REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Résolution d'équations intégro-différentielles linéaires de Fredholm-Volterra par une méthode de Collocation

---

Présentée par :

FERAHTIA Delloula

Devant le jury composé de :

MERZOUGUI Abdelkrim	Pr,	Université de M'sila	**Président**.
MOKHTARI Abdelhak	M.C.B,	Université de M'sila	**Encadreur**.
BENYOUSSEF Soufiane	M.A.A,	Université de Tiaret	**Co-encadreur**.
SAADI Abderachid	M.C.A,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce petit travail

A ma cher père, qui m'a aidé atteindre ce niveau

A ma chère mère, grace à Dieu et à ses prières, J'ai reussi mes études

A mes frères, Hichem, Akram, Lotfi, et mon mari.

A mon tout famille.

A mon tout amies.

enfin je dédie tous les étudiants et étudiantes de ma promotion.

Remerciements

Au nom de Dieu clément et miséricordieux

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années des etudes et que grâce à Lui ce travail de a pu être réaliser. Je Lui dois tout.
Je teints à remercie me encadreur Monsieur **MOKHTARI Abdelhak** qui a dirigé cette petit travail pour aide et ses nombreux conseils et ses orientations qu'ils soient grands ou petits, et je remercie pour sa patience et l'intêrêt pour apporté afin de mener à bien mon travail.
Je n'oublie pas mon co-encadreur Monsieur **BENYOUSSEF Soufiane** qui m'a aidé dans mon travail, et je le remercie pour ses les conseils et orientations.
Je remercie également le professeur **MERZOUGUI Abdelkrim**, car il m'a aidé à accomplir mon travail.
Ma sinsère reconnaissance à tous les nembres du jury pour l'honneur qu'ils m'a font en acceptant de président et examiner ce petit travail.
Finalement, je voudrais, maintenant, une place toute particulièrment à mes parents. Je profite de cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profonde reconnaissance.

Table des matières

Introduction

La modilisation mathématiques des problèmes réels aboutit, généralement aux équations fonctionnelles, par exemple équations intégrales et intégro-différentielles et autres types, en particulier, les équations intégro-différentielles (EID) apparaissent dans la dynamique des fluides, les madèles biologiques et la cinétique chimique. Souvent, les solutions analitiques des (EID) ne peuvent pas être trouvées, alors les méthodes numériques sont nécessaires.

Au début de la dernière décennie, il y a plusieurs de gens qui ont travaillé sur la matrice de Bessel et les méthodes de collocation pour les solutions numériques de plusieurs types des équations différentielles (voir par exemple [11], [12], [13]).

L'objectif principale de ce mémoire est d'appliquer une méthode de collocation basée sur les polynômes de Bessel pour trouver des solutions approximatives des équations intégro-différentielle linéaires d'ordre supérieurs de Fredholm-Volterra (EIDFV) de la forme suivante :

$$\sum_{k=0}^{m}\beta_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda_f\int_a^b K_f(x,t)y(t)dt + \lambda_v\int_a^x K_v(x,t)y(t)dt, 0 \leq a \leq x, t \leq b \tag{0.0.1}$$

Sous les conditions mixtes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{m}((a_{jk})y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(k)}(b)) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{0.0.2}$$

Où $y^{(0)}(x) = y(x)$ est une fonction inconnue et les fonctions $\beta_k(x), g(x), K_f(x,t)$ et $K_v(x,t)$ sont définiés sur intervalle $a \leq x, t \leq b$ et $a_{jk}, b_{jk}, \lambda_j, \lambda_f$ et λ_v sont des constantes complexes.

Les fonctions $K_f(x,t)$ et $K_v(x,t)$ sont régulières telles qu'on peut les représenté par une série de Maclaurin.

Plus précisement, le but de travail est de trouver une solution approchée de (0.0.1) exprimée sous une formé tronquée de la serié de Bessel

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n J_n(x) \tag{0.0.3}$$

où $a_n, \ \ n = 0, 1, \ldots, N$ sont le coefficients de Bessel, N est choisi comme un entier neturel tel que $N \geq m$ et

$$J_n(x) = \sum_{n=0}^{[\frac{N-n}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}(\frac{x}{2})^{2k+1}, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ 0 \leq \infty.$$

Ce travail s'appuie essentiellement sur l'article [10] publié en 2012 et il se propose se reprendre systématiquement toutes les informations en les détaillant dans l'espoir de les rendre plus claires pour un public plus large.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Dans **le première chapitre**, On rassemble des consepts et des résultats préliminaires qui souvent utilisés dans ce que suit.

Dans **le deuxième chapitre**, On écrit tous les membres de l'équations sous forme matricielle.

La résolutions du problème et l'applications de la méthode est consarcé dans **le troisième chapitre**.

En fin, dans **le dernière chapitre**, introduit quelques exemples numériques pour la validations de la méthode et on fait des comparaisons avec le solution exacte.

Chapitre 1

Quelques préliminaires et outils de base

Dans ce chapitre, On introduit quelque outils et résultats préminilaires qui seront utilisé dans la suite de mémoire.

1.1 Approximation optimale

On note par $C[a,b]$ l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle fermé $[a,b]$, de norme donnée par :

$$\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)|, \forall f \in C[a,b]$$

Cette norme est appelée norme uniforme ou norme de Chebyshev, Soit P_n le sous-espace de $C[a,b]$ de dimension $n+1$ engendré par les fonctions $1, x, x^2, \ldots, x^n$, c-à-d,

$$P_n = Vect\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} = \mathbb{R}_n[x].$$

Il est facile de voir que P_n est fermé et convexe, car il est un sous-espace de dimension finie de $C[a,b]$. Le résultat suivant montre l'existene et l'unicité de la projection sur une partie d'un espace normé.

Théorème 1.1.1. *Soit $f \in C[a,b]$, il existe un unique élément p de P_n, tel que*

$$\|f-p\|_\infty \le \|f-q\|_\infty, \forall q \in P_n.$$

Ici p est appelé approximation optimale de f de P_n

Démonstration. Pour l'existence.
(i) On suppose que $x_0, \ldots, x_{n+1}$ de forme un ensemble alterné pour $f-p_n$, on montre que p_n est une approximation optimale, on utilise une démonstation par absurde, il existe $q_n \in P_n$ tel que

$$\|f-q_n\| < \|f-p_n\| \tag{1.1.1}$$

En particulier, puisque $x_0, \ldots, x_{n+1}$ forme un ensemble alterné

$$|f(x_j)-q_n(x_j)| < \|f-p_n\| = |f(x_j)-p_n(x_j)|, \quad \textit{pour } j = 0, \ldots, n+1 \tag{1.1.2}$$

et

$$[f(x_j) - p_n(x_j)] = -[f(x_{j+1}) - p_n(x_{j+1})] \tag{1.1.3}$$

Les relations (1.1.2) et (1.1.3) impliquent que :

$$[f(x_j) - p_n(x_j)] - [f(x_j) - q_n(x_j)] = q_n(x_j) - p_n(x_j)$$

est alterné en signe lorsque j verié de 0 à 1, Ainsi, le polynôme $q_n(x) - p_n(x) \in P_n$, admet un zéro dans chaque intervalle $(x_j, x_{j+1}), j = 0, \ldots, n$ ce qui implique que $q_n = p_n$
Ceci contredit (1.1.1) donc p_n est une approximation optimale.
(ii)on suppose que P_n est un approximation optimale de f et $f \notin P_n$, soit un plus grand ensemble alterné pour $f - P_n$ constitué des $k + 1$ points $x_0, \ldots, x_k$ satisfaisant

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k \leq b$$

alors

$$\|f - p_n\| = \rho$$

Soit $t_0, \ldots, t_s$ les points de $[a, b]$ sont shoisi de sorte que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = b$ et $e(x) = f(x) - p_n(x)$
Où e est uniforment continue sur $[a, b]$, on choisi $\epsilon = \frac{\rho}{2}$ on a :

$$|e(\xi) - e(\eta)| \leq \frac{1}{2}\rho$$

pour tout $\xi, \eta \in [t_j, t_{j+1}], \;\; j = 0, \ldots, s - 1$. le sous-intevalle $[t_j, t_{j+1}]$ et contient un point t, et $|e(t)| = \rho$ c-à-d $e(t) = \rho$.
On appelle un sous-intervalle $(+)$ si $e(t) = -\rho$ on appelle un sous-intervalle $(-)$ et $e(x) > 0$ sur un sous-intervalle $(+)$ et $e(x) < 0$ sur un sous-intervalle $(-)$, On écrire sous-intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ qui sont $(^{+}_{-})$ sous-intervalle, de ordre (de gauhe à droite) comme :
$I_1, I_2, \ldots, I_N$ et on suppose en sous-ensemnles suivantes
$\{I_1, I_2, \ldots, I_{k_1}\}$: $(+)$ sous-intervalle
$\{I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \ldots, I_{k_2}\}$:$(-)$ sous-intevalles
$\vdots$
$\{I_{k_m+1}, I_{k_m+2}, \ldots, I_{k_{m+1}}\}$: $(-)^m$ sous-intervalle
Chaque sous-ensemble contient au moins un élement et $2 \leq m + 1 \leq n + 1$, il est clair que I_{kj} et I_{kj+1} sont disjoint pour $j = 1, \ldots, m$, donc on peut choisi points $z_1, \ldots, z_m$ avec la proprieté que $z_j > x$ pour tout $x \in I_{kj}$ et $z_j < x$ pour tout $x \in I_{kj+1}$, on définie par

$$q(x) = (z_1 - x)(z_2 - x) \ldots (z_m - x)$$

Alors $q \in p_n$ et $q(x)$ ont la même signe que $e(x)$ dans chaque $I_j, \;\; j = 1, \ldots, N$, soit $\mathbb{R}$ la somme de tous les sous-intervalles qui ne sont pas $(^{+}_{-})$ sous-intervalles, Ensuite :

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |e(x)| = \rho^{'} < \rho$$

En autre, on suppose que

$$\|q\| = M$$

et que $\lambda > 0$ est choisit si petit que :

$$\lambda M < min(\rho - \rho^{'}, \frac{\rho}{2})$$

On affirme que :

$$P(x) = \lambda q(x) + p_n(x) \in \mathbb{P}_n$$

est une approximation optimale de $f(x)$ que $\mathbb{P}_n(x)$

si, d'une parte, $x \in \mathbb{R}$, alors

$$|f(x) - P(x)| = |e(x) - \lambda q(x)| \leq |e(x)| + \lambda|q(x)| \leq \rho^{'} + \lambda M < \rho$$

par contre si $x \in I_J, \ \ j = 0, \ldots, N$ alors $e(x)$ et $\lambda q(x)$ en le même signe (aucun n'est nul)

$$|e(x)| > \frac{\rho}{2} > \lambda q(x)$$

et on a

$$|f(x) - P(x)| = |e(x) - \lambda q(x)| \leq \rho + |\lambda q(x)| < \rho$$

$$\Rightarrow \|f - q\| < \rho = \|f - p_n\|$$

ceci une contadiction, alors existe p est approximaion optimale.

