



N° d'ordre : .....

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et**  
**De la Recherche Scientifique**

**Université Mohamed Boudiaf - M'sila**  
**Faculté des Sciences**  
**Département de Physique**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

**MASTER**

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique théorique : Physique des particules a haute**  
**énergies**

Par

**ASLI Abdelhak**

**THEME**

---

**L'équation de l'évolution DGLAP pour la**  
**collision p-p en QCD perturbative**

---

Soutenu le : 04 /06/2016

Devant le jury composé de :

N.GUESMIA	MAA Univ. de M'sila	Président
E.REDOUANE- SALAH	MCB Univ. de M'sila	Rapporteur
K.BOUFERRACH	MAA Univ. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2016

## Remerciement

*Avant tout,*

*Je remercie ALLAH tout puissant miséricordieux qui a illuminé mon chemin et qui a donné la volonté, la patience et le courage pour réaliser et terminer ce modeste travail de la fin d'étude.*

*Je tiens tout particulièrement à remercier vivement mon encadrer : Dr. E.REDOUANE-SALAH, pour sa gentillesse et sa spontanéité, j'ai eu le grand plaisir de travailler sous sa direction.*

*Et aussi tous mes professeurs pour leurs compétences et conseils. Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du jury pour l'immense honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe de la Physique Théorique du Département de Physique.*

*Ainsi qu'à tous les enseignants qui, par leur enseignement, leur encouragement et leur aide, ont contribué à ma formation durant tous mes études dès le primaire à l'université.*

*Enfin, je voudrais remercier ma famille, mes amies et mes amis et mes parents pour leur soutien moral et financier durant ces années d'étude.*

**ASLI ABDELHAK**

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 01 : introduction a la QCD</b>	
1.1. Définition de la QCD .....	3
1.2. Le Lagrangien de la QCD.....	3
1.3. Diagrammes et les règles de Feynman pour QCD.....	4
1.4. Renormalisation.....	6
1.5. Le phénomène de confinement de couleur .....	7
1.6. La fonction $\beta$ .....	8
<b>Chapitre 02 :la diffusion élastique et inélastique</b>	
2.1. Introduction .....	12
2.2. I introduction à la Diffusion électron – proton.....	12
2.3. Diffusion élastique électron – proton.....	12
2.4. Le tenseur leptonique $L_{\mu\nu}$ .....	14
2.5. la section efficace différentielle .....	15
2.6 Diffusion inélastique électron- proton.....	17
<b>Chapitre 03 : le modèle des partons</b>	
3.1. Les partons.....	23
3.2. L'interaction du photon virtuel avec le proton.....	25
3.3. Emission d'un gluon.....	27

3.4. Production de paires.....	33
--------------------------------	----

## Chapitre 04 :l'équation de l'évolution DGLAP

4.1. Introduction.....	36
4.2. L'équation de l'évolution DGLAP.....	36
4.3. Sudakov facteur de forme $\Delta(t)$ .....	39
4.4. La probabilité de l'émission $P(z, t)$ .....	40
4.5. Probabilité de distribution de l'émission dans l'état initial(ISR).....	41

<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
-------------------	-----------

<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>
----------------------	-----------

### Table des figures :

Les règles de Feynman pour QCD.....	4
Figure(1.9) : Exemple de boucle menant à une divergence.....	6
Figure. (2.2): l'interaction électron- proton.....	11
Figure (2.18): diffusion électron- proton(ou repos) .....	14
Figure(2.22): Diffusion inélastique électron- proton .....	16
Figure (3.8) : les quarks de valence de quark .....	23
Figure(3.13): L'interaction du photon virtuel avec le proton.....	24
Figure (3.18): L'interaction du photon virtuel avec les partons.....	25
Figure (3.24): émission d'un gluon avant et après interaction avec le photon.....	26
Figure(3.65): l'émission d'un gluon qui produit une paire $\bar{q}q$ .....	33
Figure (4.25) . L'émission dans l'état initial(ISR).....	40

## *Introduction général :*

En Physique des Particules ou Physique des hautes énergies, pour étudier la structure de la matière et de l'univers, à partir des interactions entre les particules élémentaires jusqu'à l'arrivée à l'interprétation d'un phénomène universels, il existe plusieurs théories qui ont été développés pour ce but.

La Chromodynamique Quantique (QCD) accumule les succès en permettant à la fois de décrire de façon simple la diversité des objets hadroniques (plus de 150 mésons et 120 baryons sont aujourd'hui répertoriés) et de prédire leurs interactions à partir de leurs constituants de base : les quarks et les gluons. [1]

À la fin des années 1960, les expériences SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) avaient révélé l'existence de l'échelle de Bjorken dans l'expérience de la diffusion profondément inélastique lepton-Proton. Cela a conduit à introduire des constituants des hadrons - partons - plus tard nommées par les quarks, antiquarks et gluons.

Des études théoriques à l'époque montrent que les fonctions de structure doivent violer l'échelle de Bjorken. Des scientifiques Gribov-Lipatov-Dokshitzer-Altarelli-Parisi (DGLAP) ont obtenu des relations entre les fonctions de structure qui décrivent l'évolution de l'émission des partons en fonction de l'énergie

Aujourd'hui, l'équation de l'évolution (DGLAP) est largement utilisée dans les déterminations des distributions de parton à l'intérieur des hadrons, elle est la base de toutes les approches phénoménologiques qui sont utilisés pour décrire les interactions des hadrons à courtes distances dans la QCD perturbative.

Dans ce mémoire, nous allons étudier la théorie de la QCD étant une théorie des champs quantique, dans le premier chapitre nous allons déduire les diagrammes de Feynman des interactions fortes à partir du formalisme Lagrangien.

Dans le deuxième et le troisième chapitres nous allons effectuer une étude détaillée sur le modèle de parton et les fonctions de structure, pour comprendre toutes les circonstances qui mène au développement de l'équation de l'évolution.

Dans le chapitre quatre nous allons calculer les fonctions de distribution de l'émissions pour les trois types de parton, quark antiquark et gluon dans le but d'utiliser la fonction de l'évolution dans la gouvernance des émissions à l'ordre supérieur de  $\alpha_s$ .

**CHAPITRE :INTRODUCTION A  
LA QCD**

Avant d'entrer dans les détails de l'interaction entre quarks et gluons nous reprenons ici quelques rappels sur la QCD et son formalisme Lagrangien.

### ***1.1. Définition de la QCD :***

**La chromodynamique quantique (QCD)** est une théorie de jauge non abélienne avec un groupe d'invariance SU(3) de couleur. La QCD est la théorie fondamentale des interactions fortes. Un groupe de Lie G compacte et simple qui vérifie les conditions suivantes:

- Le nombre de degrés de liberté pour la couleur est trois, à une représentation triplet (de dimension 3) du groupe G.
- Les antiquarks sont déférents des quarks, la représentation triplet doit être une représentation complexe.
- Mésons et Baryons sont des singlets du groupe G.
- Les états à deux quarks  $|qq\rangle$  ou  $|\bar{q}\bar{q}\rangle$  ne sont pas des singlets du groupe G (de même pour les états  $|qq\bar{q}\bar{q}\rangle, \dots$ ).
- le nombre des générateurs égale (8), même le nombre de gluon[2][3][4]

### ***1.2.Le Lagrangien de la QCD:***

En jauge covariante le lagrangien de la QCD est :

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}_j(x)(i\not{D}_{ji} - m)\psi_i(x) - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^a(x))^2 + \partial_\mu \eta^{a+} D_{ab}^\mu \eta^b \quad (1.1)$$

Où  $\mu$  et  $\nu$  sont des indices de Lorentz,  $\bar{\psi}_j c$  est un spineur de Dirac (champ des quarks). Les indices (i, j = 1, 2, 3) et  $f^{ABC}$  (A, B, C=1,.....,8) sont des constantes de structure,  $F_{\mu\nu}^a$  Est le tenseur de force du champ dérivé du champ des gluons  $A_\mu^a$  donne par :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.2)$$

et  $D_{ab}^\mu$  la dérivée covariante dans la représentation fondamentale de SU(3) donne par :

$$\begin{aligned}
 D_{ij}^\mu &= \partial^\mu \delta_{ij} + ig(T^c)_{ij}A^{c\mu} \\
 D_{ab}^\mu &= \partial^\mu \delta_{ab} + ig(F^c)_{ab}A^{c\mu}
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Et  $\xi$  est le paramètre de jauge et  $\eta$  le champ de Fadéev–Popov.

### 1.3. Diagrammes et les règles de Feynman pour QCD:

Les diagrammes de Feynman sont une façon très simple de représenter les interactions entre des particule

#### Les règles de Feynman pour QCD:

propagateur du gluon

$$\frac{a}{\mu} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \frac{b}{\nu} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i0} \left( g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i0} \right). \tag{1.4}$$

Propagateur du quark

$$\frac{f}{i} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \frac{f'}{j} = \frac{i\delta_j^i \delta_{f'}^f}{\not{p} - m_f + i0}. \tag{1.5}$$

Propagateur du “ghost”

$$\begin{array}{c} a \\ \text{----->} \\ b \end{array} = \frac{i\delta^{ab}}{k^2 + i0}. \quad (1.6)$$

Vertex gluon–quark

$$\begin{array}{c} i \\ f \\ \swarrow \\ \frac{a}{\mu} \text{-----} \bullet \\ \searrow \\ j \\ f' \end{array} = -ig\gamma^\mu \times \delta_f^{f'} \times (t^a)^j_i. \quad (1.7)$$

Vertex à trois gluons :

$$\begin{array}{c} \beta \\ b \\ \swarrow \\ \frac{a}{\alpha} \text{-----} \bullet \\ \searrow \\ \gamma \\ c \end{array} \begin{array}{c} k_1 \\ \text{-----} \\ k_2 \\ \text{-----} \\ k_3 \\ \text{-----} \end{array} = -gf^{abc} [g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta]. \quad (1.8)$$

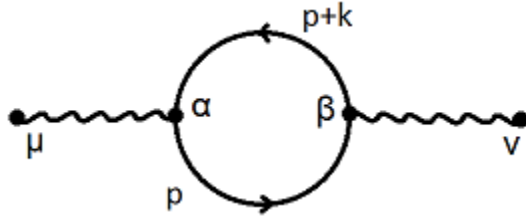
-Vertex à quatre gluons:

$$\begin{array}{c} a \\ \alpha \\ \swarrow \\ \text{-----} \bullet \\ \searrow \\ d \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ b \\ \swarrow \\ \text{-----} \\ \gamma \\ c \end{array} = -ig^2 \left[ \begin{array}{l} fabe fcd e (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\ + face fbde (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\gamma\beta}) \\ + fade fbce (g^{\alpha\beta} g^{\delta\gamma} - g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta}) \end{array} \right]. \quad (1.9)$$

[2] [3]

**1.4. Renormalisation:**

La renormalisation est une reparamétrisation du Lagrangien .Certains diagrammes mènent à des intégrales divergentes qui posent problème. Cette divergence provient des calculs de la boucle, illustrée dans la figure suivante, où toutes les valeurs d'impulsion sont possibles, puisque ce sont des particules virtuelles (ou internes). C'est cette intégrale sur l'impulsion qui gêne [3] .



