UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Discrètes

Par

BEN KHERIF Nasreddine

Sujet

Etude des relations binaires sur un ensemble non vide

Devant le jury :

Mr : D. MIHOUBI	**Université de M'sila**	**Président**
Mr : A. AMROUNE	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
Mr : L. LADJELAT	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Promotion : 2014/2015

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Mr A. Amroune pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Et pour ses conseils, ses orientations, son encouragement qui m'ont aidé à réaliser ce travail et j'avais l'honneur de travailler sous son assistance et je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Il n'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je remercie aussi les membres de jury d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

Je remercie toute les enseignants de l'université de M'sila et en particulier les enseignants de notre département.

Je ne saurais oublier de remercier ma famille notamment ma mère et mon père pour leur soutient tout au long de mes études.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail aux plus chers :

Ma mère *et* ***mon père*** *pour leurs dévouements,*

Leurs amours, leurs sacrifices et leurs encouragements.

Je prie le bon Dieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi.

Ma profonde affectation et tendresse

A mes très chers frères

Abdelkader et Talha

Et A mes sœurs.

A toute ma famille. Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me porter.

A tous mes enseignants du Primaire jusqu'à l'Université

A tous mes collègues de la promotion 2014-2015 sans aucune exception.

Nasreddine

Table des matières

Introduction

En mathématiques, il existe deux types de relations, relation d'ordre et similarité ou relation d'équivalence.

Les notions d'ordre, de classement, de rangement sont présentes dans de multiples activités ou situations humaines : hiérarchies administratives ou sociales, organigrammes, ordonnancements de tournois sportifs, ordres de préséance, de succession ou de préférences, motions d'ordre, ordres du jour, classements scolaires ou audiovisuels, ordre alphabétique, lexicographique, etc., on n'en finirait pas d'énumérer toutes les situations ou interviennent des ordres. Il n'est donc pas étonnant, compte tenu du développement de l'utilisation des mathématiques dans la modélisation de multiples phénomènes, de trouver de nombreux domaines ou les mathématiques de l'ordre sont présentes.

Pour affiner la présentation des résultats d'un sondage, on divise souvent l'ensemble des personnes interrogées en "sympathisants de la tendance X", "sympathisants de la tendance Y", et "ni l'un ni l'autre". Ou bien entre "hommes" et "femmes". Ou encore en classes d'âges, par exemple : «les 18-25ans", "les 26-34 ans", "les 35-50 ans" et "les plus de 50 ans ".

En mathématiques, il est également courant de diviser un ensemble en sous-ensembles disjoints (ce qu'on appelle "partitionner un ensemble"). Par exemple, on peut diviser l'ensemble des entiers relatifs en "nombres pairs" et "nombres impairs". Ou bien en "nombres strictement négatifs", "0" et "nombres strictement positifs". De telles partitions sont notamment utiles pour faire des preuves cas par cas. Ainsi, si l'on veut prouver que pour tout entier naturel n, l'entier $(n^3 – n)$ est divisible par 3, il peut être utile de diviser les entiers naturels en "nombres de la forme $3k$", "nombres de la forme $3k + 1$" et "nombres de la forme $3k + 2$".

Définir une relation d'équivalence, c'est précisément définir un critère qui permet de découper un ensemble en sous-ensembles disjoints, chacun de ces sous-ensembles regroupant les éléments d'un certain type, ces sous-ensembles sont appelés des "classes d'équivalence", par référence aux classes d'âge.

On demandera que le critère définissant la notion "d'être du même type" vérifie les propriétés suivantes : Pour tous éléments a, b et c de l'ensemble :

i) a est du même type que a ;

ii) si a est du même type que b, et que b est du même type que c, alors a est du même type que c

iii) si a est du même type que b alors b est du même type que a (et l'on dira simplement : a et b sont du même type).

Ce travail est réparti en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit la notion de relations binaires et les propriétés liée à cette notion ainsi que les différents aspects de la relation binaire.

Le deuxième chapitre est consacré aux rappels sur les relations d'équivalence, classes d'équivalence et ensemble quotient.

Dans le troisième chapitre, on donne des rappels sur les relations d'ordre et ensembles ordonnés et les extensions linéaires des ordres partiels.

On termine ce chapitre par un peu de combinatoire et quelques questions de compréhension

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'une classe particulière d'ensemble ordonnés (Treillis).

En fin on termine ce travail par l'élaboration d'un programme qui donne la nature d'une binaire définie sur un ensemble fini et le nombre de relations binaire de type pariticulier.

Chapitre I : Relations binaires

Sommaire

Dans ce chapitre on donne des notions générales sur les relations binaires, ainsi que quelque forme de représentation de la relation binaire.

Enfin en termine ce chapitre par le calcul du nombre de relations de type particulier sur un ensemble E fini.

I Relation binaire :

Les notions utilisées dans ce chapitre peuvent être rencontrées dans [*3*, *5*, *7*, *13*, *15*].

I.1 Notions et vocabulaires :

- **Ensemble des parties :** Soit E un ensemble, on appelle ensemble des parties de E, noté $\mathrm{P}(E)$ constitué des sous-ensembles de E.

  On remarque bien que les éléments de $P(E)$ sont des ensembles

  Exemple : Si $E = \{x, y\}$ alors $\mathrm{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, E\}$

  On a $\mathrm{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

  De même $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- **Produit cartésien :** Soit A et B deux ensembles, on appelle couple (ou paire ordonnée) d'élément de A et de B tout ensemble de la forme $\{a, \{a, b\}\}$ avec $a \in$ A et $b \in$ B. Un tel ensemble se note alors (a, b). L'ensemble constitué des couples d'éléments de A et de B s'appelle le produit cartésien de A par B et se note A × B. Il faut bien remarquer que

  $(a, b) \neq (\mathrm{b}, \mathrm{a})$ le plus souvent.
- **Partition d'un ensemble :** Soit E un ensemble non vide. une partition de E est une famille $\mathcal{A} = (\mathrm{A}_i)_{i \in I}$ de parties de E qui vérifiant les conditions suivantes :

  I. $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$.

  II. $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i, j \in I$ et $i \neq j$.

  III. E est la réunion des A_i pour $i \in I$.
- Soient E, F deux ensembles et A une partie de E on note par id_E l'application identique de E.

  On désigne par $E \setminus F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F, et par à $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F, on écrira souvent $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et on note $\mathcal{F} \setminus$ A : la restriction de f à A.

I.2 Rappels :

I.2.1 Relation :

Définition 1 : (Relation binaire). Soient E et F deux ensembles, une relation entre E et F est une partie de $E \times F$. Si $\mathcal{R}$ est une relation entre E et F, on dira que x est en relation avec y lorsque

$(x, y) \in \mathcal{R}$, On notera souvent plus simplement x $\mathcal{R}$ y.

Exemple : E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$. Le graphe de f est une relation binaire, on a alors $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y = f(x)$. Réciproquement.

Définition 2 : (Domaine, image). Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation entre E et F. on appelle domaine de $\mathcal{R}$ l'ensemble

$$\{x \in E \mid \exists\, y \in F, x \mathcal{R} y\}.$$

On appelle image de $\mathcal{R}$ l'ensemble

$$\{y \in F \mid \exists\, x \in E, x \mathcal{R} y\}.$$

Définition 3 : (Image directe, image réciproque (inverse)). Soient E, F deux ensembles, et $\mathcal{R}$ une relation binaire de E dans F (i.e. $\mathcal{R} \subseteq E \times F$), et soit A une partie de E (i.e. $\mathrm{A} \subseteq E$), et B une partie de F (i.e. $\mathrm{B} \subseteq F$).

$\mathcal{R}$(A) est appelée l'image directe de A et définie comme :

$$\mathcal{R}(\mathrm{A}) = \{y \in F \mid \exists\, x \in \mathrm{A}, (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

$\mathcal{R}^{-1}$(A) est appelée l'image réciproque de B et définie comme :

$$\mathcal{R}^{-1}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{x} \in E \mid \exists\, y \in \mathrm{B}, (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Définition 4 : (Image d'un élément selon une relation). Soient E et F deux ensemble, $\mathcal{R}$ une relation binaire de E vers F et a un élément de E. $\mathcal{R}(a) = \{y \in F \mid (a, y) \in \mathcal{R}\}$, $\mathcal{R}(a)$ est l'image selon $\mathcal{R}$ de l'élément a de E est appelée coupe selon l'élément a.

I.2.2 Fonctions :

Un cas particulier de relation important est celui où. pour chaque x appartenant au domaine de $\mathcal{R}$, il n'existe qu'un seul y tel $x \mathcal{R} y$.

Définition 5 : (Fonction, application). Une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation $\mathcal{R}$ entre E et F telle que, pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $x \mathcal{R} y$. Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation $\mathcal{R}$ entre E et F telle que, pour tout $x \in E$, il existe exactement un $y \in F$ tel que $x \mathcal{R} y$.

Dans le cas d'une fonction ou d'une application, on utilise la notation plus commode $y = \mathcal{R}(x)$ à la place de $y\ \mathcal{R}\ x$. L'ensemble F^E des applications de E dans F est une partie de $\mathrm{P}(E \times F)$ (car une relation est un élément de $\mathrm{P}(E \times F)$).

Définition 6 : Soit $f \subseteq E \times F$ (une relation), on dit que la relation f est fonctionnelle (fonction) si $\forall\ a \in E$, $(a, b) \in f$ et $(a, c) \in f \Rightarrow b = c$, et on écrit $f(a) = b$.

I.2.3 Représentation d'une relation binaire :

- ***Liste de couples :*** Cette représentation calque strictement la définition en extension.

  Exemple : $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (e, a)\}$.

- ***Table booléenne ou matrice caractéristique :*** Soit $\mathcal{R}$ une relation de A vers B c'est-à-dire ($\mathcal{R} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}$) on associe une matrice booléenne $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ ainsi formée.

  Les éléments de A et de B étant numérotés :

  - $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ comporte une i-ème ligne par élément $a_i \in \mathrm{A}$,
  - $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ comporte une j-ième colonne par élément $b_j \in \mathrm{B}$,
  - chaque élément $r_{i,j}$ de $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ a pour valeur $r_{i,j} =$ (si $(a_i, b_j) \in \mathcal{R}$ alors *1* si non *0*).

- ***Vecteur de vérité :***

  L'ensemble des $(a_i, b_j) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ étant supposé énuméré dans un ordre fixe, à une relation $\mathcal{R} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ on associe le vecteur booléen $\mathcal{R}$ formé à raison d'un booléen par couple (a_i, b_j). (les deux ensembles A et B sont dénombrables).

- ***Table de successeurs :***

  C'est une mise en table de la représentation précédente, utilisant 1 ligne par élément de A, et k colonnes pour ses successeurs, où k borne le nombre de points (de B) images d'un point (de A).

I.3 Relation binaire sur un ensemble non vide :

Définitions 7 : Soit E un ensemble non vide, une relation binaire sur E est une partie $\mathcal{R}$ du produit cartésien $E \times E$, c'est à dire un ensemble des couples (x, y) d'éléments de $E \times E$, si le couple $(x, y) \in \mathcal{R}$ on dit que x est lié à y par la relation $\mathcal{R}$, et on note $x\ \mathcal{R}\ y$. si $(x, y) \notin \mathcal{R}$ on dit que x n'est pas en relation avec y.

I.3.1 Rappels :

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On note $\mathcal{R}^c$ la relation complémentaire de $\mathcal{R}$, ($x\,\mathcal{R}^c\,y$ si $(x, y) \notin \mathcal{R}$), et $\mathcal{R}^d$ la relation duale de $\mathcal{R}$ ($x\,\mathcal{R}^d\,y$ si $y\,\mathcal{R}\,x$). La relation $(\mathcal{R}^c)^d$ ($= (\mathcal{R}^d)^c$) est notée $\mathcal{R}^{cd}$ et est égale à $\{(x, y) : (y, x) \notin \mathcal{R}\}$, on l'appelle la co-duale de $\mathcal{R}$.

Les relations binaires étant des parties d'un ensemble, donc on peut définir les opérations ensemblistes telles que d'inclusion, la réunion, l'intersection et la complémentation.

Elles sont définies ainsi :

1. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ si $x\,\mathcal{R}\,y$ implique $x\,\mathcal{R}'y$.
2. $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ si $x\,\mathcal{R}\,y$ implique $x\,\mathcal{R}'y$ et $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$ (Dans ces deux cas, on dit aussi que la relation $\mathcal{R}'$ est compatible avec la relation $\mathcal{R}$ ou que $\mathcal{R}'$ est une extension de $\mathcal{R}$).
3. $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' = \{(x, y) \in E^2 : (x, y) \in \mathcal{R}$ ou $(x, y) \in \mathcal{R}'\}$.
4. $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \{(x, y) \in E^2 : (x, y) \in \mathcal{R}$ et $(x, y) \in \mathcal{R}'\}$.
5. Le produit de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est la relation sur E, notée $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$ ou $\mathcal{R}\mathcal{R}'$, et définie par :
   $x\,\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'\,z$ ou $x\,\mathcal{R}\mathcal{R}'\,z$ s'il existe $t \in E$ tel que $x\,\mathcal{R}\,t$ et $t\,\mathcal{R}'\,z$.
6. Le complémentaire de $\mathcal{R}$ noté $\bar{\mathcal{R}}$ est la relation binaire sur E qui regroupe tous les couples de $E \times E$ qui ne sont pas dans $\mathcal{R}$, i.e. $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E^2 \mid (x, y) \notin \mathcal{R}\}$.

