جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

UNIVERSITÉ DE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

MEMOIRE

Présentée à la Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de master

<u>Spécialité:</u> Mathématiques

<u>Option:</u> Equation aux Dérivées Partielles et Applications

Par:

Taibi Djihad

<u>Intitulée:</u>

Quelques problème aux limites obliques et non linéaires pour les equations de Laplace et de Lamé dans un domaine de classe C^2

Soutenue publiquement le : 10/05/2015, devant le jury :

Mr. A.Sangouga	**Université de M'sila**	**Président**
Mr. M.Dilmi	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
Mr. A.Merzougui	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Promotion 2014/2015

Table des matières

Introduction

Les problèmes aux limites non linéaires gouvernés par les opérateurs de Laplace et de Lamé font l'objet de recherche, depuis quelques années.

Dans ce travail, nous étudions trois problèmes aux limites obliques gouvernés par l'opérateur de Laplace ou de Lamé. Donc l'objet de cette étude est d'appliquer les téchniques suivantes pour traiter l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ces problèmes (le Laplacien et le système d'élasticité) avec des conditions aux limites non linéaires, en se basant sur la méthode de contraction de *Brézis* [2].

Notre travail est divisé en trois chapitres, voici une esquisse du plan de ce travail :

Le but de premier chapitre est d'introduire les outils mathématiques et nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. La première section, est consacrée aux espaces fonctionnels, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyses fonctionnelles, concernant les espaces de Sobolev. Ensuite, dans la deuxième section nous donnons un rappel sur les opérateurs maximaux monotones.

Dans le second chapitre, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du Laplacien avec des conditions aux limites non linéaires sur la frontière.

Plus précisément, dans ce chapitre on commence par étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & dans\ (\Omega), \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \in \beta(u) & sur\ \ (\Gamma). \end{cases}$$

Puis nous allons étudier un problème avec des conditions aux limites plus généralisées, notament les conditions sur Γ seront remplacées par une condition plus générale de la forme $-\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + P(u) \in \beta(u)$, où P est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients lipschitziens sur Γ.

Pour résoudre ces problèmes on va considérer les problèmes approchés où l'on a remplacé β par l'approchant β_λ est on résolu ces derniers problèmes en s'inspirant d'une méthode de contraction de *Brezis* [2] et par suite une intégration à priori basée sur la formule d'intégration par partie, un passage à la limite donne l'existence d'une solution dans $H^2(\Omega)$.

Enfin dans le dernier chapitre, on étudiera la régularité de la solution d'un problème aux limites non linéaires, gouverné par l'opérateur de *Lamé* (Elasticité) avec des conditions non linéaires sur une partie de la frontière et les conditions de Drichlet sur l'autre partie. On formulera les conditions aux limites en termes d'opérateurs monotones, suivant les même techniques du chapitre 2. Plus précisément ; Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^2, Γ sa frontière, on étudièra le problème suivant :

$$\begin{cases} -\mu\triangle u-(\lambda+\mu)\,\nabla.\operatorname{div} u=f & \text{p.p dans } \Omega \\ u=0 & \text{sur } (\Gamma_1)\,, \\ -\sigma(u)\,v+P(u)\in\beta(u) & \text{sur } (\Gamma_2)\,. \end{cases}$$

Nous approchons notre problème par un problème non linéaire, en se basant sur une linéarisation de ce dernier problème nous allons chercher une estimation à priori sur la solution. Cette formulation des conditions aux limites, avec des graphes maximaux monotones, englobe plusieurs types de conditions issues des problèmes physiques, telles, par exemple, ceux de *Dirichlet, Neumann, Signorini*, une condition aux limites intervenant en élasticité avec frottement dans un problème de climatisation (voir Duvaut-Lions). L'association *Dirichlet-Neumann* par exemple correspond à une plaque fixée sur un côté et libre sur l'autre.

Nous avons prouvé par un calcul explicite l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ces problèmes considérés.

Bibliographie

[1] B. Merouani Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan, *C. R. Acad. Sc*, **304(1)** 1987, 387 - 390.

[2] H. Brezis, Monotonicity methods in H-spaces and some applications to non linear partial differential equations, Academic Press, 1971.

[3] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert North-Holland, Mathematic Studies 1973.

[4] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires, *Dunod- Gauthier-Villars, Paris*, 1969.

[5] J. Nicas, Les méthodes directes en théorie des équations élliptiques, *Masson, Paris,* 1967.

[6] Lions and Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et application, Dunod vol 1-2, 1968.

[7] M.Dilmi and H. Benseridi, Problème de contact sans frottement-Dirichlet pour les équations de Laplace et de Lamé dans un polygone, *Anal. Univ. Oradea, fasc. Math, XIV 2007.*

[8] P. Grisvard, Singularites in boundary value problem, Masson, 1992.

[9] P. Grisvard and G. Looss, problèmes unilatéraux dans des domaines non réguliers, *Journées Equation aux dérivées partielles,* 2004.

[10] Schechter, Principles of functional analysis, Academic Press, 1971.