Figure(1.9) : Exemple de boucle menant à une divergence

La renormalisation est nécessaire même dans le cas d’une théorie sans divergence, il est toujours nécessaire d’écrire la théorie en termes des quantités physiques pour la comparer avec les résultats des expériences.

Pour renormaliser une théorie, il faut redéfinir les champs:

$$A_{\mu}^{\alpha} = \sqrt{Z_3} A_{r\mu}^{\alpha} ; \chi_{1.2}^{\alpha} = \sqrt{Z_3} \chi_{r1.2}^{\alpha} ; \psi = \sqrt{Z_2} \psi_r \tag{1.10}$$

et les paramètres

$$g = Z_g g_r , \quad \xi = Z_3 \xi_r , \quad m = Z_m m_r \tag{1.11}$$

Où  $Z_i$  sont des constantes de renormalisation.

Le Lagrangien de QCD peut s’écrire:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_c \tag{1.12}$$

où  $\mathcal{L}_r$  a la même forme que  $\mathcal{L}_{QCD}$  mais avec les champs et les paramètres renormalisés et  $\mathcal{L}_c$  est le Lagrangien des contre termes et contient les termes nécessaires pour obtenir l'égalité avec  $\mathcal{L}_{QCD}$

Pour faire un calcul à une boucle il faut aussi connaître les règles de Feynman pour le Lagrangien  $\mathcal{L}_c$ . Pour le calcul de  $(\alpha_s)_r = g_r^2 / (4\pi)$  on a plusieurs possibilités.  $Z_g$  (et donc  $g_r$ ) intervient dans le Lagrangien pour les interactions à 3 et 4 gluons, dans les termes d'interaction du quark avec le gluon et des ghosts avec le gluon. [3]

### 1.5. Le phénomène de confinement de couleur :

Le confinement de couleur (ou simplement confinement) est une propriété des quarks : ces particules ne peuvent être isolées et sont observées uniquement avec d'autres particules de telle sorte que la combinaison formée soit *blanche*, c'est-à-dire que sa charge de couleur totale soit nulle (verre +rouge +bleu=blanche) donc les quarks ne sont pas libres, mais confinés dans les hadrons.

Si on essaye de séparer les quarks d'un proton on doit fournir beaucoup d'énergie et cette énergie se retrouve sous la forme d'un champ chromoélectrique fort dans la région d'interaction. Comme dans le cas de l'électromagnétisme il y a production de paires. Il s'agit dans le cas de la QCD de paires quark – anti-quark. Le nouvel anti-quark provenant d'une paire peut se lier au quark sortant du proton et former un méson. Le quark peut se lier avec les quarks du proton et former un nouveau nucléon. Si plusieurs paires sont créées, plusieurs nouveaux états liés sont créés. [10]

**1.6. La fonction  $\beta$ :**

Pour calculer l'évolution du couplage  $g$  de la QCD avec l'échelle  $\mu$  on a plusieurs possibilités équivalentes parce que  $Z_g$  peut se calculer avec des définitions différentes du couplage. Une possibilité est d'utiliser la définition [7]

$$Z_g = \frac{\bar{Z}_1}{Z_3 \sqrt{Z_3}} \quad (1.13)$$

où  $Z_3$  est donné par la formule

$$Z_3 = 1 + \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \left[ 3 \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) - \frac{8}{3} N_f \right] \frac{1}{\epsilon} \quad (1.14)$$

(On utilise dans cette section de façon explicite l'indice R pour les quantités renormaliser);

$Z_1$  et  $Z_3$  peuvent se calculer avec les mêmes méthodes :

$$\bar{Z}_1 = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} 3 \frac{\xi}{2} \frac{1}{\epsilon} \quad (1.15)$$

$$\bar{Z}_3 = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} 3 \frac{1-\xi}{4} \frac{1}{\epsilon} \quad (1.16)$$

et par substitution on obtient

$$Z_g = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{6\epsilon} (33 - 2N_f) \quad (1.17)$$

La renormalisation nous a permis d'écrire le couplage

$$g_r(\mu) = Z_g(\mu)^{-1} g \quad (1.18)$$

En termes des couplages on a

$$g = g_0 \mu_0^\epsilon \quad g_r = g_R \mu^\epsilon \quad (1.19)$$

En combinant les formules précédentes

$$g_R(\mu) = \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^\epsilon Z_g(\mu)^{-1} g_0 \quad (1.20)$$

La différentiation par rapport à  $\mu$  donne

$$\begin{aligned} \beta(g_R) &\equiv \mu \frac{dg_R}{d\mu} = -\epsilon g_R - \frac{\mu}{Z_g} \frac{dZ_g}{d\mu} g_R \\ &= -\frac{g_R^3}{(4\pi)^2} \frac{33 - 2N_f}{3} \end{aligned} \quad (1.21)$$

La théorie est asymptotiquement libre si  $\beta(g_R) < 0$ , donc si  $N_f < 33/2$ , condition qui vérifiée en QCD. [2] [3]

Après cet aperçu sur le formalisme Lagrangien de la QCD on peut aller loin et effectuer une étude phénoménologique sur la diffusion profondément inélastique Electron-Proton

**CHAPITRE 2 :LA DIFFUSION  
ÉLASTIQUE ET IN ÉLASTIQUE**

### 2.1. Introduction :

Dans Ce chapitre nous allons étudier la diffusion inélastique d'un électron sur un proton, dans le but de comprendre le modèle des partons et d'obtenir l'équation de l'évolution DGLAP

### 2.2. I introduction à la Diffusion électron - proton:

Pour étudier en détail la structure des hadrons, on peut les faire interagir avec un faisceau d'électrons et analyser la distribution angulaire des électrons diffusés. Une méthode générale consiste à comparer la section efficace obtenue avec celle d'une particule sans structure de la même charge [2] :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(q)|^2 \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{point} \quad (2.1)$$

Où  $q$  est l'impulsion échangée entre l'électron et le hadron, le facteur  $F(q)$  contient toute l'information sur la structure du hadron il est appelé facteur de forme.

### 2.3. Diffusion élastique électron - proton:

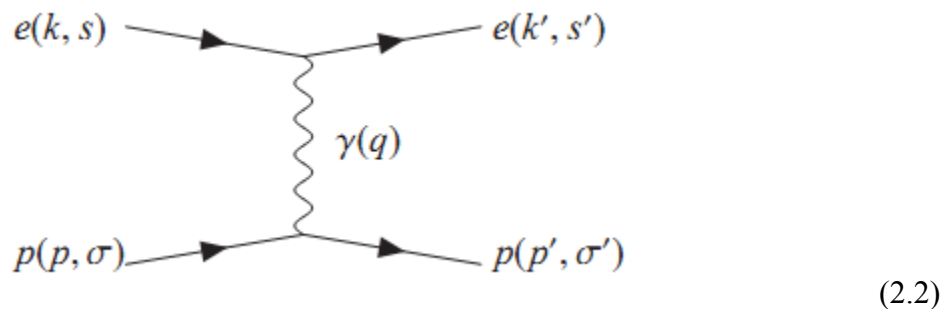


Figure .(2.2): l'interaction électron- proton

Prenant comme condition initial l'énergie de diffusion est inférieure de 1 GeV, L'amplitude de la diffusion est donnée par le produit du courant au vertex léptonique, du propagateur du photon et du courant au vertex hadronique :

$$\mathcal{M} = \langle k', s' | J_\mu^e | k, s \rangle \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \langle p', \sigma' | J_\nu^p | p, \sigma \rangle \quad (2.3)$$

Où on note les états de spin  $s, s'$  et  $\sigma, \sigma'$  respectivement pour les électrons et les protons incidents et diffusés. Désignons par  $u(k, s)$  et  $\bar{u}(k', s')$  les spineurs des électrons incident et diffusé et en notant  $u(p, \sigma)$  et  $\bar{u}(p', \sigma')$  ceux associés aux protons incident et diffusé. Le courant leptonique :

$$J_e^\mu = -ie \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) \quad (2.5)$$

Dans le cas présent d'une diffusion sur un proton supposé ponctuel, on a une expression équivalente pour le courant hadronique :

$$J_p^\mu = -ie \bar{u}(p', \sigma') \gamma^\mu u(p, \sigma) \quad (2.6)$$

On a donc

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) \bar{u}(p', \sigma') \gamma^\mu u(p, \sigma) \quad (2.7)$$

Le carré de l'amplitude invariante moyenné sur les spins peut s'écrire sous la forme :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s, s', \sigma, \sigma'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^2}{Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (2.8)$$

### 2.4. Le tenseur leptonique $L_{\mu\nu}$ :

Le tenseur leptonique vaut alors :

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{spin} J_e^\mu J_e^\nu \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{spin} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) (\bar{u}(k', s') \gamma^\nu u(k, s))^+ \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{spin} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) u(k, s)^+ \gamma^{\nu+} \bar{u}(k', s')^+ \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{spin} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) u(k, s)^+ \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\nu+} u(k', s) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{spin} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) \bar{u}(k, s) \gamma^\nu u(k', s') \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Sans oublier que l'on manipule des matrices. Si l'on écrit explicitement les indices :

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{spin} \bar{u}(k', s')_\alpha (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} u(k, s)_\beta \bar{u}(k, s)_\gamma (\gamma^\nu)^{\gamma\delta} u(k', s')_\delta \quad (2.10)$$

Sachant que

$$\sum_s u(k, s) \bar{u}(k, s) = \gamma^\mu k_\mu + m \quad (2.11)$$

et les propriétés

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (2.12)$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} Tr[k' \gamma^\mu k \gamma^\nu] + \frac{1}{2} m_e^2 Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] \\
 &= 2[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k' \cdot k + m_e^2) g^{\mu\nu}] \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