(2) L'unicité

on suppose q est un approximation optimale de $\mathbb{P}_n$ et ona

$$\|f - q\| > \|f - p\|$$

et on suppose que

$$\|f - q\| = \|f - p\|,$$

$$z = \frac{q + p}{2}.$$

et

$$\|f - q_n\| = \|f - p_n\| = E_n(f)$$

et $z = \frac{q+p}{2}$ est un approximation optimale de f, Soit $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ ensemble alterné pour $f - z$ de sorte que un entier l

$$\frac{f(x_j) - q(x_j)}{2} + \frac{f(x_j) - p(x_j)}{2} = (-1)^{l+i} E_n(x), \quad j = 0, \ldots, n+1$$

De puis,

$$\frac{|f(x_j) - q(x_j)|}{2} \leq \frac{E_n(f)}{2}$$

et

$$\frac{|f(x_j) - p(x_j)|}{2} \leq \frac{E_n(f)}{2}$$

On peut que si

$$f(x_j) - q(x_j = f(x_j) - p_n(x) = (-1)^{l+i} E_n(f), \quad j = 0, \ldots, n+1$$

Ainsi, on obtient

$$q(x_j) = p(x_j).$$

□

Définition 1.1.1. *Soit $f \in C[a,b]$, l'erreur de l'approximation optimale de f sur P_n est définie par :*

$$E_n[f; [a,b]] = E_n(f) = \|f - p\|_\infty.$$

Définition 1.1.2. *(Le module de continuité) Soit $f \in C[a,b]$, pour $\delta > 0$ le module de continuité est défini par*

$$\omega(\delta) = \omega(f; [a,b]; \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

On appelle $\omega(\delta)$ le module de continuité de la fonction f

Théorème 1.1.2. *[1] Soit $f \in C[a,b]$, alors :*

$$E_n(f) \leq 6\omega(\frac{b-a}{2n}). \tag{1.1.4}$$

1.2 Interpolation polynomiale

Considérons $n+1$ paires (x_i, y_i), le problème est de trouver un polynôme $\mathcal{I}_m$, appelé polynôme interpolant tel que

$$\mathcal{I}_m(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m = y_i, \;\; i = 0, \ldots, n$$

les points x_i sont appelés noeuds d'interpolation. Si $n \neq m$, le problème est sur sous-déterminé.

Théorème 1.2.1. *Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ points distincts et soit $y_0, y_1, \ldots, y_n$, $n+1$ valeures correspandantes, il existe un polynôme unique $\mathcal{I}_n \in P_n$ tel que $\mathcal{I}_n(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.*

Démonstration. 1)Pour prouver l'exisence, on utilise une approche constructive, fournissant une expression pour P_n. On note par $\{l_i\}_{i=0}^n$ une base de $\mathbb{P}_n$, alors P_n admet une représentation sur cette base de la forme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i l_i(x),$$

qui satisfait :

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} b_j l_j(x_i) = y_i.$$

on définit

$$l_i \in P_n : l_i(x) = \prod_{j=0_{j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

alors

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

(Les polynòmes $l_i(x)$ sont appelés polynômes de lagrange)
On obtient que $b_i = y_i$ les polynômes l_i; $i = 0, \dots, n$ forme une base de $\mathbb{P}_n$, par conséquent, le polynôme interpolant existe et s'écrit sous la forme suivante(appelée forme de lagrange)

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

où

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, si \text{ i=j} \\ 0, sinon \end{cases}$$

2)Pour prouver l'unicité, supposons qu'il ya un autre polynôme interpolant Ψ_m de dergé $m \leq n$, tel que

$$\Psi_m(x_i) = y_i, \;\; pour \quad i = 0, \dots, n$$

Alors, la différence $P_n - \Psi_m$ disparâit en $n+1$ points distincts x_i et coïncide avec le polynôme nul. Par conséquence

$$P_n = \Psi_m.$$

□

Si $y_i = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n$ étant une fonction donné f, le polynôme d'interpolation $\mathcal{I}_n(x)$ sera noté par $\mathcal{I}_n f(x)$.
Introduisons une matrice triangulaire inféreure X de taille infinie, appelée matrice d'interpolation sur $[a, b]$ dont les entrés x_{ij}, pour $i, j = 0, 1, \dots$, représent les points de $[a, b]$, avec l'hypothèse que sur chaque ligne, les entrées sont toutes distinctes, Ainsi pour tout $n \geq 0$ la $(n+1)$-ième line de X contient $n+1$ valeurs distincts qui peuvent être identifiées comme des noueds, d'où pour une fonction donnée f, on peut définir de manière unique un polynôme interpolant $p_n f$ de degré n à ces noeuds.

Définition 1.2.1. *(L'erreure d'interpolation)*
Soit f une fonction et soit X la matrice d'interpolation, l'erreure d'interpolation est défini par :

$$G_n(X) = \|f - \mathcal{I}_n f\|_\infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

Théorème 1.2.2. *Soit $f \in C[a,b]$ et X une matrice d'interpolation sur $[a,b]$, Alors on a :*

$$G_n(X) \leq (1 + \Lambda_n(X))E_n(f; [a,b]). \tag{1.2.1}$$

où $\Lambda_n(X)$ est la constante de lebesgue de X définie par :

$$\Lambda_n(X) = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=0}^{n} |l_i^{(n)}(x)| = \| \sum_{i=0}^{n} |l_i^{(n)}(x)| \|_\infty \ , \quad n \geq 1$$

avec $l_i^{(n)} \in P_n$ est le j-ième polynôme caractéristique associé à la $n+1$ -ième ligne de X,et

$$\mathcal{I}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i^{(n)}(x).$$

Démonstration. Le polynôme d'interpolation :

$$\mathcal{I}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{I}_n(x_i) l_i^{(n)}(x),$$

puisque cette relation vaut pour tout polynôme de P_n, On obtient immédiatement

$$\mathcal{I}_n f(x) - \mathcal{I}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - \mathcal{I}_n(x_i)) l_i^{(n)}(x),$$

et ainsi

$$|\mathcal{I}_n f(x) - \mathcal{I}_n(x)| \leq \lambda_n(x) \max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i) - \mathcal{I}_n(x_i)|,$$

où λ_n est la fonction de lebesgue. On déduit que

$$\|\mathcal{I}_n - \mathcal{I}_n f\|_\infty = \|\mathcal{I}_n f - \mathcal{I}_n\|_\infty \leq \Lambda_n(X) E_n(f).$$

en écrivant maintenant

$$f(x) - \mathcal{I}_n f(x) = (f(x) - \mathcal{I}_n(x)) + (\mathcal{I}_n(x) - \mathcal{I}_n f(x)),$$

d'où on peut déduire l'inégalité

$$\|f(x) - \mathcal{I}_n f(x)\|_\infty \leq \|f - \mathcal{I}_n\|_\infty + \|\mathcal{I}_n - \mathcal{I}_n f\|_\infty,$$

alors

$$\|f(x) - \mathcal{I}_n f(x)\|_\infty \leq E_n(f) + \Lambda_n(X) E_n(f),$$

donc

$$G_n(X) \leq (1 + \Lambda_n(X))E_n(f; [a,b]).$$

□

Corollaire 1.2.1. *Soit* $f \in C[a,b]$*,alors*

$$\|f - \mathcal{I}_n f\|_\infty \leq 6(1 + \Lambda_n(X))\omega(\frac{b-a}{2n}).$$

Démonstration. d'aprés le théorème (1.1.2) on a

$$E_n(f) \leq 6\omega(\frac{b-a}{2n}).$$

et en utilisant théorème (1.2.2), on obtient

$$\|f - \mathcal{I}_n f\|_\infty \leq 6(1 + \Lambda_n(X))\omega(\frac{b-a}{2n}).$$

□

Théorème 1.2.3. *Soit* x *et soit* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *des abscisses contenus dans un intervalle* $[a,b]$ *sur lequel* f *et ses* n *premières dérivées sont continues, et soit* $f^{(n+1)}$ *existe dans intervale ouvert* (a,b) *alors il existe* $\varepsilon_x \in (a,b)$ *qui dépend de* x *tel que*

$$f(x) - \mathcal{I}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{1.2.2}$$

Démonstration. Pour on preuve applique le théorème de Rolle, qui dit simplement qu'entre deux zéros quelconques d'une fonction différentiable, il doit avoir au moins un zéros dérivée, on considère la fonction :

$$G(x) = f(x) - \mathcal{I}_n(x) - \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(\alpha-x_0)\ldots(\alpha-x_n)}(f(\alpha) - \mathcal{I}_n(\alpha)),$$

où α est tout points de l'intervalle $[a,b]$ qui est distinct de toutes les abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_n$, on note que G au moins $n+2$ zéros en α et toutes les $n+1$ abscisses interpolants x_j, ensuite à partir du théorème de Rolle que $G^{'}$ doit avoir au moins $n+1$ zéros, En appliquent plusieurs fois le théorème de Rolle, on soutener que $G^{''}$ au moins n zéros (si $n \geq 1$), $G^{(3)}$ au moins $n-1$ zéros si $(n \geq 2)$, et enfin que $G^{(n+1)}$ admet au moins un zéros, d'où $x = \varepsilon_\alpha$, Ainsi, en dérivant le derniére équation $n+1$ fois et en mettant $x = \varepsilon_\alpha$, on obtient

$$0 = f^{(n+1)}\varepsilon_\alpha - \frac{(n+1)!(f(\alpha) - p_n(\alpha))}{(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\ldots(\alpha-x_n)},$$

On remplace α par x, on obtient

$$f(x) - \mathcal{I}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\varepsilon_x \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}.$$

□

1.3 Polynômes de Bessel du première espèce

Définition 1.3.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *, La série de Bessel tronqué du n-dégré du première espèce est défini par :*

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{(N-n)}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}(\frac{x}{2})^{2k+n}, \;\; n \leq N, \; 0 \leq x \leq \infty$$

Cette est absolument convergente pour $x \in \mathbb{R}$ et est une solution de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(tx) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f une solution de l'équation (0.0.1). On veut interpoler f par

$$\mathcal{I}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n J_n(x), N \geq m \tag{1.3.1}$$

Définition 1.3.2. *(Série de Maclaurin tronuqés) Soit f une fonction de deux variables et $f \in C^k[a,b]$ tel que $k \in \mathbb{N}$. La série de Maclaurin est une cas pariticuliée la série de Taylor, c-à-d au voisinage $(0,0)$, on a :*

$$f(x,t) = f(0,0) + [x\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} + t\frac{\partial f(0,0)}{\partial t}] + \frac{1}{2!}[x^2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} + 2xt\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial t} + t^2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial t^2}]$$

1.4 Résultats fondamentaux sur les Matrices

Définition 1.4.1. *Une norme matricielle sur $C^{m\times n}$ est une fonction $\|X\| : C^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfant les conditions suivantes :*

1. $\|X\| \geq 0 \;\; \forall X \in C^{m\times n}$ *et* $\|X\| = 0$ *si et seulement si* $X = 0$.
2. $\|\alpha X\| = |\alpha|\|X\|, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \;\; \forall X \in C^{m\times n}$ *(homogénété).*
3. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|, \;\; \forall X, Y \in C^{m\times n}$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.4.2. *on dit qu'une norme matricielle $\|.\|$ est sous-multiplatif si pour tout $X \in C^{m\times n}$ et pour tout $Y \in C^{n\times q}$:*

$$\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|.$$

Définition 1.4.3. *La norme de Fubenius est défini par :*

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |x_{i,j}|^2}, \;\; \forall X \in C^{m\times n}.$$

Définition 1.4.4. *Les fonctions suivantes définient des normes :*

Norme infini qui définie par :

$$\|X\|_\infty = \max_i \sum_j |x_{ij}|,$$

et norme 1 *qui définie par :*

$$\|X\|_1 = \max_j \sum_i |x_{ij}|.$$

Définition 1.4.5. *Soit X une matrice d'ordre n, Alors X est une matice inversible si et seulement si elle satisfait l'une des conditions suivantes :*

1. $rang(X) = n$.

