



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté Des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en sciences

Spécialité

Mathématiques

Option

Analyse numérique et fonctionnelle

Par

GUELLATI ZINEB

Thème

APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS SUR QUELQUES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE

Soutenue le 16/10/2025 devant le jury composé de :

Abdelkrim MERZOUGUI	Prof.	Université de M'sila	Président
Abdelkader GASMI	Prof.	Université de M'sila	Directeur
Aïssa DJERIOU	Prof.	Université de M'sila	Examineur
Abdelkader AMARA	Prof.	Université de Ouargla	Examineur
Abdelkader LAIADI	M.C.A.	Université de Biskra	Examineur
Amar BENKERROUCHE	M.C.A.	Université de Djelfa	Examineur
Tahar BLIZAK	M.C.B.	Université de M'sila	Invité

Dédicace

Ce travail, fruit de tant d'efforts et de persévérance, est dédié avec
une profonde gratitude :

À mes parents, dont l'amour inconditionnel et les sacrifices ont tracé mon chemin. Que leurs âmes reposent en paix.

À mon mari, dont la présence constante, la patience et l'encouragement ont été essentiels à l'accomplissement de ce projet. Merci pour tout.

À mes enfants, qui illuminent chaque jour ma vie et me rappellent l'importance de l'avenir.

À mon frère, avec une affection particulière.

À mes sœurs, pour les liens indéfectibles qui nous unissent.

À ma deuxième famille, à mes collègues de l'Association Sanad, à mes collègues de la mosquée et à tous ceux qui m'ont connue avec amour

Guellati Zineb

Remerciements

Avant tout, je voudrais remercier "**Allah**" tout-Puissant de m'avoir permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse, le Professeur **GASMI Abdelkader** pour sa guidance éclairée, sa disponibilité constante et ses précieux conseils qui ont jalonné ce travail.

Je remercie chaleureusement les membres du jury, le Professeur **Abdelkrim MERZOUGUI**, le Professeur **Aïssa DJERIOU**, le Professeur **Abdelkader Amara**, **Dr. Abdelkader LAIADI**, **Dr. Amar BENKERROUCHE** et **Dr. Tahar BLIZAK** d'avoir accepté d'évaluer ce travail et pour leurs remarques constructives.

Je dois également une profonde gratitude à mon père, le professeur **Guellati Ibrahim** pour son soutien et ses encouragements avant et après son décès. Que Dieu ait son âme.

Je remercie également mon mari, le professeur **Redaoui Mourad** pour son soutien constant tout au long de mon parcours de recherche.

Je remercie mes collègues chercheurs pour leur soutien et l'atmosphère de Travail enrichissante.

Enfin, je souhaite exprimer ma plus profonde gratitude à ma famille et à mes amis pour leur soutien inconditionnel, leur patience et leurs encouragements constants tout au long de ce long parcours. Je remercie sincèrement toutes celles et ceux qui ont rendu possible l'aboutissement de cette recherche Doctorale.

تتناول هذه الأطروحة دراسة نظرية و عددية للتدفقات ثنائية الأبعاد، ثابتة وغير دورانية لسوائل مثالية (غير لزجة وغير قابلة للانضغاط) حول حواجز صلبة.

في الجزء الأول، تم تحليل التدفقات في غياب التوتر السطحي والجاذبية باستخدام طريقة الجسم (hodograph) والحلول التحليلية. كما تم دراسة تأثير كلٍ من التوتر السطحي والجاذبية بشكل منفصل باستخدام طريقة اقتطاع السلسلة. وفي الجزء الثاني قمنا بدراسة تأثير التوتر السطحي باستخدام الطريقة التكاملية-التفاضلية. أخيراً، قمنا بدراسة نظرية باستخدام طريقة الحجوم المنتهية ثم بمقارنة تفصيلية بين النتائج التي تم الحصول عليها.

الكلمات المفتاحية: التدفق الحر، تدفق كموني، رقم فرود، رقم ويبر، طريقة اقتطاع السلسلة، الطريقة التكاملية-التفاضلية التوتر السطحي، الجاذبية

Abstract

This thesis investigates two-dimensional, steady, and irrotational flows of perfect (inviscid and incompressible) fluids past solid boundaries.

In the first part, a simplified model is considered by neglecting the effects of surface tension and gravity. For this case, analytical solutions are developed using the hodograph method. Additionally, numerical approaches based on series truncation methods are explored.

In the second part, the influence of surface tension or gravity is studied, considering these effects separately. For these configurations, a numerical boundary integral equation method is implemented. Finally, we conducted a theoretical study using the finite volume method and a detailed comparison of the results obtained by the different methods is carried out.

Keywords: free surface flow, potential flow, Froude number, Weber number, series truncation methods, integro-differential method, surface tension, gravity.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude d'écoulements bidimensionnels, stationnaires et irrotationnels de fluides parfaits (non visqueux et incompressibles) à travers des parois solides.

Dans un premier temps, nous avons considéré un modèle simplifié en négligeant les effets de la tension superficielle et de la gravité. Pour ce cas, nous avons développé des solutions analytiques à l'aide de la méthode de l'hodographe. Nous avons également exploré des approches numériques basées sur des méthodes de troncature en série.

Dans un second temps, nous avons étudié l'influence de la tension superficielle ou de la gravité, en considérant ces effets séparément. Pour ces configurations, nous avons mis en œuvre une méthode numérique intégro-différentielle. Enfin, nous avons mené une étude théorique en utilisant la méthode des volumes finis et nous avons procédé à une comparaison détaillée des résultats obtenus par les différentes méthodes utilisées.

Mots-clés : écoulement à surface libre, écoulement potentiel, nombre de Froude, nombre de Weber, méthode de troncature en série, méthode intégro-différentielle, tension de surface, gravité.

Liste des Matieres

Liste Des Tableaux :.....	10
Introduction Générale :.....	9
Chapitre I : Notions préliminaires sur la mécanique des fluides et les écoulements a surface libre.	13
I.7. Adimensionnalisation des équations.....	13
Introduction :	14
I.1 Définitions :	14
I.1.2 Trajectoires :	15
I.1.3 Ligne de courant :	15
I.5 Les Conditions initiales et aux limites :.....	21
I.5.1 Conditions initiales :	21
I.5.2 Conditions aux limites :	21
I.6. Théorie potentielle :	22
I.7 Adimensionalisation des équations :	24
I.8 L'utilisation de la variable complexe :	25
Chapitre II : Solution d'un problème d'écoulement a travers des parois solides en ignorant la tension superficielle et la gravité	29
Introduction :	30
II.1 Position du problème :.....	30
II.2 Quelques transformations conformes.....	34
III.1 Traitement numérique de problème avec effet de tension de surface.....	38
Introduction :	39
III.1.1 Formulation du problème :.....	39
III.1.2 Procédure numérique :	41
III.1.3 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités :	42
III.1.4 Formulation de la série :.....	44
III.1.5 Forme de la surface libre :.....	45
III.1.6 Résultats et discussions :.....	46
Conclusion :.....	55

III.2 Traitement numérique de Problème avec les effets de gravité par la méthode de troncature en série.....	56
Introduction :	57
III.2.1 Position de problème :.....	57
III.2.2 L'équation de Bernoulli dans le plan t :	58
III.2.3 Forme de la surface libre :.....	59
III.2.4 Résultats et discussions :.....	60
 Chapitre IV: Résolution numérique d'un Problème d'écoulement a travers des parois solides par la méthode d'équation intégró-différentielle	 66
Introduction :	67
IV .1 Position du problème :	67
IV.2 Approche intégrale :.....	69
IV.3 Procédure numérique :	73
IV.4 La forme de la surface libre :	74
IV.5 Résultas et discussion :	74
 Chapitre V : Application de la méthode des volumes finis	 79
Introduction :	80
V.1 Définitions	81
V.2. Principe général de la méthode des volumes finis :.....	86
V.3 Application a l'équation de Bernoulli :.....	90
 Conclusion générale :.....	 103
 Annexe.....	 105
 Annexe.....	 106
 Bibliographie	 120

Liste des figures

2.1 Plan z	31
2.2 Plan f	32
2.3 Plan Ω	33
2.4 Plan λ	33
2.5 Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et 0	36
3.1 Plan f	40
3.2 Plan t	41
3.3 Solution sans tension de surface pour $\beta = \frac{\pi}{2}$	47
3.4 Solution sans tension de surface pour $\beta = 0$	47
3.5 Comparaison de solutions sans tension de surface pour différentes valeurs de β	48
3.6 Forme de la surface libre pour $\beta = 0$ et $r = 0.009$	50
3.7 Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$	50
3.8 Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{4}$ et $r = 0.01$	51
3.9 Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$ et $r = 0.01$	51
3.10 Forme de la surface libre pour $\beta = \pi$ et $r = 0.01$	52
3.11 Les coefficients $ a_k $ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, $r = 0.01$ et $\alpha = 100$	52
3.12 Forme de la surface libre pour $\beta = 0$ et $Fr = 2, 5, 10, 50$	61
3.13 Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $Fr = 2, 20$	61
3.14 Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{4}$ et $Fr = 2, 10$	62
3.15 Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$ et $Fr = 6, 10$	62
4.1 Le plan f	68
4.2 Le plan complexe $\xi = \eta + i\mu$	69
4.3 Le plan ξ	70

4.4 Solution sans tension de surface pour $\beta = \frac{\pi}{2}$	75
4.5 Forme de surface libre pour $\beta=0$	76
4.6 Forme de surface libre pour $\beta=\frac{\pi}{2}$	76
4.7 Forme de surface libre pour $\beta=\frac{3\pi}{4}$	77
4.8 Forme de surface libre pour $\beta=\frac{\pi}{4}$	77
5.1 Maillages structurés.....	82
5.2 Maillages non structurés.....	83
5.3 Maillages hybrides.....	84
5.4 Types de cellules	85
5.5 Un maillage unidimensionnel.....	86
5.6 Un maillage bidimensionnel.....	87
5.7 Maillages hybrides (Triangulaires)	94
5.8 La fonction de courant.....	95
5.9 Amplitude de la vitesse.....	95
5.10 Contour de pression statique	96
5.11 Contour de la vitesse.....	96
5.12 Contour de la fonction de courant	97
5.13 La pression statique.....	98
5.14 La vitesse.....	98

Liste des symboles

- H : Hauteur du fluide à l'infini.
- \vec{v} : Vecteur de vitesse.
- U : Vitesse à l'infini.
- $\frac{\partial}{\partial t}$ Désigne la dérivée partielle
- $\frac{D}{Dt}$ Désigne la dérivée particulière "matérielle"

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla).$$
- $\overrightarrow{grad} = \vec{\nabla}$ gradient $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}$
- curl \vec{v} : $\overrightarrow{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
- div \vec{v} : $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$
- f : Potentiel de vitesse complexe.
- z : Coordonnée complexe dans le plan physique
- β : Angle d'inclinaison.
- η, μ : Coordonnées complexes de la vitesse complexe ξ .
- θ : Argument de la vitesse complexe ξ .
- ρ : Densité constante du fluide.
- φ : Potentiel de vitesse.
- ψ : Fonction de courant.
- p : Pression.
- p_0 : Pression atmosphérique
- K : Courbure de la surface libre.
- R : Rayon de courbure.
- q : Module de la vitesse.
- u : Composante x de la vitesse vectorielle.
- v : Composante y de la vitesse vectorielle.
- T : Tension superficielle.
- α : Nombre de Weber.
- F : Nombre de Froude.
- C : Degré de contraction.
- g : L'accélération de pesanteur.
- z : L'altitude du point d'étude.

Liste des tableaux :

- Tableau 1: valeurs de l'angle de séparation $\gamma(\gamma \rightarrow \pi)$ pour différentes valeurs de β46
- Tableau2 : quelques valeurs des coefficients et de pour différentes valeurs de β et du nombre de weber α 49
- Tableau3 : La comparaison des coefficients de la série (3.22) par la série $\Sigma\left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour $\beta = 0$ et Pour des valeurs différentes du nombre de weber α54
- Tableau4 : L'angle de séparation γ et le coefficient de contraction C pour différentes valeurs de β et du nombre de weber α55
- Tableau5 : La comparaison des coefficients de la série (3.22) par la série $\Sigma\left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$ et Pour des valeurs différentes du nombre de Froude $Fr=6$63
- Tableau6 : La comparaison des coefficients de la série (3.22) par la série $\Sigma\left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$ et Pour des valeurs différentes du nombre de Froude $Fr=10$64

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale :

L'étude des écoulements à surface libre représente l'un des problèmes les plus intéressants et les plus difficiles de la mécanique des fluides.

Les écoulements à surface libre, avec leur prévalence remarquable dans divers aspects de notre vie quotidienne, attirent l'attention des scientifiques et des chercheurs depuis des siècles, inspirés par les phénomènes naturels et leur polyvalence. Parmi ces écoulements, le 'jetting' se distingue comme l'un des domaines de recherche les plus importants, car il est fortement présent dans de nombreuses applications industrielles et civiles, telles que les chambres de combustion des moteurs, les pompes de propulsion à réaction et la conception de réservoirs et de barrages. C'est cette importance pratique qui a fait de ce type d'écoulement un sujet majeur de nombreuses études approfondies.

Les écoulements à surface libre de type jet sont étudiés par plusieurs auteurs, utilisant différentes méthodes selon le model et les conditions prises en considération. Ce phénomène ne peut pas être étudié analytiquement. Par conséquent, la plupart des études ont porté sur des cas où la gravité et la tension de surface sont négligées pour obtenir une solution exacte apparue dans les travaux de Stokes et Helmholtz , de G. R. Kirchhoff, et de M. Reiner et A.R. Elcrat, L. N. Trefethen [4] et ou bien on a traité les problèmes numériquement dans le cas où les forces de la gravité sont négligées ou les effets de la tension de surface sont négligées ou le cas des deux effets combinés, comme on le trouve dans les travaux de Birkhoff, G et Carter, D. [11] , Dias et Vanden-Broeck [24], Vanden-Broeck [19][20][21] et dans différents problèmes de ce genre ont été étudiés par H.Mekias et A.Gasmi [6] [7] B.Boudrah et A.Gasmi [9] [10] F.Guechi [13][14][15]...etc.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude d'écoulements à surface libre se rejoignant au niveau d'un mur. Nous considérons ces écoulements comme étant potentiels, bidimensionnels et irrotationnels.

Dans un premier temps, en négligeant les effets de la tension superficielle et de la gravité, nous déterminons une solution analytique en utilisant la théorie des lignes de courant, la transformation conforme d'hodographe de Kirchhoff et la transformation de Schwarz-Christoffel. De nombreuses études ont déjà exploré cette approche, notamment celles de W.D. Peng et D.F. Parker [33]

B. Bouderah, A. Gasmi et H. Serguine [9] A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi [8], M. M. Bounif and A .Gasmi, [27], J. M. Chuang [18].

Ensuite, nous introduisons l'effet de la tension superficielle tout en négligeant la gravité. Nous employons la méthode de troncature de série, une technique largement utilisée dans ce domaine par des chercheurs tels que J.Vanden-Broeck [19-24], H. Mekias [6-7-8], B. Boudrah [9,10], A. Gasmi [5-6-7] .

Puis, nous considérons le cas où la gravité ne peut être négligée. Le problème est alors caractérisé par le nombre de Froude. Nous utilisons à nouveau la méthode de troncature de série pour résoudre cet écoulement. Puis, on étudie le même problème posé dans le chapitre précédent en tenant compte de l'effet de la tension de surface, on adopte une méthode numérique basée sur une formulation d'équation integro-différentielle et nous présentons une comparaison entre les résultats trouvés par les deux méthodes et les résultats obtenus par Vanden-Broeck [20], A.Gasmi[6]. Finalement, nous nous proposons d'entreprendre une simulation numérique de problème. Ce travail se compose de cinq chapitres, complété par une conclusion générale et une annexe.