### 2.5. la section efficace différentielle :

Le tenseur leptonique est symétrique et le courant leptonique est conservé

$$q^\mu L_{\mu\nu} = q^\nu L_{\mu\nu} = 0 \quad (2.14)$$

Les courants leptonique et hadronique étant ici de forme identique, on a :

$$W^{\mu\nu} = 2(p'^\mu p^\nu + p^\mu p'^\nu - (p \cdot p' + m_p^2) g^{\mu\nu}) \quad (2.15)$$

Donc :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(k \cdot p)(k' \cdot p') + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m_e^2 p \cdot p' - m_p^2 (k' \cdot k) + 2m_e^2 m_p^2] \quad (2.16)$$

En remplaçant  $p'$  par  $p' = p + k - k'$  et en utilisant la relation

$q^2 = -2 k \cdot k'$  valable si l'on peut négliger la masse des électrons devant leur impulsion respective :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[ -\frac{q^2}{2} (k - k') \cdot p + 2(k \cdot p)(k' \cdot p) + \frac{m_p^2 q^2}{2} \right] \quad (2.17)$$

Si l'on se place dans le référentiel du laboratoire, c'est-à-dire dans le cas présent dans celui au repos de la cible hadronique,  $p = (m, 0, 0, 0)$ , impliquant :

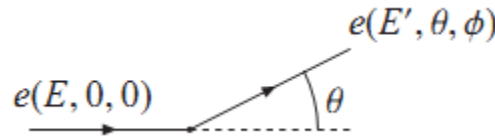


Figure (2.18): diffusion électron- proton(ou repos)

Où

$$p \cdot k = m_p E$$

$$p \cdot k' = m_p E'$$

$$k \cdot k' = EE'(1 - \cos\theta) \quad (2.18)$$

on trouve :

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} \left[ -\frac{q^2}{2} m_p (E - E') + 2EE' m_p^2 + \frac{m_p^2 q^2}{2} \right] \\ &= \frac{8e^4}{q^4} 2EE' m_p^2 \left[ 1 - \frac{q^2}{m_p} \frac{E-E'}{4EE'} + \frac{q^2}{4EE'} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

De plus comme dans le cas élastique

$$(p')^2 = m_p^2 = (p + q)^2 \rightarrow 2p \cdot q = -q^2 = Q^2 \quad (2.20)$$

ce qui donne :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{16e^4}{q^4} EE' m_p^2 \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (2.21)$$

En ce qui concerne l'espace des phases, la conservation de l'énergie-impulsion fait disparaître l'intégration sur  $p'$ . Les quadri-vecteurs  $k$  et  $p$  étant fixés par les conditions initiales expérimentales, l'élément de l'espace des phases disponible se résume à l'électron diffusé.

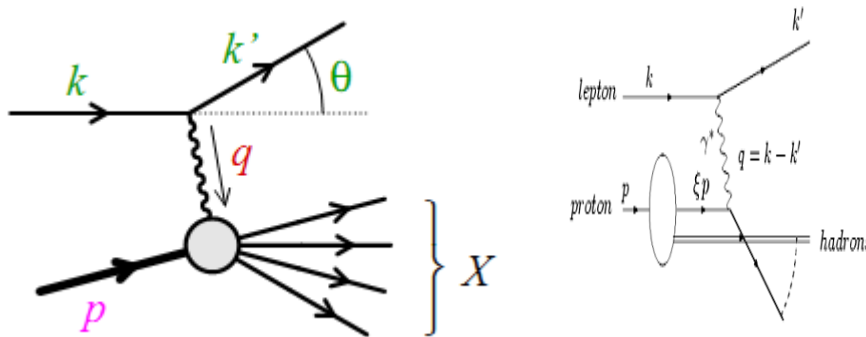
Après avoir introduit le flux ( $1/s = 1/(2m_p E)$ ) et l'élément de l'espace des phases, la section efficace différentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} &= \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \left| \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right| \delta \left( E - E' + \frac{q^2}{2m_p^2} \right) \\ &= \frac{4\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \left| 1 - \frac{q^2}{2m_p^2} \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right| \delta \left( E - E' + \frac{q^2}{2m_p^2} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Le  $\delta$  représente la condition d'élasticité de la cible.

### 2.6. Diffusion inélastique électron- proton:

En 1967 commença une longue série d'expériences de diffusion dites profondément inélastiques. La première prit place à Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) utilisant de l'hydrogène liquide et ensuite une cible de deutérium bombardée par un faisceau d'électrons allant jusqu'à 21 GeV. La contribution de cette expérience à notre connaissance de la diffusion inélastique fut récompensée par le prix Nobel de physique en 1990 attribué à Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall et Richard E. Taylor [2] .



Fig(2.22): Diffusion inélastique électron- proton

Dans ce type d'expérience, seul l'électron diffusé est mesuré, on n'observe donc pas directement l'état final hadronique. Mais on peut calculer sa masse invariante  $W$  par la relation :

$$w^2 = (q + p)^2 = X^2 = q^2 + 2p \cdot q + m_p^2 \quad (2.23)$$

L'énergie du centre de masse photon-proton,  $W$ , est donnée par  $w^2 = \frac{E-E'}{E} s$

Il est commode d'introduire l'invariant relativiste  $x$ , initialement introduite par Bjorken, compris entre 0 et 1 :

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2M(E-E')} = \frac{Q^2}{2p \cdot q} \quad (2.24)$$

On peut alors réexprimer  $W$  comme :

$$w^2 = m_p^2 + \frac{1-x}{x} Q^2 \quad (2.25)$$

On définit également l'invariant  $y$  :

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = 1 - E'/E \quad (2.26)$$

où, 
$$Z = \frac{x}{y} \quad (2.27)$$

Dans le référentiel où le proton est au repos, celui-ci s'identifie à la fraction d'énergie que l'électron a cédé au photon échangé

$y = (E - E')/E$ . La variable  $y$  correspond à une mesure de l'inélasticité du processus de diffusion et  $0 \leq y \leq 1$ .

Les invariants cinématiques sont liés par la relation :

$$Q^2 = xys. \quad (2.28)$$

qui nous permet de déduire que  $Q^2 \leq s$ , où  $s$  est le carré de l'énergie disponible dans le centre de masse.

Dans le cas élastique, c'est-à-dire pour  $W = m_p$ , les facteurs de forme imposent une décroissance rapide avec  $q^2$ .

La condition d'élasticité imposée par le terme  $\delta(E - E' + q^2/2m_p)$  de l'équation (2.22) n'est plus respectée ici. Dans les termes des variables cinématiques invariantes de Lorentz que l'on vient d'introduire, cette condition correspond à :

$$w^2 = m_p^2 + \frac{1-x}{x} Q^2 = m_p^2 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad (2.29)$$

Pour traiter les diffusions inélastiques il faut se libérer du  $\delta$  et introduire des fonctions inconnues qui rendront compte de la complexité de la structure de la cible :

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{4sE\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[ W_2(\nu, q^2) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.30)$$

Les fonctions  $W_1$  et  $W_2$  sont appelées les fonctions de structures, elles dépendent des deux degrés de libertés, pour lesquels on choisit les variables  $x$  et  $^2$ . Elles sont différentes pour les différentes cibles hadroniques.

On peut donner au tenseur hadronique  $W^{\mu\nu}$  la forme la plus générale possible. Si on se limite aux analyses non polarisées, la moyenne sur les états d'hélicité fait disparaître les termes en  $\gamma^\mu$ . D'autre part nous avons à notre disposition les quadrivecteurs  $q$  et  $p$  et les invariants  $Q^2$  et  $x$  [2] .

On écrit donc le tenseur  $W^{\mu\nu}$  comme :

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_3}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_4}{M^2} (p^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu) \quad (2.31)$$

La conservation du courant hadronique  $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$  implique des

Relations entre les  $W_i$  :

$$W_3 = \left(\frac{p \cdot q}{q^2}\right)^2 W_2 + \frac{M^2}{q^2} W_1 \quad (2.32)$$

$$W_4 = \frac{p \cdot q}{q^2} W_2 \quad (2.33)$$

On peut écrire

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left( p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \quad (2.34)$$

les  $W_i$  (fonctions de structure du proton) sont des scalaires de Lorentz indépendants qu'on peut construire avec les impulsions de l'interaction hadronique [6] :

$$Q^2 = -q^2 \text{ et } \nu = \frac{p \cdot q}{M} = E - E' \quad (2.35)$$

Le produit des tenseurs léptonique et hadronique donne :

$$L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} = 4W_1(\nu, q^2) k \cdot k' + \frac{2W_2(\nu, q^2)}{M^2} (2p \cdot k p \cdot k' - M^2 k \cdot k') \quad (2.36)$$

Dans le repère du laboratoire (proton initial au repos)

$$L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} = \left[ \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) W_2(\nu, q^2) + 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) W_1(\nu, q^2) \right] \quad (2.37)$$

La section efficace inélastique peut s'obtenir de façon semblable à celle obtenue pour le cas élastique:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \left[ W_2(\nu, q^2) \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.38)$$

Où:

$$2W_1 = -\frac{q^2}{2m^2} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right) \quad (2.39)$$

$$W_2 = \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right) \quad (2.40)$$

En utilisant les propriétés de la distribution de Dirac  $\delta(x/a) = a\delta(x)$  et passer à une notation où l'impulsion échangée est positive  $Q^2 \equiv -q^2$  :

$$2mW_1(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{2m^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) \quad (2.41)$$

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) \quad (2.42)$$

Ces fonctions dépendent seulement du rapport  $Q^2/(2m\nu)$  (scaling de Bjorken). Ce comportement fut trouvé avant l'introduction de l'idée des constituants du proton[11] [5].

**CHAPITRE 03 : LE  
MODÈLE DES PARTONS**

## 3.1. Les partons:

L'idée des partons est d'imaginer le proton constitué par des particules non interagissant et avec une fraction  $x\mathbf{p}$  de l'impulsion  $\mathbf{p}$  du proton, une fraction  $x\mathbf{E}$  de l'énergie  $\mathbf{E}$  et une masse  $\mathbf{m} = x\mathbf{M}$  de la masse du proton  $\mathbf{M}$ . Il suffit de prendre le repère où l'impulsion du proton est très grande par rapport aux masses  $|p| m, M$ . Dans ce repère la dilatation relativiste du temps rend les interactions entre les quarks très lentes par rapport au temps d'interaction avec le photon. On peut donc considérer les quarks comme non interagissant entre eux et avec seulement l'impulsion longitudinale dans la direction de l'impulsion du proton [2].