2. *$ker(X) = 0$.*
3. *Si une solution de systéme $Xy = b$ existe elle est unique.*
4. *Les colonne(lignes) de X sont linéairement indépendants.*
5. *$det(X) \neq 0$.*
6. *Il existe une matrice inversible X^{-1} tel qque $X^{-1}X = XX^{-1} = I$.*
7. *Les valeurs propres de X sont déffernts de zéros ($\lambda_i \neq 0$).*

Théorème 1.4.1. *[2] Si T est matrice inversible et $\|\delta T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ alors $T + \delta T$ est inversible.*

Théorème 1.4.2. *[2] Soit T une matrice inversible, soit $b \neq 0$ et soit x et $\widetilde{x} = x + \delta x$ une solution de $Tx = b$ et $(T + \delta T)\widetilde{x} = b$, Alors*

$$\|\delta T\| \leq \|T^{-1}\|\|\delta T\|\|\widetilde{x}\|$$

Théorème 1.4.3. *Soit $\|.\|$ est une norme matricielle sur $C^{m\times n}$ pour toute matrice T d'ordre n, Si $\|T\| < 1$, alors $I - T$ est inversible, En outre,*

$$\|(I-T)^{-1}X\| \leq \frac{\|X\|}{1 - \|T\|},$$

et

$$\|(I-T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

Démonstration. Par des estimations directs, on a :

$$\|(I-T)x\| = \|x - Tx\| \geq \|x\| - \|Tx\| \geq \|x\| - \|T\|\|x\| \geq (1 - \|T\|\|x\| > 0$$

Comme $(I - T)$ est inversible, on a :

$$\begin{aligned} A = (I-T)^{-1}X \quad &\Rightarrow \quad X = (I-T)A = A - TA \\ &\Rightarrow \quad \|X\| \geq \|A\| - \|TA\| \\ &\Rightarrow \quad \|X\| \geq \|A\| - \|T\|\|A\| \\ &\Rightarrow \quad \|X\| \geq (1 - \|T\|)\|A\| \\ &\Rightarrow \quad \|X\| \geq (1 - \|T\|)\|A\| \\ &\Rightarrow \quad \|X\| \geq (1| - \|T\|)\|(I-T)^{-1}X\| \\ &\Rightarrow \quad \|(I-T)^{-1}X\| \leq \frac{\|X\|}{1 - \|T\|} \end{aligned}$$

Pour établir

$$\|(I-T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}$$

on pose $B = (I - T)^{-1} - I$ en mutipliant par $I - T$, On obtient

$$\begin{aligned} B - TB &= I - I(I - T) = T \\ &\Rightarrow \|T\| \geq \|B\| - \|T\|\|B\| \\ &\Rightarrow \|T\| \geq (1 - \|T\|)\|B\| \\ &\Rightarrow \|T\| \geq (1 - \|T\|)\|(I - T)^{-1} - I\| \end{aligned}$$

donc

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}$$

□

Chapitre 2

Forme Matricielle

2.1 Forme matricielle de série de Bessel

Dans cette partie, on écrit la série de Bessel sous forme matricielle, rappelons qu'elle est définie par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{N-n}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} (\frac{x}{2})^{2k+n}$$

D'abord, pour simplifier l'écriture de la forme matricielle, on commence par des cas particulier

Si N est impaire, on a :

Pour $n = 0$, on obtient :

$$J_0(x) = \frac{1}{0!0!} + \frac{-1}{1!1!}(\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{2!2!}(\frac{x}{2})^4 + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N-1}{2})!}(\frac{x}{2})^{N-1}$$

Pour $n = 1$, on obtient que :

$$J_1(x) = \frac{1}{0!1!}(\frac{x}{2}) + \frac{-1}{1!2!}(\frac{x}{2})^3 + \frac{1}{2!3!}(\frac{x}{2})^5 + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N+1}{2})!}(\frac{x}{2})^N$$

Pour $n = 2$, on obtient :

$$J_2(x) = \frac{1}{0!2!}(\frac{x}{2})^2 + \frac{-1}{1!3!}(\frac{x}{2})^4 + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{N-3}{2}}}{(\frac{N-3}{2})!(\frac{N+1}{2})!}(\frac{x}{2})^{N-1}$$

$$\vdots$$

Pour $n = N-1$, on a :

$$J_{N-1}(x) = \frac{1}{0!(N-1)!}(\frac{x}{2})^{N-1}$$

Pour $n = N$, on a

$$J_N(x) = \frac{1}{0!N!}(\frac{x}{2})^N$$

Si N est paire :

Pour $n = 0$ on a

$$J_0(x) = \frac{1}{0!0!} + \frac{-1}{1!1!}(\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{2!2!}(\frac{x}{2})^4 + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!}(\frac{x}{2})^N$$

Pour $n = 1$, on a :

$$J_1(x) = \frac{1}{0!1!}(\frac{x}{2}) + \frac{-1}{1!2!}(\frac{x}{2})^3 + \frac{1}{2!3!}(\frac{x}{2})^5 + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N+2}{2})!}(\frac{x}{2})^{N-1}$$

Pour $n = 2$, on a :

$$J_2(x) = \frac{1}{0!2!}(\frac{x}{2})^2 + \frac{-1}{1!3!}(\frac{x}{2})^4 + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N+2}{2})!}(\frac{x}{2})^{N-}$$

$$\vdots$$

Pour $n = N-1$, on a :

$$J_{N-1}(x) = \frac{1}{0!(N-1)!}(\frac{x}{2})^{N-1}$$

Pour $n = N$, on a :

$$J_N(x) = \frac{1}{0!N!}(\frac{x}{2})^N$$

On peut écrire $J(x)$ sous la forme matricielle suivante :

$$J^T(x) = DX^T(x) \Leftrightarrow J(x) = X(x)D^T \tag{2.1.1}$$

tel que

$$J(x) = \begin{bmatrix} J_0(x) & J_1(x) & \ldots & J_N(x) \end{bmatrix}$$

et

$$X(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 & \ldots & x^N \end{bmatrix}$$

Si N est impair,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!0!2^0} & 0 & \frac{-1}{1!1!2^2} & \ldots & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N-1}{2})!^2 N-1} & O \\ 0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & \ldots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^N} \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!2!^2 2} & \ldots & \frac{(-1)^{\frac{N-3}{2}}}{(\frac{N-3}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & O & \ldots & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{0!N!2^N} \end{bmatrix}_{(N+1)(N+1)}$$

Si N pair :

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!0!2^0} & 0 & \frac{-1}{1!1!2^2} & \dots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!2N} \\ 0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & \dots & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!2!^2 2} & \dots & 0 & \frac{-1}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N+2}{2})!2^N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{0!N!2^N} \end{bmatrix}_{(N+1)(N+1)}$$

On montre que l'équation (0.0.1) s'écrit la forme suivante :

$$D(x) = g(x) + \lambda_f F(x) + \lambda_v V(x). \tag{2.1.2}$$

où

$$D(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(x) y^{(k)}(x)\ ,\ F(x) = \int_a^b K_f(x,t) y(t) dt\ ,\ V(x) = \int_a^x K_v(x,t) y(t) dt$$

2.2 forme matricielle pour la partie différentielle $D(x)$

On considére la solution $y(x) = P_N(x)$ de l'équation (0.0.1) définie par la série de Bessel tronquée peut être s'écrit sous la forme matricielle :

$$[y(x)] = J(x)A; \quad A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_N \end{bmatrix}. \tag{2.2.1}$$

On peut écrire

$$[y(x)] = X(x) D^T A$$

Aussi, On dérive $X(x)$ une fois, On obtient

$$X'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \dots & Nx^{N-1} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} a_{11} + x a_{21} + \ldots + x^N a_{N1} & a_{12} + x a_{22} + \ldots + x^N a_{N2} & \dots & a_{1N} + a_{2N} + \ldots + x^N a_{NN}] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N a_{k1} x^{k-1} & \sum_{k=1}^N a_{k2} x^{k-1} & \sum_{k=1}^N a_{k3} x^{k-1} & \dots & \sum_{k=1}^N a_{kN} x^{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} a_{k1}x^{k-1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} a_{k2}x^{k-1} = 1 \\ \sum_{k=1}^{N} a_{k3}x^{k-1} = 2x \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N} a_{kN}x^{k-1} = Nx^{N-1} \end{cases}$$

donc

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{k1} = 1 \\ a_{12} = 1 \\ a_{23} = 2 \\ \vdots \\ a_{N-1N} = N \end{cases}$$

On obtient

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

alors

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T$$

par réccurence

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= X(x) \\ X^{(1)} &= X(x)B^T \\ X^{(2)} &= X^{(1)}(x)B^T = X(x)B^T B^T = X(x)(B^T)^2 \\ &\vdots \\ X^{(k)} &= X(x)(B^T)^k, \ \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Aussi

$$y(x) = X(x)D^T A$$

On dérive $y(x)$ une fois, on obtient :

$$\begin{aligned} y'(x) &= X'(x)D^T A \\ y'(x) &= X(x)B^T D^T A \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre 2 de y est donnée par :

$$y^{(2)}(x) = X(x)(B^T)^2 D^T A$$

par réccurence, on peut vérifier que :

$$y^{(k)}(x) = X(x)(B^T)^k D^T A, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

donc, la partie différentielle $D(x)$ est s'écrit sous forme marticielle comme suit :

$$[D(x)] = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(x) X(x)(B^T)^k D^T A.$$

2.3 Forme matricielle pour la partie intégrale $F(x)$

Le fonction de noyau $K_f(x,t)$ peut être approximée par une série de Maclaurin tronquée et série de Bessel tronquée, en effet

$$k_f(x,t) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} {}_tK^f_{mn} x^m t^n$$

et

$$k_f(x,t) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} {}_bK^f_{mn} J_m(x) J_n(t)$$

Où

$${}_tK^f_{mn} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K_f(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}; \quad m,n = 0,1,2,\ldots,N$$