Le chapitre 1 couvre les concepts de base et les propriétés importantes de la mécanique des fluides, telles que la description du mouvement à l'aide des méthodes lagrangiennes et eulériennes. Il passe également en revue la fonction du courant et du potentiel de vitesse, qui sont deux outils essentiels dans notre étude.

Dans le second chapitre, on présente le problème le cas où la gravité et la tension de la surface sont négligées en introduisant la notion des lignes de courant et leurs applications à la résolution du problème.

Dans le troisième chapitre, Nous diviserons ce chapitre en deux parties. Dans la première partie, nous supposons la tension de surface est prise en considération et l'effet de force de gravité est négligé. Le problème non linéaire se caractérise par le nombre de weber α .sa résolution numérique se base sur **la méthode de troncature de série**. L'écoulement sera résolu pour chaque valeur du nombre de weber α et l'angle incliné β . Dans la deuxième partie nous négligerons la tension de surface et la force de gravité ne sont pas négligeables. Dans ce cas, le problème sera caractérisé par le nombre de Froude.

Au chapitre quatre, on applique la méthode **intégro-différentielle** sur le même problème et on cite une comparaison entre les deux résultats trouvés. La solution est obtenue en utilisant une méthode d'intégrale introduite par P. Guayjarernpanishk et J. Asavanant [28] J.Vanden-Broeck [20] A.Laiadi et A. Merzougui [1] F. Guechi, H. Mekias et A. Merzougui [15]

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté les définitions de base permettant de comprendre **la méthode des volumes finis** et ses applications au problème étudié. Nous avons ensuite réalisé des simulations numériques avec **Fluent**.

Enfin, on présente la conclusion générale de notre travail et une annexe pour présenter certains programmes ont été utilisés dans la solution du problème.

CHAPITRE I

**Notions préliminaires sur la mécanique
des fluides et les écoulements à surface
libre**

Chapitre I : Notions préliminaires sur la mécanique des fluides et les écoulements à surface libre.

Résumé :

Dans ce chapitre, on modélise le mouvement d'un fluide par un système d'équation à partir de principe de conservation, et on présente des notions, des définitions et des propriétés sur les écoulements potentiel et bidimensionnels nécessaire à la compréhension de tous nos travaux.

Contenu :

Introduction

I.1. Définitions

I.2. La description du mouvement

I.3. Types des écoulements

I.4. Les équations de base pour l'écoulement à surface libre

I.5. Les conditions initiales et aux limites

I.6. Théorie potentielle

I.7. Adimensionnalisation des équations

I.8. L'utilisation de la variable complexe

Introduction :

Les **écoulements à surface libre** sont des phénomènes omniprésents dans notre environnement, depuis les petits ruisseaux jusqu'aux océans. Ils se caractérisent par une surface supérieure en contact direct avec l'atmosphère, libre de se déformer sous l'effet des forces extérieures. L'étude de ces écoulements est fondamentale pour comprendre les processus naturels tels que l'érosion, le transport des sédiments, ou encore les phénomènes météorologiques.

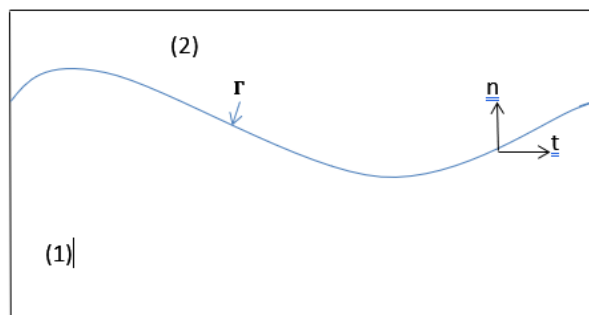
Pour décrire mathématiquement ces écoulements complexes, les scientifiques utilisent des **outils mathématiques** permettant de caractériser les propriétés des fluides en chaque point de l'espace et à chaque instant. Ces propriétés incluent la vitesse, la pression, la densité et la température. Deux approches principales coexistent : la **description lagrangienne**, qui suit individuellement le mouvement de chaque particule de fluide, et la **description eulérienne**, qui se concentre sur les variations des propriétés du fluide en des points fixes de l'espace.

Les **lois de conservation** de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie constituent le fondement de la mécanique des fluides. Ces lois exprimées sous forme d'équations différentielles, permettent de modéliser une grande variété de phénomènes, allant des écoulements laminaires aux écoulements turbulents.

Dans ce chapitre, nous explorerons en détail les concepts fondamentaux de la mécanique des fluides à surface libre.

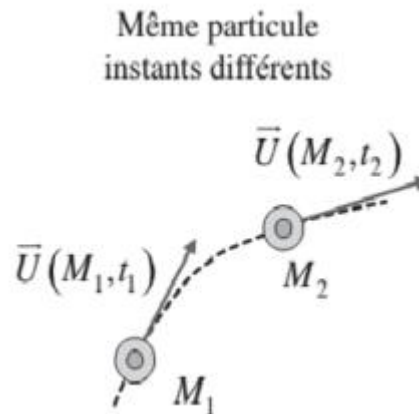
I.1 Définitions :

I.1.1 Surface libre : Une **surface libre** est une interface Γ entre deux milieux (1) et (2) telle que le milieu (2) n'ait aucune influence sur le milieu (1). C'est-à-dire, la densité ρ et la viscosité η du milieu (2) doivent être négligeables par rapport à celles du milieu (1). Le milieu (2) peut être considéré comme du vide



I.1.2 Trajectoires :

Une **trajectoire** en mécanique des fluides représente le chemin réel parcouru par une particule de fluide au cours du temps. C'est une courbe qui relie toutes les positions successives occupées par cette particule.

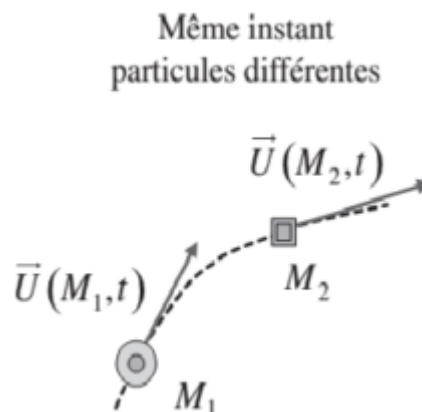


I.1.3 Ligne de courant :

Une **ligne de courant** est une courbe tracée dans un écoulement de fluide à un instant donné. Elle possède une propriété fondamentale : en chaque point, sa tangente est parallèle au vecteur vitesse du fluide à cet endroit. En d'autres termes, une ligne de courant indique la direction instantanée dans laquelle se déplace une particule de fluide.

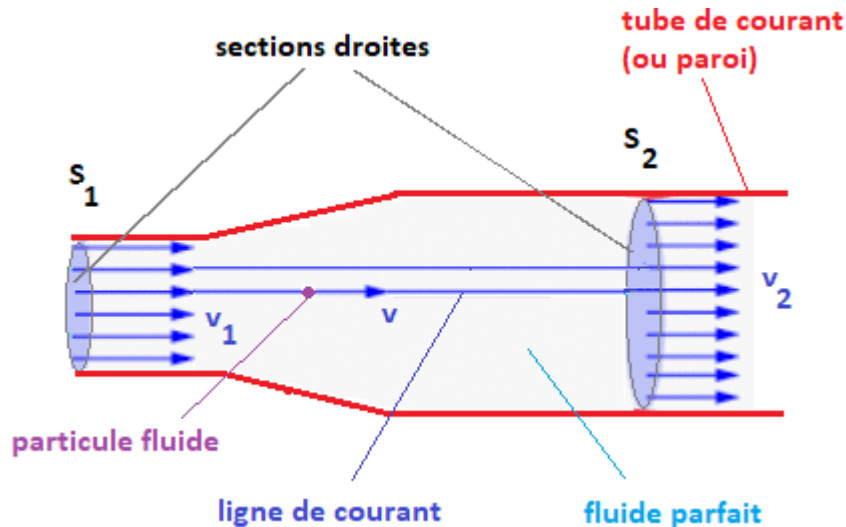
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (1.1)$$

u et v sont les composantes du vecteur vitesse \vec{v}



I.1.4 Tube de courant

On appelle **tube de courant** l'ensemble des lignes de courant qui entourent à trajet d'écoulement.



I.1.5 Fluide parfait :

Un **fluide parfait** est un fluide sans viscosité et incompressible, c'est-à-dire que sa densité reste constante.

Pour un fluide parfait, le bilan énergétique est constant en tout point : c'est la loi de Bernoulli qui peut être exprimée ainsi :

$$\text{Energie potentielle} + \text{Energie cinétique} + \text{pression} = \text{Constante}$$

I.1.6 Tension de surface :

La **tension superficielle** est une force qui existe au niveau de toute interface entre deux milieux différents. La tension de surface peut être exprimé par la différence de pression entre les deux faces de la surface libre et elle est lié avec la courbure dont l'équation est donnée par la relation :

$$p - p_0 = \kappa T .$$

Où κ la tension de surface et κ est la courbure moyenne de la surface, c'est-à-dire la somme des deux courbures principales

$$\kappa = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$

I.2 La description du mouvement :

La mécanique des fluides offre deux principales façons de décrire le mouvement d'un fluide : la description lagrangienne et la description eulérienne. Ces deux approches sont complémentaires et chacune présente des avantages et des inconvénients en fonction du problème étudié.

I.2.1 La méthode eulérienne (description par le champ de vitesses) :

Dans la description eulérienne, on s'intéresse aux propriétés du fluide en chaque point fixe de l'espace et à chaque instant. On ne suit pas individuellement les particules, mais on décrit les variations des propriétés du fluide (vitesse, pression, densité, etc.) en fonction du temps et de la position.

C'est comme si on installait des anémomètres à différents endroits pour mesurer la vitesse du vent en ces points. On ne s'intéresse pas à la trajectoire d'une particule d'air en particulier, mais à la vitesse du vent en chaque point.

Cette description est plus pratique pour étudier les écoulements stationnaires ou les écoulements turbulents, où il est difficile de suivre individuellement les particules. Elle ne permet pas d'accéder directement aux trajectoires individuelles des particules.

Si on note \vec{r} le vecteur permettant de définir le position dans R du point considéré M à l'instant t_1 on détermine en M une particule p_1 et à l'instant t_2 on détermine au même point M une autre particule p_2 .

Les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t) \\ v_y = v_y(x, y, z, t) \\ v_z = v_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

I.2.2 La méthode lagrangienne (description par les trajectoires) :

Dans la description lagrangienne, on suit individuellement chaque particule de fluide au cours du temps. On s'intéresse à l'évolution de certaines propriétés de cette particule (position, vitesse, etc.) en fonction du temps.

C'est comme si on suivait un ballon gonflé à l'hélium qui dérive dans le vent. On s'intéresse à la trajectoire précise de ce ballon au fil du temps.

Cette description est particulièrement utile pour étudier le comportement individuel des particules de fluide, par exemple pour suivre la dispersion d'un polluant dans un écoulement.

Pour un fluide continu, le nombre de particules étant infini, il est impossible de suivre individuellement chaque particule.

Donc on écrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées (l'identité d'une particule est donnée par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t).

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{v}(M_0, t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(M_0, t) \quad \vec{v} : \text{La vitesse de la particule.}$$

\vec{r} : Le vecteur position de coordonnées x_i .

Le choix entre la description lagrangienne et la description eulérienne dépend du problème étudié et des informations que l'on cherche à obtenir. Souvent, les deux descriptions sont utilisées de manière complémentaire pour une meilleure compréhension des phénomènes physiques.

I.3.Types des écoulements :

I.3.1 Ecoulement irrotationnel :

Un écoulement irrotationnel est un type d'écoulement où les particules fluides ne subissent pas de rotation nette autour de leur propre axe. En d'autres termes, le rotationnel du champ de vitesse est nul en tout point du fluide, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{rot}\vec{v} = 0 .$$

I.3.2 Ecoulement incompressible :

Un écoulement incompressible est un type d'écoulement de fluide où la masse volumique du fluide est considérée comme constante au cours du temps et en tout point de l'espace. En d'autres termes, le volume d'une parcelle de fluide ne varie pas lorsqu'elle se déplace au sein de l'écoulement.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

I. 3.3 Écoulement potentiel bidimensionnel :

Un écoulement potentiel est un type particulier d'écoulement où le champ de vitesse dérive d'un potentiel scalaire.

Cette hypothèse simplifie considérablement l'analyse et permet d'utiliser les outils de l'analyse complexe pour résoudre de nombreux problèmes en mécanique des fluides.

Il existe une fonction scalaire ϕ telle que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \vec{v} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j}$$

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, le mouvement du fluide est confiné dans un plan, ce qui réduit le nombre de variables spatiales à deux.

Si l'écoulement est bidimensionnel l'équation du potentiel de vitesse se réduit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

I.3.4 Écoulement stationnaire (permanent) :

Un écoulement stationnaire est un écoulement où les propriétés du fluide en un point donné ne varient pas dans le temps.

$$\left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} = 0.$$

I.4. Les équations de base pour l'écoulement à surface libre :

Les lois fondamentales que nous allons appliquer sont les trois lois de conservation (conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie).

Les lois de conservation sont essentielles pour comprendre le comportement des fluides en mouvement. Ces lois énoncent que la quantité totale de chaque grandeur physique conservée reste constante dans un système fermé. Elles constituent la base mathématique des équations de Navier-Stokes et sont fondamentales pour l'analyse des écoulements en surface libre autour d'une paroi rigide.

I.4.1 L'équation de conservation de la masse (l'équation de continuité) :

L'équation de conservation de la masse est donnée par la relation suivante :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0.$$

Tel que ρ désigne la densité du fluide et \vec{v} le champ des vecteurs vitesses exprimées en variables eulériennes.

Si le fluide est incompressible :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Alors l'équation se simplifie et on trouve :

$$\rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0.$$

I.4.2 La conservation de la quantité de mouvement :

On applique la loi fondamentale de la dynamique ou la deuxième loi de Newton à la particule en mouvement " la somme des \vec{F} forces appliquées sur un particule de masse m et de vitesse \vec{v} est égale à dérivée de quantité de mouvement de cette particule.

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

Pour un élément de volume dV on a :

$$d\vec{F} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{v}dV)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_V (\rho\vec{v}dV).$$

Pour un fluide parfait (non visqueux), l'équation fondamentale de la dynamique se réduit à l'équation d'**Euler**.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}.$$

Pour plus de commodité. Nous rappelons que l'accélération des particules est:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}.$$

Sachant que :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}u.$$

Et $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}.$

Et puisque la $\text{rot } \vec{v} = 0$ " l'écoulement irrotationnel " et notons $|\vec{v}| = v$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0.$$

Dans le cas d'un écoulement permanent (stationnaire) (\vec{v} reste constante dans le temps en tout point de l'espace occupé par le fluide) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

On obtient : $\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0.$

Finalement, on trouve :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cte.$$

C'est l'équation de **Bernoulli** qui est une condition aux limites imposée sur une frontière inconnue.

I.5 Les conditions initiales et aux limites :

I.5.1 Conditions initiales :

Les conditions initiales décrivent l'état du système à un instant donné, au début de la simulation numérique ou de l'étude analytique. Pour un écoulement à surface libre, elles peuvent inclure :

- La hauteur de la surface libre en chaque point du domaine à $t = 0$.
- La vitesse du fluide en chaque point du domaine à $t = 0$.
- La pression à l'intérieur du fluide et à l'interface libre à $t = 0$.