Exemples :

1) Soit M un monoïde (i.e. (M, •) est un semi groupe et il existe un élément neutre du M). On définit sur M les deux relations suivantes :

$$x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \exists\,(u, v) \in \mathrm{M}^2 : x = y \bullet u \text{ et } y = x \bullet v.$$

$$x\,\mathrm{K}\,y \Leftrightarrow \exists\,(u, v, u', v') \in \mathrm{M}^4 : x = u \bullet y \bullet v \text{ et } y = u' \bullet x \bullet v'.$$

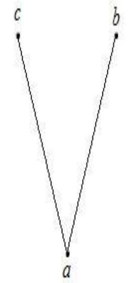
$\mathcal{R} \subseteq \mathrm{K}$ car :

Soient $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \exists\,(u, v) \in \mathrm{M}^2 : x = y \bullet u$ et $y = x \bullet v \Rightarrow x = e \bullet y \bullet u$, et $y = e \bullet x \bullet v \Rightarrow x\,\mathrm{K}\,y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{K}$.

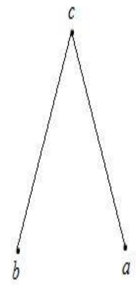
2) Soient E= $\{a, b, c\}$, et

$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}$,

$\mathcal{R}' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)\}$.



Le diagramme de $\mathcal{R}$



Le diagramme de $\mathcal{R}'$

$\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\}$.

$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$.

$\mathcal{R} \text{ o } \mathcal{R}' = \mathcal{R}\mathcal{R}' = \{(a, a), (b, b), (c, c),(a, b), (a, c), (b, c)\}$.

$\overline{\mathcal{R}} = \{(b, a), (c, a), (c, b), (b, c)\}$.

Définition 8 : (Relation inverse (réciproque)). Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, l'inverse de $\mathcal{R}$ noté $\mathcal{R}^{-1}$est une relation binaire sur E qui regroupe les couples (y, x) où $(x, y) \in \mathcal{R}$, i.e. $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$.

Définition 9 : (Relation identité (égalité)). Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, l'identité de $\mathcal{R}$ noté I_E (identité de E) ou Δ_E (diagonale de E) est une relation binaire sur E qui regroupe les couples (x, x) de $E \times E$ pour tout x un élément de E, (i.e.$(x, x) \in I_E \; \forall \, x \in E$,

$I_E = \Delta_E = \{(x, x) \in E^2 \mid (x, x) \in \mathcal{R}\}$).

Définition 10 : (Relation induite). Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, et F une partie de E. On obtient une relation binaire sur F, provisoirement notée $\mathcal{R}_F$, en posant

$$\mathcal{R}_f = \{(x, y) \in F \times F \mid x \, \mathcal{R} \, y\}.$$

Pour $x, y \in F$, on a donc $x \, \mathcal{R}_f \, y$ si et seulement si $x \, \mathcal{R} \, y$. On appelle $\mathcal{R}_f$ la, relation induite par $\mathcal{R}$ sur F.

I.3.2 Propriétés remarquables d'une relation binaire :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E non vide, on dit que $\mathcal{R}$ est :

- réflexive si $\forall \, x \in E, x \, \mathcal{R} \, x$ (i.e. $\mathrm{Id}_E \subseteq \mathcal{R}$),
- irréflexive si $\forall \, x \in E, (x, x) \notin \mathcal{R}$ (i.e. $\mathcal{R} \cap \mathrm{Id}_E = \emptyset$),
- symétrique si $\forall \, x, y \in E, x \, \mathcal{R} \, y \Longrightarrow y \, \mathcal{R} \, x$ (i.e. $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$),
- antisymétrique si $\forall x, y \in E, x \, \mathcal{R} \, y$ et $y \, \mathcal{R} \, x \Longrightarrow x = y$ (i.e. $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \emptyset$),
- transitive si $\forall \, x, y, z \in E, x \, \mathcal{R} \, y$ et $y \, \mathcal{R} \, z \Longrightarrow x \, \mathcal{R} \, z$ (i.e. $\mathcal{R} \text{ o } \mathcal{R} = \mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$).

I.3.3 Représentation d'une relation binaire sur un ensemble non vide :

I.3.3.1 Représentation graphique :

Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans E peut être représentée par un graphe orienté $(E, \mathcal{R})$ où E est l'ensemble des sommets du graphe et $\mathcal{R}$ est l'ensemble des arcs du graphe (couples de sommets). Les propriétés remarquables d'une relation binaire peuvent facilement exprimer à l'aide de la représentation sagittale du graphe $(E, \mathcal{R})$. La réflexivité de $\mathcal{R}$ se traduit par la présence d'une boucle en chaque sommet. La symétrie de $\mathcal{R}$ signifie que la présence d'un arc orienté de a vers b implique l'existence d'un arc orienté de b vers a. La transitivité de $\mathcal{R}$ se traduit en terme de graphe par le fait que s'il existe un chemin de longueur 2, de a vers b, il existe un arc de a vers b. Prendre la relation inverse de $\mathcal{R}$ revient à inverser l'orientation de tous les arcs du graphe. Prendre la relation complémentaire consiste à ajouter tous les arcs manquants dans le graphe et à supprimer tous les arcs existants. Notons qu'une relation symétrique peut, plus commodément être représentée par un graphe non orienté dans lequel les couples (a, b) et (b, a) de la relation donnent lieu à une arête entre les sommets a et b.

I.3.3.2 Représentation matricielle :

Définition 11 : On appelle matrice booléenne d'ordre n, toute matrice $n \times n$ à coefficients dans $\{0, 1\}$. Dans l'ensemble des matrices booléenne d'ordre n, on définit deux lois de composition

" + " et " . " définie, pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$,

$$\text{Par } A + B = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ avec } c_{i,j} = \text{Max}(a_{i,j}, b_{i,j})$$

et

$$A \cdot B = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ avec } d_{i,j} = \text{Max}_{k=1,\ldots,n}(a_{i,k}\, b_{k,j})$$

Définition 12 : Soit $E = \{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$ un ensemble fini et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On appelle matrice booléenne associée à $\mathcal{R}$ la matrice $M_{\mathcal{R}} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par :

$$\forall\ 1 \leq i, j \leq n,\ a_{i,j} = 1 \text{ si } x_i\, \mathcal{R}\, x_j \text{ et } a_{i,j} = 0 \text{ si non}$$

Proposition : Dans cette situation, on a :

- $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si $M_{\mathcal{R}}$ ne possède que des 1 sur sa diagonale.
- $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si ${}^tM_{\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}}$.

Proposition : Soit E un ensemble fini et $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ deux relations binaire sur E de matrice booléenne respective $M_{\mathcal{R}}$ et M . La matrice booléenne de $\mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ vaut

$$M_{\mathcal{R} \cup \mathcal{T}} = M_{\mathcal{R}} + M_{\mathcal{T}}$$

Et celle de $\mathcal{R} \text{ o } \mathcal{T}$ est

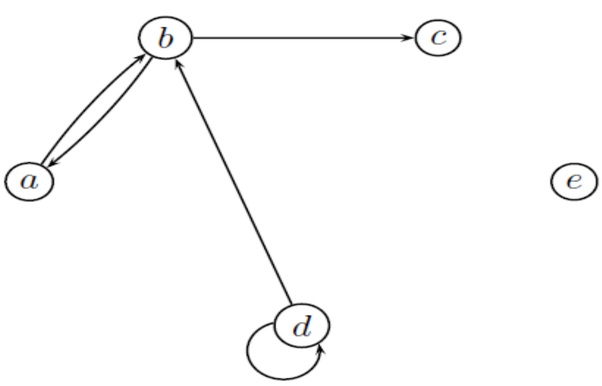
$$M_{\mathcal{R} \text{ o } \mathcal{T}} = M_{\mathcal{R}} . M_{\mathcal{T}}$$

Remarque : Si $\mathcal{R} \text{ o } \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{R}$ est transitive c'est-à-dire ($M_{\mathcal{R} \text{ o } \mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}}^2 \leq M_{\mathcal{R}}$).

Exemple : Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$.Considérons la relation $\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$. Une représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est donnée par :

⟲	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
a	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
b	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*
c	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
d	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*
e	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

Une représentation du graphe $(E, \mathcal{R})$ est :



I.3.4 Compatibilité entre une opération et une relation binaire :

La relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble non vide E, est dit compatible avec l'opération (définie dans E) de symbole " o " lorsque, quels que soient les éléments x, x', y et y' de E : si $x \mathcal{R} x'$ et si $y \mathcal{R} y'$ alors $(x \text{ o } y) \mathcal{R} (x' \text{ o } y')$. Autrement dit, l'opération conserve la relation.

Exemple : On considère la relation classique d'inégalité dans $\mathbb{R}$: si on a $x \leq x'$ et $y \leq y'$, on peut écrire $x + x' \leq y + y'$.
Ce résultat est bien connu : on a le droit « d'additionner des inégalités membre à membre ». En d'autres termes, l'addition des réels est compatible avec l'inégalité.
Mais, de $-2 \leq 1$ et de $-3 \leq -1$, on ne peut pas déduire que $6 \leq -1$. On n'a pas le droit de « multiplier des inégalités membre à membre ».
La multiplication des réels, quant à elle, n'est donc pas compatible avec l'inégalité.

I.3.5 Fermetures :

Soit Ω un ensemble et p une propriété et soit $S \subseteq \Omega$ telle que S peut satisfaire p ou non.

La question qu'ou se pose est la suivante :

-Quel est le plus petit sous-ensemble de Ω qui contient S et qui vérifie la propriété p ? i.e. trouver $C \subseteq \Omega$ telle que :

1) $S \subseteq C$,
2) p(C) vérifie. i.e. la propriété p est vérifiée dans C.

Et si $D \subseteq \Omega$ telle que $S \subseteq D$, p(D) (la propriété p est vérifié dans D), alors $C \subseteq D$. Alors C est appelé la fermeture de S selon p. Cet ensemble est généralement noté p(S).

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E, (i.e. $\mathcal{R} \subseteq E \times E$) :

a) ***Fermeture réflexive :*** (qu'ou note r($\mathcal{R}$) ou bien réflexive($\mathcal{R}$))

$$r(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup I_E, \text{ et si } \mathcal{R} \text{ est réflexive alors } r(\mathcal{R}) = \mathcal{R}.$$

b) ***Fermeture symétrique :*** (qu'ou note Sym($\mathcal{R}$) ou bien symétrique($\mathcal{R}$))

$$\text{Sym}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}, \text{ et si } \mathcal{R} \text{ est symétrique alors } s(\mathcal{R}) = \mathcal{R}.$$

Exemple : Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 3)\}$ alors :

La fermeture réflexive est :

$r(\mathcal{R}) = \text{réflexive}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup I_E = \mathcal{R} \cup \{(2, 2), (4, 4)\}$

La fermeture symétrique est :

$\text{Sym}(\mathcal{R}) = \text{symétrique}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R} \cup \{(4, 2), (3, 4)\}$.

c) ***Fermeture transitive :*** (qu'ou note $t(\mathcal{R})$ ou bien transitive($\mathcal{R}$))

$$t(\mathcal{R}) = \text{transitive}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \ldots \cup \mathcal{R}^i \cup \ldots = \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{R}^i = \mathcal{R}^*.$$

Théorème : Soient E un ensemble de n éléments et $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E, alors la fermeture transitive de $\mathcal{R}$ est : $\text{transitive}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \ldots \cup \mathcal{R}^n$.

Exemple : Soit $E=\{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ alors :

$\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$ et $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^2 \circ \mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$.

La fermeture transitive est :

$t(\mathcal{R}) = \text{transitive}(\mathcal{R}) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), 1, 3)\}$.

I.4 Un peu de combinatoire :

I.4.1 Nombre de couples, nombre de n-uples :

Soit E un ensemble fini à m éléments.

I.4.1.1 Nombre de couples :

Un couple n'est finalement qu'une application de l'ensemble $\{1, 2\}$ dans l'ensemble E. A 1 elle fait correspondre la première composante du couple, à 2 la deuxième. Il y a donc autant de couples (x, y) constituée d'éléments x et y de E, qu'il y a d'applications de l'ensemble $\{1, 2\}$ dans l'ensemble E, soit m^2.

I.4.1.2 Nombre de n-uples :

Un n-uple n'est finalement qu'une application de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans l'ensemble E. A l'entier k, $1 \leq k \leq n$, une telle application fait correspondre la k-ième composante du n-uple. Il y a donc autant de n-uples $(x_1, \ldots, x_n)$ constitués d'éléments de E, qu'il y a d'applications de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans l'ensemble E, soit m^n.

I.4.2 Nombre de relations binaires de types particuliers :

Soit X un ensemble fini à n éléments, On déterminer le nombre de relations binaires sur X qui sont :

1) Réflexive.
2) Symétrique.
3) Réflexive et symétrique.
4) Symétrique et antisymétrique.
5) Réflexive et antisymétrique.

I.4.2.1 Nombre de relations réflexives :

Les relations binaires liant deux éléments. Une relation binaire est définie par sa valeur de vérité, *0* ou *1*, sur les couples (i, j) d'éléments de X. Il y a n^2 couples. Une relation binaire est donc une application d'un ensemble à n^2 éléments dans un ensemble à *2* éléments.