On peut écrire le noyau K_f sous une forme maticielle

$$\sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} K^f_{mn} x^m t^n = \sum_{m=0}^{N} [K^f_{m0} x^m t^0 + K^f_{m1} x^m t^1 + K^f_{m2} x^m t^2 + \ldots + K^f_{mN} x^m t^N]$$

donc

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^f_{00} & K^f_{01} & K^f_{02} & \ldots & K^f_{0N} \\ K^f_{10} & K^f_{11} & K^f_{12} & \ldots & K^f_{1N} \\ K^f_{20} & K^f_{21} & K^f_{22} & \ldots & K^f_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ K^f_{N0} & K^f_{N1} & K^f_{N2} & \ldots & K^f_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix}$$

alors

$$K_f(x,t) = X(x) K^f_t X^T(t), \quad K^f_t = [{}_tK^f_{mn}], \quad m,n = 0,1,\ldots,N, \tag{2.3.1}$$

et

$$K_f(x,t) = J(x)K_t^f J(t), K_b^f = [{}_bK_{mn}^f], \quad m,n = 0,1,\ldots,N. \tag{2.3.2}$$

D'après (2.3.1) et (2.3.2), on obtient la relation suivante

$$X(x)K_t^f X^T(t) = J(x)K_b^f J^T(t) \Rightarrow X(x)K_t^f X^T(t) = X(x)D^T K_b^f D X^T(t),$$

Alors

$$K_t^f = D^T K_b^f D \text{ ou } K_b^f = (D^T)^{-1} K_t^f D^{-1}.$$

On remplace (2.2.1) et (2.3.2) dans le partie intégrale $F(x)$ dans (2.1.2), on obtient

$$[F(x)] = \int_a^b J(x)K_b^f J^T(t)J(t)Adt,$$

on pose

$$\begin{aligned} Q_f &= \int_a^b J^T(t)J(t)dt, \\ Q_f &= \int_a^b DX^T(t)X(t)D^T dt, \end{aligned}$$

Et on pose

$$H_f = \int_a^b X^T(t)X(t)dt.$$

On écrit H_f sous forme matricielle, on a :

$$X^T(t)X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \ldots & t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} = 1 + t^2 + t^4 + \ldots + t^{2N} = \sum_{k=0}^{N} t^{2k}.$$

et

$$\int_a^b X^T(t)X(t)dt = \int_a^b \sum_{k=0}^{N} t^{2k} = \sum_{k=0}^{N} [\frac{t^{2k+1}}{2k+1}]_a^b = \sum_{k=0}^{N} \frac{b^{2k+1} - a^{2k+1}}{2k+1}.$$

donc

$$[h_{ij}^f] = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}; \quad i,j = 0,1,\ldots,N,$$

alors

$$[F(x)] = X(x)D^T K_b^f Q_f A. \tag{2.3.3}$$

2.4 Forme matricielle pour la partie intégrale $V(x)$

La fonction de noyau $K_v(x,t)$ peut être approximée par une série de Maclaurin tronquée et une série de Bessel répétition de tronquée, on a :

$$k_v(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} {}_tK^v_{mn} x^m t^n,$$

et

$$k_v(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} {}_bK^v_{mn} J_m(x) J_n(t),$$

où

$${}_tK^v_{mn} = \frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}K_v(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}; \quad m,n = 0,1,2,\ldots,N$$

On peut écrire le noyau K_f par une forme maticielle comme suit :

$$\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} K^v_{mn} x^m t^n = \sum_{m=0}^{N} [K^v_{m0} x^m t^0 + K^v_{m1} x^m t^1 + K^v_{m2} x^m t^2 + \ldots + K^v_{mN} x^m t^N],$$

donc

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^v_{00} & K^v_{01} & K^v_{02} & \ldots & K^v_{0N} \\ K^v_{10} & K^v_{11} & K^v_{12} & \ldots & K^v_{1N} \\ K^v_{20} & K^v_{21} & K^v_{22} & \ldots & K^v_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ K^v_{N0} & K^v_{N1} & K^v_{N2} & \ldots & K^v_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix}.$$

alors

$$K_v(x,t) = X(x) K^v_t X^T(t), \quad K^v_t = [{}_tK^v_{mn}], \quad m,n = 0,1,\ldots,N, \tag{2.4.1}$$

et

$$K_v(x,t) = J(x) K^v_t J(t), \quad K^v_b = [{}_bK^v_{mn}], \quad m,n = 0,1,\ldots,N. \tag{2.4.2}$$

D'après les relations (2.4.1), (2.4.2), On obtient :

$$X(x) K^v_t X^T(t) = J(x) K^v_b J^T(t),$$

D'où

$$X(x) K^v_t X^T(t) = X(x) D^T K^v_b D X^T(t),$$

Donc

$$K^v_t = D^T K^v_b D.$$

Où

$$K_b^v = (D^T)^{-1} K_t^v D^{-1}.$$

On remplace (2.2.1) et (2.4.2) dans la partie intégrale $V(x)$ dans (2.1.2), on obtient la forme matricielle suivante :

$$[V(x)] = \int_a^b J(x) K_b^v J^T(t) J(t) A dt.$$

on pose

$$\begin{aligned} Q_v &= \int_a^x J^T(t) J(t) dt, \\ Q_v &= \int_a^x D X^T(t) X(t) D^T dt \end{aligned}$$

et on pose

$$H_v = \int_a^x X^T(t) X(t) dt,$$

On écrit H_v sous forme matricielle, on a :

$$X^T(t)X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} = 1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2N} = \sum_{k=0}^{N} t^{2k}.$$

et

$$\int_a^b X^T(t) X(t) dt = \int_a^x \sum_{k=0}^{N} t^{2k} = \sum_{k=0}^{N} [\frac{t^{2k+1}}{2k+1}]_a^b = \sum_{k=0}^{N} \frac{b^{2k+1} - a^{2k+1}}{2k+1}$$

donc

$$h_{ij}^v(x) = \frac{x^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}; \quad i, j = 0, 1, \dots, N.$$

on pose

$$M = D^T K_b^v D,$$

alors :

$$[V(x)] = X(x) M H(x) D^T Q_v A.$$

2.5 Forme matricielle pour les conditions aux limites

Dans ce partie, on va écrire les conditions aux limites sous forme matricielle :

On a :

$$\sum_{k=0}^{m-1}(a_{jk}y^{(k)}(a)+b_{jk}y^{(k)}(b))=\lambda_j,\quad j=0,1,\ldots,m-1$$
$$=\begin{cases} a_{00}y^{(0)}(a)+b_{00}y^{(0)}(b)+a_{01}y^{(1)}(a)+b_{01}y^{(1)}(b)+\ldots+a_{0m-1}y^{(m-1)}(a)+b_{0m-1}y^{(m-1)}(b)=\lambda_0 \\ a_{10}y^{(0)}(a)+b_{10}y^{(0)}(b)+a_{11}y^{(1)}(a)+b_{11}y^{(1)}(b)+\ldots+a_{1m-1}y^{(m-1)}(a)+b_{1m-1}y^{(m-1)}(b)=\lambda_1 \\ a_{20}y^{(0)}(a)+b_{20}y^{(0)}(b)+a_{21}y^{(1)}(a)+b_{21}y^{(1)}(b)+\ldots+a_{2m-1}y^{(m-1)}(a)+b_{2m-1}y^{(m-1)}(b)=\lambda_2 \\ \vdots \\ a_{m-10}y^{(0)}(a)+b_{m-10}y^{(0)}(b)+\ldots+a_{m-1m-1}y^{(m-1)}(a)+b_{m-1m-1}y^{(m-1)}(b)=\lambda_{m-1} \end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases} \sum_{k=0}^{m-1}(a_{0k}y^{(k)}(a)+b_{0k}y^{(k)}(b)=\lambda_0 \\ \sum_{k=0}^{m-1}(a_{1k}y^{(k)}(a)+b_{1k}y^{(k)}(b)=\lambda_1 \\ \sum_{k=0}^{m-1}(a_{2k}y^{(k)}(a)+b_{2k}y^{(k)}(b)=\lambda_2 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{m-1}(a_{m-1k}y^{(k)}(a)+b_{m-1k}y^{(k)}(b)=\lambda_{m-1} \end{cases}$$

On a :

$$y^{(k)}(x)=X(x)(B^T)^kD^TA$$

Alors, on peut voir que :

$$\sum_{k=0}^{m-1}[a_{jk}X(a)(B^T)^kD^TA+b_{jk}X(b)(B^T)^kD^TA]=[\lambda_j]$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{m-1}[a_{jk}X(a)+b_{jk}X(b)](B^T)^kD^TA=[\lambda_j],\quad j=0,1,\ldots,m-1 \tag{2.5.1}$$

Chapitre 3

Résolutions du problème (EIDFV)

3.1 Résultats fondamentaux

Dans ce partie nous appliquerons méthode de la collocation pour résoudre le problème (EIDFV) l'équation matricielle d'équation (0.0.1) est :

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_k X(x)(B^T)^k D^T A = g(x) + \lambda_f X(x) D^T K_b^f Q_f A + \lambda_v X(x) M H(x) D^T A. \tag{3.1.1}$$

En utilisant dans l'équatuion (3.1.1) les points de collocations qui définies par :

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \ldots, N$$

Le système matricielle de l'équation (3.1.1), est obtenue comme suit :

$$\textstyle\sum_{k=0}^{m} \beta_k X(x_i)(B^T)^k D^T A = g(x_i) + \lambda_f X(x_i) D^T K_b^f Q_f A + \lambda_v X(x_i) M H(x_i) D^T A, \quad i = 0, 1, \ldots, N$$

Alors, la matrice fondamentale de l'équation est donnée par :

$$\{\textstyle\sum_{k=0}^{m} \beta_k X(x_i)(B^T)^k D^T - \lambda_f X(x_i) D^T K_b^f Q_f - \lambda_v X(x_i) D^T M H(x_i) D^T\} A = g(x_i)$$

Ce qui conduit à :

$$\{\sum_{k=0}^{m} \beta_k X (B^T)^k D^T - \lambda_f X D^T K_b^f Q_f - \lambda_v \bar{X} \bar{M} \bar{H} \bar{D}\} A = G. \tag{3.1.2}$$

où

$$\beta_k = \begin{bmatrix} \beta_k(x_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_k(x_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_k(_N) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \ldots & x_N^N \end{bmatrix},$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X(x_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)^2}, \bar{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix}_{(N+1)^2\times(N+1)^2},$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & H_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2\times(N+1)^2},$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D^T \\ D^T \\ D^T \\ D^T \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

Donc l'équation matricielle fondamentale (3.1.2) correspondant à l'équation (0.0.1) peut être écrire sous la forme

$$W = AG,$$

ou

$$[W; G].$$

où

$$W = \sum_{k=0}^{m} \beta_k X(B^T)^k D^T - \lambda_f X D^T K_b^f Q_f - \lambda_v \bar{X}\bar{M}\bar{H}\bar{D}. \tag{3.1.3}$$

On note l'équation (3.1.3) correspond au système est de $N+1$ équation algebrique linéaires avec coefficients de Bessel inconnus $a_0, a_1, \dots, a_N$.