I.5.2 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites spécifient le comportement du fluide aux frontières du domaine d'étude. Pour les écoulements à surface libre, on distingue différents types de conditions aux limites :

- **Condition cinématique** : La vitesse normale de la surface libre est égale à la vitesse verticale du fluide à l'interface. L'interface est une surface matérielle, c'est à- dire que si elle est définie par une équation du type

$$F(x, z, t) = 0.$$

La dérivée matérielle de F doit être nulle, donc :

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \nabla F = 0.$$

- **Condition dynamique** : La pression à l'interface libre est égale à la pression atmosphérique (ou à une autre pression imposée).

Condition sur les contraintes normales: il s'agit d'une généralisation de la loi de Laplace citée précédemment.

I.6. Théorie potentielle :

Dans de nombreuses applications, le fluide est supposé non visqueux. De plus, si l'écoulement est irrotationnel, la théorie potentielle s'applique. Il existe donc un potentiel φ tel que : $u = \nabla\varphi$.

L'équation de la continuité devient alors : $\Delta\varphi = 0$.

On suppose aussi que les forces sont conservatives et dérivent d'un potentiel φ . Alors d'après le deuxième théorème de Bernoulli, l'écoulement est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + U + \psi = c(t).$$

$\psi = \frac{\sigma}{\rho}k$: représente le terme de tension de surface (souvent négligé).

Dans le cas où le fluide n'est soumis qu'à la gravité, $U = gz$.

En deux dimensions, la surface libre est représentée par l'équation $z = \eta(x, t)$

Les conditions de surface libre deviennent alors :

– Condition cinématique : $\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

– Condition dynamique : $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + U + \psi = c(t)$.

I.6.1 Fonction de courant pour deux dimensions d'un fluide incompressible :

Les lignes de courant sont, à chaque instant, tangentes au champ de vitesse. Elles vérifient la relation :

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{\text{ligne de courant}} = \frac{v}{u}.$$

Nous pouvons maintenant développer une définition plus formelle des rationalisations en introduisant fonction de flux ψ . Cela nous permettra de représenter deux entités, les composants de la vitesse $u(x, y)$ et $v(x, y)$ d'un flux incompressible bidimensionnel avec une seule fonction $\psi(x, y, t)$. Il existe différentes façons de définir la fonction de flux. Nous commençons par deux dimensions de l'équation de continuité pour un écoulement incompressible.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

On définit la fonction de courant par : $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$,

donc on obtient : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d^2 \psi}{dx dy} - \frac{d^2 \psi}{dy dx} = 0$.

Nous pouvons obtenir une équation valable uniquement selon une rationalisation

$$u dy - v dx = 0,$$

où : $\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0$.

D'autre part, d'un point de vue strictement mathématique, à tout moment dans le temps t , la variation dans l'espace (x, y)

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0.$$

$\Rightarrow \psi$ est une constante le long de la ligne de courant.

I.6.2 L'équation de Laplace :

Pour un écoulement bidimensionnel irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait et incompressible, nous avons des expressions pour composants de vitesse u et v en termes à la fois de la fonction et du potentiel de vitesse φ .

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{Et } u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

En remplaçant u et v dans la condition :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

I.7 Adimensionalisation des équations :

L'adimensionalisation est un processus mathématique qui consiste à transformer des équations ayant des dimensions physiques (comme la longueur, le temps, la masse) en équations où toutes les variables sont sans dimension. Cela revient à exprimer les variables physiques par rapport à une échelle caractéristique du problème.

Pour adimensionaliser les équations, divisons toutes les longueurs par longueur de référence L et toutes les vitesses par une vitesse de référence V_∞ qui habituellement prise comme flux autonome vitesse.

Faisons la pression non dimensionnelle en divisant par ρV_∞^2 , ce qui concerne les quantités non dimensionnelles suivantes :

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{V_\infty}, v^* = \frac{v}{V_\infty} \text{ et } p^* = \frac{p}{\rho V_\infty^2} .$$

Théorème de Vaschy -Buckingham :

Nous pouvons transformer une relation entre n paramètres de la forme

$$G(q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_n) = 0.$$

Dans une relation correspondante entre $n-m$ indépendants sans dimension paramètres sous la forme

$$G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m})=0.$$

Où m est habituellement le nombre minimal, de dimensions indépendantes (par exemple masse, longueur, temps...).

I.8 L'utilisation de la variable complexe :

Au lieu de considérer φ et ψ comme étant des fonctions de x et y , on utilise une nouvelle variable z qui représente la variable complexe : $z = x + iy$.

φ et ψ satisfont à la condition de Cauchy - Riemann, donc on peut introduire une fonction holomorphe $f(z)$ appelée le potentiel complexe de vitesse :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

et

$$\xi(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv.$$

f et ξ sont analytiques donc nous pouvons étudier la théorie des fonctions analytique pour résoudre un problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel.

I.8.1 Transformation conforme :

Si $f(z) = \varphi + i\psi$ est analytique et si $f'(z) \neq 0$ en tous les points d'un ouvert connexe R la transformation $\omega = f(z)$ est conforme en tous les points de R .

Les points pour $f'(z) = 0$ sont appelés les points critiques.

I.8.2 La transformation de Schwarz - Christoffel :

La transformation de Schwarz-Christoffel est la plus connue : elle consiste à associer à un point d'affixe ω l'image Z ; telle que :

$$\frac{\partial \omega}{\partial Z} = A \prod_{k=1}^n (Z - x_k)^{\frac{\alpha_k}{\pi} - 1},$$

avec $x_i \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}$.

La transformation $Z(\omega)$ est conforme sauf aux points x_k où $Z' = 0$. On montre facilement que si dans le plan complexe, une frontière a un point anguleux en x_k d'angle α_k .

Le point anguleux est transformé en point non angulaire. Notons que si dans la transformation $x_k \rightarrow \infty$, alors on omet le facteur $(z - x_k)$ dans la transformation puisqu'il serait associé à l'exposant 0 ; on dit que le polygone est dégénéré en ce point.

I.8.3 La méthode de *Kirchhoff-Helmholtz*

On utilise cette méthode dans les problèmes d'écoulement potentiel, limité par des parois rigides et par des surfaces libres de formes inconnues où la pression est supposée constante.

On introduit la variable complexe :

$$\Omega = \ln U \frac{dz}{df} = \ln \frac{U}{u-iv} = \ln \frac{U}{q} + i\theta, \quad (1.20)$$

Où $u = qe^{i\theta}$ avec $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ la magnitude et θ la direction du champ de vitesse dans le repère $x - y$. Cette nouvelle variable a des propriétés intéressantes :

Concernant la surface libre, la pression y demeure constante et égale à la pression atmosphérique. Par conséquent, en régime permanent, la vitesse est également constante puisque la surface libre coïncide avec une ligne de courant ($q = cte$). Il en découle que la partie réelle de la variable complexe $\Omega(Re(\Omega))$ est constante, et la surface libre se traduit par un segment droit dans le plan Ω .

Pour une paroi solide, la composante normale de la vitesse s'annule, impliquant que la vitesse est parallèle à la surface. L'angle θ devient alors constant, ce qui signifie que la partie imaginaire de $\Omega(Im(\Omega))$ est constante. Ainsi, la paroi est représentée par un segment horizontal dans le plan Ω .

Dans le contexte de notre étude, les contours étudiés sont des lignes de courant. Cette propriété nous permet de caractériser à la fois le champ cinématique et le champ potentiel. L'idée maîtresse de la méthode de Kirchhoff-Helmholtz repose sur la caractérisation distincte de chaque champ dans son espace propre :

Le champ cinématique est analysé dans un espace désigné par f .

Le champ potentiel est étudié dans un espace noté Ω .

I.8.4 Dérivation des fonctions holomorphes

La dérivation des fonctions à variable complexe suit les mêmes règles que les fonctions à variable(s) réelles. On peut également les dériver dans \mathbb{C} et dans \mathbb{R} de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

L'équation de Laplace s'écrit en variables complexes :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 .$$

I.8.5 Formules de Plemelj:

La formule de Cauchy permet aussi de montrer une série de formules dites "formules de Plemelj", qui ont leur utilité en mécanique des fluides dans les calculs de surface libre. On considère un contour fermé Γ avec un point z_0 , qui délimite un domaine L et un domaine R ; on se donne une fonction $\varphi(z)$ sur Γ de telle sorte que $\int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{(z - z_0)} dz$ existe. On définit :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)} d\xi.$$

CHAPITRE II

**Solution d'un problème d'écoulement à
travers des parois solides Ignorer la
tension superficielle et la gravité**

CHAPITRE II : Solution d'un problème d'écoulement à travers des parois solides en ignorant la tension superficielle et la gravité

Résumé :

Ce chapitre vise à étudier l'écoulement bidimensionnel à surface libre à travers des parois solides, en négligeant les effets de la gravité et de la tension superficielle. Pour ce faire, nous utilisons la transformation conforme de Schwarz-Christoffel afin d'obtenir une solution analytique exacte.

Contenu :

Introduction

II.1 Formulation et Position du problème

II.2 Quelques transformations conformes

II.3 La solution de problème

Introduction :

Notre objectif dans ce chapitre est l'étude d'un écoulement bidimensionnel à surface libre à travers des parois solides. Le fluide est supposé non visqueux, incompressible et irrotationnel. Les effets de la gravité et de la tension de surface ne sont pas pris en considération.

La méthode de transformation de Schwarz-Christoffel sera utilisée pour obtenir des solutions analytiques exactes à ces problèmes. Cette technique, bien établie en mécanique des fluides, permet de transformer des domaines complexes du plan physique en des domaines simples du plan complexe, facilitant ainsi la résolution des équations de Laplace.

De nombreux chercheurs ont déjà exploré des problèmes similaires en utilisant cette approche. Par exemple, J. M. Chuang [18], F. Guechi et M. Khermache [14] ont étudié l'écoulement au-dessus d'une infinité de parois rigides, tandis que F. Guechi [13] s'est penchée sur l'écoulement contre une paroi semi-infinie inclinée. B. Bouderah, A. Gasmi et H. Serguine [9] ont analysé l'impact d'un jet sur une plaque verticale.

II.1 Position du problème :

Le fluide supposé non visqueux, incompressible et irrotationnel. L'effet de la gravité et de la Tension de surface ne sont pas prises en considération en raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe $y'o y$, on peut alors étudier le problème sur le demi-plan supérieur.

On prend comme repère de référence la ligne EF sur l'axe $x' o x$, la ligne CO sur l'axe $y'o y$, et la surface libre sur la ligne de courant CD (voir figure 2.1). On suppose que l'écoulement est uniforme lorsque $|y| \rightarrow \infty$ de vitesse U .

Il existe toujours une fonction appelée fonction de courant, notée ψ , telle que :

$$u = \frac{d\psi}{dy} \quad \text{et} \quad v = -\frac{d\psi}{dx}$$

Avec $\vec{u} = (u, v)$ dans un repère cartésien x, y . Si de plus l'écoulement est Irrotationnel, alors sa vorticité est nulle : $\nabla \times \vec{u} = 0$ et donc il existe une fonction dite potentiel de vitesse telle que : $\vec{u} = -\nabla\phi$. Nous nous plaçons aussi en régime permanent de telle sorte que le théorème de Bernoulli soit vérifié le long des lignes de courant $\psi = cte$.

On peut définir un potentiel complexe : $f = \varphi + i \psi$. La dérivée de ce potentiel par rapport à $z = x + i y$ fournit la vitesse complexe : $\frac{df}{dz} = u - i v$.

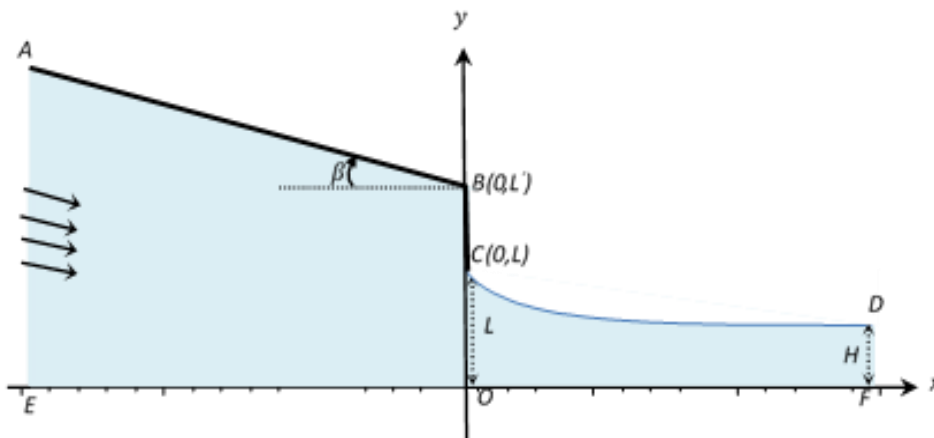


Figure 2.1 : Plan

Le but du problème consiste à déterminer la fonction potentielle de vitesse $\phi(x, y)$ qui vérifie les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi = 0 \text{ dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ sur } BC \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } EF \\ \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \tan \beta \quad \text{sur } AB \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const sur } CD \text{ de forme inconnue} \end{array} \right.$$

Où p et ρ sont la pression et la densité du fluide respectivement.

En suivant la méthode de Kirchhoff-Helmoltz, on introduit la variable complexe :

$$\Omega = \ln u \frac{dz}{df} = \ln \frac{u}{u-iv} = \ln \frac{u}{q} + i\theta$$

Où $u = q e^{i\theta}$ avec $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ la magnitude et θ la direction du champ de vitesse dans le repère $x - y$. Cette nouvelle variable a des propriétés intéressantes :

Pour une surface libre, la constance de la pression (égale à la pression atmosphérique) se traduit par une vitesse constante en régime permanent, puisque la surface libre est une ligne de courant ($q = cte$). Cette condition implique que $Re(\Omega) = cte$, et la surface libre est représentée par un segment droit dans le plan Ω .

Sur une paroi solide, la nullité de la composante normale de la vitesse (vitesse parallèle à la surface) conduit à un angle θ constant, et par conséquent à $Im(\Omega) = cte$. La paroi est alors représentée par un segment horizontal dans le plan Ω .

Dans le contexte d'un jet, où les contours sont des lignes de courant, la méthode de Kirchhoff-Helmholtz propose de caractériser séparément le champ cinématique (dans l'espace f) et le champ potentiel (dans l'espace Ω).

La résolution du problème passe par l'application d'une transformation de Schwarz-Christoffel, qui permet de mapper les polygones des espaces f et Ω sur un même polygone dans un nouvel espace λ . L'objectif suivant est de déterminer les transformations $\lambda(\Omega)$ et $\lambda(f)$ nécessaires. L'étape finale consiste à établir la relation entre ces deux transformations, dans l'espoir d'obtenir une équation différentielle dont la résolution nous fournira la solution du problème.