Il existe autant de relations binaires sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à n^2 éléments dans un ensemble à *2* éléments, soit 2^{n^2}. Donc il existe 2^{n^2} relations binaires sur X. Parmi ces relations binaires, les relations réflexives ont une valeur de vérité égale à 1 pour les couples (x, x), $x \in X$. Pour les $n^2 - n = n\,(n-1)$ autres couples, la valeur de vérité est libre, *0* ou *1*.

Il existe autant de relations binaires réflexives sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à $n\,(n-1)$ éléments dans un ensemble à *2* éléments, soit 2^{n^2-n}. Donc il existe

$2^{n^2-n} = 2^{n(n-1)}$ relations binaires réflexives sur X.

I.4.2.2 Nombre de relations symétriques :

Les relations symétrique sont caractérisées par des valeurs de vérité identique pour les couples (x, y) et (y, x) avec $x \neq y$. Il existe $n\,(n-1)$ couples (x, y) avec $x \neq y$. Pour la moitié d'entre eux, la valeur de vérité est libre, *0* ou *1* : pour l'autre moitié, qui sont les couples symétriques, elle est fixée. Pour les n couples (x, x), la valeur de vérité est libre, *0* ou *1*. Au total, nous obtenons $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ couples (x, y) pour lesquels la valeur de vérité est libre, *0* ou *1*. Remarquons que ce nombre de couples peut aussi être obtenu en soustrayant du nombre total n^2 de couples, le nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ de couples pour lesquels la valeur de vérité est fixée par symétrie : $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Il existe autant de relations binaires symétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments dans un ensemble à *2* éléments, soit $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Donc il existe $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations binaires symétriques sur X.

I.4.2.3 Nombre de relations réflexives et symétriques :

Les relations réflexives et symétriques sont caractérisées par des valeurs de vérité identiques pour les couples (x, y) et (y, x) avec $x \neq y$ et par une valeur de vérité égale à *1* pour les n couples (x, x), $x \in X$. Elle est libre seulement pour $\frac{n(n-1)}{2}$ couples d'éléments de X.

Il existe autant de relations binaires réflexives et symétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans un ensemble à *2* éléments, soit $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Donc il existe $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations binaires réflexives et symétriques sur X.

I.4.2.4 Nombre de relations symétriques et antisymétriques :

Considérons un couple (x, y). Comme la relation est symétrique, on a $x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow y\,\mathcal{R}\,x$, et comme la relation est antisymétrique, la relation $x\,\mathcal{R}\,y$, (donc $y\,\mathcal{R}\,x$) ce qui entraîne $(x\,\mathcal{R}\,y) \wedge (y\,\mathcal{R}\,x)$, donc $x = y$. En d'autre terme $\mathcal{R}(x,y)$, $\mathcal{R}(y,x)= 0$ chaque fois que $x \neq y$, donc la valeur de vérité de $x\,\mathcal{R}\,y$ ne peut être égale à *1* que si $x = y$. Autrement dit, pour tous les couples d'éléments distincts, la valeur de vérité de $x\,\mathcal{R}\,y$ est *0*. La valeur de vérité de $x\,\mathcal{R}\,y$ est libre seulement pour les n couples (x, x).

Il existe autant de relations binaires symétriques et antisymétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à n éléments, dans un ensemble à *2* éléments, soit 2^n. Donc il existe 2^n relations binaires symétriques et antisymétriques sur X.

I.4.2.5 Nombre de relations réflexives et antisymétriques :

Pour tout éléments x, la valeur de vérité de $x\,\mathcal{R}\,x$ est *1* puisque la relation est réflexive. Considérons un couple (x, y) d'éléments distincts de X.

Supposons la valeur de vérité de $x\,\mathcal{R}\,y$ égale à *1*. Si la valeur de vérité de $y\,\mathcal{R}\,x$ était égale à *1*, on aurait $(x\,\mathcal{R}\,y) \wedge (y\,\mathcal{R}\,x)$, donc $x = y$, par antisymétrie, ce qui serait contradictoire, donc la valeur de vérité de $y\,\mathcal{R}\,x$ est *0*. Ainsi, les relations réflexives et antisymétriques sont caractérisées par des valeurs de vérité non toutes deux égales à *1* pour les couples (x, y) et (y, x) avec $x \neq y$ et par une valeur de vérité égale à *1* pour les n couples (x, x), $x \in X$. Pour chaque couple (x, y) d'éléments distincts de X, il n'y a donc que *3* possibilités des valeurs de vérité : soit les valeurs de vérité de $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x$ sont toutes deux nulles, soit l'une vaut *1* et l'autre *0*. Or il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples d'éléments distincts de X.

Il existe autant de relations binaires réflexives et antisymétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans un ensemble à *3* éléments, soit $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Donc il existe $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations binaires réflexives et antisymétriques sur X.

I.4.3 Nombre d'ordres totaux :

Un ordre total est une façon de ranger les éléments de E. C'est donc une bijection de $\{1, \dots, n\}$ sur E. il y a donc autant d'ordres totaux que de bijections de $\{1, \dots, n\}$ sur E, soit $n\,!$. Donc il existe $n\,!$ ordres totaux sur un ensemble E à n éléments.

- Pour le nombre de relations transitives, il n'y a pas actuellement de formule « ferme ».
- Le nombre de relations d'équivalence est égal au nombre de partitions d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre de Bell. (l'explication du nombre de Bell voir annexes).

Chapitre II : Relations d'équivalence

Sommaire

Nous allons commencer ce chapitre par introduire la notion de relation d'équivalence et nous allons examiner quelques propriétés caractéristiques qui la distingue. À la fin de ce chapitre on traite l'ensemble quotient.

II Relations d'équivalence :

Les notions utilisées dans ce chapitre peuvent être rencontrées dans [5, 8,14].

II.1 Relation d'équivalence :

Définition 1 : Soit E un ensemble non vide, on appelle relation d'équivalence sur E, toute relation binaire $\mathcal{R}$ à la fois réflexive, symétrique et transitive, c'est-à-dire telle que :

1) $\forall\, x \in E, x\, \mathcal{R}\, x$ (c'est la réflexivité),
1) $\forall\, x, y \in E, x\, \mathcal{R}\, y \Longrightarrow y\, \mathcal{R}\, x$ (c'est la symétrie),
2) $\forall\, x, y, z \in E, (x\, \mathcal{R}\, y \text{ et } y\, \mathcal{R}\, z) \Longrightarrow x\, \mathcal{R}\, z$ (c'est la transitivité).

Exemples :

1. L'égalité est une relation d'équivalence.
2. La relation " $\subset$ " n'est pas une relation d'équivalence.
3. La relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$. par définition : $x \equiv y[n]$ (lire : « x est congru à y modulo n »), $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x - y = k \cdot n$
   - Réflexivité : $x \equiv x[n]$: en effet, $x - x = 0 \cdot n$, et $0 \in \mathbb{Z}$.
   - Symétrie : si $x \equiv y[n]$, $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x - y = k \cdot n$, alors $y - x = (-k) \cdot n$, or, si $k \in \mathbb{Z}$, $(-k) \in \mathbb{Z}$, donc $y \equiv x[n]$.
   - transitivité : si $x \equiv y[n]$ et $y \equiv z[n]$, $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x - y = k \cdot n$, et $\exists\, l \in \mathbb{Z}, y - z = l \cdot n$. En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient $x - z = (k + l) \cdot n$, or

     $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, donc $k + l \in \mathbb{Z}$, donc $x \equiv z[n]$.

   C'est bien une relation d'équivalence.

II.2 Classes d'équivalence :

Définition 2 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E, on appelle classe d'équivalence d'élément x de E, l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x (on dit encore : « qui sont équivalents à x »).

Notation : On note $C_{\mathcal{R}}(x)$ ou $C(x)$, la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$:

$C(x) = \{y \in E \mid y\, \mathcal{R}\, x\}$ est notée aussi $\bar{x}$, ou $\dot{x}$.

Propriété : L'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide.

Preuve: Soit E un ensemble non vide, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On montre que l'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide. C'est-à-dire si,

$$\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset.$$

Supposons que $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ a \in$ E tel que $a \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow a \in \bar{x}$ et $a \in \bar{y} \Rightarrow x\ \mathcal{R}\ a$ et $y\ \mathcal{R}\ a \Rightarrow x\ \mathcal{R}\ a$ et $a\ \mathcal{R}\ y$ ($\mathcal{R}$ car est symétrique) $\Rightarrow x\ \mathcal{R}\ y$ (car $\mathcal{R}$ est transitive) $\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ contradiction, car $\bar{x} \neq \bar{y}$. Donc $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

Remarque : On dit aussi que les classes sont deux à deux disjointes.

II.3 Partition :

Définition 3 : Soit E un ensemble non vide. On appelle partition de E toute famille $\{E_i\}_{i \in I}$ de parties de E telle que :

i. $\forall\ i \in I, E_i \neq \emptyset$,
ii. $\forall\ i, j \in I$ et $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$,
iii. E est la réunion des E_i pour $i \in I$.

Proposition : Les classes d'équivalence réalisent de E.

Preuve: Comme les classes sont des parties de E, leur réunion est une partie de E, réciproquement, tout élément de E appartient à une classe x (« tout élément est classé »). Donc E est une partie de la réunion des classes, et E est égale à la réunion des classes.

Exemple : On reprend la congruence modulo n, par exemple pour $n = 4$, on a :

$\bar{0} = \{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$

$\bar{1} = \{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$

$\bar{2} = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$

$\bar{3} = \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$

II.4 Ensemble quotient :

Définition 4 : Soit E un ensemble non vide, l'ensemble quotient de E par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, noté $E\ /\ \mathcal{R}$ est l'ensemble des classes d'équivalences de E suivant $\mathcal{R}$:

$$E\ /\ \mathcal{R} = \{C(x)\ |\ x \in E\}$$

possède les propriétés suivantes :

I. $\forall X, X \in E \,/\, \mathcal{R} \Rightarrow X \neq \emptyset$,
II. $(\forall X), (\forall Y), (X \in E \,/\, \mathcal{R}$ et $Y \in E \,/\, \mathcal{R}$ et $X \neq Y) \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$,
III. $\bigcup_{X \in E \,/\, \mathcal{R}} X = E$.

L'application $\varphi : E \to E \,/\, \mathcal{R}\ , x \to C(x)$ est la surjection canonique de E sur $E \,/\, \mathcal{R}$. Si $X \in E \,/\, \mathcal{R}$, tout éléments de $\varphi^{-1}(X)$ est appelé une représentation de X dans E.

Propositions : Soit E un ensemble non vide.

(i) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors $E \,/\, \mathcal{R}$ est une partition de E.
(ii) Soit $\mathcal{A} = (\mathrm{A}_i)_{i \in I}$ une partition de E. Il existe une et une seule relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E telle que $\mathcal{A} = E \,/\, \mathcal{R}$.

Démonstration : (i). Si $x \in E$, on a $x \in C(x)$ (réflexivité), Il en résulte que les classes modulo $\mathcal{R}$ sont non vide, et que E est la réunion de ces classes.

Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\, \mathcal{R}\, y$ et $x\, \mathcal{R}\, z$. La symétrie de $\mathcal{R}$ montre que $y\, \mathcal{R}\, x$ et $x\, \mathcal{R}\, z$, d'où $y\, \mathcal{R}\, z$ (transitivité). On en déduit que $C(x) \subset C(y)$, puis $C(x) = C(y)$ en utilisant à nouveau la symétrie de $\mathcal{R}$. L'assertion (i) est alors claire.

(ii). On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E en convenant que $x\, \mathcal{R}\, y$ si et seulement s'il existe un indice i tel que $x, y \in \mathrm{A}_i$. Comme $\mathcal{A}$ est une partition de E, il est immédiat que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, et (ii) est alors claire.

Définition 5 : Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ des relations d'équivalence sur E et F respectivement. On dit que :

(i) f est compatible avec $\mathcal{R}$ si, pour tous $x, y \in E$ tels que $x\, \mathcal{R}\, y$, on a $f(x)\, \mathcal{S}\, f(y)$.
(ii) f est un homomorphisme de $(E, \mathcal{R})$ dans $(F, \mathcal{S})$ si, pour tous $x, y \in E$, on a $f(x)\, \mathcal{S}\, f(y)$ dès que $x\, \mathcal{R}\, y$.

Propositions :

Soient E, F des ensembles, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, φ la surjection canonique associée à $\mathcal{R}$, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application f est compatible avec $\mathcal{R}$,

(ii) Il existe $g \in \mathcal{F}(E / \mathcal{R}, F)$ telle que $f = g \circ \varphi$.

Si ces conditions sont vérifiées, g est déterminé d'une manière unique. On dit que g est déduite de f par passage au quotient.

Démonstration : (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons (i) vérifiée, Soient $Z \in E / \mathcal{R}$ et $x, y \in Z$. on a $f(x) = f(y)$. On définit donc $g \in \mathcal{F}(E / \mathcal{R}, F)$ en posant, si $X \in E / \mathcal{R}$, $g(X) = f(x)$, où x est un élément quelconque de X. Alors $f = g \circ \varphi$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si (ii) est vraie, et si $x, y \in E$ vérifient $x \mathcal{R} y$, on obtient :

$$f(x) = g \circ \varphi(x) = g \circ \varphi(y) = f(y).$$

L'unicité de g est évidente.

Soient E, F des ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, dite associée à f, en convenant que $x \mathcal{R} y$ si et seulement si l'on a $f(x) = f(y)$.