On définit le paramètre  $\omega$  par :

$$\omega = \frac{2Mv}{Q^2} \tag{3.1}$$

On peut écrire les fonctions de structure en fonction de  $\omega$

$$\begin{aligned} MW_1(v, Q^2) &\rightarrow F_1(\omega) = \frac{Q^2}{2x\omega} \delta\left(x - \frac{1}{\omega}\right) \\ v W_2(v, Q^2) &\rightarrow F_2(\omega) = x\delta\left(x - \frac{1}{\omega}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ces fonctions sont différentes de zéro seulement si  $x = 1/\omega$ .

Le modèle à partons prédit la relation entre les fonctions de structures du proton

$$2xF_1(x) = F_2(x) \tag{3.4}$$

En termes de la probabilité  $f_i(x)$  pour que le parton  $i$  ait la fraction  $x$  de l'impulsion totale du proton, on peut écrire:

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \tag{3.5}$$

Avec  $i$  indice sur tous les constituants chargés du proton (les constituants de charge électrique nulle n'interagissent pas avec le photon) la somme des toutes les fractions de l'impulsion du proton doit donner 1 :

$$\sum_i \int dx x f_i(x) = 1 \tag{3.6}$$

Avec  $j$  indice sur tous les constituants du proton (chargés et neutres) parce que l'impulsion est répartie entre toutes les composantes indépendamment de leur charge électrique.

L'équation (3.6) s'écrit

$$\frac{F_2(x)}{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u(x) + \bar{u}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d(x) + \bar{d}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s(x) + \bar{s}(x)] \quad (3.7)$$

Où l'on s'est limité aux distributions de probabilité pour les quarks légers u, d, s (le contenu en quarks lourds c, b, t peut être négligé).

Si on considère le proton constitué par des quarks uud (dits quarks de valence) comme dans le modèle des quarks, plus des paires quark- antiquark produites par les gluons [7] [10] [2]

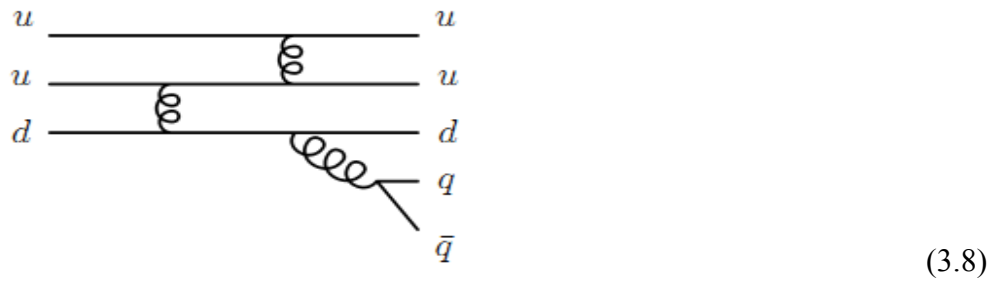


Figure (3.8) : les quarks de valence de proton

On peut obtenir le nombre des quarks de valence (constituants) par la différence entre le nombre de quarks et antiquarks d'une saveur donnée:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx [u(x) - \bar{u}(x)] &= 2 \\ \int_0^1 dx [d(x) - \bar{d}(x)] &= 1 \\ \int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les résultats expérimentaux confirment cette description du proton. Pour mettre en évidence la présence des constituants non chargés (les gluons) on peut reconstruire l'impulsion p du proton à partir de ses composantes, on néglige la composante due au quark s qui est très petite [2] [4]

$$\int_0^1 dx x [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x)] = 1 - \frac{p_g}{p} \quad (3.10)$$

Si on mesure un résultat différent de 1 pour l'intégrale on doit l'attribuer à la présence de composantes neutres qui n'interagissent pas avec le photon. Les résultats expérimentaux donnent:

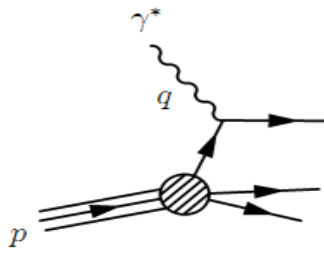
$$\frac{p_u}{p} \simeq 0.36 \quad \frac{p_d}{p} \simeq 0.18 \quad (3.11)$$

Par différence on peut estimer  $\frac{p_g}{p} \simeq 0.46$  (3.12)

Ce qui revient à dire que près de la moitié de l'impulsion du proton est répartie entre les gluons. [6]

### 3.2 .L'interaction du photon virtuel avec le proton:

L'interaction du photon virtuel avec le proton c'est l'interaction avec la partie hadronique de la collision ep :



$\Rightarrow \sigma(\gamma^* p \rightarrow X) = \frac{\pi e^2}{F} \epsilon^\mu \epsilon^\nu W_{\mu\nu}$

(3.13)

Fig(3.13): L'interaction du photon virtuel avec le proton

Avec F le flux des particules.

Pour le photon virtuels on a séparé les composantes transverses ( $\lambda = \pm 1$ ) et longitudinale ( $\lambda = 0$ ) du vecteur de polarisation  $\epsilon_\lambda^\mu$  dans le calcul on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda = \pm 1 & : \quad \epsilon_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0.1. \pm i. 0) \\ \lambda = 0 & : \quad \epsilon_L = \frac{1}{\sqrt{-q^2}} (\sqrt{v^2 - q^2}. 0.0. v) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Avec les formules précédentes et la formule (2.31) pour  $W_{\mu\nu}$  on trouve les sections efficaces transverses et longitudinales en termes de  $W_1$  et  $W_2$  [5] :

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2} = \frac{\pi e^2}{F} W_1(v, q^2) \\ \sigma_L &= \frac{\pi e^2}{F} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{q^2}\right) W_2(v, q^2) - W_1(v, q^2) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

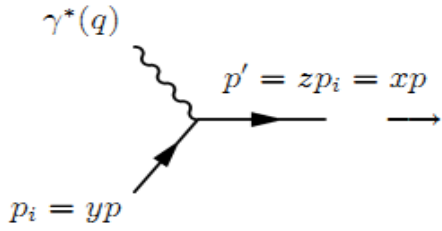
Si on introduit la quantité:

$$\sigma_0 = \frac{\pi e^2}{2MF} \simeq \frac{\pi e^2}{s} \quad (3.16)$$

On peut écrire:

$$2F_{1(x)} = \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \quad ; \quad \frac{F_{2(x)}}{x} = \frac{\sigma_T + \sigma_L}{\sigma_0} \quad (3.17)$$

Donc



$$\mathcal{M} = \bar{u}(p') (-ie Q_i \gamma^\mu) u(p_i) \epsilon_\mu(q) \quad (3.18)$$

Figure (3.18): L'interaction du photon virtuel avec les partons

La section efficace de ce processus est donnée par le produit de l'amplitude et l'espace des phases dans la formule générale suivante:

$$d\sigma = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{F} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p_i - q) \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} \quad (3.19)$$

Où:

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} Q_i^2 e^2 \text{Tr}(p \not{p}') = 2Q_i^2 e^2 p_i \cdot p' = 2Q_i^2 e^2 p_i \cdot q$$

(3.20)

Et

$$p'^2 = p_0'^2 - p'^2$$

En utilisant les propriétés de la distribution delta de Dirac

$$\sigma_T = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{F} 2\pi \int d^3 p' dp'_0 \delta^{(4)}(p' - p_i - q) \theta(p'_0) \delta(p'^2)$$

$$\sigma_T = \frac{2\pi}{F} |\bar{\mathcal{M}}|^2 \delta[(p + q)^2] = \frac{2\pi}{F} Q_i^2 e^2 \delta(1 - z) \quad (3.21)$$

Où  $\theta(x)$  est la fonction de Heaviside égale à 1 si  $x > 0$  et zéro autrement.

Pour éliminer le problème du calcul de flux, on va normaliser la section par rapport à une section efficace de référence  $(\sigma_R = 2\pi e^2/F)$  [6].

Le résultat est donc:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_R} = Q_i^2 \delta(1 - z) \quad (3.22)$$

Dans le modèle des partons la partie longitudinale de la section efficace est nulle à cause de la polarisation du photon virtuel incident:  $\frac{\sigma_l}{\sigma_R} = 0$  (3.22)

En utilisant les formules (3.16) et (3.17) on obtient :

$$2F_1 = \sum_i Q_i^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) = \sum_i Q_i^2 f_i(x) = \frac{F_2}{x} \quad (3.23)$$

### 3.3. Emission d'un gluon:

Lorsque le photon pénètre le proton, l'interaction sera alors entre le photon et le parton, qui à son tour peut émettre un gluon avant ou après l'interaction avec le photon, les deux diagrammes de Feynman possible à l'ordre  $\alpha_s$  sont :



Figure (3.24): émission d'un gluon avant et après interaction avec le photon

Les deux éléments de matrice sont :

$$M_1 = \bar{u}(p')(-iQ_i e \gamma^\nu) \epsilon_\nu(k) \frac{i(p - k + m)}{(p - k)^2 - m^2} (igT^a \gamma^\mu) \epsilon_\mu(k') u(p)$$

$$M_2 = \bar{u}(p')(igT^a \gamma^\alpha) \epsilon_\alpha(k') \frac{i(p + k + m)}{(p + k)^2 - m^2} (-iQ_i e \gamma^\beta) \epsilon_\beta(k) u(p)$$

(3.25)

Avec  $Q_i$  la charge électrique du quark considéré,  $T^a = \lambda^a/2$  avec  $\lambda^a$  matrice de Gell-Mann de SU(3). Dans la suite on va négliger la masse  $m$  du quark et on va exprimer le résultat en termes des invariants de Mandelstam[5]:

$$\begin{aligned}
 s &= (p + k)^2 = (p' + k')^2 = 2p \cdot k = 2p' \cdot k' \\
 t &= (p - k')^2 = (p' - k)^2 = 2p \cdot k = -2p' \cdot k' \\
 u &= (p - p')^2 = (k - k')^2 = -2p \cdot p' = -2k \cdot k'
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Où l'on a utilisé  $p^2 = p'^2 = m^2 = 0$  et le fait que le photon et le gluon physiques ont une masse nulle  $k^2 = k'^2 = 0$  (si on dit qu'ils sont sur leur couche de masse). Les vecteurs  $\epsilon(k)$  et  $\epsilon(k')$  sont respectivement les polarisations du photon et du gluon.

mais le photon n'est pas sur sa couche de masse (photon virtuel $\gamma^*$ ) puisque  $k^2 = -Q^2$  avec  $Q^2 > 0$ . Les variables de Mandelstam sont modifiées:

$$\begin{aligned}
 \hat{s} &= (p + k)^2 = (p' + k')^2 = 2p \cdot k - Q^2 = 2p' \cdot k' \\
 \hat{t} &= (p - k')^2 = (p' - k)^2 = -2p' \cdot k - Q^2 = 2p \cdot k' \\
 \hat{u} &= (p - p')^2 = (k - k')^2 = -2k \cdot k' - Q^2 = -2p \cdot p'
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Dans le calcul du module au carré de l'élément de matrice on aura des sommes sur les polarisations à calculer [5] :

$$\sum_{polarisation} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* = -g_{\mu\nu} \tag{3.28}$$

et des sommes sur les couleurs

$$Tr(T^a T^a) = 4 \tag{3.29}$$

Comme dans le cas du spin il faut prendre la moyenne sur les couleurs des états initiaux.