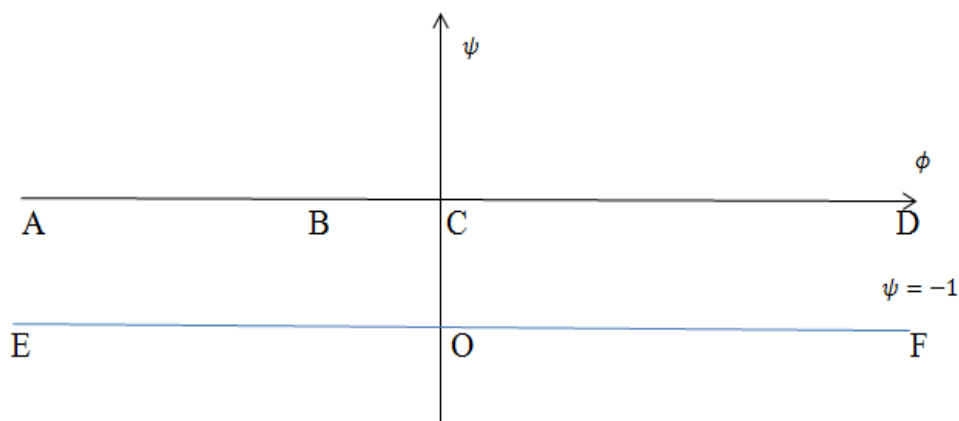


Figure 2.2 : Plan f

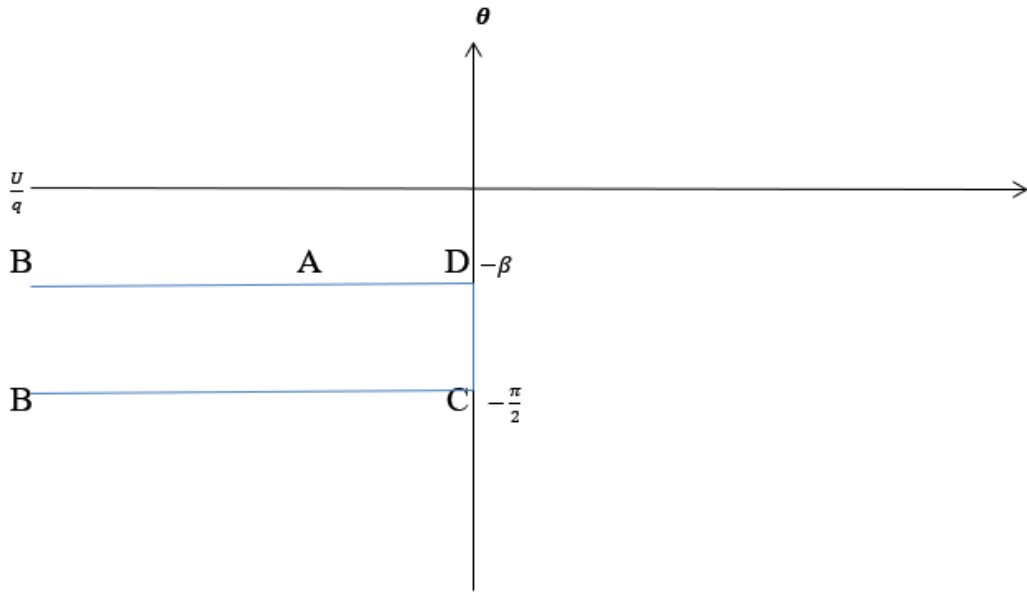


Figure 2.3 : Plan Ω

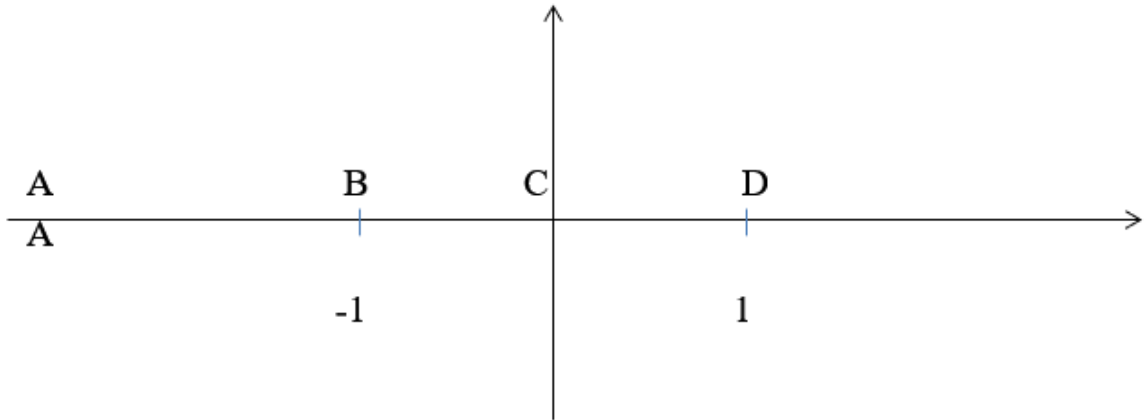


Figure 2.4 : Plan λ

II.2 Quelques transformations conformes

II.2.1 Transformation $\lambda(\Omega)$:

On a : $C(\Omega = -\frac{\pi}{2}i) \longrightarrow C(\lambda=0)$

$$D(\Omega = -\beta i) \longrightarrow D(\lambda=1).$$

Les angles dans le plan Ω entre les nœuds du polygone sont :

$$\alpha_C = \frac{\pi}{2}, \alpha_B = 0, \alpha_D = \frac{\pi}{2}$$

D'où l'on tire : $P_C = \frac{-1}{2}, P_B = -1, P_D = \frac{-1}{2}.$

Nous utilisons la transformation de Schwarz Christoffel, on trouve :

$$\Omega = k \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{2}\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\sqrt{2}\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda-1)}} \right) \right] + \Omega_0.$$

Nous déterminons ensuite les constantes et Ω_0, k :

On remplace le point $C(\Omega = -\frac{\pi}{2}i; \lambda = 0)$

et en substitue le point $D(\Omega = -\beta i; \lambda = 1)$

dans l'équation on obtient : $\Omega_0 = -\beta i$ et $k = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{-(\frac{\pi}{2} + \beta)}{\pi} \right).$

Alors : $\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{-(\frac{\pi}{2} + \beta)}{\pi} \right) \left[\ln \left(\frac{\sqrt{2}\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\sqrt{2}\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda-1)}} \right) \right] - \beta i.$

II.2.2 Transformation $\lambda(f)$:

On a : $C(\psi = 0) \longrightarrow C(\lambda = 0),$

$$D(\psi = \infty) \longrightarrow D(\lambda = 1),$$

$$B(\psi = \phi_b) \longrightarrow B(\lambda = -1),$$

Les angles dans le plan f entre les nœuds du polygone sont :

$$\alpha_C = \pi, \alpha_B = \pi, \alpha_D = 0$$

D'où l'on tire : $P_C = 0, P_B = 0, P_D = -1.$

D'après la relation vue précédemment on a :

$$\frac{df}{d\lambda} = k \frac{1}{\lambda-1} \text{ Donc } f = k \ln(\lambda - 1) + c$$

Pour déterminer les constantes k et c on a :

Si $\lambda = 0 : f = 0$ (point C) et si $\lambda = -1 : f = \phi_b$ (point B).

On obtient :
$$K = \frac{\phi_b}{\ln 2} \text{ et } c = -\pi i \frac{\phi_b}{\ln 2}$$

$$f = \frac{\phi_b}{\ln 2} \ln(\lambda - 1) - \pi i \frac{\phi_b}{\ln 2} = \frac{\phi_b}{\ln 2} \ln(1 - \lambda)$$

II.2.3 Relation $\Omega(f)$ et $f(z)$:

En égalant les deux expressions, on tire : $\frac{dz}{d\lambda} = \frac{\exp(\Omega)}{U} \cdot \frac{df - \phi_b}{d\lambda \ln 2 (\lambda-1)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z - z_0 &= \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda-1} \frac{\left(\frac{\sqrt{2\lambda} + \sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\sqrt{2\lambda} - \sqrt{\lambda(\lambda-1)}} \right)^{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{(\frac{\pi}{2} + \beta)}{\pi} \right)}}{e^{i\beta}} d\lambda && 0 < \lambda < 1 \\ &= \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda-1} \frac{\left(\frac{3\lambda-1+2i\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{\lambda+1} \right)^{\left(-\frac{(\frac{\pi}{2} + \beta)}{\pi} \right)}}{e^{i\beta}} d\lambda = \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda-1} \frac{\exp\left(-\frac{(\frac{\pi}{2} + \beta)}{\pi} \right) \left(\arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda-1} \right)}{e^{i\beta}} d\lambda \\ &= \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda-1} \exp\left(-\frac{(\frac{\pi}{2} + \beta)}{\pi} \right) \left(\arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda-1} \right) - \beta \, d\lambda \end{aligned}$$

Lorsque $\lambda = 0$ (au point C), $z = iL \Rightarrow z_0 = iL + \frac{\phi_b e^{i\beta}}{U \ln 2}$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\phi_b}{U \ln 2} \cos \beta \text{ et } y_0 = L + \frac{\phi_b}{U \ln 2} \sin \beta$$

Ce qui implique :

$$y - y_0 = \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda-1} \sin \left[\left(-\frac{(\frac{\pi}{2} + \beta)}{\pi} \right) \left(\arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda-1} \right) - \beta \right] d\lambda$$

$$x - x_0 = \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda-1} \cos \left[\left(-\frac{(\frac{\pi}{2} + \beta)}{\pi} \right) \left(\arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda-1} \right) - \beta \right] d\lambda$$

Puisque $f = \phi$ sur la ligne de courant libre CD et $0 \leq \phi \leq +\infty$ l'équation devient :

$$y(\phi) = \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda - 1} \sin \left[\left(-\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\pi} \right) \left(\arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda - 1} \right) - \beta \right] d\lambda + L + \frac{\phi_b}{U \ln 2} \sin \beta$$

$$x(\phi) = \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda - 1} \cos \left[\left(-\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\pi} \right) \left(\arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda - 1} \right) - \beta \right] d\lambda + \frac{\phi_b}{U \ln 2} \cos \beta$$

Tel que : $\lambda = 1 - \exp\left(\frac{\phi \ln 2}{\phi_b}\right)$

Cette intégrale ne peut pas être résolue analytiquement. Pour obtenir la forme de la surface libre, on procède à une intégration numérique en utilisant la méthode d'Euler.

Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$:
$$y(\phi) = \frac{-\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda - 1} \sin \left[\left(\arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda - 1} \right) + \frac{\pi}{2} \right] d\lambda + L + \frac{\phi_b}{U \ln 2}$$

$$x(\phi) = \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda - 1} \cos \left[\left(\arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda - 1} \right) + \frac{\pi}{2} \right] d\lambda.$$

Pour $\beta = 0$:
$$y(\phi) = \frac{-\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda - 1} \sin \left[\frac{-1}{2} \arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda - 1} \right] d\lambda + L$$

$$x(\phi) = \frac{\phi_b}{U \ln 2} \int \frac{1}{\lambda - 1} \cos \left[\frac{-1}{2} \arctan \frac{2\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{3\lambda - 1} \right] d\lambda + \frac{\phi_b}{U \ln 2}.$$

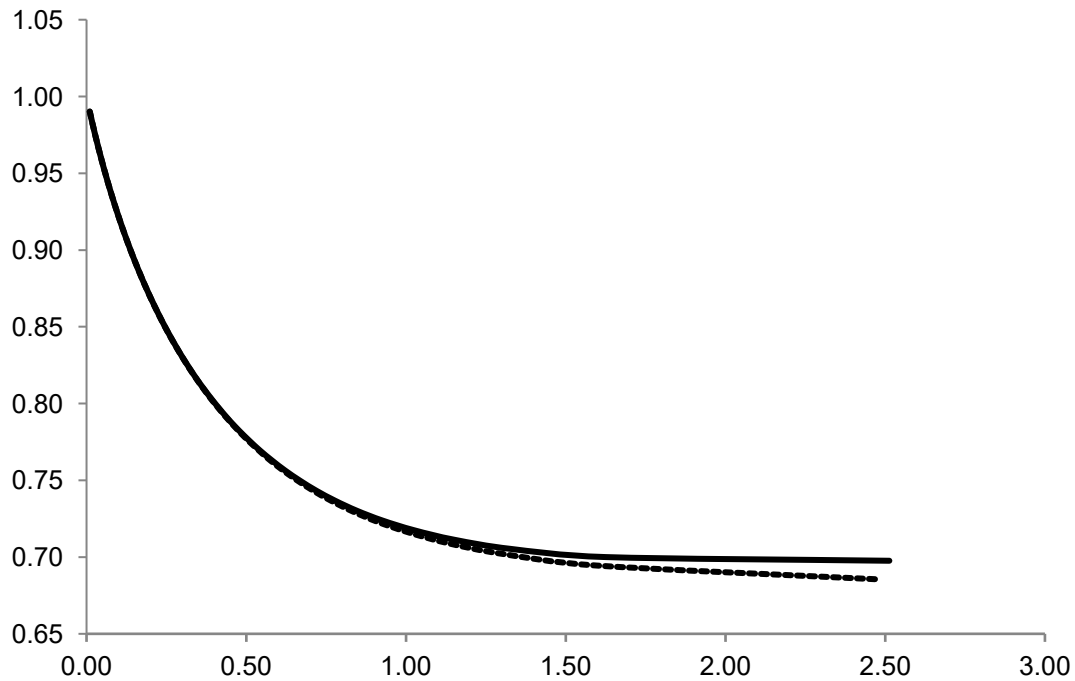


Figure 2.5 Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = 0$

CHAPITRE

III

**Résolution numérique d'un problème
d'écoulement à travers des parois
solides par la méthode de troncature de
série**

III.1 Traitement numérique de problème avec effet de tension de surface.

Résumé :

Dans cette partie on suppose que l'effet de tension de surface n'est pas négligeable La solution analytique du problème considéré étant difficile à obtenir, on s'intéresse à son traitement numérique par la méthode de troncature de série.

Contenu :

Introduction

III.1.1 Formulation du problème

III.1.2 Procédure numérique

III.1.3 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités

III.1.4 Formulation de la série

III.1.5 Forme de la surface libre

III.1.6 Résultats et discussions

Introduction :

Nous étudions un écoulement bidimensionnel, stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait (non visqueux et incompressible) à travers des parois solides. La tension superficielle (T) est prise en compte, tandis que les effets gravitationnels sont négligés. Ce problème est compliqué par la condition limite non linéaire issue de l'équation de Bernoulli sur la surface libre, ce qui pose des défis numériques. Plusieurs chercheurs ont abordé ce type de problème, notamment J. M. Vanden-Broeck [19], A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi [8], A. Gasmi et H. Mekias [7], ainsi que B. Bouderah, W. Delloume et A. Gasmi [10]. M.B. Abd-el-Malek, S.N. Hanna et M.T. Kamel [26] Guellati, Z. Gasmi, A [36].

Nous utilisons une méthode de troncature en série pour la résolution numérique. Nous avons calculé des solutions pour différentes valeurs de l'angle (β) entre les parois AB et l'horizontale, la longueur de la paroi verticale BC et différents nombres de Weber α . Pour déterminer la forme de la surface libre, la plupart des calculs ont été effectués pour $N = 50$. Nous avons pu trouver des solutions approximatives pour $\alpha > 1$.

III.1.1 Formulation du problème :

Considérons un écoulement potentiel et bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux. L'écoulement est considéré uniforme de vitesse constante u_0 .

Supposons que le jet à l'infini est uniforme de vitesse U et de longueur H . On note les variables avec tilde ($\tilde{\sim}$) les variables de dimensions physiques et les variables sans tilde (\sim) sont des variables sans dimensions.

On prend \tilde{U} comme unité de vitesse et \tilde{L} comme unité de longueur. Nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}}, \alpha = \frac{\tilde{\rho}\tilde{U}^2\tilde{L}}{\tilde{T}} \text{ et } \frac{1}{R} = \tilde{L}\frac{1}{\tilde{R}}, x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}}, y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}},$$

α : nombre de Weber, R : rayon de courbure, T : tension de surface

Notons par $\xi = u - iv$ le vitesse complexe.

On appelle potentiel complexe la fonction $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$,

où $z = x + iy$ est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe $f(z)$ (ϕ et ψ reprennent respectivement les fonctions potentiel et de courant).

La fonction f a les propriétés suivantes :

- $f(z)$ est une fonction uniforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de z correspond une seule valeur de f
- $f(z)$ est une fonction analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est à-dire :

$$\frac{df}{dz} = \frac{d\phi}{dx} + i \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} - i \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\phi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} = u \\ \frac{d\phi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx} = v \end{cases}$$

D'équation constitue les relations de Cauchy-Riemann qui vérifient bien les relations trouvées précédemment. Nous posons $\psi = 0$ le long de la paroi horizontale EF et $\phi = 0$ au point de séparation C .