L'application f est compatible avec $\mathcal{R}$. Soient φ la surjection canonique associée à $\mathcal{R}$ et g l'unique application de $E / \mathcal{R}$ dans F vérifiant $f = g \circ \varphi$.

Soient $X, Y \in E / \mathcal{R}$, $x \in X$ et $y \in Y$. Si $g(X) = g(Y)$, alors $f(x) = f(y)$, donc $x \mathcal{R} y$, puis $X = Y$. L'application g est donc injective

Notons $j : f(E) \to F$ l'injection canonique et $\bar{f} : E / \mathcal{R} \longrightarrow f(E)$ la bijection coïncidant avec g sur $E / \mathcal{R}$. Il vient :

$$f = j \circ \bar{f} \circ \varphi.$$

On dit que cette écriture est la décomposition canonique de l'application f.

Chapitre III : Relations d'ordre

Sommaire

Dans ce chapitre nous donnons les concepts et le Vocabulaire permettant de définir, représenter et décrire un ensemble ordonné, et nous introduisons plusieurs graphes de comparabilité, d'incomparabilité, de couverture et de voisinage qui lui sont naturellement associés. On termine ce chapitre par quelques exemples d'usages.

III Relations d'ordre :

Les notions utilisées dans ce chapitre peuvent être rencontrées dans [*5*, *7*, *8*, *12*, *13*, *14*].

III.1 Relation d'ordre :

Définition 1 : Soit E un ensemble non vide, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est appelée relation d'ordre si, et seulement si, elle réflexive, antisymétrique et transitive c'est-à-dire elle vérifié :

1) $\forall\, x \in E,\, x\,\mathcal{R}\,x$ (c'est la réflexivité),
1) $\forall\, x, y \in E,\, (x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x) \Longrightarrow x = y$ (c'est l'antisymétrie),
2) $\forall\, x, y, z \in E,\, (x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z) \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z$ (c'est la transitivité).

Dans ce cas (E, $\mathcal{R}$) est dit ensemble partiellement ordonné (poset).

La plupart des relations d'ordre sont notées $\leq$ ou $\preccurlyeq$ (à l'exception notable de l'inclusion et de la divisibilité).

Exemple : l'ensemble des couples

$$\{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 5), (5, 7), (7, 7)\}$$

est une relation d'ordre sur l'ensemble $E = \{2, 3, 5, 7\}$. C'est en fait la relation induite sur E par la relation d'ordre habituelle $\leq$ sur les entiers.

Définition 2 : (Comparabilité). Deux éléments x et y d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sont dits comparables si $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

Définition 3 : (Ordre total). L'ordre $\preccurlyeq$ est dite total si tous les éléments de E sont deux à deux comparables, c'est-à-dire $(\forall\,(x, y) \in E^2\; x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x)$.

Exemples :

1) L'ordre naturel $\leq$ sur l'ensemble des nombres réels est une relation d'ordre total.
2) La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathsf{P}(E)$ est une relation d'ordre, Elle n'est pas totale.

III.2 Ensemble ordonné :

Définition 4 : Un ensemble ordonné est un couple $\mathrm{P} = (E, \preccurlyeq)$ où E est un ensemble et $\preccurlyeq$ un ordre sur E, dans certains cas et pour éviter toute ambiguïté, il pourra être utile de noter $\preccurlyeq_{\mathrm{P}}$ l'ordre de l'ensemble ordonné P). Si $\preccurlyeq$ est un ordre total, $\mathrm{P} = (E, \preccurlyeq)$ est alors appelé un ensemble totalement ordonné (ou ensemble linéairement ordonné ou chaîne).

III.2.1 Bornes et éléments extrémaux :

- ***Minimum et maximum :*** Soit E un ensemble ordonné et $\boldsymbol{a} \in E$.
    1) On dit que $\boldsymbol{a}$ est un minimum de E (ou plus petit élément de E) lors que, pour tout $x \in E$, on a $\boldsymbol{a} \leq x$.
    2) On dit que $\boldsymbol{a}$ est un maximum de E (ou plus grand élément de E) lors que, pour tout $x \in$ E, on a $x \leq \boldsymbol{a}$.

Remarque : Si E admet un minimum, alors il n'en admet qu'un seul. Il en est de même pour un maximum.

- ***Elément minimaux et élément maximaux*** **:** Soient E un ensemble ordonné et $\boldsymbol{a} \in E$.
    1) On dit que $\boldsymbol{a}$ est un élément minimal de E si le seul élément x de E vérifiant $x \leq \boldsymbol{a}$ est $x = \boldsymbol{a}$ lui-même.
    2) On dit que $\boldsymbol{a}$ est un élément maximal de E si le seul élément x de E vérifiant $\boldsymbol{b} \leq x$ est $x = \boldsymbol{a}$ lui-même.

Remarque : Un ensemble ordonné E peut posséder plusieurs éléments minimaux (respectivement : éléments maximaux). Cependant, si E admet un minimum (respectivement : maximum) $\boldsymbol{a}$, alors $\boldsymbol{a}$ est l'unique élément minimal (respectivement : élément maximal) de E.

- ***Minorant et majorant :*** Soient E un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.
    1) On dit que $m \in E$ est un minorant de A dans E si $m \leq x$ pour tout $x \in$ A. La partie A est dite minorée si et seulement si elle admet au moins un minorant.
    2) On dit que $M \in E$ est un majorant de A dans E si $x \leq M$ pour tout $x \in$ A. La partie A est dite majorée si et seulement si elle admet au moins un majorant.
- ***Borne inferieur et borne supérieur :*** Soient E un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.
    1) On dit que $\boldsymbol{a} \in$ E est une borne inférieure de A dans E si $\boldsymbol{a}$ est le plus grand minorant de A dans E. Si elle existe, cette borne inférieure est unique. On la note inf $_E$(A) ou inf(A).
    2) On dit que $\boldsymbol{a} \in$ E est une borne supérieure de A dans E si $\boldsymbol{a}$ est le plus petit majorant de A dans E. Si elle existe, cette borne supérieure est unique. On la note sup $_E$(A) ou sup(A).

III .2.2 Bon ordre :

Définition 5 : Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit bien ordonné si et seulement si toute partie non vide de E admet un plus petit élément. On dit encore que $\leq$ est un bon ordre sur E.

Un ensemble bien ordonné non vide possède, en particulier, un plus petit élément, appelé son premier élément, Un bon ordre est toujours total.

Exemple : Pour l'ordre usuel, ni $\mathbb{Z}$, ni $\mathbb{Q}$, ni $\mathbb{R}$ ne sont bien ordonnés.

Définition 6 : (Segment initial). On dit que $S \subset E$ est un segment initial si $\forall\ x, y \in E$ ($y \in S$ et $x \leq y$) $\Rightarrow x \in S$.

Si $x_0 \in E$ on notera S_{x_0} le segment initial $\{y \in E \mid y \leq x_0\}$.

Proposition : Soit $(E, \leq)$ un ensemble bien ordonné et $f : E \rightarrow E$ une application strictement croissante, Alors on a $f(x) \geq x, \forall\ x \in E$.

Preuve : Supposons qu'il existe $x \in E \,/\, f(x) < x$ et Soit x_0 le plus petit élément de

$$\mathrm{M} = \{x \in E \mid f(x) < x\}.$$

$\forall\ x \in E, x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq x$, d'autre part $f(x_0) < x_0$, donc $f(x_0) \notin \mathrm{M}$, Alors

$$f(f(x_0)) \geq f(x_0)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Et puisque f est strictement croissante on a $\forall\ x \in E, x < x_0 \Rightarrow f(x_0) > x$ mais $f(x_0) < x_0$ implique

$$f(f(x_0)) < f(x_0)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

contradiction, donc $\mathrm{M} = \emptyset$.

Proposition : Soient $(E, \mathcal{R})$, $(F, \mathcal{R}')$ deux ensembles bien ordonnés, il existe au plus un isomorphisme de $(E, \mathcal{R})$ dans $(F, \mathcal{R}')$, En particulier l'identité est le seul automorphisme d'un ensemble bien ordonné.

Preuve : Supposons qu'il existe deux isomorphismes f et g de $(E, \mathcal{R})$ sur $(F, \mathcal{R}')$ alors g^{-1} est strictement croissant donc $(g^{-1} \circ f)(x) \geq_{\mathcal{R}'} x$ pour tout $x \in E$, et puisque g est croissant alors

$$f(x) \geq g(x)\ ,\ \forall\ x \in E\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Un argument symétrique donné

$$g(x) \geq f(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

De (1) et (2) donc $g(x) = f(x)$.

Proposition : Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble bien ordonné et $Y \subset E$ un segment initial de E,

$f : E \rightarrow Y$ un isomorphisme, Alors $Y = E$ et $f = I$ (avec $I : E \rightarrow E$ est automorphisme).

Preuve: Montrons que $E = Y$, pour cela sont $x \in E$ $f(x) \geq x$ on a $f(x) \in Y$, $x \leq f(x) \Rightarrow x \in Y$. Donc $E = Y$ et $f = I$.

Soient Y, Z deux segment initiaux de E alors $Z \subset Y$ ou $Y \subset Z$. Supposons par exemple $Z \subset Y$, $f : E \rightarrow Z$ avec Z segment initial de Y donc $Z = Y$ et $f = I$.

Notation : Soient E, F deux ensembles bien ordonnés. On note $E \leq F$ si, E isomorphe à un segment initial de F, $E \backsim F$ si E et F sont isomorphes, $E < F$ si $E \leq F$ et $E \nsim F$ c'est-à-dire E isomorphe à un segment initial strict de E.

Théorème : Soient E, F deux ensemble bien ordonnée, Alors une et une seul des assertions suivantes est vraie.

(1)-$E < F$,

(2)- $F < E$,

(3)-$E \backsim F$.

III .2.3 Ordre strict :

Définition 7 : Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble non vide E. $\mathcal{R}$ est une ordre strict si elle est irréflexive $(\forall\, x \in E\ (x, x) \in \bar{\mathcal{R}})$ et transitive. Un ensemble strictement ordonné est un couple P = $(E, \mathcal{R})$ où E est un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ est un ordre strict.

L'ordre strict $\mathcal{R}$ est dit strictement total s'il est tel que $x \neq y$ et $(x, y) \in \bar{\mathcal{R}}$ impliquent $(y, x) \in \mathcal{R}$**.** On dit alors que P est un ensemble strictement totalement ordonné.

Définition 8 : (Chaîne). Une chaîne est un ensemble totalement ordonné, les symboles C_n et $\underline{n}$ désigneront une chaîne à n éléments.

Exemple : $(\mathbb{N}, \leq)$ est une chaîne.

Définition 9 : (Antichaîne). On appelle antichaîne tous ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables. Le symbole A_n désignera une antichaîne à n éléments.

Décomposition en chaînes et antichaînes d'un ensemble ordonné :

Soit $P = (E, \leq)$, un élément a de P est dit minimal s'il n'existe pas de $b \in P$ avec $b \neq a$ et $b < a$. un élément maximal se défini dualement.

Exemple : Soient $E = \{a, b, c\}$ et

$\mathcal{R}$ une relation d'ordre.

$\mathcal{R}$	a	b	c
a	*1*	*0*	*1*
b	*0*	*1*	*1*
c	*0*	*0*	*1*

c est un élément maximale.

a et b deux éléments minimaux.

III .2.4 Ordre produit :

Soit $(E_i, \leq)_{i \in I}$ une famille d'ensembles ordonnés non vides avec I non vide, sur l'ensemble produit $E = \prod_{i \in I} E_i$, on définit une relation d'ordre en convenant, si $x \in E$ et $y \in E$, $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$, que $x \preccurlyeq y$ si et seulement si $(\forall\ i \in I)\ x_i \leq y_i$.

La relation d'ordre ainsi obtenue s'appelle ordre produit des ordres des E_i, et $(E, \preccurlyeq)$ est appelé l'ensemble ordonné produit des $(E_i, \leq)$. Même si les $(E_i, \leq)$ sont totalement ordonnés, l'ordre $\preccurlyeq$ n'est en générale que partiel. L'ordre défini dans l'exemple suivant est le cas particulier où tous les E_i sont égaux.

Exemple : Soit A un ensemble non vide, (B, $\leq$) un ensemble non vide ordonné, et $E = \mathcal{F}$ (A, B). Si $f \in E$ et $g \in E$, convenons que : $f \preccurlyeq g$ ssi on a :

$$(\forall x)\ (x \in \text{A}) \Rightarrow f(x) \leq g(x).$$

Alors $f \preccurlyeq g$ est une relation d'ordre sur E, mais même si l'ordre $\leq$ est total, en général l'ordre $\preccurlyeq$ n'est que partiel.

III .2.5 Ordre lexicographique :

Soit $(E_i, \leq)_{i \in I}$ une famille d'ensembles totalement ordonnés non vides, et supposons l'ensemble I bien ordonné par une relation d'ordre $\mathcal{R}$, considèrent, sur l'ensemble produit $E = \prod_{i \in I} E_i$, la relation $\preccurlyeq$ ainsi définie : pour $x \in E, y \in E, x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$, si $x = y$ alors $x \preccurlyeq y$, si $x \neq y$, soit i_0 le plus petit des $i \in I$ tels que $x_i \neq y_i$ pour l'ordre $\mathcal{R}$ (qui existe, puisque $\mathcal{R}$ est un bon ordre et que l'ensemble $\{ i \in I \mid x_i \neq y_i\}$ est non vide, alors $x \preccurlyeq y$ si et seulement si $x_{i_0} \leq y_{i_0}$.