Dans notre cas, l'état initial coloré est un quark (avec 3 couleurs possibles) et donc le facteur pour obtenir la moyenne est  $1/3$ . [5] [2]. Au total le facteur de couleur du diagramme avec somme sur les couleurs finales et moyenne sur les couleurs initiales est donc  $4/3$ .

En négligeant la masse  $m$  du quark on peut écrire:

$$M_1 = \frac{Q_i e g T^a}{\hat{t}} \epsilon_\nu(k) \epsilon_\mu(k') \bar{u}(p') \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\mu u(p) \quad (3.30)$$

$$M_2 = \frac{Q_i e g T^a}{\hat{s}} \epsilon_\beta(k) \epsilon_\alpha(k') \bar{u}(p') \gamma^\alpha (\not{p} + \not{k}) \gamma^\beta u(p) \quad (3.31)$$

Pour obtenir une section efficace de diffusion, il faut calculer le module au carré de  $|M_1 + M_2|^2$ . On va calculer en détail chaque terme :

$$M_1 = \frac{Q_i e g T^a}{t} \epsilon_\nu(k) \epsilon_\mu(k') \bar{u}(p')_\alpha (\gamma^\nu)_{\alpha\beta} (\not{p} - \not{k}') (\gamma^\mu)_{\beta\rho} u(p)_\rho \quad (3.32)$$

où les indices  $\alpha, \beta$  et  $\rho$  étiquettent les éléments de matrices et les vecteurs. Souvent ces indices ne sont pas indiqués dans les calculs, mais ils sont nécessaires pour les comprendre en détail:

Pour des matrices on peut écrire  $(AB)^+ = B^+ A^+$  avec  $A^+$  le complexe conjugué transposé de A

$$\bar{u}(p') \gamma^\nu = u(p')^+ \gamma^0 \gamma^\nu \xrightarrow{c} \gamma^{\nu+} \gamma^{0+} u(p') \quad (3.33)$$

et en utilisant  $\gamma^0 = \gamma^{0+}$  on obtient:

$$\gamma^{\nu+} \gamma^{0+} u(p') = \gamma_\nu u(p') \quad (3.34)$$

On peut faire la même chose pour tous les termes et on a:

$$M_1^* = \frac{Q_i e g T^a}{t} \epsilon_\nu^*(k) \epsilon_\mu^*(k') \bar{u}(p)_\rho (\gamma_\mu)_{\rho\beta} (\not{p} - \not{k}') (\gamma_\nu)_{\beta\alpha} u(p')_\alpha \quad (3.35)$$

ensuite on construit  $|\overline{M}_1|^2 = M_1 M_1^*$  et on place les termes avec les mêmes indices les uns à coté des autres:

$$\begin{aligned} |\overline{M}_1|^2 &= \frac{Q_i^2 e^2 g^2 T^a T_a}{t^2} \epsilon_\nu(k) \epsilon_\mu(k') \epsilon_\nu^*(k) \epsilon_\mu^*(k') \bar{u}(p')_\alpha (\gamma^\nu)_{\alpha\beta} \times \\ & (\not{p} - \not{k}') (\gamma^\mu)_{\beta\rho} u(p)_\rho \bar{u}(p)_\rho (\gamma_\mu)_{\rho\beta} (\not{p} - \not{k}') (\gamma_\nu)_{\beta\alpha} u(p')_\alpha \end{aligned} \quad (3.36)$$

Une séquence d'indices constitue une trace Tr sur le produit de matrices concerné.

On peut donc écrire

$$|\overline{M}_1|^2 = \frac{Q_i^2 e^2 g^2}{t^2} Tr[T^a T^a] \times$$

$$\text{Tr}[\bar{u}(p')\gamma^\nu(p - k')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma_\mu(p - k')\gamma_\nu u(p')] \quad (3.37)$$

Il faut remarquer la propriété de cyclicité de la trace

$$\text{Tr}[abcd] = \text{Tr}[bcda] = \text{Tr}[cdab] = \text{Tr}[dabc] \quad (3.38)$$

et que notre notation pour les spineurs  $u(p)$  signifie en réalité  $u(p,s)$  avec  $s$  indice de spin. Si on ne mesure pas l'orientation du spin des particules finales et si on utilise au départ des particules non polarisées, il faut prendre la moyenne sur les spins initiaux et la somme des spins finaux (la moyenne s'obtient en faisant la somme sur le spin et en divisant par 2 pour chaque particule avec spin dans l'état initial à cause des deux orientations possibles du spin).

Donc dans notre notation

$$u(p)\bar{u}(p) \rightarrow \sum_{s=1,2} u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m \quad (3.39)$$

Et

$$u(p')\bar{u}(p') \rightarrow \sum_{s=1,2} u(p',s)\bar{u}(p',s) = \not{p}' + m \quad (3.40)$$

Dans ce cas  $m=0$

$$|\overline{M_1^2}| = \frac{1}{4} \frac{Q_i^2 e^2 g^2}{t^2} \frac{4}{3} \text{tr}[\not{p}'\gamma^\nu(p - k')\not{p}\gamma_\mu(p - k')\not{p}] \quad (3.41)$$

le facteur  $1/4$  vient de la moyenne sur les 2 spins possibles pour le quark initial et sur les 2 polarisations possibles pour le photon initial. La trace peut se simplifier en utilisant les relations:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu &= -2 \not{p} & \gamma^\nu \not{p}' \gamma_\nu &= -2 \not{p}' \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

On obtient:

$$\begin{aligned} |\overline{M_1^2}| &= \frac{4}{3} \frac{Q_i^2 e^2 g^2}{t^2} \text{tr}[\not{p}'(p - k')\not{p}(p - k')] \\ &= \frac{4}{3} \frac{Q_i^2 e^2 g^2}{t^2} \text{tr}[\not{p}'\not{k}'\not{p}\not{k}'] = \frac{16}{3} \frac{Q_i^2 e^2 g^2}{t^2} (p' \cdot k')(p \cdot k') \end{aligned} \quad (3.43)$$

Où dans la deuxième ligne on a éliminé les traces proportionnelles à la masse  $m$  du quark qu'on a supposé négligeable.

L'amplitude en fonction des variables de Mandelstam:

$$|\overline{M}_1|^2 = -\frac{8}{3}Q_i^2 e^2 g^2 \frac{\hat{s}}{\hat{t}} \quad (3.44)$$

De façon semblable on peut vérifier que:

$$|\overline{M}_2|^2 = -\frac{8}{3}Q_i^2 e^2 g^2 \frac{\hat{t}}{\hat{s}} \quad (3.45)$$

Et

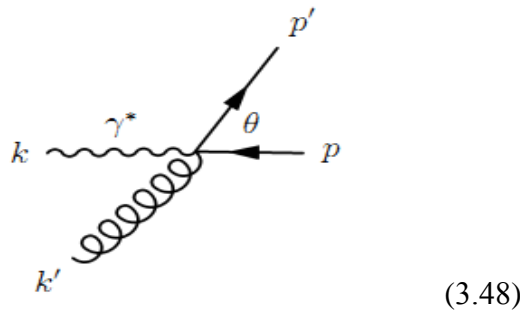
$$\overline{M}_1 \overline{M}_2^* + \overline{M}_1^* \overline{M}_2 = \frac{8}{3}Q_i^2 e^2 g^2 \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\hat{t}} \quad (3.46)$$

Donc le résultat final est:

$$|\overline{M}|^2 = -\frac{8}{3}Q_i^2 e^2 g^2 \left( \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\hat{t}} \right) \quad (3.47)$$

Pour mettre en évidence la différence par rapport au modèle des partons on va travailler avec la variable d'impulsion transverse  $P_T$ .

Dans le centre de masse pour les particules initiales  $\gamma^*$  et  $q$  on peut la définir comme la projection de l'impulsion  $p'$  du quark sortant dans la direction perpendiculaire à celle des particules initiales dans le plan de la réaction, donc  $p_T = p' \sin \theta$  [5] :



Fig(3.48): l'émission d'un gluon

On peut remarquer que la valeur maximale de  $p_T^2$  est obtenue pour  $\sin \theta = 1$  et vaut donc

$$p_T^2 = p'^2 = \hat{s}/4 \quad \text{et} \quad d\Omega = \frac{4\pi}{3} dp_T^2$$

Les variables de Mandelstam dans ce cas:

$$\hat{s} = 2k^2 + 2kq_0 - Q^2 = 4k'^2$$

$$\hat{t} = -Q^2 - 2k'q_0 + 2kk' \cos\theta = -2kk'(1 - \cos\theta)$$

$$\hat{u} = -2kk'(1 - \cos\theta) \quad (3.49)$$

où  $q_0 = k^2 - Q^2$  (3.50)

Et  $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} + Q^2 = 0 \Rightarrow -\hat{t} - \hat{u} = \hat{s} + Q^2$  (3.51)

On a  $p_T = p' \sin \theta$ , on utilise (3.49) donc  $p_T^2$  en fonction de variables de Mandelstam:

$$p_T^2 = \frac{\hat{s}\hat{t}\hat{u}}{\hat{t}+\hat{u}} = \frac{\hat{s}\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}+Q^2} \quad (3.52)$$

Si l'angle  $\theta$  est petit, on peut écrire la section efficace différentielle

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} \simeq \frac{|\overline{M}|^2}{16\pi\hat{s}^2} \quad (3.53)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} \simeq \frac{8Q_i^2 e^2 g^2}{3\pi \cdot 16\hat{s}^2} \left[ -\frac{\hat{s}}{\hat{t}} - \frac{\hat{t}}{\hat{s}} + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\hat{t}} \right] \quad (3.54)$$

Donc:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} \simeq \frac{8\pi Q_i^2 \alpha_s}{3\hat{s}^2} \left( \frac{1}{-\hat{t}} \right) \left[ \hat{s} + \frac{2(\hat{s}+Q^2)Q^2}{\hat{s}} \right] \quad (3.55)$$

