$$-c\xi(t)E(t) + c|K-1|E(t) \leq -\left(c\lambda_0 - c|K-1|\right)E(t).$$

Donc si $|K-1|$ est assez petit tel que : $|K-1| < c\lambda_0,$ (3.13)

alors

$$(\xi(t)\mathcal{L}(t) + cE(t))' \leq -cE(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Posons $F = \xi\mathcal{L} + cE$. On a $F \sim E$ et

$$F'(t) \leq -cE(t) \leq -\omega F(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Alors

$$F'(t) \leq -\omega F(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

$$F'(t) + \omega F(t) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

$$\Rightarrow e^{\omega t}[F'(t) + \omega F(t)] \leq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

$$\Rightarrow (e^{\omega t}F(t))' \leq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

ce qui implique $t \longmapsto e^{\omega t}F(t)$ est décroissante

Donc

$$e^{\omega t}F(t) \leq e^{\omega\times 0}F(0) = F(0) = c_6$$

est par conséquent $E(t) \leq c_7 e^{-\omega t}, \ \forall t \geq t_0$ (car $F \sim E$)

Pour $t \in [0, t_0]$, on a

$$E(t) \leq \max_{0\leq\tau\leq t_0} E(\tau)$$

(car $E \in C([0, t_0])$)

$$\Longrightarrow E(t) \leq \max_{0\leq\tau\leq t_0} E(\tau)e^{\omega(t_0-t)}$$

$$\Longrightarrow E(t) \leq \max_{0\leq\tau\leq t_0} E(\tau)e^{\omega t_0}e^{-\omega t}$$

on pose $c_8 = \max\limits_{0\leq\tau\leq t_0} E(\tau)e^{\omega t_0}$,

on obtient $E(t) \leq c_8 e^{-\omega t}, \qquad \forall t \in [0, t_0]$.

Donc $E(t) \leq ce^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad$ où $c = \max\{c_7, c_8\}$.

Conclusion

Dans notre étude de la stabilité de (5), on a supposé que $|K-1|$ est assez petit et ξ est décroissante vérifiant $\lim_{t\to+\infty} \xi(t) > 0$. La question reste posée si l'une de ces trois hypothèses n'est pas vérifiée.

Notre résultat reste valable si on considère des coéfficients variables $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$, $K(x)$ vérifiant ρ_1, ρ_2, K_1, $K_2 \in C^1([0,L])$, $\dfrac{K_1}{\rho_1} = \dfrac{K_2}{\rho_2}$, $\inf_{[0,L]} \dfrac{K_1}{\rho_1} > 0$, $\sup_{[0,L]} \dfrac{K_2}{\rho_2} < +\infty$ et $\|K-1\|_{L^\infty([0,L])}$ est assez petit.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة حل الجملة (5) من حيث وجود و وحدانية الحل و نظاميته و كذلك الاستقرار الاسي في الحالة غير الانحدارية. والطريقة المتبعة تعتمد أساسا على المتراجحات التكاملية في الحالة غير الانحدارية.

الكلمات المفتاحية : المتراجحات التكاملية، الاستقرار الأسي، التزويج، جملة تيموشينكو، معادلات تفاضلية جزئية.

Résume

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence, l'unicité et la régularité des solutions de (5) ainsi que sa stabilité exponentielle dans le cas non dissipatif. La méthode appliquée est basée sur des inégalités intégrales concernant le cas non dissipatif.

Mots Clés : Inégalités intégrales, stabilisation exponentielle, convolution, système de Timoshenko, EDP.

Abstract

In this dessertation, we studied the existence, the uniqueness and the regularity of the solutions of (5) aswell as its in the non dissipative. cas The applied method is based on soure integral inequalities concerning the non dissipative case.

key words : Integral Inequalities, exponential stability, convolution, Timoshenko system, PDE.

REFERENCES

[01] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic press, New York, 1975.

[02] F. Ammar-Khodja, A. Benabdellah, J. E Muñoz, Rivera and R. Racke, Energy decay for Timoshenko systems of memory tybe . J. Differential Equations, 194 no. 1 (2003), 82-115.

[03] G. Duvaut et J-L.Lions, Les inégalité en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.

[04] D. X Feng, D. H. Shi et W. Zhang, Boundary feedback stabilisation of Timoshenko beam with boundary dissipation, Sci. China Ser. A, 41 (1998), 483-490.

[05] A. Guesmia, Inégalité intégrale et appliquations à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, thèse d'HDR, METZ, 2006.

[06] A. Guesmia et S. Messaoudi, On the control of solution of a viscoelastic equation, Applied Math and computations 206 (2008), 589-597.

[07] A. Guesmia et S. Messaoudi, On the boundary stabilisation of a compactly coupled systeme of non linear wave equations, Inter. J. Evolut. Equa.,1 (2005) 211-224.

[08] A. Haraux, Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxiéme ordre en temps, Port. Math., 46 (3) (1989), 245-258.

[09] J. U. Kim et Y. Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM, J. Control. Optim., 25 (1987), 1417-1429.

[10] V. Komornik, Exact controlability and stabilisation.The multiplier method, Masson-John Willey, Paris 1994.

[11] Z. Liu, S. Zheng, Semigroups Associted With Dissipative system, Chapman & Hall/CRC, 1999.

[12] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos et N. N. O. Castro, Exponentiel stability for the Timoshenko system with two weak dampings, Appl. Math. Lett, 18 (2005), 535-541.

[13] M. L. Santos, Decay rates for solutions of solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary, Abstr. Appl. Anal., 7 (2002), 531-546.

[14] D. H. Shi et D. X. Feng, Exponential decay rate of the energy of a Timoshenko beam with locally distributed feedback, ANZIAM J., 44 (2002), 205-220.

[15] D. H. Shi, D. X. Feng, Exponential decay of Timoshenko beam with locally distrebuted feedback, IMA J. Math. Control Inform.18(2001), 395-403.

[16] A. Soufyane et A. Wehabe, Uniforme stabilisation for the Timoshenko beam by a locally distributed dambing, Electron. J. Differ. Equations, 29 (2003), 1-14.

[17] A. Soufyane, Stabilisation of Timoshenko beam, Prépulications de l'équipe de mathématiques de Besançan 1999.

[18] A. Soufyane, Stabilisation de la poutre de Timoshenko, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 328 (1999), 731-734.

[19] S. W. Taylor, A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability, J. Comput. Appl. Math., 114 (2000), 23-40.

[20] S. Timoshenko, On the correction for shear differential equation for vibrations of prismaticbars, Philos . Mag., 41 (1921), 744-746.