On constate immédiatement que la relation $x \preccurlyeq y$ sur E est une relation d'ordre total : par définition, cet ordre est le produit lexicographique (des ordres des E_i relatifs à l'ordre $\mathcal{R}$ de I), et l'ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ est le produit lexicographique des ensembles ordonnés $(E_i, \leq)$ selon l'ordre $\mathcal{R}$ de I.

III .2.6 Relation de couverture :

Définition 10 : Une relation de couverture d'un ensemble ordonné $\mathrm{P} = (E, \leq)$ notée $<_{\mathrm{P}}$ ou simplement $<$, est définie par $x < y$, si ($x \leq y$ et $x \leq z \leq y \Rightarrow x = z$). On dit alors que x est couvert par y, ou que y couvre x. On pose $x\mathrm{P}^{+} = \{t \in \mathrm{P} \mid x < t\}$ et $x\mathrm{P}^{-1} = \{t \in \mathrm{P} \mid t < x\}$.

Le graphe Couv(P) $= (E, <)$ associé à la relation de couverture s'appelle le graphe de couverture de P.

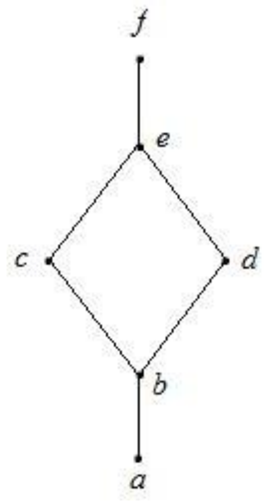
Exemple : Soient $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.

$\mathcal{R}$	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	0	1	1	1	1	1
c	0	0	1	0	1	1
d	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	0	1	1
f	0	0	0	0	0	1

La relation de couverture associée à $\mathcal{R}$ est :

$<_{\mathcal{R}} = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e), (e, f)\}$

$<_{\mathcal{R}}$	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	0	0
b	0	0	1	1	0	0
c	0	0	0	0	1	0
d	0	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	0	1
f	0	0	0	0	0	0



III .2.7 Diagramme d'un ensemble ordonné :

Définition 11 : Le diagramme (ou diagramme de Hasse) d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est une représentation de son graphe de couverture dans laquelle les éléments x de P sont représentés par des points $p(x)$ du plan, de telle sorte que les deux règles suivantes soient respectées :

1. Si $x < y$, (l'horizontale passant par) $p(x)$ est au-dessous de (l'horizontale passant par) $p(y)$,
2. $p(x)$ et $p(y)$ sont joints par un segment de droite si et seulement si $x \prec y$.

Evidemment, il existe une infinité de diagrammes possibles du même ensemble ordonné (cependant nous parlerons généralement, comme dans la définition ci-dessus, «du» diagramme d'un ensemble ordonné P au lieu de préciser « l'un des diagrammes » de P). Le choix de la position des points permet d'obtenir certains diagrammes d'un ensemble ordonné plus « lisibles » que d'autres. La figure1 représente deux diagrammes possibles pour l'ensemble ordonné de l'exemple précédent (Graphes associés à un ensemble ordonné), et la figure*2* donne des diagrammes de la chaîne C_4, de l'antichaîne A_4 et du « cube » B_3 (la lettre « B » signifiant «booléen »).

Dans la suite, les figures représentant un ensemble ordonné seront toujours celles d'un diagramme d'icelui. On remarquera que, puisque le diagramme d'un ensemble ordonné ne représente pas les couples de réflexivité, il peut tout aussi bien représenter l'ensemble strictement ordonné correspondant.

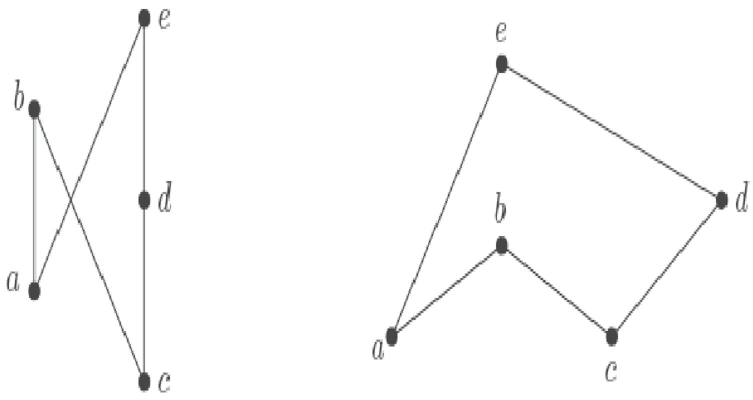


FIG. 1 Deux diagrammes de l'ensemble ordonné de l'exemple précédente (Graphes associés à un ensemble ordonné)

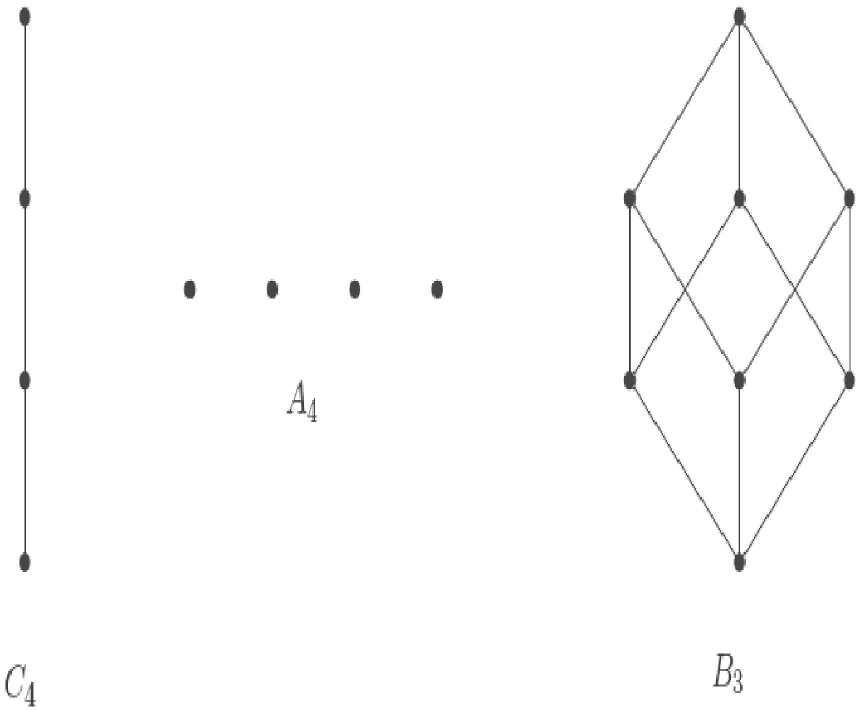


FIG. 2 Les diagrammes de la chaîne C_4, de l'antichaîne A_4 et du cube B_3.

Définition 12 : (Isomorphisme). Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ sont dits isomorphes (ou de même type) s'il existe une bijection f de X sur Y vérifiant :

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y)$$

La bijection f est appelée un isomorphisme (d'ordre) entre P et Q et on écrit $P \equiv Q$ (dans le cas où $P = Q$, on dit que f est un automorphisme de P).

Définition 13 : (Anti-isomorphisme). Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ sont dits anti-isomorphes (ou duaux) s'il existe une bijection f de X sur Y vérifiant, pour tous $x, y \in X$:

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \geq_Q f(y)$$

La bijection f est appelée un anti-isomorphisme (d'ordre) entre P et Q et on écrit $P \equiv_d Q$.

Un cas particulièrement intéressant d'anti-isomorphisme est obtenu en considérant l'ensemble ordonné $P^d = (X, \leq^d)$ dual d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ et défini par :

$$x \leq^d y \Leftrightarrow y \leq x$$

III .2.8 Graphes associés à un ensemble ordonné :

A un ensemble ordonné sont naturellement associés différents graphes, telles notamment les graphes de comparabilité, d'incomparabilité, de couverture et de voisinage. Chacun de ces graphes correspond à des aspects particuliers de l'ensemble ordonné et intervient dans l'étude de celui-ci. Nous définissons et illustrons ci-dessous ces graphes.

Définition 14 : Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné. On appelle graphe de comparabilité de P le graphe non orienté $\mathrm{Comp}(P) = (X, \mathrm{Comp}_P)$ dont les sommets sont les éléments de P, et les arêtes les paires $\{x, y\}$ d'éléments comparables dans P. Si $\{x, y\}$ est une arête de ce graphe, on note $xy \in \mathrm{Comp}_P$ ou $x\mathrm{Comp}_P\, y$ (ou, plus simplement, $xy \in \mathrm{Comp}$ ou $x\mathrm{Comp}y$), et Comp_P est appelée la relation de comparabilité de P.

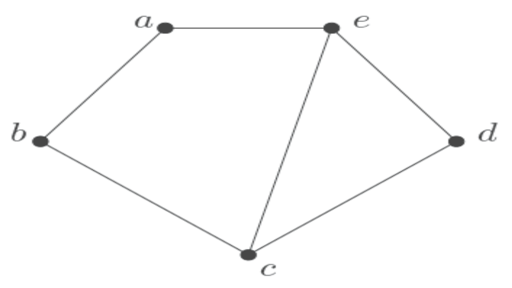
Le graphe $\mathrm{Inc}(P) = (X, \mathrm{Inc}_P)$ d'incomparabilité de P est défini de manière semblable, ses arêtes étant les paires $\{x, y\}$ d'éléments incomparables dans P. On note alors $xy \in \mathrm{Inc}_P$ ou $x\mathrm{Inc}_P\, y$ (ou, plus simplement, $xy \in \mathrm{Inc}$ ou $x\mathrm{Inc}y$) et Inc_P est appelée la relation d'incomparabilité de P.

Les graphes Comp(P) et Inc(P) étant évidemment complémentaires (au sens où la paire $\{x, y\}$ est une arête de l'un si et seulement si elle n'est pas une arête de l'autre), l'étude de l'un se ramène à celle de l'autre.

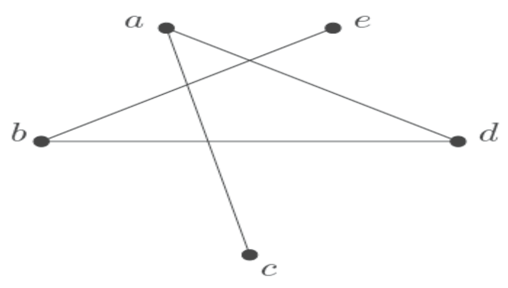
Exemple : Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, \leq)$ l'ensemble ordonné où $\leq$ est l'ordre suivant sur X :

$$\leq\; = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$$

Les graphes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné est :



$Comp(P)$



$Inc(P)$

III .2.9 Sous-ensembles ordonnés :

Définition 15 : Soient $\mathrm{P} = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie de X. La restriction de l'ordre $\leq$ à la partie Y est un ordre, noté $\leq_Y$ et appelé un sous-ordre de $\leq$. On dit alors que $\mathrm{Q} = (Y, \leq_Y)$ est un sous-ensemble ordonné de P, noté $\mathrm{Q} \sqsubseteq \mathrm{P}$.

Si, de plus, $x \prec y$ dans Q implique $x \prec y$ dans P, On dit que Q est un sous-ensemble ordonné couvrant de P.

III.3 Intervalles :

Soient $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, a, b des éléments de E tels que $a \leq b$. On appelle intervalle fermé $[a, b]$ l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $a \leq x \leq b$.

Soient a et b des éléments de E tels que $a \leq b$. On appelle intervalle ouvert $]a, b[$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $a < x < b$.

On définit de même les intervalles semi-ouverts

$$]a, b] = \{x \in E : a < x \leq b\}$$

et

$$[a, b[= \{x \in E : a \leq x < b\}$$

Par extension, on définit les demi-droites fermées

$$[a, \longrightarrow[= \{x \in E : x \geq a\}$$

$$]\longleftarrow, a] = \{x \in E : x \leq a\}$$

et les demi-droites ouvertes

$$]a, \longrightarrow[= \{x \in E : x > a\}$$

$$]\longleftarrow, a[= \{x \in E : x < a\}$$

pour tout $a \in E$.

Il est claire que si I est un intervalle ou une demi-droite de E, alors pour tout couple (x, y) d'éléments de I, tout élément compris entre x et y appartient encore à I. On vérifie cette propriété en utilisant la transitivité de la relation d'ordre.

Soit E un ensemble totalement ordonné et soit $x \in E$. on appelle prédécesseur $'x$ de x tout élément tel que $]\,'x, x\,[= \emptyset$. On notera que si $'x$ existe, il est unique.

De même le successeur x' de x est un élément tel que $]x', x[= \emptyset$. Si x' existe, il est unique.

III .4 Extension :

Définition 16 : Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux ordres sur un même ensemble X. On dit que $\mathcal{R}'$ est une extension de $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ (en d'autres termes, pour tous $x, y \in X$, $x\, \mathcal{R}\, y$ implique $x\, \mathcal{R}'\, y$). Une extension $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ est dite linéaire si $\mathcal{R}'$ est un ordre total.

Lorsque $\mathcal{R}'$ est une extension (respectivement, extension linéaire) de $\mathcal{R}$, on dira aussi que l'ensemble ordonné $\mathrm{Q} = (X, \mathcal{R}')$ (est une extension (respectivement, extension linéaire) de l'ensemble ordonné $\mathrm{P} = (X, \mathcal{R})$. Par abus de langage, on dira parfois aussi que $\mathcal{R}'$ est une extension de P. Les couples de P sont des couples de l'extension Q, ce que l'on repère par la notation $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}$.