D'autre part, La forme matricielle pour les conditions est donnée par :

$$U_j A = [\lambda_j], \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

où

$$U_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} X(a) + b_{jk} X(b)](B^T)^k D^T = \begin{bmatrix} u_{j0} & u_{j1} & u_{j2} & \dots & u_{jN} \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Par conséquent, pour obtenir la solution de l'équation (0.0.1) avec les conditions (0.0.2), on remplace les matrices de lignes U_j et λ_j par les lignes des matrices W et G, plus précisement, on a :

$$\tilde{W} A = \tilde{G}.$$

$$[\tilde{W};\tilde{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{00} & w_{00} & \dots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} & ; & g(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m0} & w_{N-m1} & w_{N-m2} & \dots & w_{N-mN} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} & ; & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-10} & u_{m-11} & u_{m-12} & \dots & u_{m-1N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.1.4}$$

On note que

$$rang\tilde{W} = rang[\tilde{W};\tilde{G}] = N+1.$$

Sinon, il y a une contradiction avec le théorème (1.2.1) alors, on peut écrire :

$$A = (\tilde{W})^{-1}\tilde{G},$$

et par conséquent, les éléments $a_0, a_1, \dots, a_N$ de A sont biens déterminés

3.2 Estimations d'erreur et stabilité de la solutiion

Théorème 3.2.1. *Soit la solution de EIDFV qui calculée par la solution de la séries de Bessel $P_N(x)$ et $y = f(x)$ est la solution exacte. Soit la matrice de coefficiens de $[\tilde{W};\tilde{G}]$,*

$$\tilde{W}_1 = \tilde{W} + \delta W.$$

où δW représente l'erreur de calcul. Soit $X(x)$ et D les matrices qui définis en (2.1.1), si $\|\delta W\|_\infty \|\tilde{W}_1^{-1}\|_\infty < 1$, alors on a :

$$\|f - \mathcal{I}_N\|_\infty \leq 6(1+\Lambda_N)\omega(\frac{b-a}{2N}) + \frac{s\|\tilde{W}_1^{-1}\|_\infty \|\tilde{A}\|_\infty}{1 - s\|\tilde{W}_1^{-1}\|_\infty} \|D\|_\infty \|X^T(b-a)\|_\infty.$$

où est la valeur la plus grande de $\|\delta W\|_\infty$ et $\tilde{A}$ est la solution de $[\tilde{W};\tilde{G}]$. En particulier, si

$$\|\delta W\|_F \|\widetilde{W_1}^{-1}\|_F < 1$$

et $f \in C^\infty[a,b]$ ou $m \geq n$, Alors on a :

$$|f(x) - \mathcal{I}_N(x)| \leq \frac{1}{(N+1)!} \left|\prod_{i=0}^{N}(x - x_i) f^{(N+1)}(\epsilon_x)\right| + \frac{s\|\tilde{W}_1^{-1}\|_F \|\tilde{A}\|_F}{1 - s\|\tilde{W}_1^{-1}\|_F} \|D\|_F \|X^T(b-a)\|_F.$$

Où $\epsilon_x \in (a,b)$ et s est la plus valeur de $\|\delta W\|_F$.

Démonstration. 1.Si $y = f(x)$ est une solution de l'équation (0.0.1), alors f est continue sur $[a,b]$. par conséquent, à partir du corollaire (1.2.1) avec les propriétés de la norme, théorème (3.4.1) , (3.4.2) et (3.4.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\|y-\mathcal{I}_N\|_\infty &= \|y-\mathcal{I}_Nf+\mathcal{I}_Nf-\mathcal{I}_N\|_\infty\\
&\leq \|y-\mathcal{I}_Nf\|_\infty+\|\mathcal{I}_Nf-\mathcal{I}_N\|_\infty\\
&\leq 6(1+\Lambda_N(X)))\omega(\frac{(b-a)}{2N})+\|\mathcal{I}_Nf-\mathcal{I}_N\|_\infty
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_Nf-\mathcal{I}_N\|_\infty &= \|\sum_{n=0}^{N}a_nJ_n-\sum_{n=0}^{N}\tilde{a}_nJ_n\|_\infty\\
&= \|\sum_{n=0}^{N}(a_n-\tilde{a}_n)J_n\|_\infty\\
&\leq \left\|\begin{bmatrix}a_0-\tilde{a}_0 & a_1-\tilde{a}_1 & \dots & a_N-\tilde{a}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_0\\J_1\\\vdots\\J_N\end{bmatrix}\right\|_\infty\\
&\leq \left\|\begin{bmatrix}a_0-\tilde{a}_0 & a_1-\tilde{a}_1 & \dots & a_N-\tilde{a}_N\end{bmatrix}\right\|_\infty\left\|\begin{bmatrix}J_0\\J_1\\\vdots\\J_N\end{bmatrix}\right\|_\infty\\
&\leq \|\widetilde{W}^{-1}\|_\infty\|\delta W\|_\infty\|\widetilde{A}\|_1\|[J]^T\|_\infty=\|(\widetilde{W}-\delta W)^{-1}\|_\infty\|\delta W\|_\infty\|\widetilde{A}\|_1\|X^T(b-a)\|_\infty\\
&\leq \|\widetilde{W}_1^{-1}\|_\infty\|(I-(\delta W)\widetilde{W}_1^{-1})^{-1}\|_\infty\|\delta W\|_\infty\|\widetilde{A}\|_1\|D\|_\infty\|X^T(b-a)\|_\infty\\
&\leq \|\widetilde{W}_1^{-1}\|_\infty\frac{1}{1-\|(\delta W)\widetilde{W}_1^{-1}\|_\infty}\|\delta W\|_\infty\|\widetilde{A}\|_1\|D\|_\infty\|X^T(b-a)\|_\infty\\
&\leq \frac{\|\widetilde{W}_1^{-1}\|_\infty\|\delta W\|_\infty\|\widetilde{A}\|_1}{1-\|(\delta W)\widetilde{W}_1^{-1}\|_\infty}\\
&\leq \frac{s\|\widetilde{W}_1^{-1}\|_\infty\|\widetilde{A}\|_1}{1-s\|\widetilde{W}_1^{-1}\|_\infty}\|D\|_\infty\|X^T(b-a)\|_\infty si\|\delta W\|_\infty\|\widetilde{W}_1^{-1}\|_\infty<1(3.2.2)
\end{aligned}$$

2. où s est la valeur max de $\|\delta W\|_\infty$. Si $f\in C^\infty[a,b]$ avec $m>n$, d'aprés théorème (1.2.4), (2.4.1) , (2.4.2) et (2.4.3) avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
|y-\mathcal{I}_N(x)| &= |y-\mathcal{I}_Nf+\mathcal{I}_Nf-\mathcal{I}_N(x)|\\
&\leq |y-\mathcal{I}_Nf(x)|+|\mathcal{I}_Nf-\mathcal{I}_N(x)|\\
&\leq \frac{1}{(N+1)!}|\prod_{i=0}^{N}(x-x_i)f^{(N+1)}(\epsilon_x)|+|\mathcal{I}_Nf-p_N(x)|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_N f - \mathcal{I}_N(x)| &= |\sum_{n=0}^{N} a_n J_n(x) - \sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n J_n(x)| \\
&= |\sum_{n=0}^{N} (a_n - \tilde{a}_n) J_n(x)| \\
&\leq \left\| \begin{bmatrix} a_0 - \tilde{a}_0 & a_1 - \tilde{a}_1 & \dots & a_N - \tilde{a}_N \end{bmatrix} \right\|_F \left\| \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ \vdots \\ J_N \end{bmatrix} \right\|_F \\
&\leq \|\widetilde{W}^{-1}\|_F \|\delta W\|_F \|\widetilde{A}\|_F \|[J(x)]^T\|_F \\
&\leq \|(\widetilde{W} - \delta W)^{-1})\|_F \|\delta W\|_F \|\widetilde{A}\|_F \|D^T\|_F \|X^T(b-a)\|_F \\
&\leq \leq \|\widetilde{W}_1^{-1}\|_F \|(I - (\delta W)\widetilde{W}_1^{-1})^{-1}\|_F \|\delta W\|_F \|\widetilde{A}\|_F \|D\|_F \|X^T(b-a)\|_F \\
&\leq \|\widetilde{W}_1^{-1}\|_F \frac{1}{1 - \|(\delta W)\widetilde{W}_1^{-1}\|_F} \|\delta W\|_F \|\widetilde{A}\|_F \|D\|_F \|X^T(b-a)\|_F \\
&\leq \frac{\|\delta W\|_F \|\widetilde{A}\|_F}{1 - \widetilde{W}_1^{-1}\|_F \|\delta W\|_F} \|D\|_F \|X^T(b-a)\|_F \\
&\leq \frac{s\|\widetilde{W}_1^{-1}\|_F \|\widetilde{A}\|_F}{1 - s\|\widetilde{W}_1^{-1}\|_F} \|D\|_F \|X^T(b-a)\|_F \quad si \|\delta W\|_F \|\widetilde{W}_1^{-1}\|_F < 1.
\end{aligned}$$

pour compléter la preuver, on a besoin de trouver s, la valeur max de $\|\delta W\|$. Pour faire ça.
on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Si* $X_j + \triangle X_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *satisfait*

$$\|\triangle X_j\| \leq \delta_j \|X_j\|, \quad \forall j$$

Alors

$$\| \prod_{j=0}^{m} (X_j + \triangle X_j) - \prod_{j=0}^{m} X_j \| \leq (\prod_{j=0}^{m} (1 + \delta_j) - 1) \prod_{j=0}^{m} \|X_j\|.$$

En utilisant le lemme (3.2.1), on trouve la bande supérieure de $\|\delta W\|$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\|\delta W\| &= \| \sum_{k=0}^{m} \beta_k X (B^T)^k D^T - \lambda_f X D^T K_b^f Q_f - \lambda_v \bar{X}\bar{M}\bar{H}\bar{D} - fl(\sum_{k=0}^{m} \beta_k X (B^T)^k D^T - \lambda_f X D^T K_b^f Q_f - \lambda_v \bar{X}\bar{M}\bar{H}\bar{D})\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m} (\prod_{j=0}^{3} (1 + \sigma_j) - 1) \|\beta_k\| \|X\| \|(B^T)^k\| \|D^T\| + (\prod_{j=0}^{3} (1 + \sigma_j) - 1) \|\lambda_f X\| \|D^T\| \|K_b^f\| \|Q_f\| \\
&+ (\prod_{j=0}^{3} (1 + \sigma_j) - 1) \|\lambda_v \bar{X}\| \|\bar{M}\| \|\bar{H}\| \|\bar{D}\| + \theta r \|W\|
\end{aligned}$$

Où $\theta \leq u$, u est l'unité arrondie et r est nombre des termes additions dans W. □