$\xi = u - iv$ ces choix n'affectent pas la généralité de la solution.

A l'infini, l'écoulement est uniforme, ce qui donne $u - iv = 1$.

La surface libre CD , initialement inconnue dans le plan physique $z = x + iy$ est maintenant représentée par la frontière $\psi = 1$ dans le plan f (voir Figure 3.1).

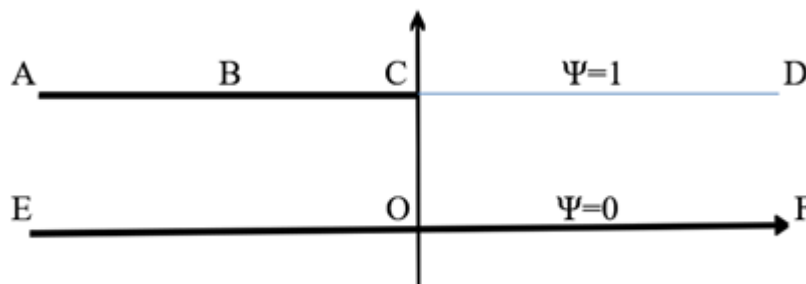


Figure 3.1 : plan f

Le problème d'écoulement potentiel se réduit à déterminer la fonction potentielle de vitesse $\phi(x, y)$ qui satisfait le domaine de l'écoulement.

L'équation de Bernoulli sur CD est donnée par :

$$q^2 - \frac{2}{\alpha} K = 1 \quad \text{tel que } K = \frac{1}{R} .$$

On définit la fonction $\tau - i\theta$ par :

$$\xi = u - iv = \exp(\tau - i\theta)$$

$$K = \frac{1}{R} = \exp(\tau) \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right|$$

$$q^2 - \frac{2}{\alpha} q \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| = 1 \quad .$$

Donc L'équation de Bernoulli est : $e^{2\tau} - \frac{2}{\alpha} e^{\tau} \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| = 1$ sur CD

Avec les conditions :

$$\begin{cases} \frac{Im\xi}{Re\xi} = \tan\beta \Rightarrow \theta = \beta \text{ si } \psi = 1 \text{ et } -\infty < \phi < \phi_B \text{ sur } AB \\ Re\xi = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \text{ si } \psi = 1 \text{ et } \phi_B < \phi < 0 \text{ sur } BC \\ Im\xi = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ si } \psi = 0 \text{ et } -\infty < \phi < \infty \text{ sur } EF \\ \theta \text{ est non connue si } \psi = 1 \text{ et } 0 < \phi < \infty \text{ sur } CD. \end{cases}$$

III.1.2 Procédure numérique :

Nous utilisons une approche numérique appelée méthode de troncature de série. La méthode permet de calculer la fonction de vitesse. On transforme le domaine de l'écoulement en un quart de disque unité dans le plan t par la transformation conforme :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{2t}{(1-t)^2} \right).$$

Cette relation transforme le domaine de l'écoulement ($-\infty < \phi < \infty, 0 < \psi < 1$) plan f en un quart de disque unité dans le plan t (voir Figure 3.2).

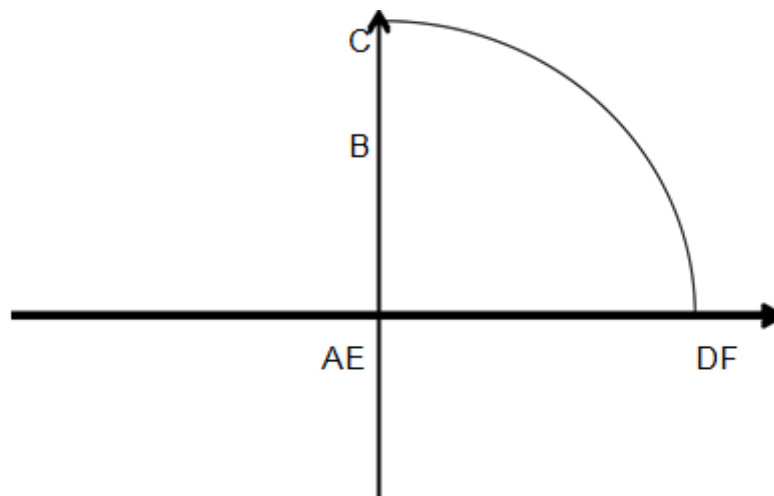


Figure 3.2 : Plan t

$$t = e^{i\sigma} \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } CD \text{ surface libre}$$

f dans la surface libre défini par $f = \phi + i \quad 0 < \phi < \infty$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f = \phi + i &= \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{2e^{i\sigma}}{(1 - e^{i\sigma})^2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1}{-2 \left(\sin \frac{\sigma}{2} \right)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \log \left(-2 \left(\sin \frac{\sigma}{2} \right)^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{df}{d\sigma} = \frac{d\phi}{d\sigma} &= -\frac{1}{\pi} \cotan \left(\frac{\sigma}{2} \right) \end{aligned}$$

Et on a :

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{d\theta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\phi} = \left(-\pi \tan \left(\frac{\sigma}{2} \right) \right) \frac{d\theta}{d\sigma}.$$

L'équation de Bernoulli devient :

$$e^{2\tau} - \frac{2}{\alpha} e^{\tau} \left(\pi \tan \left(\frac{\sigma}{2} \right) \right) \left| \frac{d\theta}{d\sigma} \right| = 1 \quad \text{Sur } CD \quad (3.1)$$

Maintenant, on étudie le comportement asymptotique de ξ au voisinage de points singuliers A, B et C .

III.1.3 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités :

A/ Comportement de ξ au voisinage de $t = i$: l'écoulement au voisinage de $t = i$ (point C) est un écoulement autour d'un angle γ tel que γ est inconnue ; ainsi :

$$f \sim \frac{a}{n} (z - z_c)^n + f_c \quad \text{sur } CD,$$

Où $z_c = i, n = \frac{\pi}{\gamma}$ et $f_c = 0$

Alors :

$$\xi = \frac{df}{dz} \sim a(z - z_c)^{n-1} \quad Z \rightarrow z_c \quad (3.2)$$

Puisque sur la surface libre ($f = \phi$) alors :

$$\begin{aligned} f = \phi &= \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{-2t}{(1-t)^2} \right) \\ z - z_c &\sim \left[\frac{\pi}{\gamma a} \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{-2t}{(1-t)^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\pi}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En substitut (3.3) dans (3.2) on trouve :

$$\xi = \frac{df}{dz} \sim a \left[\frac{\pi}{\gamma a} \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{2t}{(1-t)^2} \right) \right]^{1-\frac{\gamma}{\pi}}$$

Puisque : $\log \left(\frac{-2t}{(1-t)^2} \right) \sim (1+t^2)$ si $t \rightarrow i$

Alors :

$$\xi \sim [1+t^2]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \quad \text{Quant } t \rightarrow i$$

B/ Comportement de ξ au voisinage de $t = t_B$:

L'écoulement au voisinage de $t = t_B = b$ (point B) est un écoulement r dans un angle $(\beta + \frac{\pi}{2})$ dans le plan z au voisinage de $z_B = iL'$ la fonction f est donnée par :

$$f \sim \frac{a(\beta+\frac{\pi}{2})}{\pi} (z - z_B)^{\frac{\pi}{\beta+\frac{\pi}{2}}} + \phi_B \quad \text{sur } CD$$

Ce qui donne $(z - z_B) \sim \left[\frac{\pi}{a(\beta+\frac{\pi}{2})} (f - \phi_B) \right]^{\frac{(\beta+\frac{\pi}{2})}{\pi}}$

Alors : $\xi = \frac{df}{dz} \sim a (z - z_B)^{\frac{\pi}{\beta+\frac{\pi}{2}}-1} \sim \left[\frac{\pi}{a(\beta+\frac{\pi}{2})} (f - \phi_B) \right]^{1-\frac{(\beta+\frac{\pi}{2})}{\pi}} \quad z \rightarrow z_c$

$$\xi \sim (t - b)^{\frac{\pi}{2}-\beta} \quad t \rightarrow b$$

C/ Comportement de ξ au voisinage de $t = 0$:

Si $x \rightarrow -\infty$ l'écoulement apparut un puits alors le potentiel complexe se réduit :

$$f \sim -\frac{1}{\beta} \log z \Rightarrow z \sim \exp(-\beta f)$$

Et on a : $\xi = \frac{df}{dz} = -\frac{1}{\beta z} = -\frac{1}{\beta} \exp(\beta f)$

Lorsque : $e^{\pi f} \sim t \quad f \rightarrow -\infty$

Donc :

$$\xi \sim t^{\frac{\beta}{\pi}} \quad \text{si } t \rightarrow 0$$

III.1.4 Formulation de la série :

Après avoir déterminé le comportement asymptotique de ξ au voisinage de singularités, on cherche $\xi(t)$ sous forme :

$$\xi(t) = g(t) \exp(\omega(t)) \quad (3.4)$$

Tel que $g(t)$ contient les singularités. En utilisant les conditions aux limites et les relations précédentes. L'équation (3.4) devient alors :

$$\xi(t) = t^{\frac{\beta}{\pi}}(t-b)^{\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}}[1+t^2]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)$$

En utilisant les conditions aux limites, la relation précédente devient :

$$\xi(t) = t^{\frac{\beta}{\pi}}(t-b)^{\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}}[1+t^2]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}\right)$$

$$\xi(t) = t^{\frac{\beta}{\pi}}(t-b)^{\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}}[1+t^2]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{2(k-1)}\right)$$

Où les coefficients a_k et la constante γ sont à déterminer.

On a $t = e^{i\sigma}$ et $b = ir$ $0 < r < 1$:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \left((e^{i\sigma})^{\frac{\beta}{\pi}} (e^{i\sigma} - b)^{\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}} [1 + e^{i2\sigma}]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i2(k-1)\sigma}\right) \right) \\ &= e^{i\frac{\beta}{\pi}\sigma} \left(e^{i\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}\right)\arctg\left(\frac{\sin\sigma-r}{\cos\sigma}\right)} [2\cos\sigma]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} e^{i\sigma\left(1-\frac{\gamma}{\pi}\right)} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i2(k-1)\sigma}\right) \right) \\ &= e^{i\frac{\beta}{\pi}\sigma} \left(e^{i\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}\right)\arctg\left(\frac{\sin\sigma-r}{\cos\sigma}\right)} [2\cos\sigma]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} e^{i\sigma\left(1-\frac{\gamma}{\pi}\right)} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cos(2(k-1)\sigma) + i\sin(2(k-1)\sigma))\right) \right) \end{aligned}$$

On a $\xi(t) = e^{\tau-i\theta}$:

$$\begin{cases} \exp(\tau(\sigma)) = [2\cos\sigma]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cos(2(k-1)\sigma))\right) \\ \theta(\sigma) = -\left[\left(\frac{\beta}{\pi} + 1 - \frac{\gamma}{\pi}\right)\sigma + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}\right)\arctg\left(\frac{\sin\sigma-r}{\cos\sigma}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma)\right] \end{cases}$$

Pour exprimer l'équation de Bernoulli en termes de σ , on remplace $\tau(\sigma)$ et $\theta(\sigma)$ par leurs valeurs dans l'équation (3.1). On trouve :

$$[2\cos\sigma]^{2-2\frac{\gamma}{\pi}} \exp\sum_{k=1}^{\infty} 2a_k (\cos(2(k-1)\sigma)) - \frac{2}{\alpha} \left(\pi \tan\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right) [2\cos\sigma]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \exp\sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cos(2(k-1)\sigma)) \left[\left(\frac{\beta}{\pi} + 1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k (k-1) \cos(2(k-1)\sigma)\right] = 1$$

Pour déterminer les coefficients a_k et l'angle γ . faisons une troncation de la série après N terme. On trouve les $N - 1$ coefficients a_k et l'angle γ .

Ainsi on discrétise l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en N points en introduisant :

$$\sigma(I) = \frac{\pi}{2N} \left(I - \frac{1}{2}\right) \quad I = 1, \dots, N.$$

On obtient un système de N équation algébrique non linéaire à N inconnues

L'angle β et le nombre de weber α sont des paramètres.

Pour calculer les coefficients a_k et l'angle γ on utilise la méthode de Newton.

III.1.5 Forme de la surface libre :

Après avoir trouvé les coefficients a_k la forme de la surface libre est déterminer comme suite. On utilise la relation suivante :

$$\begin{aligned} \xi &= c \frac{df}{dz} = u - iv = \exp(\tau - i\theta) \\ \Rightarrow \frac{dx}{d\phi} + i \frac{dy}{d\phi} &= \frac{1}{u - iv} = c \exp(i\theta - \tau) \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\phi} = c \exp(-\tau) \cos\theta \\ \frac{dy}{d\phi} = c \exp(-\tau) \sin\theta \end{cases}$$

On a : $\frac{dx}{d\phi} \frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{dx}{d\sigma}$ et $\frac{dy}{d\phi} \frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{dy}{d\sigma}$ alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\sigma} = -\frac{c}{\pi} \cotan\left(\frac{\sigma}{2}\right) \exp(-\tau) \cos\theta \\ \frac{dy}{d\sigma} = -\frac{c}{\pi} \cotan\left(\frac{\sigma}{2}\right) \exp(-\tau) \sin\theta \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\sigma(i)} = -\frac{c}{\pi} \cotan\left(\frac{\sigma(i)}{2}\right) [2\cos\sigma(i)]^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} -a_k(\cos(2(k-1)\sigma(i)))\right) \cos \\ \left[\left(\frac{\beta}{\pi} + 1 - \frac{\gamma}{\pi}\right)\sigma(i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}\right) \arctan\left(\frac{\sin\sigma(i) - r}{\cos\sigma(i)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma(i))\right] \\ \frac{dy}{d\sigma(i)} = \frac{c}{\pi} \cotan\left(\frac{\sigma(i)}{2}\right) [2\cos\sigma(i)]^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} -a_k(\cos(2(k-1)\sigma(i)))\right) \sin \\ \left[\left(\frac{\beta}{\pi} + 1 - \frac{\gamma}{\pi}\right)\sigma(i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}\right) \arctan\left(\frac{\sin\sigma(i) - r}{\cos\sigma(i)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma(i))\right] \end{array} \right.$$

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement les relations précédentes dans l'intervalle $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ avec les conditions initiales $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

III.1.6 Résultats et discussions :

Nous utilisons la procédure numérique décrite ci-dessus pour calculer la solution du problème pour différents valeur du nombre de weber ($0 < \alpha < \infty$) et l'angle ($0 < \beta < \pi$) . Les coefficients a_k décroissent rapidement lorsque N augmente. (Voir le tableau 2).