- Etant données deux relations $\mathcal{R}$ et S définies sur le même ensemble c'est-à-dire $\mathcal{R} \subseteq E^2$ et $S \subseteq E^2$. On dit que $\mathcal{R}$ est plus fine que S si $\forall\, (x, y) \in E^2, (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, y) \in S$, et on note $\mathcal{R} \subseteq S$ et on dit que S est plus grossière que $\mathcal{R}$.

Exemple : Soit D l'ensemble des droites d'un plan et soient $\mathcal{R}$ et S deux relations sur D, $x, y \in D$, $x\, \mathcal{R}\, y \Rightarrow x \perp y$, $x\, S\, y \Rightarrow x$ est sécante à y. On a $\mathcal{R} \subset S$, alors $\mathcal{R}$ est plus fine que S, et S est plus grossier que $\mathcal{R}$.

III.5 Préordre :

Définition 17 : Un pré-ordre (ou préordre) est une relation binaire réflexive et transitive. C'est-à-dire, si E est un ensemble, alors $\mathcal{R} \subset E \times E$ est un pré-ordre lorsque :

- $\forall\, x \in E, (x, x) \in \mathcal{R}$ (réflexivité),
- $\forall\, x, y, z \in E, [(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x, z) \in \mathcal{R}]$ (transitivité).

Exemples :

- Les ordres sont les préordres antisymétriques.
- Les relations d'équivalence sont les préordres symétriques.
- Sur les sommets d'un graphe orienté, la relation « être accessible depuis » est un pré-ordre (c'est en fait la fermeture réflexive et transitive du graphe). Si le graphe est sans cycle, cette relation devient un ordre.
- Dans un anneau commutatif, la relation « divise » est une relation de pré-ordre.
- Entre normes sur un même espace vectoriel réel, la relation « est plus fine que » est un préordre.

III .6 Exemples d'usages :

- ***Mathématiques :*** La notation $\leq$ utilisée pour un ordre quelconque est la notation classique de l'ordre sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

  Un autre ordre $\mathbb{N}^*$ joue un rôle important en théorie des nombres, celui de divisibilité entre entiers, noté $|$ et défini par : $a \mid b$ si a divisé b. Tous ensemble d'entiers est un ensemble ordonné pour cet ordre de divisibilité.
- ***Biologie :*** Une partition $\mathbf{P} = \{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties non vide de E, appelées classes, deux à deux disjointes et dont l'union est E. sur l'ensemble P_E des partitions de E, la relation définie par $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$ si toute classe de $\mathbf{P}$ est incluse dans une classe de $\mathbf{P}'$ est un ordre (total pour $|E| < 3$) et l'on dit que « $\mathbf{P}$ est plus fine que $\mathbf{P}'$ ». Cet ordre est appelé ordre de finesse entre partitions. La recherche d'un partitionnement d'un ensemble en classes apparaît dans de multiples domaines, notamment dans des problèmes de discrimination. Par exemple, la reconnaissance de plusieurs souches microbiennes liées à une malade infectieuse (aux voies de contamination de laquelle on s'intéresse) va conduire à l'étude du rattachement de l'agent infectieux trouvé sur chaque malade à l'une de ces souches, d'où un partitionnement de l'ensemble de ces observations. Une nouvelle distinction entre des souches jusque-là identifiées correspondra à une partition plus fine des données.
- ***Sciences sociales :*** On appelle préordre sur X toute relation transitive et réflexive définie sur un ensemble X. si $\mathcal{R}$ est un préordre sur X, la relation O définie sur X par $(x, y) \in O$ si $[(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, x) \notin \mathcal{R}]$ est un ordre strict, et que la relation I sur X définie par $(x, y) \in I$ si $[(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, x) \in \mathcal{R}]$ est une relation d'équivalence. Par définition, les classes du préordre $\mathcal{R}$ sont les classes de l'équivalence I associée. Pour deux classes C et C' de $\mathcal{R}$, on

pose $C \leq_{\mathcal{R}} C'$ s'il existe $x \in C$ et $y \in C'$ tels que $(x, y) \in O$. Le lecteur montrera que $\leq_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes (en montrant d'abord que l'on a $C \leq_{\mathcal{R}} C'$ si et seulement si, pour tout $x \in C$ et tout $y \in C'$, $(x, y) \in O$). L'ordre $\leq_{\mathcal{R}}$ s'appelle l'ordre quotient du préordre $\mathcal{R}$. Lorsque ce préordre est total, l'ordre quotient ordonné totalement ses classes.

La construction d'un ordre quotient à partir d'un préordre est extrêmement fréquente. En particulier, si U est une relation binaire quelconque, on lui associe un préordre $\mathcal{R}$ en posant $x\,\mathcal{R}$ y si : $x = y$ ou s'il existe un chemin de x à y dans U, c'est-à-dire une suite $x_0, x_1, \ldots, x_p$ d'éléments distincts de X tels que $x = x_0, y = x_p$ et $x_0\,U\,x_1, x_1 U\,x_2,$ … , $x_{p-1}\,U\,x_p$. $(X, \mathcal{R})$ est la fermeture réflexo-transitive du graphe orienté G $= (X, U)$. Un couple (x, y) est un arc de cette fermeture si $x = y$ ou s'il existe un chemin de x à y dans G. Les classes du préordre $\mathcal{R}$ s'appellent les classes fortement connexes du graphe G. Ces classes sont donc ordonnées par l'ordre quotient associé. Cette construction est utilisée, par exemple, dans l'étude d'un réseau social modélise par un graphe. Elle permet de décomposer l'ensemble des individus du réseau en un ensemble de classes d'équivalence muni d'une structure ordinale. Si, par exemple, le graphe (X, U) représente une relation de « domination » entre individus, une classe d'équivalence est alors supérieure à une autre si tout individu de cette classe domine – directement (par la relation U) ou indirectement (par la relation $\mathcal{R}$) – tout individu de l'autre classe (la réciproque n'étant jamais vraie).

Discussion :

1. Si $\mathcal{R}$ est une relation qui est à la fois symétrique et antisymétrique, alors $\mathcal{R}$ n'est autre que la relation d'égalité " = ".
   Non. Exemple $E = \{x, y\}$, $\mathcal{R} = \{(x, x)\}$. est à la fois symétrique et antisymétrique, alors que $\mathcal{R} \neq$ " = ".
2. Si $\mathcal{R}$ est une relation qui est à la fois symétrique et transitive, alors $\mathcal{R}$ est une relation déquivalence.
   On a deux cas à discuter :
   i. Dans ce cas Oui. Car si $E = \emptyset$, $\mathcal{R} = \emptyset$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive, donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   ii. Dans ce cas Non. Car si $E \neq \emptyset$, et si
      a. $\mathcal{R} = \emptyset$. Alors $\mathcal{R}$ n'est pas une relation réflexive, car $(x, x) \in \mathcal{R}$.

b. $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Alors $\mathcal{R}$ n'est pas forcement réflexive. Contre exemple $E = \{x, y\}$, $\mathcal{R} = \{(x, x)\}$ est à la fois symétrique et transitive mais elle n'est pas réflexive. car $(y, y) \notin \mathcal{R}$.

3. Si $\mathcal{R}$ est une relation irréflexive, elle peut être à la fois symétrique et transitive.

   On discute les cas suivants :

   i. si $E = \emptyset \Rightarrow \mathcal{R} = \emptyset$. Donc $\mathcal{R}$ est une relation irréflexive, elle est à la fois symétrique et transitive. Dans ce cas la réponse est Oui.

   ii. si $E \neq \emptyset \Rightarrow$ la relation vide ($\mathcal{R} = \emptyset$) est irréflexive, elle est à la fois symétrique et transitive. Dans ce cas la réponse est Oui.

   iii. si $E \neq \emptyset$ et $\mathcal{R} \neq \emptyset$. On a $\mathcal{R}$ est une relation irréflexive et $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Il existe donc au moins $x, y \in E$ avec $x \neq y$ et $(x, y) \in \mathcal{R}$ et donc par symétrie $(y, x) \in \mathcal{R}$. par transitivité $(x, x) \in \mathcal{R}$. Contradiction avec l'irréflexivité de $\mathcal{R}$. Dans ce cas la réponse est Non. Donc en définitive (dans ce cas la réponse est Non) sauf si $\mathcal{R} = \emptyset$.

4. Si $\mathcal{R}$ est une relation irréflexive, elle peut être à la fois antisymétrique et transitive.

   Comme dans la question précédente si $\mathcal{R} = \emptyset$. Dans ce cas la réponse est Oui.

   Si $\mathcal{R} \neq \emptyset$.la relation définie sur $E = \{x, y\}$, $\mathcal{R} = \{(x, y)\}$. $\mathcal{R}$ est une relation irréflexive, elle est à la fois antisymétrique et transitive. Dans ce cas la réponse est Oui.

Chapitre IV : Ensembles ordonnés et treillis

Sommaire

Diverses caractérisations des treillis distributifs sont présentées, plusieurs notions sont introduites dans ce chapitre.

IV Ensembles ordonnés et treillis :

Les notions utilisées dans ce chapitre peuvent être rencontrées dans [*4*, *10*, *13*, *16*].

IV.1 Treillis :

Définition 1 : Un treillis est un ensemble ordonné $(T, \leq)$ tel que toute paire d'éléments $\{x, y\}$, il existe une borne supérieure et une borne inferieur.

Notations :

$$\text{Sup}\{x, y\} = x \vee y$$

$$\text{Inf}\{x, y\} = x \wedge y$$

Exemples :

1. Toute chaîne est un treillis dont le sup est le max et l'inf est le min.
2. $E \neq \emptyset$, $(\text{P}(E), \subset)$ est un treillis dont le sup est la réunion et l'inf est l'intersection.
3. $(\mathbb{N}^*, |)$ est un treillis dont le sup est le *ppcm* et l'inf est le *pgcd*.

Propriétés : Dans un treillis quelconque

1. $x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y$

   $\Leftrightarrow y = x \vee y$

2. idempotence :

$$x \wedge x = x$$

$$x \vee x = x$$

3. commutativité :

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

4. associativité :

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

5. absorption :

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

Théorème : Soit T un ensemble muni des lois internes $\vee$ et $\wedge$ qui sont idempotentes, associatives, commutatives et qui vérifient les lois d'absorption, alors il existe une relation d'ordre et une seule $(\leq)$ sur T, tel que T soit un treillis avec $x \wedge y = \inf\{x, y\}$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$.

Preuve : Si une telle relation d'ordre existe

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = x \wedge y$$

$$x \mathcal{R}' y \Leftrightarrow y = x \vee y$$

(1) L'unicité de la relation $\mathcal{R}$

On montrer que $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ c'est-à-dire on montre que ($x \mathcal{R} y \Rightarrow x \mathcal{R}' y$ et $x \mathcal{R}' y \Rightarrow x \mathcal{R} y$)

$x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (y \wedge x) = y$ (lois d'absorption) $\Rightarrow x \mathcal{R}' y$.

De même $x \mathcal{R}' y \Rightarrow x \mathcal{R} y$, donc $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.

(2) On montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre

i. $x \mathcal{R} x$ car $x = x \wedge x$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

ii. $\left.\begin{matrix} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} x = x \wedge y \\ y = y \wedge x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = x \wedge y \\ y = x \wedge y \end{matrix} \Rightarrow x = y$, donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

iii. $\left.\begin{matrix} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} x = x \wedge y \\ y = y \wedge z \end{matrix} \Rightarrow x \wedge y = (x \wedge y) \wedge (y \wedge z) \Rightarrow x = x \wedge z \Rightarrow x \mathcal{R} z$, donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, on note $(\leq)$.

IV.1.1 Filtres dans un treillis :

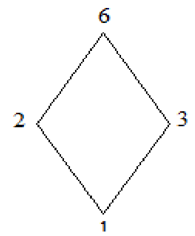
On appelle filtre dans un treillis T toute partie F non vide de $(T, \leq, \wedge, \vee)$ vérifiant

1) $x \in$ F, $x \leq y \Rightarrow y \in$ F,
2) $x \in$ F et $y \in$ F $\Rightarrow x \wedge y \in$ F.

Un filtre est dit propre si F $\neq T$.

Exemple :

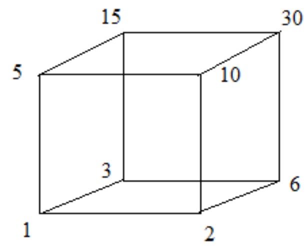
1. D(6) = {$1, 2, 3, 6$}, D(n) désigne l'ensemble des diviseurs de l'entier n.



Les filtres propres de D(6) sont F_1 = {6}, F_2 = {$2, 6$}, F_3 = {3}.

2. D(30) = {$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$}

Les filtres propres de D(30) sont :



F_1 = {$2, 6, 10, 30$}, F_2 = {$3, 6, 15, 30$}, F_3 = {$5, 10, 15, 30$},

F_4= {$6, 30$}, F_5 = {$10, 30$}, F_6 = {$15, 30$}, F_7={30}.

Remarque :

1) {1} est un filtre
2) ∀ F filtre de T, {1} ⊂ F et {1} c'est le plus petit filtre.