Alors

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} \simeq Q_i^2 \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{-\hat{t}} \right) \left[ \hat{s} + \frac{2(\hat{s}+Q^2)Q^2}{\hat{s}} \right] \times \frac{(\hat{s}+Q^2)}{(\hat{s}+Q^2)} \quad (3.56)$$

avec

$$\sigma_0 = \frac{\pi e^2}{\hat{s}} = \frac{\pi^2 4\alpha}{\hat{s}}$$

Pour  $\theta$  petit,

$$-\hat{t} \ll \hat{s} \Rightarrow p_T^2 = \frac{\hat{s}(-\hat{t})}{\hat{s}+Q^2} \quad (3.57)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} \simeq Q_i^2 \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{p_T^2} \right) \frac{1}{(\hat{s}+Q^2)} \left[ \hat{s} + \frac{2(\hat{s}+Q^2)Q^2}{\hat{s}} \right] \quad (3.58)$$

et en utilisant ce résultat et la variable

$$z = \frac{Q^2}{2p_i \cdot q} = \frac{Q^2}{(p_i+q)^2 - q^2} = \frac{Q^2}{\hat{s}+Q^2} \Rightarrow \hat{s} = \frac{Q^2(1-z)}{z} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} &\simeq Q_i^2 \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{p_T^2} \right) \frac{1}{(\hat{s} + Q^2)} \left[ \frac{Q^2(1-z)}{z} + \frac{2(\hat{s} + Q^2)Q^2}{\hat{s}} \right] \\
 \frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} &\simeq Q_i^2 \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{p_T^2} \right) \left[ \frac{z(1-z)}{z} + \frac{2Q^2}{\hat{s}} \right] \\
 &\simeq Q_i^2 \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{p_T^2} \right) \left[ (1-z) + \frac{2z}{1-z} \right] \\
 &\simeq Q_i^2 \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{p_T^2} \right) \left[ \frac{(1-z)^2 + 2z}{1-z} \right] \\
 &\simeq Q_i^2 \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{p_T^2} \right) \left[ \frac{(1+z^2)}{1-z} \right] \\
 \frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} &\simeq Q_i^2 \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{1}{p_T^2} \right) P_{qq}(z) \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

Avec

$$\sigma_0 = \frac{\pi e^2}{\hat{s}} = \frac{\pi^2 4\alpha}{\hat{s}} \tag{3.61}$$

et

$$P_{qq}(z) = \left[ \frac{(1+z^2)}{1-z} \right] \tag{3.62}$$

$P_{qq}(z)$  est la probabilité pour qu'un quark émet un gluon et devient un quark avec impulsion réduite par un facteur  $z$ .

La contribution de l'émission d'un gluon aux fonctions de structure est proportionnelle à la section efficace totale

$$\hat{\sigma}(\gamma^* q \rightarrow qg) = \int_{\mu^2}^{\hat{s}/4} dp_T^2 \frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} \simeq \frac{\alpha_s}{2\pi} Q_i^2 \sigma_0 P_{qq}(z) \log \frac{Q^2}{\mu^2} \tag{3.63}$$

$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$  est la constante des interactions fortes. Si on ajoute la section efficace précédente à celle du modèle des partons (3.23) on obtient

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_q Q_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q(y) \left[ \delta \left( 1 - \frac{x}{y} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) p(x/y) \right] \tag{3.64}$$

3.4. Production de paires :

Une autre contribution au même ordre en  $\alpha_s$  est celle de l'émission d'un gluon qui produit une paire  $\bar{q}q$ .



Fig(3.65): l'émission d'un gluon qui produit une paire  $\bar{q}q$

L'amplitude  $|\overline{M}|^2 = 16\pi^2 Q_i^2 \alpha_s \left( \frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{2\hat{s}Q^2}{\hat{u}\hat{t}} \right)$  (3.66)

Avec la même méthode utilisée dans les sections précédentes, on trouve:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_q Q_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} f_g(y) \frac{\alpha_s}{2\pi} \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) p_{qg}(x/y)$$
 (3.67)

avec  $f_g(y)$  la densité de gluons dans le proton et  $p_{qg}(z)$  c'est la probabilité pour que un gluon émet une paire quark antiquark

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2}(z^2 + (1 - z^2)^2)$$
 (3.68)

Donc si on se limite à l'ordre le plus bas, les fonctions de probabilité de l'émission ou les kernels (splitting functions) sont donnée par :

$$\begin{aligned} P_{qq}(z) &= P_{\bar{q}\bar{q}}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right) \\ P_{qg}(z) &= P_{\bar{q}g}(z) = T_F(z^2 + (1 - z)^2) \\ P_{gq}(z) &= P_{g\bar{q}}(z) = C_F \left( \frac{1+(1-z)^2}{z} \right) \\ P_{gg}(z) &= 2C_A \left[ z \left( \frac{1}{1-z} \right) + \frac{1-z}{z} + z(1 - z) \right] \end{aligned}$$
 (3.69)

avec  $C_F = 4/3$ ,  $C_A = 3$ ,  $T_F = 1/2$ ,

ces fonctions sont très importantes dans la QCD perturbative, elle seront utiles ultérieurement dans le chapitre suivant, pour le développement des probabilités d'émission dans les états final est initial [9].

# **CHAPITRE 04: L'ÉQUATION DE L'ÉVOLUTION DGLAP**

### 4.1. INTRODUCTION :

A haute énergie l'étude des interactions fortes est particulièrement importante pour comprendre le comportement des partons (gluons et quarks) ainsi pour la recherche des nouvelles particules. Les interactions fortes doivent être comprises à un très haut niveau de précision et il faut donc en mesurer les paramètres fondamentaux ( $\alpha_s$ , PDF, . . .). donc on étudie l'équation qui est valable dans la théorie des interactions fortes (Quantum Chromodynamique ou QCD), qui détermine le taux de variation des densités de parton (densités de probabilité de trouver un quark ou un gluon dans le proton). Ceux-ci sont souvent appelés Altarelli-Parisi (AP), mais pour donner du crédit en raison à tous ceux qui étaient responsables de leur développement, ils devraient être appelés DGLAP fractionnement fonctions avec crédit à Dokshitzer, Gribov et Lipatov [8].

### 4.2. L'équation de l'évolution DGLAP:

Dans le chapitre précédent on a construit la forme de la fonction de structure  $F_2(x, Q^2)$  en fonction des distributions des partons à l'intérieur du proton, on a démontré que pour un transfert d'énergie suffisamment grand la violation de l'échelle de Bjorken suscite des émissions à l'ordre  $\alpha_s$ , alors on peut voir à l'intérieur du parton qui soit entouré par des émissions partoniques.

En effet, il y a trois équations d'évolution pour les trois types de partons, quark antiquark et gluon, dans ce qui suit on va développer l'équation de l'évolution pour le quark [9].

On a le résultat de la diffusion inélastique du chapitre précédent:

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_q Q^2 f_q(x, Q^2) \quad (4.1)$$

Avec  $f(x, Q^2)$  La densité de parton :

$$f_q(x, Q^2) = f_q(x) + \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p(x/y) f_q(y) \quad (4.2)$$

On introduit la dépendance en  $\mu$  pour la distribution à l'ordre  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} f_q(x, Q^2) &= f_q(x) + \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p(x/y) f_q(y) \\ &= f_q(x, \mu^2) + \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p(x/y) f_q(y) \\ &= f_q(x, \mu^2) + \Delta f_q(x, Q^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

## Chapitre 04 : L'équation de l'évolution DGLAP

---

Où  $f_q(x, \mu^2)$  la distribution à l'ordre  $\alpha$  et  $\Delta f_q(x, Q^2)$  comme une correction à l'ordre  $\alpha\alpha_s$

On peut interpréter cela comme résultant d'un photon qui peut voir des partons à l'intérieur du proton,  $f_q(x, \mu^2)$ , ce sont les quarks de valence, avec l'augmentation de  $Q$ , l'équation (4.3) prédit l'augmentation de la résolution, on verrait que chaque quark est lui-même entouré d'un nuage de partons  $\Delta f_q(x, Q^2)$ .

On peut choisir  $t = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \Rightarrow dt = d\ln(Q^2)$  :

On peut écrire :

$$\frac{\partial f_q(x, Q^2)}{d\ln(Q^2)} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{qq}(z) f_q(y) \quad (4.5)$$

Donc on obtient une équation en fonction de  $t$  :

$$t \frac{\partial f_q(x, t)}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p(z) f_q(y, t) \quad (4.6)$$

Où  $z = x/y$

La formule général de l'équation (4.6) pour l'émission ( $a \rightarrow b + c$ ) est donnée par

$$t \frac{\partial f_b(x, t)}{\partial t} = \sum_a \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{ab}(z) f_a(y, t) \quad (4.7)$$

Ceci est l'équation de l'évolution AP (Altarelli-Parisi) elle exprime le fait qu'un quark avec une fraction d'impulsion  $x$ ,  $f(x, t)$  aurait pu venir d'un quark parent avec une grande fraction de moment  $y$ ,  $f(y, Q)$  qui a émit un gluon, la probabilité que cela se produit est proportionnelle à  $\alpha_s$ , l'intégrale est la somme de toutes les fractions du moment possibles de la particule mère [9] .

## Chapitre 04 : L'équation de l'évolution DGLAP

---

Cette même équation pourra être équation d'évolution pour les densités partoniques appelées équation de Dokshitzer–Gribov–Lipatov–Altarelli–Parisi

Maintenant on peut construire les équations de l'évolution DGLAP complète pour chaque parton  $q, \bar{q}$  et  $g$  en utilisant les différentes probabilités d'émission :

Où

$p(z) = p_{ab}(z)$  pour le processus ( $a \rightarrow bc$ ) :

$$\begin{aligned}
 p_{qq}(z) &= p_{\bar{q}\bar{q}}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right) \\
 p_{qg}(z) &= p_{\bar{q}g}(z) = T_F (z^2 + (1-z)^2) \\
 p_{gq}(z) &= p_{g\bar{q}}(z) = C_F \left( \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right) \\
 p_{gg}(z) &= 2C_A \left[ z \left( \frac{1}{1-z} \right) + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right]
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Avec les facteurs de couleurs  $C_F = 4/3$ ,  $C_A = 3$ ,  $T_F = 1/2$ .