Considérons un ensemble de valeurs de fonction $\{\tilde{f}(x_i) : \ i = 0, 1, \ldots, N\}$ qui est une perturbation des données $\{f(x_i) : \ i = 0, 1, \ldots, N\}$ relatives aux noeuds $\{x_i : \ 0, 1, \ldots, N\} \subset [a, b]$. La perturbation peut être due, par exemple, à l'effet d'erreurs d'arrondi, ou peut être due à une erreur dans la mesure expérimentale des donnéesê, En notant $\tilde{\mathcal{I}}_N f$ le polynôme d'interpolation sur l'ensemble des valeurs $f(x)$, alors on a :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_N(x) - \tilde{\mathcal{I}}_N(x)\| &= \|\mathcal{I}_N f(x) - \delta\mathcal{I}_N(x) - \tilde{\mathcal{I}}_N f(x) - \delta\tilde{\mathcal{I}}_N(x)\| \\
&\leq \|\mathcal{I}_N f(x) - \tilde{\mathcal{I}}_N f(x)\|_\infty + \|\tilde{\mathcal{I}}_N(x) - \delta\tilde{\mathcal{I}}_N(x)\|_\infty \\
&= \max_{0\leq x\leq 1} |\sum_{j=0}^{n}(f(x_j) - \tilde{f}(x_j))l_j^{(n)}(x)| + \|\tilde{\mathcal{I}}_N(x) - \delta\tilde{\mathcal{I}}_N(x)\|_\infty \\
&\leq \Lambda_N(X) \max_{0\leq x\leq 1} |f(x_j) - \tilde{f}(x_j)| + \|\tilde{\mathcal{I}}_N(x) - \delta\tilde{\mathcal{I}}_N(x)\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Où δp_N et $\delta\tilde{p}_N$ représentent les différences entre le polynôme d'interpolation et la solution de Bessel.
Si la constante de lebesgue $\Lambda_N(X)$ donnée dans (1.1.2) et la différence entre le polynôme d'interpolation et la solution de Bessel sont faible, les petits changements sur les données donnent lieu à de petits changements sur la solution de la série de Bessel sur des noeuds équidistants, $\Lambda_N(X)$ croît de manière expontielle, c-à-d, comme $N \to \infty$

$$\Lambda_N(X) \approx \frac{2^{N+1}}{eN \log N}$$

pour les grands N et les noeuds également espacés, la méthode d'interpolation peut devenir instable, Dautre part, en utilisant (3.2.2) la différence entre le polynôme d'interpolation et la solution de la série de Bessel croît chaque fois que N augmente. En conséquence, la solution de la série de Bessel peut devenir instable pour les grands N, Soit $E_N(x)$ la fonction d'erreur qui vient de mettre la solution de la série de Bessel dans (0.0.1), c-à-d la fonction $E_N : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est définie par

$$E_N(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(x)\mathcal{I}_N^{(k)}(x) - g(x) - \lambda_f F(x) - \lambda_v V(x) \ , \ \ \forall x \in [a, b]$$

Si $\mathcal{I}_N(x)$ est la solution série de Bessel, donc la solution de (3.1.4), les erreurs de calcul sont minimum si $E_N(x)$ est équivalant à la fonction zéro sur les noeuds. Par conséquent, il peut être utilisé pour rechercher des erreurs de calcul sur les noeuds.

Chapitre 4

Exemples numériques

Dans ce chapitre on représente quelques exemples pour la validation méthode de la collocation.

4.1 Example 1

On considére EIDFV linéaire suivant :

$$y''(x) + xy'(x) - xy(x) = e^x - \sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) + \int_0^1 \sin(x)e^{-t}y(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^x \cos(x)e^{-t}y(t)dt, \ \ 0 \leq x, t \leq 1$$

avec les conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

qui admet comme solution exacte $y(x) = e^x$, on écrit :

$$y(x) = \mathcal{I}_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n J_n(x),$$

où

$$m = 2, \ N = 3, \ \beta_0 = -x, \beta_1 = x, \ \beta_2 = 1, \ g(x) = e^x - \sin(x) + 1/2x\cos(x), \ \lambda_f = 1,$$
$$\lambda_v = -1/2, \ K_f(x,t) = \sin(x)e^{-t} et K_v(x,t) = \cos(x)e^{-t}.$$

d'autre part, pour $N = 3$, les points de collocation sont :

$$\{x_0 = 0, \ x_1 = \frac{1}{3}, \ x_2 = \frac{2}{3}, \ x_3 = 1\}$$

l'équation matricielle fondamentale de EIDFV s'écrit comme suit :

$$\{\beta_0 X D^T + \beta_1 X B^T D^T + \beta_2 X (B^T)^2 D^T - \lambda_f X D^T K_b^f Q_f - \lambda_v \bar{X}\bar{M}\bar{H}\bar{D}\}A = G.$$

Où

$$X(0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix},\quad X(1/3)=\begin{bmatrix}1&1/3&1/9&1/27\end{bmatrix},$$
$$X(2/3)=\begin{bmatrix}1&2/3&4/9&8/27\end{bmatrix},\quad X(1)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix}X(0)\\X(1/3)\\X(2/3)\\X(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1/3&1/9&1/27\\1&2/3&4/9&8/27\\1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\beta_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-1/3&0&0\\0&0&-2/3&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\quad \beta_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1/3&0&0\\0&0&2/3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\beta_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}1\\1145/934\\1211/761\\2615/1218\end{bmatrix},$$

$$D^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&0&0\\-1/4&0&1/8&0\\0&-1/16&0&1/48\end{bmatrix},\quad Q_f=\begin{bmatrix}203/240&79/384&17/480&5/1152\\79/384&137/1919&11/768&17/8960\\17/384&11/768&1/320&1/2304\\5/1152&17/8960&1/2304&1/16128\end{bmatrix},$$

$$K_b^f=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\2&-4&12&-28\\0&0&0&0\\-2&4&-12&28\end{bmatrix},\quad B^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}X(0)&0&0&0\\0&X(1/3)&0&0\\0&0&X(2/3)&0\\0&0&0&X(1)\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}1&-1&1/2&-1/6\\0&0&0&0\\-1/2&1/2&-1/4&1/12\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$H(0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad H(1/3)=\begin{bmatrix}1/3&1/18&1/81&1/81\\1/18&1/81&1/324&1/324\\1/81&1/324&1/1215&1/1215\\1/324&1/1215&1/4374&1/15309\end{bmatrix},$$

$$H(2/3)=\begin{bmatrix}2/3&2/18&2/81&2/81\\2/18&4/81&8/324&32/324\\1/81&1/324&1/1215&1/1215\\1/324&1/1215&1/4374&1/15309\end{bmatrix},\quad H(1)=\begin{bmatrix}1&1/2&1/3&1/4\\1/2&1/3&1/4&1/5\\1/3&1/4&1/5&1/6\\1/4&1/5&1/6&1/7\end{bmatrix},$$

$$\bar{M}=\begin{bmatrix}M&0&0&0\\0&M&0&0\\0&0&M&0\\0&0&0&M\end{bmatrix},\quad \bar{H}=\begin{bmatrix}H(0)&0&0&0\\0&H(1/3)&0&0\\0&0&H(2/3)&0\\0&0&0&H(1)\end{bmatrix},$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D^T \\ D^T \\ D^T \\ D^T \end{bmatrix}.$$

La matrice pour l'équation fondamentale est ceci :

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 & 0 & ; & 1 \\ -949/1011 & -491/9896 & 647/2420 & 239/5558 & ; & 1145/934 \\ -1637/1096 & -1375/5969 & 1208/3835 & 899/9310 & ; & 1211/761 \\ -1730 & -1097/1920 & 1571/4320 & 766/4633 & ; & 2615/1218 \end{bmatrix}$$

La matrice pour les conditions initiales est :

$$U_j A = [\lambda_j] ou [U_j; \lambda_j]; j = 0, 1.$$

c-à-d,

$$[U_0; \lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$[U_1; \lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

A partir du système (3.1.3), la matrice basée sur les conditions est calculée comme suit :

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 & 0 & ; & 1 \\ -949/1011 & -491/9896 & 647/2420 & 239/5558 & ; & 1145/934 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

En résoludion ce système la matrice de coefficients de Bessel est obtenu comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4587/299 \end{bmatrix}^T.$$

Donc la solution approximative du problème (EIDFV) pour $N = 3$ est :

$$\mathcal{I}_3(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.194606977755x^3.$$

Pour $N = 7$, on a :

$$\mathcal{I}_7(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.166667888142x^3 + (0.416486482730e - 1)x^4 + (0.839476911928e - 2)x^5$$
$$+ (0.128397145738\text{e-}2)\mathrm{x}^6 + (0.285345162827e - 3)x^7.$$

Pour $N = 10$, on a :

$$\mathcal{I}_{10}(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.166666667221x^3 + (0.416666703938e-1)x^4 + (0.833330918991e-2)x^5$$
$$+(0.138897921402\text{e-2})\text{x}^6 + (0.198200251964e-3)x^7 + (0.251170379640e-4)x^8 + (0.247073655372e-5)x^9 +$$
$$(0.4152348049677195e-6)x^{10}$$

$$\|\tilde{W}^{-1}\|_F = 3.8352 \times 10^7, \quad \|\tilde{A}\|_F = 576.60, \quad |D\|_F = 3.8284$$

et

$$s = \max \|\delta W\| = 4.9357 \times 10^{-17}.$$

$$\|\delta W\|_F \|\tilde{W}^{-1}\|_F < 1.8930 \times 10^{-9}$$

D'autre part, utilise relation suivante :

$$\|f - \mathcal{I}_N\|_\infty = \max\{|f(x) - p_N(x)|, 0 \leq x \leq 1\},$$

On calcul l'erreur pour $N = 3$, $N = 7$ et N=10, on a :

$$\|f - \mathcal{I}_3\|_\infty = 2.3675 \times 10^{-2},$$

$$\|f - \mathcal{I}_7\|_\infty = 1.2063 \times 10^{-6},$$

$$\|f - \mathcal{I}_{10}\|_\infty = 8.2249 \times 10^{-10}.$$

x_i	y	y_3	y_7	y_{10}	e_3	e_7	e_{10}
0	1	1	1	1	0	0	0
0.2	1.2214027581	1.2215788912	1.2214027614	1.2214027581	1.761331e-4	3.262015e-9	1.691980e-13
0.4	1.4918246976	1.4926311300	1.4918247044	1.4918246976	8.064324e-4	6.770465e-9	3.668177e-13
0.6	1.8221188003	1.8226300640	1.8221188108	1.8221188003	5.112636e-4	1.049331e-8	5.779821e-13
0.8	2.2255409284	2.2210490406	2.2255409520	2.2255409284	4.491888e-3	2.353097e-8	9.410250e-13
1	2.7182818284	2.6973614074	2.7182815307	2.7182818284	2.092042e-2	2.977120e-7	3.108891e-11

4.2 Exemple 2

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y^{(5)}(x) - xy^{(2)}(x) + xy(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x+t}y(t)dt + \int_0^x xe^t y(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = -1, \ y''(0) = 1, \ y^{(3)}(0) = -1, \ y^{(4)}(0) = 1. \end{cases}$$