- ***Filtre engendré :*** Un filtre engendre par un partie G ≠ Ø est $F_G = \bigcap$ {filtres qui contient G} c'est le plus petit filtre qui contient G.
  1) G = Ø, F_G = {1}
  2) G ≠ Ø

$F_G = \{x \in T \,/\, \exists\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in G \,/\, x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n\}$, on montre que F_G est un filtre

1) $x \in F_G$, $\exists\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in G \,/\, x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ et on a $x \leq y$ alors $y \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow y \in F_G$,
2) on a $x \in F_G$ et $y \in F_G$ alors $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ et $y \geq b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$ avec ($b_1, b_2, \ldots, b_k \in G$), $x \wedge y \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$ donc $x \wedge y \in F_G$, F_G est donc un filtre.

On montre que F_G est le plus petite filtre qui contient G. Soit F un filtre qui contient G, donc on montre que $F_G \subset F$

$x \in F_G \Rightarrow x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ alors $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, on pose $y = a_1, a_2, \ldots, a_n$ alors $x \geq y \Rightarrow x \in F$ (car F est un filtre), donc $F_G \subset F$, alors F_G est le plus petite filtre qui contient G.

- ***Filtre principal :*** C'est un filtre engendré par un singleton a, noté F_a, où

$$F_a = \{x \in T \,/\, x \geq a\} = T \vee a$$

Exemple : Soit $T = D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$,

$F_6 = \{6\}$, $F_2 = \{2, 6\}$, $F_3 = \{3, 6\}$. $F_1 = T$ n'est pas propre.

Théorème : l'ensemble des filtres propres ordonné par inclusion est inductif.

IV.1.2 Idéal dans un treillis : Soit T un treillis fermé, on appel idéal toute partie non vide de T tel que:

1) $x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I$,
2) $x, y \in I$ alors $x \vee y \in I$.

Un idéal est dit propre si $I \neq T$.

IV.2 Treillis distributif :

Définition 2 : Un treillis est dit distributif si chaque loi est distributive à l'autre

(1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
(2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Théorème : Un treillis T est distributif si et seulement si il vérifie l'une quelconque des propriétés suivantes :

1- pour tous $x, y, z \in T$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
2- pour tous $x, y, z \in T$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
3- pour tous $x, y, z \in T$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

Preuve : On doit montrer que dans tout treillis distributif, les propriétés (1) à(3) sont équivalentes.

$(1) \Rightarrow (2)$: supposons (1) vraie et soient $x, y, z \in T$. On a :
$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z]$ (par (1)) $= x \vee [z \wedge (x \vee y)]$ (par absorption et commutativité) $= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)]$ (par (1)) $= [x \vee (z \wedge x)] \vee (z \wedge y)$ (par associativité) $= x \vee (y \wedge z)$ (par absorption et commutativité). L'implication $(2) \Rightarrow (1)$ se montre dualement.

$(2) \Rightarrow (3)$: $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = ([(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee z) \wedge ([(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee x)$

(par (*2*)) $= [(x \wedge y) \vee z] \wedge [(x \vee (y \wedge z)]$ (par absorption et commutativité) $= [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] \wedge [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$ (par (*2*)) $= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ (par associativité et idempotence).

(*3*) $\Rightarrow$ (*1*) : si (*3*) est vraie, on en déduit aisément que T vérifie la propriété suivante (M) de modularité : $\forall\, x, y, z \in T, x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

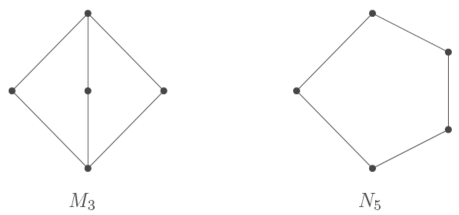
On a aussi, compte tenu de (*3*), $x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] = x \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)]$. En réorganisant le premier membre de cette égalité et en simplifiant le second, on trouve :

$x \wedge ((y \wedge z) \vee [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)]) = x \wedge (y \vee z)$, avec $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leq x$, ce qui permet d'utiliser la commutativité et (M) pour récrire le premier membre :

$([(x \wedge y) \vee (z \wedge x)] \vee (y \wedge z)) \wedge x = [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)] \vee (y \wedge z \wedge x) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. D'où finalement, $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$.

Propriétés :

1-Un treillis est distributif si et seulement si il ne contient pas de sous-treillis de type M_3 ou N_5.



Les treillis M_3 et N_5

2-Un treillis est distributif si et seulement si, pour tous x, y, z, $(x \wedge y = x \wedge z$ et $x \vee y = x \vee z)$ impliquent $y = z$.

Définition 3 : T un treillis fermé s'il possède un plus petit élément (noté *0*) et un plus grand élément (noté*1*).

IV.3 Treillis complémenté :

Définition 4 : Un treillis T est dit complémenté s'il est fermé (avec *0* et *1*),

tel que $\forall\, x \in T, \exists\, x' \in T$

$$x \wedge x' = 0$$

$$x \vee x' = 1$$

x' est dit complément de x.

Théorème : Dans un treillis distributif le complément s'il existe il est unique.

Preuve: Supposons qu'il existe un élément $x \in T$ qui admet deux compléments x' et x'', on a :

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge x' = 0 \\ x \wedge x'' = 0 \end{array}\right| \text{ et } \begin{array}{l} x \vee x' = 1 \\ x \vee x'' = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \wedge x' = x \wedge x'' \\ x \vee x' = x \vee x'' \end{array}\right\} \Rightarrow x' = x''$$

Donc le complément s'il existe est unique.

IV.4 Treillis quotient :

Définition 4 : Une congruence de treillis est une relation d'équivalence $\equiv$ sur T vérifiant la condition suivante : Pour tout $a_1, b_1, a_2, b_2 \in T$ si $a_1 \equiv b_1$ et $a_2 \equiv b_2$ alors

$$a_1 \wedge a_2 \equiv b_1 \wedge b_2$$

$$a_1 \vee a_2 \equiv b_1 \vee b_2$$

Soit $\equiv$, une congruence de treillis sur un treillis T, alors on appelle l'ensemble $T / \equiv = \{[a]$ tel que $a \in T\}$ le treillis quotient de T modulo $\equiv$, où $[a]$ est la classe d'équivalence de a.

Théorème : Soit $\equiv$ une congruence de treillis sur T, alors $T / \equiv$ est un treillis et la surjection canonique $T \longrightarrow T / \equiv$ est un morphisme de treillis.

Démonstration : Posons $\vee$ et $\wedge$ sur $T / \equiv$ de la façon suivante :

Pour $a, b \in T$, on a $[a] \vee [b] \coloneqq [a \vee b]$ et $[a] \wedge [b] \coloneqq [a \wedge b]$.

Vérifions que nos deux opérations sont bien définies. Si $[a_1] = [b_1]$ et $[a_2] = [b_2]$ alors $a_1 \in [b_1]$ et $a_2 \in [b_2]$ Ainsi $a_1 \equiv b_1$ et $a_2 \equiv b_2$ Comme $\equiv$ est une congruence de treillis, on a

$$a_1 \wedge a_2 \equiv b_1 \wedge b_2$$

$$a_1 \vee a_2 \equiv b_1 \vee b_2$$

Ainsi $a_1 \wedge a_2 \in [b_1 \wedge b_2]$.et donc $[a_1 \wedge a_2] = [b_1 \wedge b_2]$ de même pour l'opération union ($\vee$).

D'où $\vee$ et $\wedge$ sont bien défini dans $T / \equiv$. Vérifions maintenant que $(T / \equiv, \vee, \wedge)$ forme un treillis en démontrant que l'union et l'intersection, comme défini ci-haut, vérifient bien les axiomes de treillis (l'idempotence, l'associativité, la commutativité et l'absorption).

1. $[a] \vee [a] = [a \vee a] = [a]$ et $[a] \wedge [a] = [a \wedge a] = [a]$. D'où l'idempotence.

2. $[a] \vee [b] = [a \vee b] = [b \vee a] = [b] \vee [a]$ et $[a] \wedge [b] = [a \wedge b] = [b \wedge a] = [b] \wedge [a]$. D'où la commutativité

3.

$$\begin{aligned}[a] \vee ([b] \vee [c]) &= [a] \vee ([b \vee c]) \\ &= [a \vee [b \vee c]] \\ &= [[a \vee b] \vee c] \\ &= ([a \vee b]) \vee [c]\end{aligned}$$

De même pour l'intersection, d'où l'associativité

4. $[a] \vee ([a] \wedge [b]) = [a] \vee ([a \wedge b]) = [a \vee (a \wedge b)] = [a]$

$[a] \wedge ([a] \vee [b]) = [a] \wedge ([a \vee b]) = [a \wedge (a \vee b)] = [a]$, D'où l'absorption.

Ainsi on a bien que $(T / \equiv, \vee, \wedge)$ est un treillis et $T \longrightarrow T / \equiv$ est un morphisme de treillis.

Annexe

Nombre de Bell :

En mathématiques, le n-ième nombre de Bell (du nom de Eric Temple Bell) est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments distincts ou, ce qui revient au même, le nombre de relations d'équivalence sur un tel ensemble).

Programmes en MATLAB :

1- Programme 01 :

Ce programme en MATLAB qui étudie les relations binaires sur un ensemble E non vide, c.-à-d. (étudie les propriétés suivants (la réflexivité, lé symétrie, l'antisymétrie et la transitivité) et le type de relations binaires (relation d'équivalence et relation d'ordre)).

Explication le programme 01 :

D'abord, faire entrer n (le nombre d'éléments de l'ensemble E), et m le nombre de couples en R (R définit par une liste de couples), et reste ce programme valide, si R définie par une matrice carrée $n \times n$.

Deuxièmement, faire entrer les instructions pour remplire la matrice associé à R.

Troisièmement, faire entrer les instructions du calcul pour l'étude.

Enfin, nous affichons les résultats (propriétés et le type de relation). Et nous essayons ce programme dans les exemples 01 et 02.

2- programme 02 :

Ce programme en MATLAB qui calcule le nombre de relations binaires de types particulier

Explication le programme 02 :

D'abord, faire entrer n (le nombre d'éléments de l'ensemble E).

Deuxièmement, faire entrer les instructions pour les calculs. Et nous essayons ce programme dans l'exemple 03.

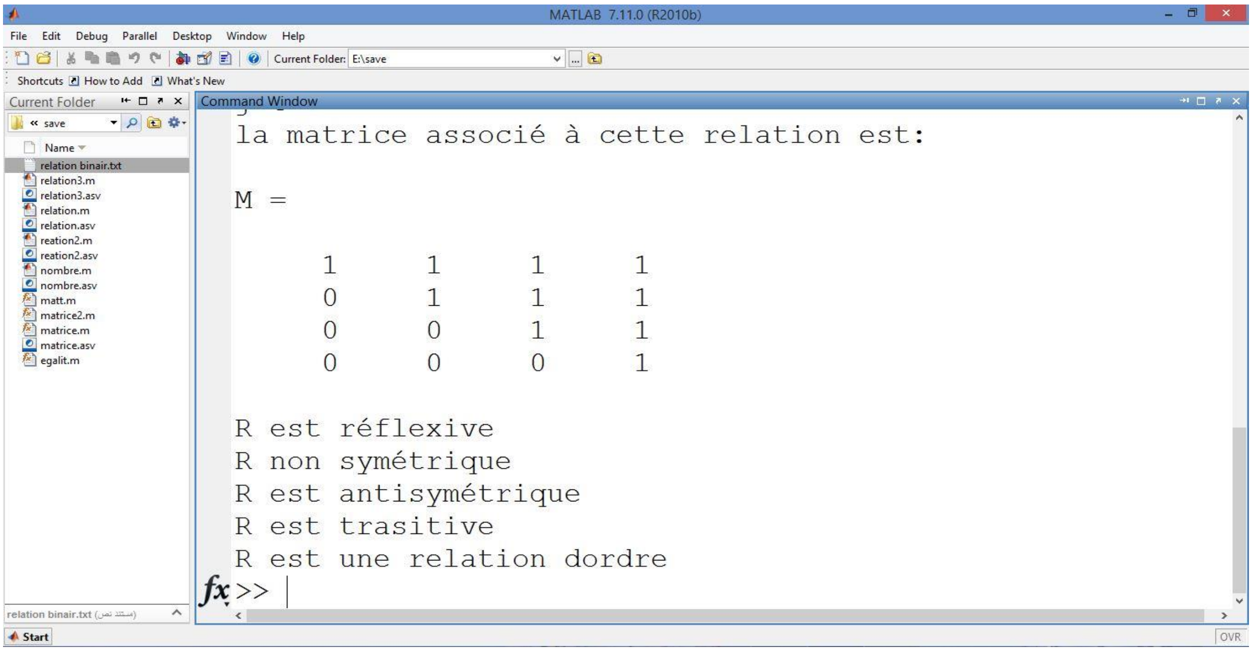
```
%%  programme  01 : Etude des relations binaires.
disp('soit E un ensemble non vide, R une relation
binaire sur E.')
le=date %%date d'exécution.
n=input('n=');%%  n= le nombre des élément  de
lensemble  E.
m=input('m=');%%   m=le  nombre de couples de R.
M=zeros(n);
for i=1:m
   k=input('k=');
   j=input('j=');
   M(k,j)=1;
    end
disp('la matrice  associé à cette relation est:')
M
s=0;sym=0;antisym=0;tr=0;l=0;
for i=1:n
   if M(i,i)==1
       s=s+1;
   end
end
for i=1:n-1
j=i+1;
while  j<=n  && M(i,j)==  M(j,i)
   sym=sym+1;
    j=j+1;
end
end
for i=1:n-1
j=i+1;
while  j<=n  && M(i,j)*  M(j,i)==0
   antisym=antisym+1;
    j=j+1;
end
end
for i=1:n
for j=1:n
   k=1;
while  k<=n  && M(i,j)*  M(j,k)<=  M(i,k)
    tr=tr+1;
    k=k+1;
end
end
end
for i=1:n-1
   l=l+(n-i);
end
if s==n
   disp('R est réflexive')
   ref=1;
else
   disp('R non réflexive')
   ref=0;
end
if sym==l
  disp('R est symétrique')
  sym=1;
else
   disp('R non symétrique')
   sym=0;
end
if antisym==l
  disp('R est antisymétrique')
  antisym=1;

else
   disp('R non antisymétrique')
   antisym=0;
end
if tr==n^3
  disp('R est trasitive')
  tr=1;
else
   disp('R non trasitive')
   tr=0;
end
ord=ref+antisym+tr;equi=ref+sym+tr;
if ord==3
   disp('R est une relation dordre')
end
if equi==3
   disp('R est une relation déquivalence')
end
if ord~=3 && equi~=3
   disp('R est une relation non dordre non
déquivalence')
end
if ord==3 && equi==3
   disp('R est la relation dégalité')
end
```

Exemples 01 :

Soient $E = \{2, 3, 5, 7\}$ avec $|E| = 4$, et $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 5), (5, 7), (7, 7)\}$ est une relation binaire sur E.