### L'équation de l'évolution pour le quark : $b = q$

On a deux possibilités d'émissions ( $q \rightarrow qq$ ;  $g \rightarrow q\bar{q}$ ) :

Utilisons la forme générale de l'évolution

$$t \frac{\partial f_q(x,t)}{\partial t} = \sum_a \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{aq}(z) f_a(y,t) \tag{4.9}$$

Le quark émit provient d'un quark ou un gluon parent :

$$t \frac{\partial f_q(x,t)}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} ( p_{qq}(z) f_q(y,t) + p_{gq}(z) f_g(y,t) ) \tag{4.10}$$

### Pour l'antiquark : $b = \bar{q}$

On a deux possibilité démissions ( $\bar{q} \rightarrow \bar{q}g$ ;  $g \rightarrow \bar{q}q$ )

Substituons dans la forme générale

$$t \frac{\partial f_{\bar{q}}(x,t)}{\partial t} = \sum_a \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{a\bar{q}}(z) f_a(y,t) \tag{4.11}$$

## Chapitre 04 : L'équation de l'évolution DGLAP

---

L'antiquark provient d'un antiquark ou un gluon parent :

$$t \frac{\partial f_{\bar{q}}(x,t)}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} ( p_{\bar{q}\bar{q}}(z) f_{\bar{q}}(y,t) + p_{g\bar{q}}(z) f_g(y,t) ) \quad (4.12)$$

**Pour le gluon :  $b = g$**

On a trois possibilité d'émissions ( $q\bar{q} \rightarrow g; g \rightarrow gg; \bar{q}q \rightarrow g$ ) :

La forme générale

$$t \frac{\partial f_g(x,t)}{\partial t} = \sum_a \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{ag}(z) f_a(y,t) \quad (4.13)$$

Le gluon provient d'un antiquark d'un quark ou d'un gluon parent :

$$t \frac{\partial f_g(x,t)}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} ( p_{\bar{q}g}(z) f_{\bar{q}}(y,t) + p_{gg}(z) f_g(y,t) + p_{qg}(z) f_q(y,t) ) \quad (4.14)$$

A partir de cette étude on peut calculer la probabilité de distribution de l'émission dans l'état initial pour les différents types d'émissions partoniques.

### 4.3. Sudakov facteur de forme $\Delta(t)$ :

Pour une valeur de t donnée, nous définissons l'intégrale de la probabilité de branchement sur les valeurs z, donc on défini une nouvelle fonction qui s'appelle Sudakov facteur de forme  $\Delta(t)$  [9] :

$$\Delta(t) \equiv \exp \left[ - \int_{t_0}^t dt' \int dz \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{t'} p(z) \right]$$

$$\Delta(t) \equiv \exp \left[ - \int_{t_0}^t dt' \int f(t', z) dz \right] \quad (4.15)$$

Où la fonction  $f(t', z)$  est donnée par :

$$f(t', z) = dz \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{t'} p(z) \quad (4.16)$$

### 4.4. La probabilité de l'émission $P(z, t)$ :

Dans le cas général la probabilité pour que quelque chose se passe à temps  $t$  est donné par la fonction  $f(t)$  (quelque chose se passe à temps  $t$  seulement et seulement si il n'a pas été déjà passé à temps  $t'$  antérieur  $t' < t$ ) donc ça mène à la définition de la fonction  $N(t)$  la probabilité pour que rien ne se passe à temps  $t$ , donc la probabilité différentielle pour que quelque chose se passe à temps  $t$  est donné par la fonction  $P(t)$  définit par:

$$P(t) = -dN(t)/dt = f(t) N(t) \quad (4.17)$$

$$A t = 0 \quad N(0) = 1$$

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -f(t)dt \quad (4.18)$$

En intégrant l'équation différentielle précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{N(t)}{N(0)} &= \exp\left\{-\int_{t_0}^t dt' f(t')\right\} \\ N(t) &= N(0)\exp\left\{-\int_{t_0}^t dt' f(t')\right\} \\ N(t) &= \exp\left\{-\int_{t_0}^t dt' f(t')\right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Donc

$$P(t) = f(t)N(t) = f(t)\exp\left\{-\int_{t_0}^t dt' f(t')\right\} \quad (4.20)$$

On peut utiliser la notion de la probabilité différentielle pour définir la distribution de probabilité de l'émission  $P(z, t)$ .

La distribution de probabilité de l'émission de parton  $P(z, t)$  à un instant  $t$  quelconque est une loi de décroissance exponentielle.

Une quantité est dite sujette à une décroissance exponentielle si elle diminue à un taux proportionnel à sa valeur. Mathématiquement, cela peut être exprimé par l'équation différentielle linéaire suivante, avec la distribution de probabilité de l'émission total est  $(d\Delta(t))$ .

## Chapitre 04 : L'équation de l'évolution DGLAP

$$P(z, t) = -\frac{d\Delta(t)}{dt} \quad (4.21)$$

Où  $\Delta(t)$  a la même forme de  $N(t)$  dans le cas général

En intégrant l'équation différentielle précédente, on trouve la distribution de probabilité de l'émission  $P(z, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta(t)}{\partial t} &= f(t, z) \exp \left[ - \int_{t_0}^t dt' \int f(t', z) dz \right] \\ \frac{\partial \Delta(t)}{\partial t} &= - \int dz \frac{\alpha_s}{2\pi t} p(z) \Delta(t) \\ \frac{\partial \Delta(t)}{\partial t} &= f(z, t) \Delta(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Alors la probabilité différentielle prendra la forme finale suivante

$$P(z, t) = f(t, z) \exp \left[ - \int_{t_0}^t dt' \int f(t', z) dz \right] \quad (4.23)$$

donc :

$$P(z, t) = f(z, t) \Delta(t) \quad (4.24)$$

### 4.5. Distribution de probabilité de l'émission dans l'état initial (ISR):

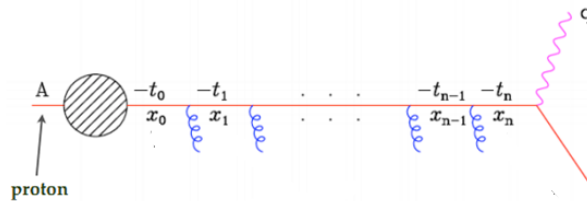


Figure (4.25) . L'émission dans l'état initial (ISR)

Les radiations ou les émissions dans l'état initiale est le parton irradié par une particule mère et qui est concerné par le processus dur (hard proces), c'est la particule irradié qui entre en collision comme le montre la figure (4. 25)

## Chapitre 04 : L'équation de l'évolution DGLAP

---

Dans ce cas, nous voulons distribuer selon les variables  $t$ ,  $z$  et  $x$  :

$$P_b(x, z, t) = \sum_{a,c} f_{a \rightarrow bc}(z, t) \Pi_b(x; t_1, t_2) \quad (4.26)$$

$$\Delta(t) \rightarrow \Pi_b(x; t_1, t_2)$$

Où (a) désigne la saveur de la particule avant l'émission, et (b) après l'émission. Cela signifie que la saveur de la particule irradiée est donnée par (c) [9] .

$\Pi_b(x; t_1, t_2)$  est la nouvelle notation pour Sudakov facteur de forme, la fonction  $f(z, t)$  prend la forme suivante:

$$f_{a \rightarrow bc}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{a \rightarrow bc}(z) \frac{x' f_a(x', t)}{x f_b(x, t)} \quad (4.27)$$

Changeant la notation  $x' = \frac{x}{z} = y$

Nous définissons la probabilité de l'émission dans l'état initial par la somme sur toutes les particules mères (a) qui se transforment en une particule fille (b), en irradiant une particule (c) :

$$f_b(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{ac} p_{a \rightarrow bc}(z) \frac{x' f_a(x', t)}{x f_b(x, t)} \quad (4.28)$$

Dans ce cas, Sudakov facteur de forme est donné par :

$$\Pi_b(x; t_1, t_2) = \exp \left\{ - \int_{t_1}^{t_2} dt' \int f_b(z, t') \right\} \quad (4.29)$$

On a sept cas de probabilité d'émission  $p(z) : p_{a \rightarrow bc}$

$$\begin{aligned} p_{q \rightarrow qg}(z) & , & p_{q \rightarrow gq}(z) & & p_{\bar{q} \rightarrow \bar{q}g}(z) & & p_{\bar{q} \rightarrow g\bar{q}}(z) \\ p_{g \rightarrow gg}(z) & & p_{g \rightarrow q\bar{q}}(z) & & p_{g \rightarrow \bar{q}q}(z) & & \end{aligned} \quad (4.30)$$

Utilisons les définitions des probabilités de l'émission pour construire les distributions de probabilité  $P_b(x, z, t)$  pour les quarks antiquark et gluon

**Distribution de probabilité pour le quark,  $b = q$  :**

On a deux cas possibles ( $q \rightarrow qg$  et  $g \rightarrow q\bar{q}$ ) :

On peut écrire

## Chapitre 04 : L'équation de l'évolution DGLAP

---

$$f_{q \rightarrow qg}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{q \rightarrow qg}(z) \frac{x' f_q(x', t)}{x f_q(x, t)} \quad (4.31)$$

Et

$$f_{g \rightarrow q\bar{q}}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{g \rightarrow q\bar{q}}(z) \frac{x' f_g(x', t)}{x f_q(x, t)} \quad (4.32)$$

Donc la probabilité d'émission d'un quark est

$$f_q(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{ac} p_{a \rightarrow qc}(z) \frac{x' f_a(x', t)}{x f_q(x, t)}$$

$$f_q(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( p_{q \rightarrow qg}(z) \frac{x' f_q(x', t)}{x f_q(x, t)} + p_{g \rightarrow q\bar{q}}(z) \frac{x' f_g(x', t)}{x f_q(x, t)} \right) \quad (4.33)$$

On remplaçant (4.33) dans (4.29) on obtient Sudakov facteur de forme:

$$\Pi_q(x; t_1, t_2) = \exp \left\{ - \int_{t_1}^{t_2} dt' \int \frac{1}{t'} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( p_{q \rightarrow qg}(z) \frac{x' f_q(x', t')}{x f_q(x, t')} + p_{g \rightarrow q\bar{q}}(z) \frac{x' f_g(x', t')}{x f_q(x, t')} \right) \right\} \quad (4.35)$$

On obtient finalement la distribution de probabilité pour le quark  $P_q(x, z, t)$ :

$$P_q(x, z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( p_{q \rightarrow qg}(z) \frac{x' f_q(x', t)}{x f_q(x, t)} + p_{g \rightarrow q\bar{q}}(z) \frac{x' f_g(x', t)}{x f_q(x, t)} \right) \Pi_q(x; t_1, t_2) \quad (4.36)$$

Une écriture simplifiée

$$P_q = (f_{qq} + f_{gq}) \Pi_{qq} \Pi_{gq}$$

Cela peut être expliqué par la distribution de probabilité pour que le quark qui entre en collision, provient d'une particule mère qui peut être un quark ou un gluon.