Ce problème admet $y(x) = e^x$ comme solution exacte, on écrit :

$$y(x) = \mathcal{I}_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n J_n(x)$$

Où

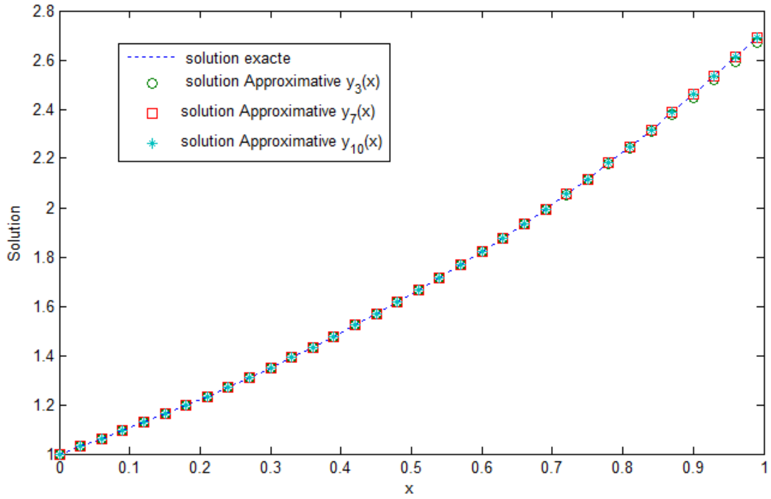

FIGURE 4.1 – comparaison de la solution exacte avec la solution approchée

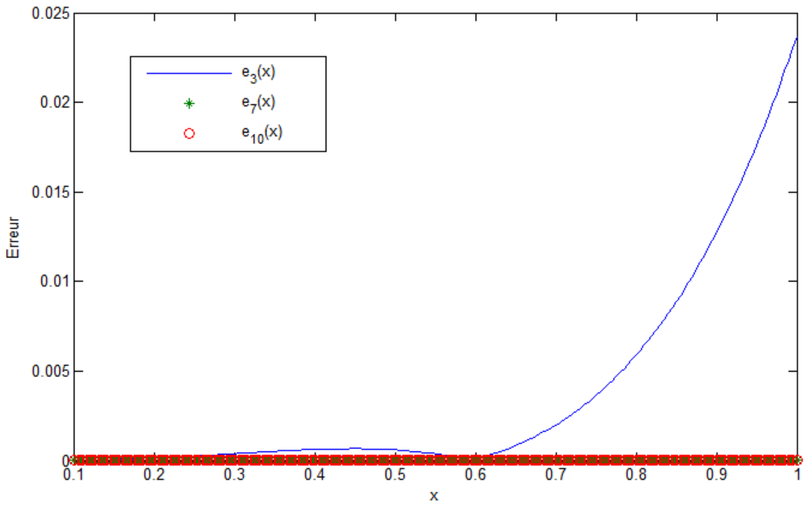

FIGURE 4.2 – comparaison d'erreur absolue

$$m = 2,\ N = 3,\ \beta_0 = x,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = -x,\ \beta_2 = -x,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 1,\ \beta_5 = 1,\ g(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x} - x^2,\ \lambda_f = \frac{1}{2},\ \lambda_v = 1,\ K_f(x,t) = e^{2x+t} et\ K_v(x,t) = xe^t.$$

d'autre part, pour $N = 3$ les points de la collacation sont :

$$\{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1\}.$$

l'équation matricielle fondamentale du EIDFV s'écrit par :

pour $N = 5$

$$\mathcal{I}_5(x) = 1 - x + 0.5x^2 - 0.166666666666667x^3 + (0.41666666666667e - 1)x^4 - (0.8335498898657e - 2)x^5.$$

pour $N = 10$ la solution on obtient :

$$\mathcal{I}_{10}(x) = 1 - x + 0.5x^2 - 0.16666666666666666667x^3 + (0.41666666666666666667e - 1)x^4$$
$$\text{-(0.8333333336905928606e-2)x}^5 + (0.13888869954559716439e - 2)x^6 - (0.19840028513387639507e - 3)x^7$$
$$\text{+(0.24762973238625426765e-4)x}^8 - (0.26896594998582468 85e - 5)x^9 + (0.21483358999668774791e - 6)x^{10}.$$

x_i	y	y_5	y_{10}	e_5	e_{10}
0	1.0000	1.0000	1.0000	0	0
0.2	0.8187	0.8187	0.8187	8.7104e-008	3.4084e-014
0.4	0.6703	0.6703	0.6703	5.4015e-006	7.9226e-013
0.6	0.5488	0.5488	0.5488	5.9804e-005	4.5610e-012
0.8	0.4493	0.4490	0.4493	3.2701e-004	9.5621e-012
1	0.3679	0.3667	0.3679	1.2149e-003	3.4935e-010

TABLE 4.1 – compraison les solutions et d'erreur d'équation de Fredholm-Volterra 5-iéme ordre

4.3 Exemple 3

On considère l'équation intégrale de Volterra définé par :

$$\begin{cases} y(x) = 2 - e^{(x+1)} + \int_{-1}^{x} e^{(x-t)} y(t)dt, & -1 \leq x, t \leq 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

qui la solution exacte de problème est $y(x) = 1$.

Où

$m = 1,\ N = 3,\ \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ g(x) = 2 - e^{(x+1)},\ \lambda_f = 0,\ \lambda_v = 1,\ K_v(x,t) = e^{(x-t)},\ a = -1,\ b = 1.$

d'autre part, l'ensembles les points de collocation est :

$$\{x_0 = -1,\ x_1 = -1/3,\ x_2 = 1/3,\ x_3 = 1\}$$

l'équation matricielle fonadamentale s'écrit comme suit :

$$\{\beta_0 X D^T + \beta_1 X B^T D^T - \lambda_v \bar{X}\bar{M}\bar{H}\bar{D}\}A = G.$$

Où

$$X(-1) = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}, X(-1/3) = \begin{bmatrix}1 & -1/3 & 1/9 & -1/27\end{bmatrix},$$
$$X(1/3) = \begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/9 & 1/27\end{bmatrix}, X(1) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$
$$X = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27\\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \beta_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$\beta_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$
$$D^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ -1/4 & 0 & 1/8 & 0\\ 0 & -1/16 & 0 & 1/48\end{bmatrix}, \quad K_b^f = \begin{bmatrix}1 & -2 & 6 & -14\\ 2 & -4 & 12 & -28\\ 6 & -12 & 36 & -84\\ 14 & -28 & 84 & -196\end{bmatrix},$$
$$M = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1/2 & -1/6\\ 1 & -1 & 1/2 & -1/6\\ 1/2 & -1/2 & 1/4 & -1/12\\ 1/6 & -1/6 & 1/12 & -1/36\end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix}1\\ 158/3023\\ -1643/916\\ -1773/329\end{bmatrix},$$
$$H(-1) = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & -1/2\\ -1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & -1/3\\ -1/2 & 0 & -1/3 & 0\end{bmatrix}, \quad H(-1/3) = \begin{bmatrix}2/3 & -5/9 & 26/81 & -41/162\\ -5/9 & 26/81 & -41/162 & 242/1215\\ 26/81 & -41/162 & 242/1215 & -365/2187\\ -41/162 & 242/1215 & -365/2187 & 312/2185\end{bmatrix},$$
$$H(1/3) = \begin{bmatrix}4/3 & -4/9 & 28/81 & -20/81\\ -4/9 & 28/81 & -20/81 & 244/1215\\ 28/81 & -20/81 & 244/1215 & -364/2187\\ -20/81 & 244/1215 & -364/2187 & 313/2190\end{bmatrix}, \quad H(1) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 2/3 & 0\\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5\\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0\\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7\end{bmatrix},$$
$$\bar{X} = \begin{bmatrix}X(-1) & 0 & 0 & 0\\ 0 & X(-1/3) & 0 & 0\\ 0 & 0 & X(1/3) & 0\\ 0 & 0 & 0 & X(1)\end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix}M & 0 & 0 & 0\\ 0 & M & 0 & 0\\ 0 & à & M & 0\\ 0 & 0 & 0 & M\end{bmatrix},$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H(-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H(-1/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H(1/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H(1) \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D^T \\ D^T \\ D^T \\ D^T \end{bmatrix}.$$

La matrice pour l'équation fondamentale de matrice :

$$[W;G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 698/4455 & 1156/2461 & -2275/47064 & 89/9864 & ; & 158/3023 \\ -1255/766 & 2465/2659 & -1103/15728 & 133/5965 & ; & -1643/916 \\ -881/180 & 913/681 & -59/360 & 691/15120 & ; & -1773/329 \end{bmatrix}$$

La matrice des conditions initiales est :

$$U_j A = [\lambda_j] ou [U_j; \lambda_j]; j = 0,$$

d'où :

$$[U_0; \lambda_0] = \begin{bmatrix} -3/4 & 7/16 & -1/8 & 1/48 & ;1 \end{bmatrix}$$

A partir du système (3.1.3), la matrice basée sur les conditions est :

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 698/4455 & 1156/2461 & -2275/47064 & 89/9864 & ; & 158/3023 \\ -1255/766 & 2465/2659 & -1103/15728 & 133/5965 & ; & -1643/916 \\ -3/4 & 7/16 & -1/8 & 1/48 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

En résoludion ce système, la matrice de coefficients de Bessel est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 167/814 \\ 1607/526 \\ -10205/1734 \end{bmatrix}$$

donc pour $N = 3$, la solution approximative est

$$\mathcal{I}_3(x) = 1 + 0.102579915564518x + 0.131891889463572x^2 - 0.135431580615435x^3.$$

Pour $N = 5$ on a :

$$\mathcal{I}_5 = (x) = 1 - (0.6512101247683e - 2)x - (0.18281396592705e - 1)x^2 + (0.32351449202755e - 1)x^3$$
$$+ (0.9271163777106\text{e-}2)\text{x}^4 - (0.41433799639768e - 1)x^5.$$

Pour $N = 7$, on a :

$$\mathcal{I}_7(x) = 1 + (6.884818853311793e-005)x + (2.310437984304192e-004)x^2 - (4.523493357802133e-004)x^3$$
$$\text{-(4.436609093954591e-004)x}^4 + (0.1197189556800e-2)x^5$$
$$\text{+(3.529854050478185e-004)x}^6 - (8.289645529476788e-004)x^7.$$

X_i	y	y_3	y_5	y_7	e_3	e_5	e_7
-1	1	1.1647	1.0066	1.0002	1.6474e-001	6.5842e-003	1.5564e-004
-0.8	1	1.0717	0.9943	1	7.1688e-002	5.6799e-003	1.6753e-005
-0.6	1	1.0152	0.9948	1	1.5186e-002	5.2385e-003	2.8657e-005
-0.4	1	0.9887	0.9983	1	1.1262e-002	1.7291e-003	1.7565e-005
-0.2	1	0.9858	1.0003	1	1.4157e-002	3.4045e-004	1.9688e-006
0	1	1	1.0247	1	1	0	0
0.2	1	1.0535	0.9982	1	2.4708e-002	1.7733e-003	1.9078e-005
0.4	1	1.0798	0.9964	1	5.3467e-002	3.6463e-003	3.6545e-005
0.6	1	1.0798	0.9945	1.0001	7.9776e-002	5.5210e-003	5.5635e-005
0.8	1	1.0971	0.9899	1.0001	9.7134e-002	1.0125e-002	1.0060e-004
1	1	1.0990	0.9754	1.0001	9.9040e-002	2.4605e-002	1.2509e-004