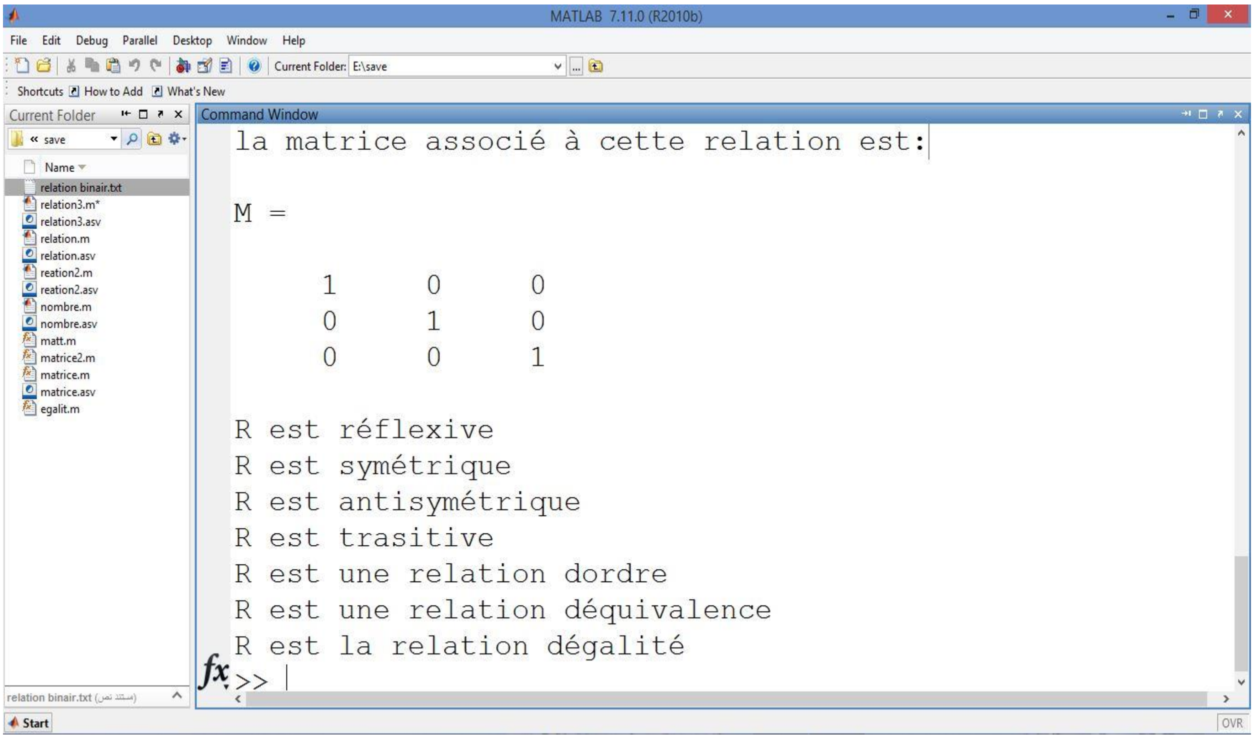
Le nombre de couples est $m = 10$.



Exemples 02 :

Soient $E = \{a, b, c\}$ avec $|E| = 3$, et $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)$ est une relation binaire sur E.

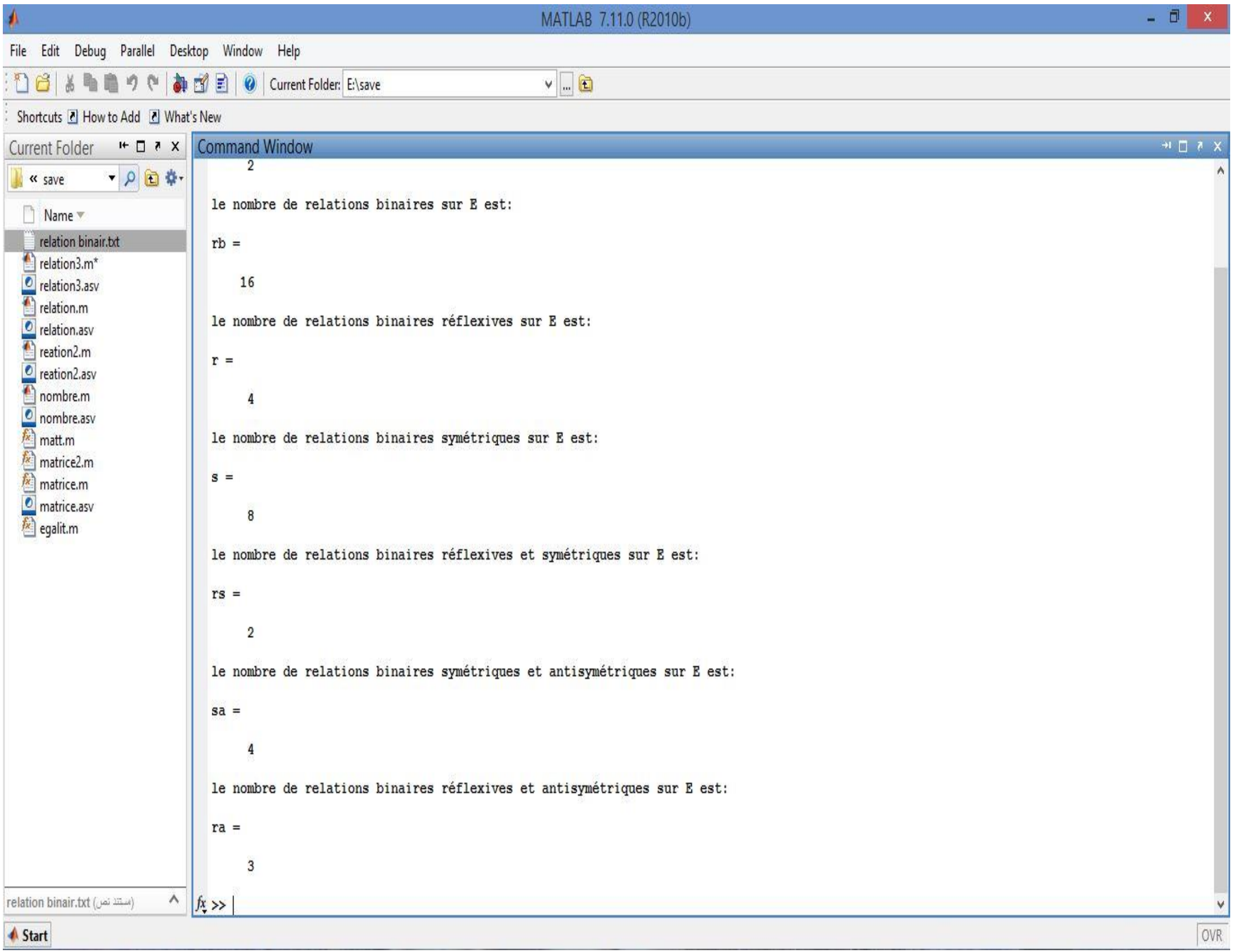
Le nombre de couples est m $= 3$.



```
%% programme 02 : Nombre de relations binaires.
disp('Soit E un ensemble fini à n éléments')
n=input('n=');
rb=2^(n^2);%% rb le nombre de relations binaires sur E.
r=2^(n*(n-1));%% r le nombre de relations binaires réflexives sur E.
s=2^((n*(n+1))/2);%% s le nombre de relations binaires symétriques sur E.
rs=2^((n*(n-1))/2);%% rs le nombre de relations binaires réflexives et symétriques sur E.
sa=2^n;%% sa le nombre de relations binaires symétriques et antisymétriques sur E.
ra=3^((n*(n-1))/2);%% ra le nombre de relations binaires réflexives et antisymétriques sur E.
disp('le nombre de relations binaires sur E est:')
rb
disp('le nombre de relations binaires réflexives sur E est:')
r
disp('le nombre de relations binaires symétriques sur E est:')
s
disp('le nombre de relations binaires réflexives et symétriques sur E est:')
rs
disp('le nombre de relations binaires symétriques et antisymétriques sur E est:')
sa
disp('le nombre de relations binaires réflexives et antisymétriques sur E est:')
ra
```

Exemple 03 :

Soit *E* un ensemble fini à *2* éléments.



Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude des relations binaires.
Dans ce travail, nous avons étudié les relations binaires et rappelé les différentes propriétés de ces relations. On' a également donné les différents aspects de la relation binaire, aspect ensembliste, aspect fonctionnel et aspect logique.
Dans ce travail ont également parlé du treillis ainsi ces sous-ensembles particulier, filtre, filtre engendré et idéal, treillis distributif, treillis quotient.

Bibliographie

[1] B. Monjardet. *Modèles ordinaux de préférences, Centre national de la recherche scientifique, Paris, 2005.*

[2] *Bruno, D. (2002-2003). Cours de licence d'informatique. Saint-Etienne. France.*

[3] *Cours Introduction aux Mathématique Discrètes, S1 Master Mathématiques Discrètes, Université de M'sila (2013-2014).*

[4] *Cours Ordres et treillis, S2 Master Mathématiques Discrètes, Université de M'sila (2013-2014).*

[5] *Cours Théorie des relations, S1 Master Mathématiques Discrètes, Université de M'sila (2013-2014).*

[6] *D. Bouyssou, P. Vincke. Relations binaires et modélisation des préférences, (2003), 6-7.*

[7] *F. Arnault, G. Bailly-Maitre, Y. Benjamin, F. du Bois, L. Ducos, A. Galateau, H. Lombardi, C. Poirier, C. Quitté, M. Romagny, M. Rebout, J. Roques. Mathématiques L3 Algèbre. Prearson Education France, Paris, 2009.*

[8] *J. M. Arnaudiès, H. Fraysse. Cours de mathématiques-1 Algèbre, Dunod université, Paris, 1987.*

[9] *J. Vélu. Méthodes mathématiques pour l'informatique, Dunod, Paris, 2013.*

[10] *Judite, C. (2010). Le treillis cambrian. Mémoire présenté comme exigence partielle de la Maîtrise en Mathématiques, Université du Québec à Montréal. Kanada.*

[11] *K. H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications, Mc Graw-Hill, New York, 2012.*

[12] L. Frécon. *Eléments de mathématiques discrètes,* Presses *Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), Lyon, 14 février 2002.*

[13] *N. Caspard, B, Leclerc, B, Monjardet. Ensembles ordonnés finis: concepts, résultats et usages, Springer-verlag Berlin Heidelberg, New York, 2007.*

[14] *P. Tauvel. Algèbre, Dunod, Paris, 2005.*

[15] *S. Lipschutz, M. L. Lipson. Discrete Mathematics, Mc Graw-Hill, New York, 2007.*

[16] *S. Roman. Lattices and Ordered Sets, Springer, USA, 2008.*

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des relations binaires. On' a vu que la relation binaire peut être vue sous différent angles vision ensembliste, vision fonctionnelle et vision logique.
On a étudié les différentes propriétés d'une relation binaire.
En fin de ce travail on introduit une classe particulièrement importante d'ensemble ordonné c'est les treillis.

Mots-clés : Relation binaire, relation d'équivalence, relation d'ordre, ensemble ordonné, treillis.

ملخص

يخصص هذا العمل لدراسة العلاقات الثنائية. لقد رأينا أن العلاقة الثنائية يمكن أن ترى من زوايا مختلفة. رؤية مجموعاتية، رؤية دالية و رؤية منطقية. كما درسنا خصائص مختلفة للعلاقة الثنائية.
وفي نهاية هذا العمل قدمنا فئة مهمة بشكل خاص من المجموعة المرتبة وهي الشبكات.

الكلمات المفتاحية : علاقة ثنائية، علاقة التكافؤ، علاقة الترتيب، مجموعة مرتبة، شبكة.

Abstract

This work is devoted to the study of binary relations. We have seen that the binary relation can be viewed from different angles. Vision of set, functional vision and logical vision.
We studied the different properties of a binary relation.
At the end of this work we introduce a particularly important class of ordered set is the lattices.

Keywords : Binary relation, equivalence relation, order relation, ordered set, lattice.