**Distribution de probabilité Pour l'antiquark  $b = \bar{q}$  :**

On a deux cas possible ( $\bar{q} \rightarrow \bar{q}g$  et  $g \rightarrow \bar{q}q$ ) :

$$f_{\bar{q} \rightarrow \bar{q}g}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{\bar{q} \rightarrow \bar{q}g}(z) \frac{x' f_q(x', t)}{x f_q(x, t)} \quad (4.37)$$

et

$$f_{g \rightarrow \bar{q}q}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{g \rightarrow \bar{q}q}(z) \frac{x' f_g(x', t)}{x f_q(x, t)} \quad (4.38)$$

Donc la probabilité d'émission d'un antiquark est :

$$f_{\bar{q}}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{ac} p_{a \rightarrow \bar{q}c}(z) \frac{x' f_a(x', t)}{x f_{\bar{q}}(x, t)} \quad (4.39)$$

On remplaçant (4.39) dans (4.29) on obtient Sudakov facteur de forme :

$$\Pi_{\bar{q}}(x; t_1, t_2) = \exp \left\{ - \int_{t_1}^{t_2} dt' \int f_{\bar{q}}(z, t') \right\} \quad (4.40)$$

Substituons On obtient la distribution de probabilité pour l'antiquark  $P_{\bar{q}}(x, z, t)$ :

$$P_{\bar{q}}(x, z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( p_{\bar{q} \rightarrow \bar{q}g}(z) \frac{x' f_q(x', t)}{x f_q(x, t)} + p_{g \rightarrow \bar{q}q}(z) \frac{x' f_g(x', t)}{x f_q(x, t)} \right) \Pi_{\bar{q}}(x; t_1, t_2) \quad (4.41)$$

Une écriture compacte et simple

$$P_{\bar{q}} = (f_{\bar{q}\bar{q}} + f_{g\bar{q}}) \Pi_{\bar{q}\bar{q}} \Pi_{g\bar{q}}$$

Ici l'antiquark est émit par un antiquark ou un gluon parent

**Distribution de probabilité Pour le gluon  $b=g$ :**

On a trois cas possible ( $q \rightarrow gq, \bar{q} \rightarrow g\bar{q}$  et  $g \rightarrow gg$ ) :

Un gluon émit par un quark parent

$$f_{q \rightarrow gq}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{q \rightarrow gq}(z) \frac{x' f_q(x', t)}{x f_g(x, t)} \quad (4.42)$$

## Chapitre 04 : L'équation de l'évolution DGLAP

---

Un gluon émit par un antiquark parent :

$$f_{\bar{q} \rightarrow g\bar{q}}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{\bar{q} \rightarrow g\bar{q}}(z) \frac{x' f_{\bar{q}}(x', t)}{x f_g(x, t)} \quad (4.43)$$

Un gluon émit par un gluon parent :

$$f_{g \rightarrow gg}(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} p_{g \rightarrow gg}(z) \frac{x' f_g(x', t)}{x f_g(x, t)} \quad (4.44)$$

$$f_g(z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{ac} p_{a \rightarrow gc}(z) \frac{x' f_a(x', t)}{x f_g(x, t)} \quad (4.45)$$

On remplaçant (4.45) dans (4.29), on obtient Sudakove facteur de forme

$$\Pi_g(x; t_1, t_2) = \exp \left\{ - \int_{t_1}^{t_2} dt' \int f_g(z, t) \right\} \quad (4.46)$$

On obtient la distribution de probabilité pour le gluon  $P_g(x, z, t)$ :

$$P_g(x, z, t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( p_{q \rightarrow gq}(z) \frac{x' f_q(x', t)}{x f_g(x, t)} + p_{\bar{q} \rightarrow g\bar{q}}(z) \frac{x' f_{\bar{q}}(x', t)}{x f_g(x, t)} + p_{g \rightarrow gg}(z) \frac{x' f_g(x', t)}{x f_g(x, t)} \right) \Pi_g(x; t_1, t_2) \quad (4.47)$$

L'écriture compacte de cette distribution

$$P_g = (f_{qg} + f_{\bar{q}g} + f_{gg}) \Pi_{qg} \Pi_{\bar{q}g} \Pi_{gg}$$

Le gluon peut être émit par un quark, un antiquark ou un gluon parent.

On remarque il y a une différence entre  $(q \rightarrow qg)$  et  $(q \rightarrow gq)$  le premier cas la particule irradiée est le gluon qui se retrouver dans l'état final est un quark qui entre en collision, tandis que dans le second cas, c'est le gluon qui entre en collision et le quark est la particule irradiée.

Ces distributions jouent un rôle important dans le calcul de la section efficace hadronique à l'ordre supérieur de  $\alpha_s$

conclusion

---

**Conclusion**

## Conclusion

---

### **Conclusion :**

D'après ce qu'on a vu dans ce mémoire, on peut dire que le domaine de la QCD perturbative est un vaste domaine de recherche dans la physique des particules élémentaires. On a essayé de décrire d'une façon simple l'une des plus importantes formule dans la théorie de la QCD perturbative, l'équation de l'évolution.

On a commencé par une étude détaillée du modèle des partons , ce qui nous a mené à l'étude des fonctions de structure du proton, pour bien comprendre la distribution de l'énergie du proton sur ses constituent les partons, on a étudié la relation entre le transfert d'énergie et la loi d'échelle de Bjorken, cette étude a eu comme résultat l'équation de l'évolution DGLAP qui gère les émissions des partons à l'ordre supérieur de  $\alpha_s$ , on a développé cette équation dans les trois cas possibles quark , antiquark et gluon, cette étude nous a permis de calculer la probabilité de distribution de l'émission dans l'état initial pour les différent types d'émission.

L'équation DGLAP, est la formule clé dans le calcul de la QCD perturbative, dans les collisions à haute énergie Electron-Proton , Electron-Positron, Proton-Antiproton et Proton-Proton, l'équation DGLAP décrit l'évolution de l'émission des partons en fonction de l'énergie pendant la cascade partonique durant les radiations à l'états initial et final, ce qui est très important dans le calcul de la section efficace pour l'espace de phase à N-corps dans la physique des collisionneurs.

### *Bibliographies*

- [1] L. Favart, Physique auprès des collisionneurs, PHYS-F-477, Cours, Université Libre de Bruxelles, 2013-2014.
- [2] F. Halzen, A.D. Martin, Quarks & Leptons, Wiley, New York, 1984.
- [3] Michael E. Peskin; Daniel V. Schroeder, an introduction to Quantum Field Theory, Westview Press (October 2, 1995).
- [4] Muta, T., & Muta, Taizo. Foundations of Quantum Chromodynamics: An introduction to perturbative methods in gauge theories. Singapore: World Scientific. (1987).
- [5] R.D. Field Applications of perturbative QCD Addison-Wesley (1989).
- [6] Davison E. Soper . Basics of QCD Perturbation Theory. Nov 2000. Lectures given at Conference, arXiv:(hep-ph)0011256.
- [7] A. Pich . Quantum Chromodynamics , Lectures at the 1994 European School of High-Energy Physics (Sorrento, May 1994), arXiv:hep-ph/9505231.
- [8] S. D. Ellis, J. Huston, K. Hatakeyama, P. Loch and M. Tonnesmann, Prog. Part. Nucl. Phys. 60 (2008) 484 [arXiv :0712.2447 [hep-ph]].
- [9] Ellis, R.K., Stirling, W.J. and Webber B.R., QCD and Collider Physics, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
- [10] P. Nason, introduction to QCD, CERN, Geneva, and INFN, Milan, Italy(2002).
- [11] G. Altarelli a QCD primer , arXiv:hep-ph/0204179, published in AIP Conf.Proc. 631 (2002) 70-111.

## ملخص:

في هذا العمل، تطرقنا إلى صيغة لاغرانجيان للكروموديناميك الكمي الاضطرابي كنظرية من نظريات حقول الكم، ودرسنا بالتفصيل نموذج البارتون في التصادم الغير مرن للإلكترون و البروتون، ثم قمنا بحساب المقطع الفعال لهذا التصادم ، بعد ذلك كتبنا دوال بنية البروتون التي تتعلق بالتوزيع الاحتمالي للجسيمات داخل البروتون، ثم حصلنا على معادلة التطور DGLAP التي تصف وتنظم انبعاث الجسيمات إلى مرتبة أعلى من  $\alpha_s$  , و نستعمل معادلة التطور DGLAP لتطوير صيغة توزيع احتمال الانبعاثات في الحالة الأولية للتفاعل .

## الكلمات المفتاحية :

معادلة التطور، بنية البروتون، دوال التوزيع البارتوني ، الكروموديناميك الكمي الاضطرابي ، فيزياء المصادمات ، نموذج البارتون.

---

## **Abstract :**

In this work we exposed the perturbative QCD Lagrangian formalism as a quantum field theory, then we studied in detail the parton model in electron proton deep inelastic scattering, we have constructed the leptonic and the hadronic current in order to compute the cross section, we wrote the proton's structure functions dependent on the probability distribution functions of partons inside the proton, at high energy the violation of Bjorken Scaling led to the DGLAP evolution equation, which describes and governs the partons emissions at higher order of  $\alpha_s$ , using the DGLAP evolution equation we wrote the probability distribution of emission in the initial state radiation.

**Key Words :** DGLAP Equation, Proton structure, Parton distribution functions, Perturbative QCD, Collider Physics, Parton model

---

## **Résumé :**

Dans ce travail, nous avons exposé le formalisme Lagrangien de la QCD perturbative comme une théorie des champs quantique, puis nous avons étudié en détail le modèle de parton dans la diffusion inélastique profonde électron-protons, nous avons construit le courant leptonique et hadronique afin de calculer la section efficace, nous avons écrit les fonctions de structure du proton dépendantes de la fonction de distribution de probabilité des partons à l'intérieur du proton, à haute énergie la violation de l'échelle de Bjorken conduit à la fonction de l'évolution de DGLAP, qui décrit et régit l'émission des partons à l'ordre supérieur de  $\alpha_s$ , en utilisant l'équation d'évolution de DGLAP nous avons développé la formule de la distribution de probabilité d'émission dans l'état initial.

**Mots clés :** Equation DGLAP, Structure du Proton, fonction de distribution Partonique, QCD Perturbative , Physique des collisionneurs, modèle de Parton