A/solution sans tension de surface :

Lorsque la tension de surface est négligée, le nombre de Weber tend vers l'infini, l'équation (3.1) devient :

$$e^{2\tau} = u^2 + v^2 = 1 \quad \text{sur } CD.$$

Et le système se réduit à :

$$[2\cos\sigma(i)]^{2-2\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2a_k(\cos(2(k-1)\sigma(i)))\right) = 1$$

La méthode décrite ci-dessus nous permet de trouver l'angle γ et les coefficients a_k de la série pour chaque $0 < \beta < \pi$. Le tableau 1 montre quelques valeurs de γ pour différentes valeurs de β pour $\alpha \rightarrow \infty$

β	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	0	π	$\frac{\pi}{2}$
γ	3.1415	3.141498	3.1415	3.1415	3.14151

Tableau 1:

Valeurs de l'angle de séparation $\gamma(\gamma \rightarrow \pi)$ pour différentes valeurs de β

Nous constatons que les $(a_k \rightarrow 0)$ et $\gamma \rightarrow \pi$

Si en substituant les valeurs de a_k et γ dans l'équation (4.22) on obtient la

solution :
$$\xi(t) = t^{\frac{\beta}{\pi}}(t - b)^{\frac{1-\beta}{\pi}}$$

Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ on trouve la solution : $\xi(t) = \sqrt{t}$

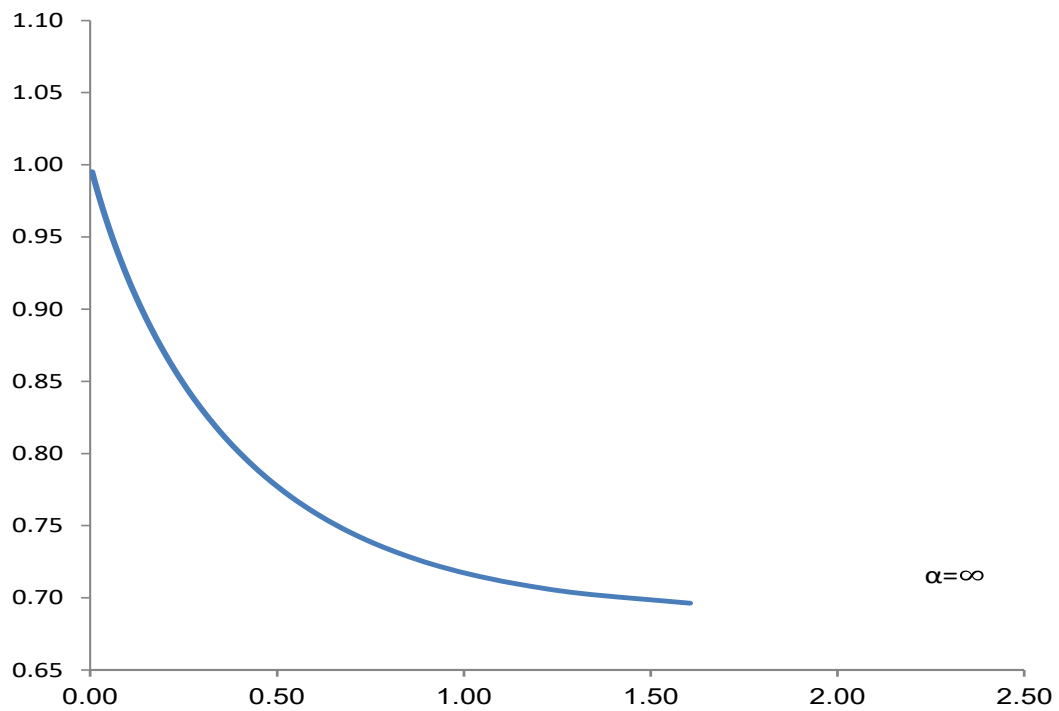


Figure 3.3 : Solution sans tension de surface pour $\beta = \frac{\pi}{2}$

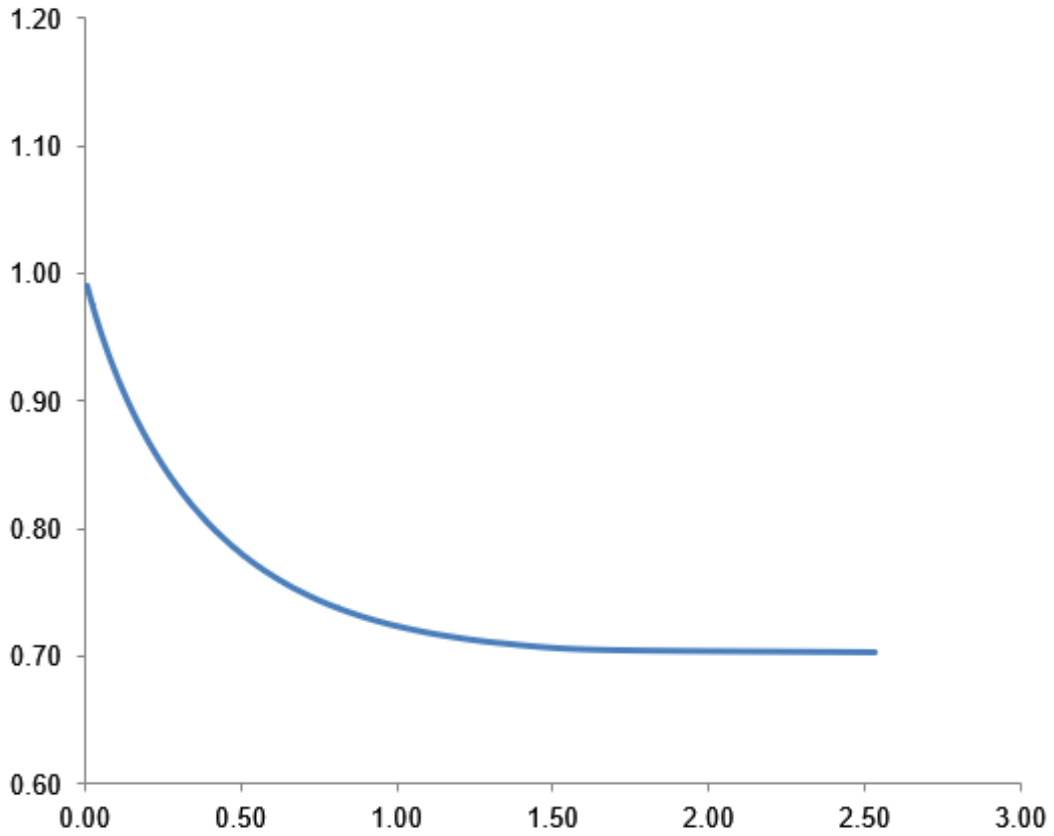


Figure 3.4 Solution sans tension de surface pour $\beta = 0$

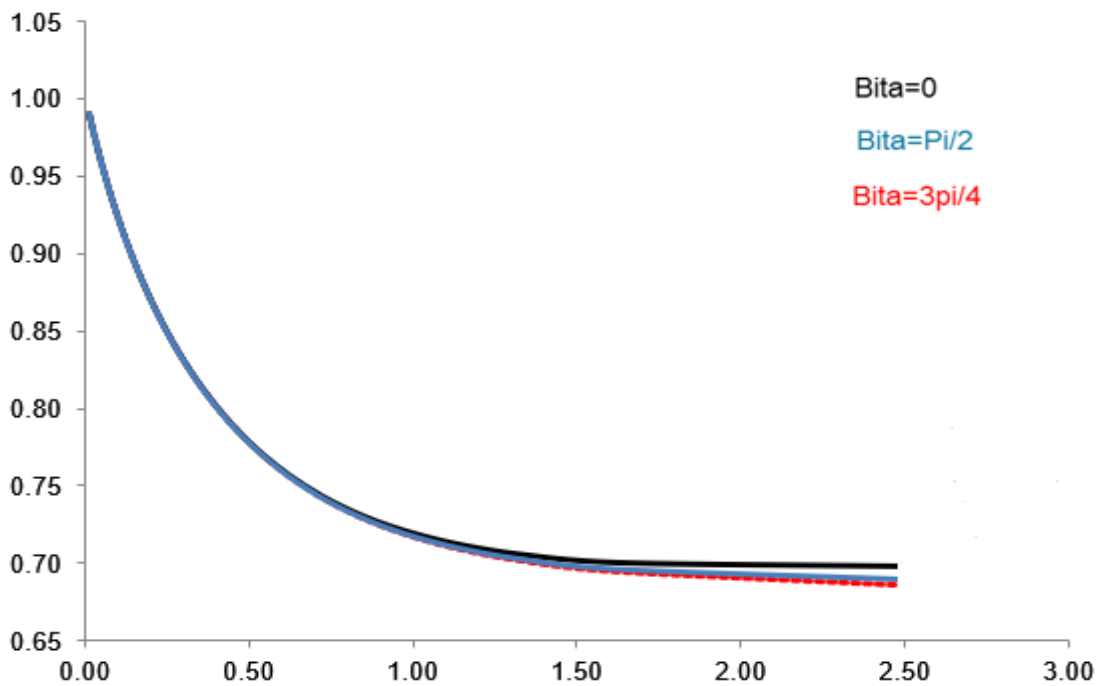


Figure 3.5. Comparaison de solutions sans tension de surface
Pour différentes valeurs de β .

B/solution avec l'effet de tension de surface :

On utilise la même méthode pour résoudre le système non linéaire pour différentes valeurs du nombre de weber α ($0 < \alpha < \infty$) et l'angle β ($0 < \beta < \pi$)
Les résultats présentés ici ont été obtenue pour $N = 50$.

β	A	Γ	a_1	a_9	a_{20}	a_{30}	a_{50}
$\pi/2$	2.	3.82E+00	2.51E-01	1.03E-03	-3.23E-04	-1.30E-04	-6.39E-06
	3.	3.585863	2.03E-01	7.91E-04	-2.64E-04	-1.05E-04	-4.96E-06
	50.	3.146078	1.41E-02	6.26E-05	-3.22E-05	-1.12E-05	-5.42E-07
	200.	3.141894	3.49E-03	1.44E-05	-7.79E-06	-2.59E-06	-1.21E-07
	1000.	3.141542	6.94E-04	2.67E-06	-1.53E-06	-5.27E-07	-2.95E-08
$\pi/4$	1.	4.740468	3.54E-01	1.82E-03	-1.36E-03	-1.78E-03	-6.49E-04
	2.	3.855418	2.61E-01	1.65E-04	-5.40E-04	-2.43E-04	-4.95E-06
	10.	3.238358	7.83E-02	3.69E-04	-1.33E-04	-4.75E-05	-2.68E-06
	50.	3.146681	1.55E-02	8.33E-05	-3.46E-05	-1.19E-05	-6.05E-07
	200.	3.141939	3.81E-03	1.93E-05	-8.33E-06	-2.75E-06	-1.35E-07
	1000.	3.141549	7.58E-04	3.53E-06	-1.61E-06	-5.45E-07	-2.99E-08
0.	1.	4.53243	3.77E-01	-6.33E-03	7.67E-04	3.39E-04	1.55E-04
	2.	4.312903	3.43E-01	-9.57E-03	1.52E-03	6.70E-04	2.79E-04
	3.	3.591028	2.04E-01	8.13E-04	-2.68E-04	-1.06E-04	-5.05E-06
	10.	3.124062	8.66E-02	-1.31E-04	-1.57E-03	5.29E-04	7.14E-05
	50.	3.216608	1.43E-02	-2.63E-03	8.63E-04	4.05E-04	4.32E-05
	200.	3.223441	3.66E-03	-2.88E-03	9.25E-04	4.06E-04	4.96E-06
$3^* \pi/4$	1000.	3.141531	6.30E-04	1.99E-06	-1.52E-06	-5.43E-07	-3.18E-08
	200.	3.141841	3.17E-03	9.72E-06	-7.28E-06	-2.44E-06	-1.37E-07
	60.	3.144326	1.07E-02	3.53E-05	-2.51E-05	-8.64E-06	-3.99E-07
	9.	3.22169	7.25E-02	1.25E-04	-1.14E-04	-4.42E-05	-1.97E-06
	3.	3.519294	1.92E-01	5.20E-04	-2.20E-04	-8.49E-05	-3.95E-06
	1.	4.103669	3.15E-01	5.52E-04	-6.27E-06	-2.11E-04	-3.15E-06

Tableau2 :