TABLE 4.2 – comparaison les solutions et c'est l'erreur qui est la comparaison d'équation intégrale de Volterra

4.4 Exemple 4

On considére l'équation intégro-différentielle linéaire de Fredholm d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} y''(x) = e^x - x + \int_0^1 xty(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Où

$$m = 2,\ N = 3,\ g(x) = e^x - x,\ y(x) = e^x,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \lambda_f = 1,\ K_f(x,t) = xt,\ a = 0,\ b = 1.$$

La solution exacte est $y(x) = e^x$, on écrit :

$$y(x) = \mathcal{I}_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n J_n(x)$$

d'autre part, pour $N = 3$ les points de la collocation sont :

$$\{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1\}$$

L'équation matricielle fondamentale de l'EIDFV s'écrit sous la forme :

$$\{\beta_0 X D^T + \beta_1 X B^T D^T + \beta_2 X (B^T)^2 D^T - \lambda_f X D^T K_b^f Q_f - \lambda_v \bar{X} \bar{M} \bar{H} \bar{D}\} A = G.$$

Où

$$X(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ X(1/3)=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/9 & 1/27\end{bmatrix},$$
$$\mathrm{X(2/3)}=\begin{bmatrix}1 & 2/3 & 4/9 & 8/27\end{bmatrix},\ \mathrm{X(1)}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix}X(0)\\ X(1/3)\\ X(2/3)\\ X(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27\\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\beta_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \beta_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\beta_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}1\\ 904/851\\ 1536/1199\\ 1720/1001\end{bmatrix},$$

$$D^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&0&0\\-1/4&0&1/8&0\\0&-1/16&0&1/48\end{bmatrix},\ K_b^f=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\2&-4&12&-28\\0&0&0&0\\-2&4&-12&28\end{bmatrix},$$

$$Q_f=\begin{bmatrix}203/240&79/384&17/480&5/1152\\79/384&137/1919&11/768&17/8960\\17/384&11/768&1/320&1/2304\\5/1152&17/8960&1/2304&1/16128\end{bmatrix},\ B^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M=\begin{bmatrix}1&-1&1/2&-1/6\\0&0&0&0\\-1/2&1/2&-1/4&1/12\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}1&1/2&1/3&1/4\\1/2&1/3&1/4&1/5\\1/3&1/4&1/5&1/6\\1/4&1/5&1/6&1/7\end{bmatrix}.$$

La matrice pour l'équation fondamentale est :

$$[W;G]=\begin{bmatrix}-1/2&0&1/4&0&;&1\\-31/48&-127/720&23/96&29/720&;&904/851\\-19/24&-127/360&11/48&29/360&;&1536/1199\\-15/16&-127/240&7/32&29/240&;&1720/1001\end{bmatrix}$$

La matrice des conditions initiales est ceci :

$$U_jA=[\lambda_j]\ ou\ \ [U_j;\lambda_j];\quad j=0,1.$$

d'où,

$$[U_0; \lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$[U_1; \lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

A partir du système (3.1.3), la matrice basée sur les conditions est calculée comme est :

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 & 0 & ; & 1 \\ -31/48 & -127/720 & 23/96 & 29/720 & ; & 904/851 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

En résoludion ce système, la matrice de coefficients de Bessel est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 681/44 \end{bmatrix},$$

donc pour $N = 3$, la solution approximative est :

$$\mathcal{I}_3(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.197443208377862x^3.$$

Pour $N = 7$, la solution approximative est :

$$\mathcal{I}_7(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.166668918356751x^3 + (0.41648807659295e - 1)x^4 + (0.8393987321986e - 2)x^5$$
$$+ (0.1284932595527\text{e-}2)\text{x}^6 + (2.847874270180779e - 004)x^7.$$

D'autre part, en utilisant la faite que :

$$\|f - \mathcal{I}_N\|_\infty = \max\{|f(x) - p_N(x)|, 0 \leq x \leq 1\},$$

On peut calculer l'erreur pour $N = 3,\ N = 7$:

$$\|f - \mathcal{I}_3\|_\infty = 2.0839 \times 10^{-2},$$

$$\|f - \mathcal{I}_7\|_\infty = 3.9509 \times 10^{-7}.$$

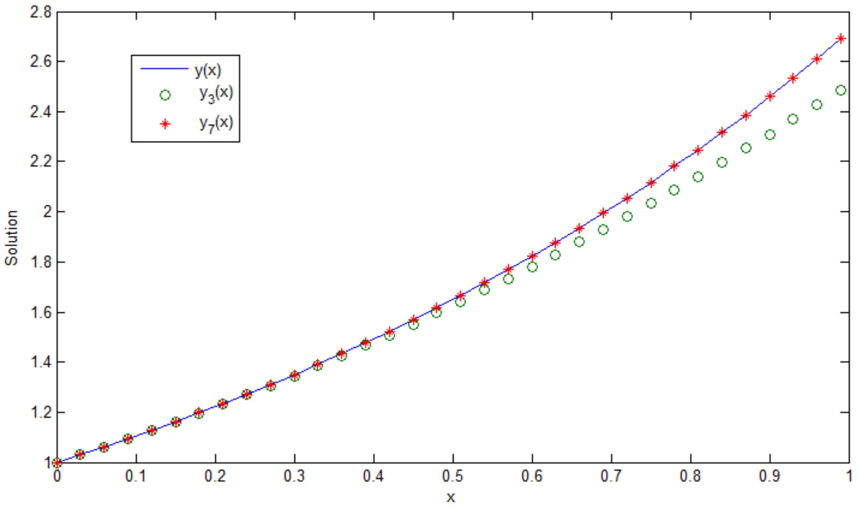

FIGURE 4.3 – Comparaison de la solution exacte avec solution approximative

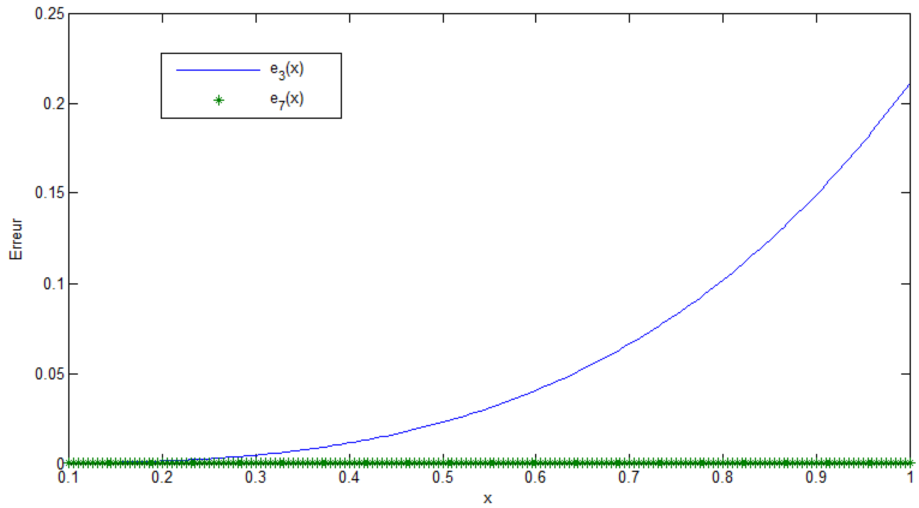

FIGURE 4.4 – comparaison d'erreur

Conclusion

L'étude présenté dans ce mémoire sur l'équations intégro-différentielles de type Fredholm-Volterra, on a travaillée numériqument car elles sont difficiles analytiquement et on a trouvé des solutions approchées en appliquant la méthode de la collacation en utilisant le polynôme de Bessel.

Nous avons renconté des difficultés dans l'article sur lequel on a travaillé, car il y'a des théorèmes et des corollaires sans des preuves, Cet article repose sur le côté numérique plus que sur le côté théorique.

Finalement, on conseille aux fans de ce domaine de travailler dessus et d'essayer de la développer.

Bibliographie

[1] George M.Philips,Interpolation and Approximation by Polynomials,Springer, 2003.

[2] Gene H. Golub,Charles F.Van Loan, Matrix Computions,The John Hopkins University Press, London,1996.

[3] O.R. Isşik,Z. Güney, M. Sezer, Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation, J. Difference Equ. Appl.,(2010),in press (doi :10.1080/10236198.2010.496456).

[4] I. Natanson, Constructive Function Theory, vol. III, Ungar, NY, 1965.

[5] Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, SIAM, Philadelphia, 2002.

[6] Miloud Moussai and Lakhder Chiter, A Computational method Based in Bernstein Polynomials for Solving Fredholm Integro-differential Euations under Mixed conditions, Journal of Mathematics and Statistics, 13(1)(2017), 30-37.

[7] A. Quarteroni, R. Sacco,F Saleri,Numerical Mathematics,Springer,2007.

[8] T.J. Rivlin, An Introduction to the Approximation of Functions, Dover Publications, NY, 2003.

[9] G.W. Stewart, Matrix Algorithms, Volume I : Basic Decompositions, SIAM, Philadelphia, 1998.

[10] Şuayip Yüzbaşi, Niyazi Şahin, Ahmet Yildirim, A collocation approach for solving high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations, Mathematical and Computer Modelling 55 (2012) 547–563.

[11] Suayip Yüzbasi, Niyazi Sahin, M. Sezer, A Bessel polynomial approach for solving linear neutral delay differential equations with variable coefficients,J. Adv. Res. Differ. Equ. 3 (1) (2011) 81–101.p

[12] Ş. Yüzbaşi, N. Şahin, M. Sezer, A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations, Numer. Methods for Partial Diff. Eq., (2010), in press (doi :10.1002/num.20660).

[13] S. Yüzbaşi, M. Sezer, A collocation approach to solve a class of Lane–Emden type equations, J. Adv. Res. Appl. Math. 3(2)(2011) 58–73.

Résumé

Dans cette mémoire, nous étudions les équations intégro-différentielles de type Fredholm-Volterra et nous avons appliqué méthode de collocation qui utilisé série de Bessel pour trouver une solution approximative et comparer avec la solution exact et fournir des exemples numériques pour confirmer la méthode.

Mots clés : Les équations intégro-différentielle, équations intégro-différentielle Fredholm-Volterra, polynôme et série de Bessel, méthode de collocation.

Absract

In this paper, we study the integro-differetial of the Fredholm-Volterra type, and we applied the collocation method using Bessel serie to find the approximate solution and compare it with the exact solution, and presentes numerical examples to verify the method.

Key words : integro-differential equations, Fredholm-Volterra integro-differential equations, polynomial and Bessel serie, collocation method