**Quelques valeurs des coefficients a_k et de γ pour différentes valeurs de β
et du nombre de weber α**

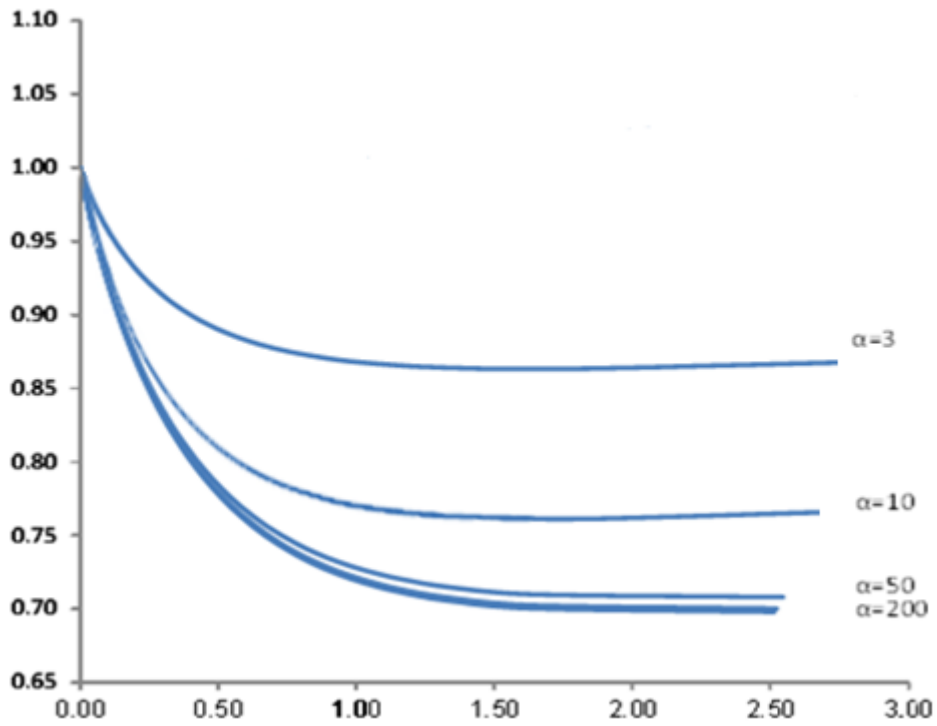


Figure 3.6 : Forme de la surface libre pour $\beta = 0$ et $r = 0.009$

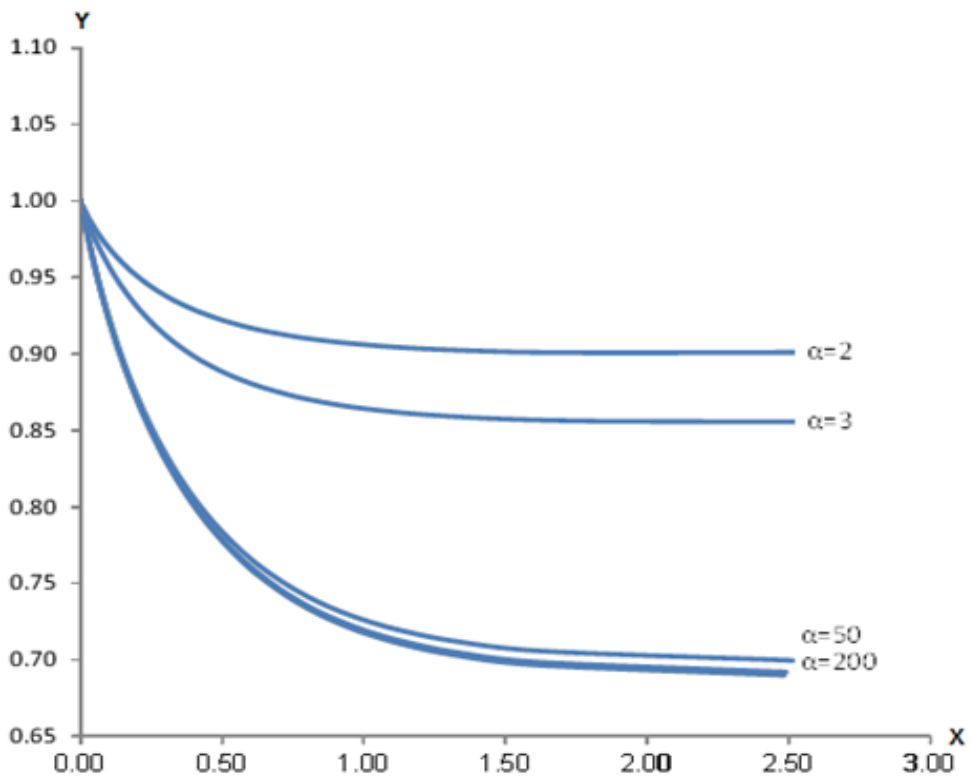


Figure 3.7 : Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$

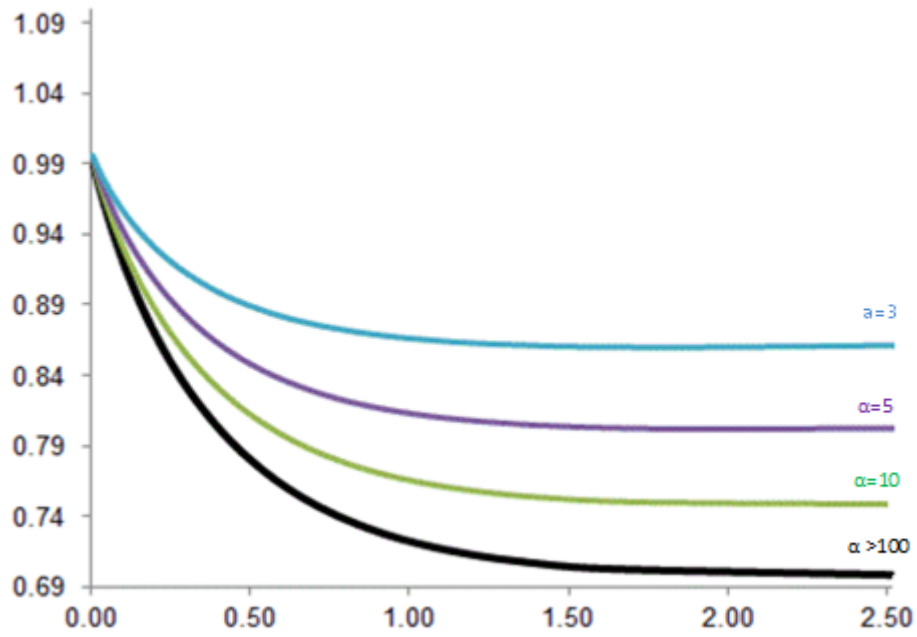


Figure 3.8 : Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{4}$ et $r = 0.02$

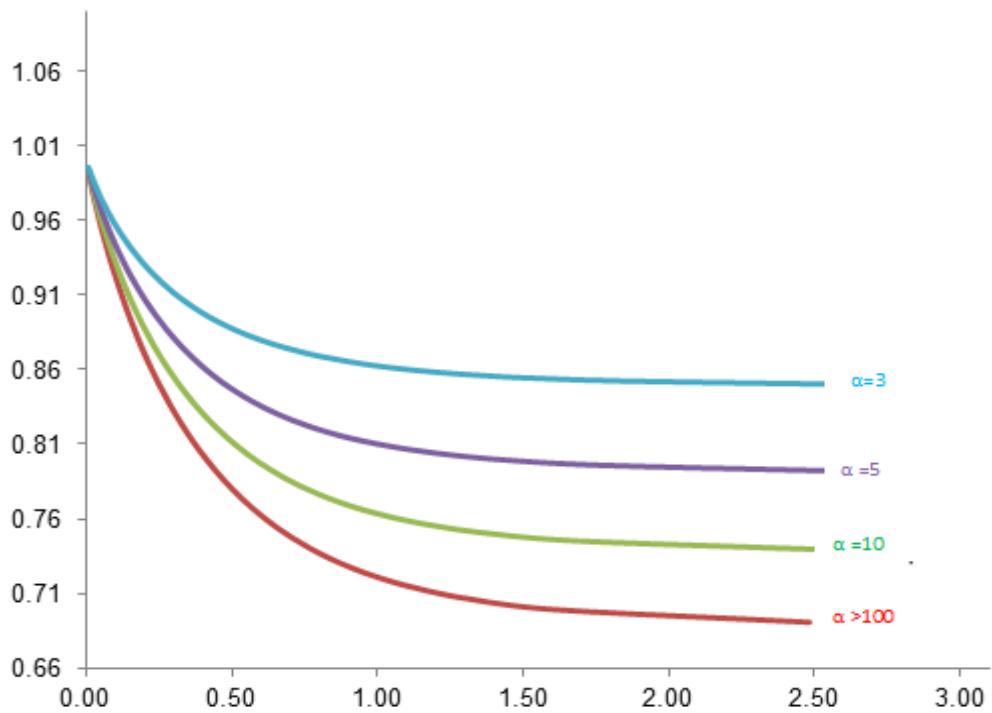


Figure 3.9: Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$ et $r = 0.01$

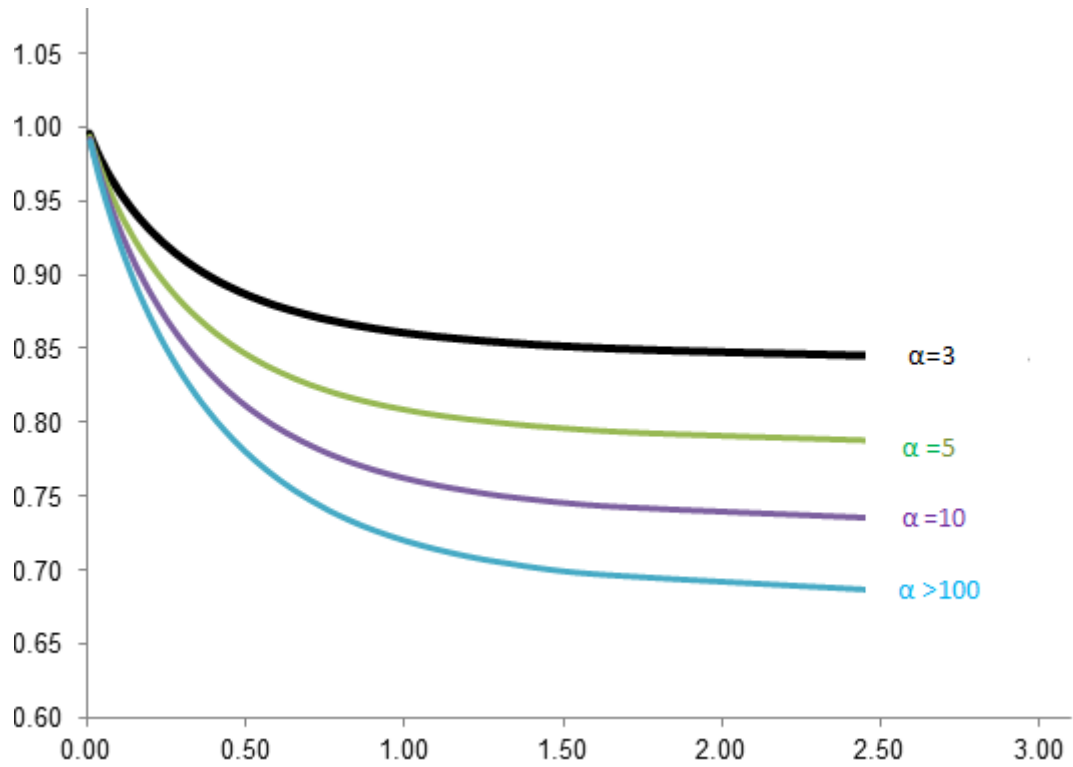


Figure 3.10: La forme de surface libre pour $\beta=\pi$ et $r = 0.01$

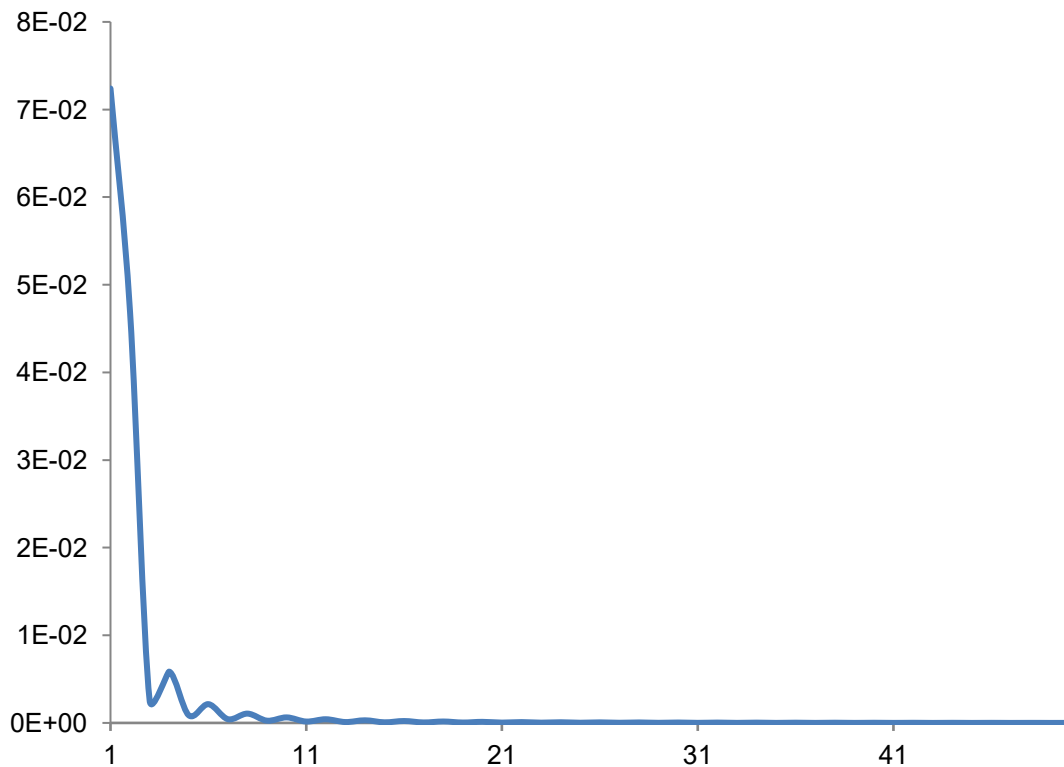


Figure 3.11 : Les coefficients $|a_k|$ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, $r = 0.01$ et $\alpha = 100$

k	a_k	$\left(\frac{3}{4}\right)^k$	a_k	$\left(\frac{3}{4}\right)^k$	a_k	$\left(\frac{3}{4}\right)^k$
1	0.0724000	0.7500000000	0.0070660	0.7500000000	0.0007003	0.7500000000
2	0.0468500	0.5625000000	0.0059870	0.5625000000	0.0006009	0.5625000000
3	0.0025540	0.4218750000	0.0004897	0.4218750000	0.0000458	0.4218750000
4	0.0058570	0.3164062500	0.0007725	0.3164062500	0.0000750	0.3164062500
5	0.0008686	0.2373046875	0.0001340	0.2373046875	0.0000108	0.2373046875
6	0.0021410	0.1779785156	0.0002796	0.1779785156	0.0000263	0.1779785156
7	0.0004238	0.1334838867	0.0000587	0.1334838867	0.0000043	0.1334838867
8	0.0010610	0.1001129150	0.0001408	0.1001129150	0.0000129	0.1001129150
9	0.0002554	0.0750846863	0.0000315	0.0750846863	0.0000019	0.0750846863
10	0.0006290	0.0563135147	0.0000835	0.0563135147	0.0000074	0.0563135147
11	0.0001563	0.0422351360	0.0000192	0.0422351360	0.0000010	0.0422351360
12	0.0004198	0.0316763520	0.0000546	0.0316763520	0.0000047	0.0316763520
13	0.0000995	0.0237572640	0.0000124	0.0237572640	0.0000005	0.0237572640
14	0.0002969	0.0178179480	0.0000381	0.0178179480	0.0000032	0.0178179480
15	0.0000698	0.0133634610	0.0000085	0.0133634610	0.0000003	0.0133634610
16	0.0002156	0.0100225958	0.0000278	0.0100225958	0.0000023	0.0100225958
17	0.0000540	0.0075169468	0.0000059	0.0075169468	0.0000001	0.0075169468
18	0.0001595	0.0056377101	0.0000209	0.0056377101	0.0000017	0.0056377101
19	0.0000438	0.0042282826	0.0000043	0.0042282826	0.0000000	0.0042282826
20	0.0001209	0.0031712119	0.0000161	0.0031712119	0.0000013	0.0031712119
21	0.0000356	0.0023784090	0.0000030	0.0023784090	0.0000001	0.0023784090
22	0.0000942	0.0017838067	0.0000127	0.0017838067	0.0000010	0.0017838067
23	0.0000282	0.0013378550	0.0000023	0.0013378550	0.0000001	0.0013378550
24	0.0000757	0.0010033913	0.0000103	0.0010033913	0.0000008	0.0010033913
25	0.0000215	0.0007525435	0.0000019	0.0007525435	0.0000001	0.0007525435
26	0.0000624	0.0005644076	0.0000084	0.0005644076	0.0000006	0.0005644076
27	0.0000157	0.0004233057	0.0000014	0.0004233057	0.0000001	0.0004233057
28	0.0000524	0.0003174793	0.0000067	0.0003174793	0.0000005	0.0003174793

k	a_k	$\left(\frac{3}{4}\right)^k$	a_k	$\left(\frac{3}{4}\right)^k$	a_k	$\left(\frac{3}{4}\right)^k$
29	0.0000109	0.0002381095	0.0000008	0.0002381095	0.0000001	0.0002381095
30	0.0000445	0.0001785821	0.0000055	0.0001785821	0.0000004	0.0001785821
31	0.0000072	0.0001339366	0.0000008	0.0001339366	0.0000001	0.0001339366
32	0.0000379	0.0001004524	0.0000047	0.0001004524	0.0000003	0.0001004524
33	0.0000045	0.0000753393	0.0000005	0.0000753393	0.0000001	0.0000753393
34	0.0000321	0.0000565045	0.0000037	0.0000565045	0.0000003	0.0000565045
35	0.0000026	0.0000423784	0.0000003	0.0000423784	0.0000001	0.0000423784
36	0.0000270	0.0000317838	0.0000032	0.0000317838	0.0000002	0.0000317838
37	0.0000014	0.0000238378	0.0000003	0.0000238378	0.0000001	0.0000238378
38	0.0000223	0.0000178784	0.0000025	0.0000178784	0.0000002	0.0000178784
39	0.0000006	0.0000134088	0.0000001	0.0000134088	0.0000001	0.0000134088
40	0.0000181	0.0000100566	0.0000021	0.0000100566	0.0000001	0.0000100566
41	0.0000002	0.0000075424	0.0000001	0.0000075424	0.0000001	0.0000075424
42	0.0000142	0.0000056568	0.0000016	0.0000056568	0.0000001	0.0000056568
43	0.0000001	0.0000042426	0.0000000	0.0000042426	0.0000000	0.0000042426
44	0.0000108	0.0000031820	0.0000012	0.0000031820	0.0000001	0.0000031820
45	0.0000000	0.0000023865	0.0000000	0.0000023865	0.0000000	0.0000023865
46	0.0000076	0.0000017899	0.0000008	0.0000017899	0.0000001	0.0000017899
47	0.0000000	0.0000013424	0.0000000	0.0000013424	0.0000000	0.0000013424
48	0.0000048	0.0000010068	0.0000006	0.0000010068	0.0000000	0.0000010068
49	0.0000000	0.0000007551	0.0000000	0.0000007551	0.0000000	0.0000007551
50	0.0000023	0.0000005663	0.0000003	0.0000005663	0.0000000	0.0000005663

Tableau3 : La comparaison des coefficients a_k de la série (3.22) par la série $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^k$ pour $\beta = 0$ et Pour des valeurs différentes du nombre de weber α

γ	C	α	β
3.591028191623774	8.690754E-01	3	0
3.225016182239525	7.532108E-01	10	
3.141568748968539	6.980994E-01	1000	
3.585862999388259	8.557014E-01	3	$\frac{\pi}{2}$
3.224011834087902	7.434806E-01	10	
3.141568071706945	6.900700E-01	1000	
3.588446738414549	8.623362E-01	3	$\frac{\pi}{4}$
3.224514102811899	7.483135E-01	10	
3.141568410320082	6.940609E-01	1000	
3.583276098392672	8.491664E-01	3	$\frac{3\pi}{4}$
3.223509204655158	7.387090E-01	10	
3.141567733012768	6.861244E-01	1000	

Tableau 4 : L'angle de séparation γ et le coefficient de contraction C pour différentes valeurs de β et du nombre de weber α

Conclusion :

Nous avons utilisé la procédure numérique avec $N = 50$, $\beta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = 3, 5, 10, 100, 200$, $\alpha \gg 1000$. Le calcul numérique montre qu'il existe une valeur minimale de $\alpha^* = 1$ en dessous de laquelle la convergence n'est plus assurée et on remarque que pour $\alpha \geq 100$, tous les graphes de la forme de la surface libre sont les mêmes et coïncident avec la solution exacte. Mais il s'avère que les comportements de la solution du problème sont différents pour $\alpha < 1$. Les coefficients de la série trouvés sont rapidement décroissants et l'angle γ et le coefficient de contraction C croient lorsque α décroît pour plusieurs valeurs de la longueur BC .

III.2 Traitement numérique de problème avec les effets de gravité par la méthode de troncature en série

Résumé :

Dans cette section, nous étudions des solutions pour la configuration d'écoulement de la figure avec la tension de surface négligée mais en tenant compte de l'effet de la force de gravité.

Introduction

III.2.1 Positon du problème

III.2.2 L'équation de Bernoulli dans le plan t

III.2.3 Forme de la surface libre

III.2.4 Résultats et discussions

Introduction :

De nombreux chercheurs ont étudié les écoulements à surface libre en présence de gravité. Dans cette partie, nous reprenons le problème étudié précédemment en supposant que la gravité joue un rôle non négligeable. Étant donné la complexité de l'obtention d'une solution analytique exacte pour ce type de problème, nous nous tournons vers les méthodes numériques. Plus précisément, On utilise une méthode de troncature en série pour approcher la solution.

III.2.1 Position de problème :

Considérons l'écoulement potentiel et bidimensionnel décrit au section 2 et 3, d'un fluide incompressible non visqueux (Voir la figure 2.1)

L'équation de Bernoulli, pour les fluides incompressibles parfaits d'un stationnaire irrotationnel s'écrit sous forme :

$$\frac{1}{2}q^{*2} + \frac{p^*}{\rho^*} + g^*z^* = \text{cte} \quad \text{Pour } T \neq 0 \text{ et } g \neq 0$$

Supposons que l'écoulement est uniforme de vitesse U^* et de hauteur H^* , on choisie U^* comme unité de vitesse et H^* comme unité de longueur.

Pour $T \neq 0$ et $g \neq 0$, Notons les variables dimensionnelles par (*) et nous introduirons sans dimension suivants :

$$q = \frac{q^*}{U^*}, \quad \frac{1}{R} = \frac{H^*}{R^*}, \quad \alpha = \frac{\rho^* H^* U^*}{T^*}, \quad F^2 = \frac{U^2}{g^* H^*}$$

Où F est le nombre de Froude, R le rayon de courbure, α le nombre de weber, q le module du vecteur vitesse et g désigne la gravité, T la tension de surface.

Dans cette section, nous étudions des solutions pour l'écoulement configuration de la figure avec la tension de surface négligée ($T = 0$) mais en tenant compte ainsi que l'effet de la force de gravité.

Si nous supposons que la gravité agit dans le sens de définir par le angle ω alors la condition de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{1}{2}q^2 + g y \sin \omega - g x \cos \omega = \text{cte}.$$

On étudier le cas particulier où l'angle $\omega = \frac{\pi}{2}$. Alors la gravité agit dans la direction y négative. Dans ce cas l'équation de Bernoulli est :

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{F^2}y = cte .$$

Pour déterminer la constante, on évalue l'équation à $x = -\infty$ et on obtient :

$$cte = \frac{1}{2} + \frac{1}{F^2} . \text{ Alors :}$$

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{F^2}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{F^2}$$

Donc :

$$q^2 + \frac{2}{F^2}(y - 1) = 1$$

On note par $q = u - iv$ la vitesse complexe et puisque $u - iv$ est analytique on définit la fonction $\tau - i\theta$. Par la relation :

$$q = U - iV = \exp(\tau - i\theta)$$

Par suite, L'équation de Bernoulli en fonction de ces nouvelles variables, prend la forme suivante :

$$e^{2\tau} + \frac{2}{F^2}(y - 1) = 1$$

La présence de y rend l'équation difficile à résoudre, mais on peut calculer la dérivée de y par rapport à ϕ .

$$2e^{2\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \phi} + \frac{2}{F^2} \frac{\partial y}{\partial \phi} = 0 .$$

Et on a $\frac{\partial y}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \sin\theta$

Alors l'équation devient :

$$e^{2\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \phi} + \frac{1}{F^2} \exp(-\tau) \sin\theta = 0 .$$

On résout cette équation numériquement en utilisant les techniques de troncature des séries qui utilise sur la première partie.

III.2.2 L'équation de Bernoulli dans le plan t :

Selon la première partie on a : $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}$

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = -\pi \frac{2\sin^2 \frac{\sigma}{2}}{\sin\sigma} = -\pi \tan \frac{\sigma}{2} \quad \text{sur } CD$$

D'autre part :

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{d\tau}{d\phi} \frac{d\phi}{d\sigma}$$

$$\frac{d\tau}{d\phi} = \frac{d\tau}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\phi} = -\pi \tan \frac{\sigma}{2} \frac{d\tau}{d\sigma}$$

On obtient :
$$e^{2\tau(\sigma)} \left(-\pi \tan \frac{\sigma}{2} \right) \left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right) + \frac{1}{F^2} \exp(-\tau(\sigma)) \sin \theta(\sigma) = 0 \quad (3.5)$$

Tel que :

$$\begin{cases} \exp(\tau(\sigma)) = [2\cos\sigma]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \exp \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma) \\ \theta(\sigma) = - \left[\left(\frac{\beta}{\pi} + 1 - \frac{\gamma}{\pi} \right) \sigma + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi} \right) \arctan \left(\frac{\sin\sigma - r}{\cos\sigma} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) \right] \end{cases}$$

Pour exprimer l'équation de Bernoulli en termes de σ , on remplace $\tau(\sigma)$ et $\theta(\sigma)$ par leurs valeurs dans l'équation (3.5). On trouve :

$$\begin{aligned} & \left([2\cos\sigma]^{2-2\frac{\gamma}{\pi}} \exp \sum_{k=1}^{\infty} 2 a_k \cos(2(k-1)\sigma) \right) \left(-\pi \tan \left(\frac{\sigma}{2} \right) \right) \left(\left[\left(1 - \frac{\gamma}{\pi} \right) [-2\sin\sigma] [2\cos\sigma]^{-\frac{\gamma}{\pi}} + \right. \right. \\ & \left. \left. [2\cos\sigma]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k (1-k) \sin(2(k-1)\sigma) \right] \exp \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma) \right) + \\ & \frac{1}{F^2} \left([2\cos\sigma]^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \exp \sum_{k=1}^{\infty} -a_k \cos(2(k-1)\sigma) \right) \sin \left[\left(\frac{\gamma}{\pi} - \frac{\beta}{\pi} - 1 \right) \sigma + \left(\frac{\beta}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \arctan \left(\frac{\sin\sigma - r}{\cos\sigma} \right) - \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) \right] = 0 \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients a_k et l'angle γ , faisons une troncation de la série après N terme. On trouve les N coefficients a_k et l'angle γ .

Ainsi on discrétise l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ en N points en introduisant :

$$\sigma(I) = \frac{\pi}{2(N+1)} \left(I - \frac{1}{2} \right) \quad I = 1, \dots, N+1$$

On obtient un système de $N+1$ équation algébrique non linéaire à $N+1$ inconnues, l'angle β et le nombre de Froude F sont des paramètres.

Pour calculer les coefficients a_k et l'angle γ on utilise la méthode de Newton.

III.2.3 Forme de la surface libre :

Une fois que nous avons trouvé les valeurs des coefficients a_k , la forme de la surface libre peut être déterminée en appliquant la relation :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\sigma} = -\frac{c}{\pi} \cotan\left(\frac{\sigma}{2}\right) \exp(-\tau) \cos\theta \\ \frac{dy}{d\sigma} = -\frac{c}{\pi} \cotan\left(\frac{\sigma}{2}\right) \exp(-\tau) \sin\theta \end{cases}$$

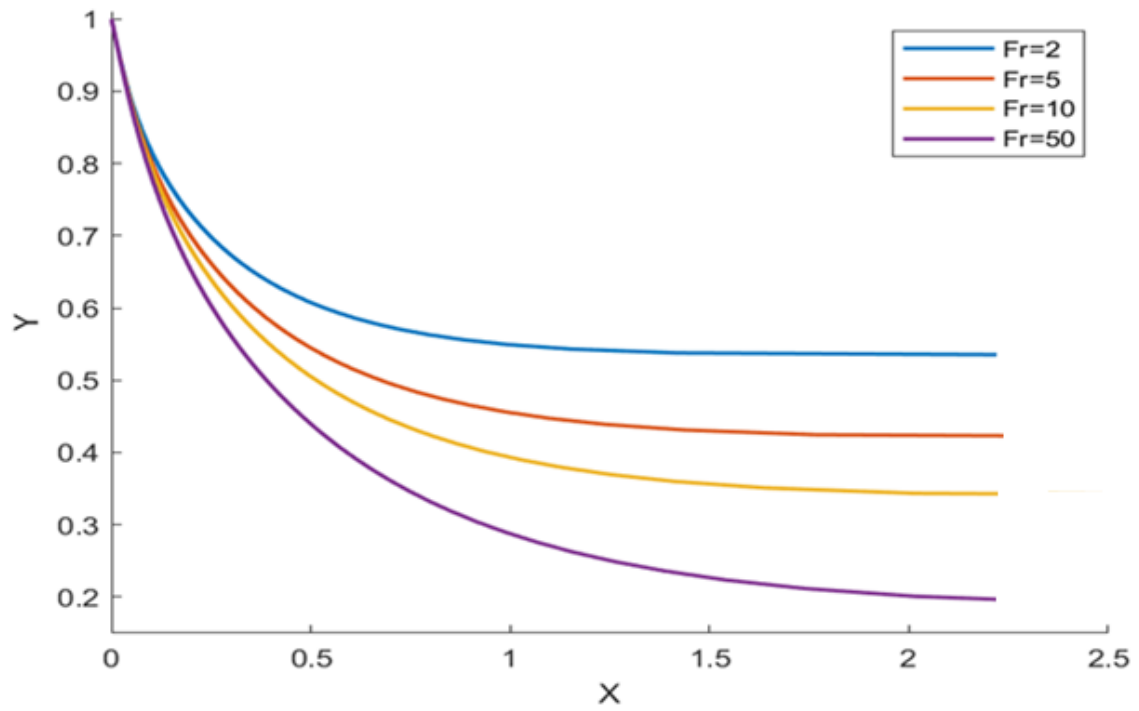
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\sigma(i)} = -\frac{c}{\pi} \cotan\left(\frac{\sigma(i)}{2}\right) [2\cos\sigma(i)]^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \exp(\sum_{k=1}^{\infty} -a_k(\cos(2(k-1)\sigma(i))) \cos \\ \left[\left(\frac{\beta}{\pi} + 1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) \sigma(i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}\right) \arctan\left(\frac{\sin\sigma(i)-r}{\cos\sigma(i)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma(i)) \right] \\ \frac{dy}{d\sigma(i)} = \frac{c}{\pi} \cotan\left(\frac{\sigma(i)}{2}\right) [2\cos\sigma(i)]^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \exp(\sum_{k=1}^{\infty} -a_k(\cos(2(k-1)\sigma(i))) \sin \\ \left[\left(\frac{\beta}{\pi} + 1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) \sigma(i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}\right) \arctan\left(\frac{\sin\sigma(i)-r}{\cos\sigma(i)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma(i)) \right] \end{cases}$$

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement les relations précédentes dans l'intervalle $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ avec les conditions initiales $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

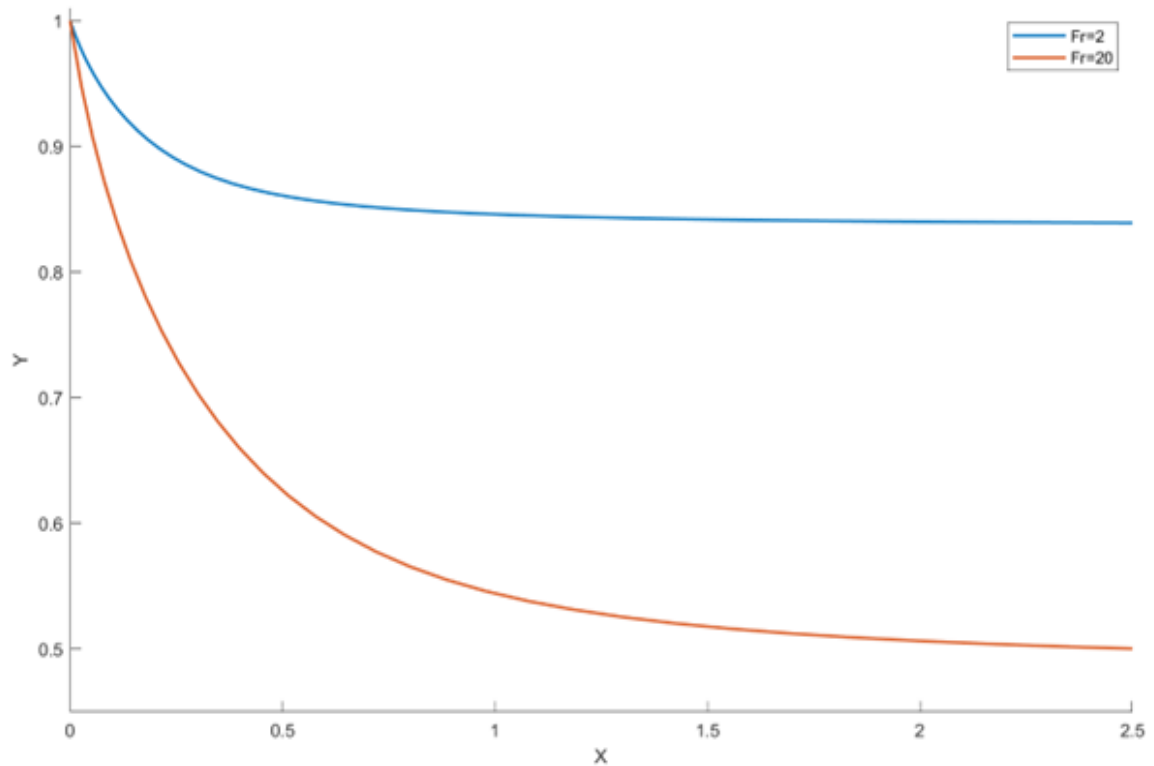
III.2.4 Résultats et discussions :

Nous utilisons la procédure numérique décrite ci-dessus pour calculer la solution du problème pour différentes valeurs du nombre de Froude ($0 < F < \infty$) et l'angle ($0 < \beta < \pi$). Les coefficients a_k décroissent rapidement lorsque n croît. (Voir tableau 8)

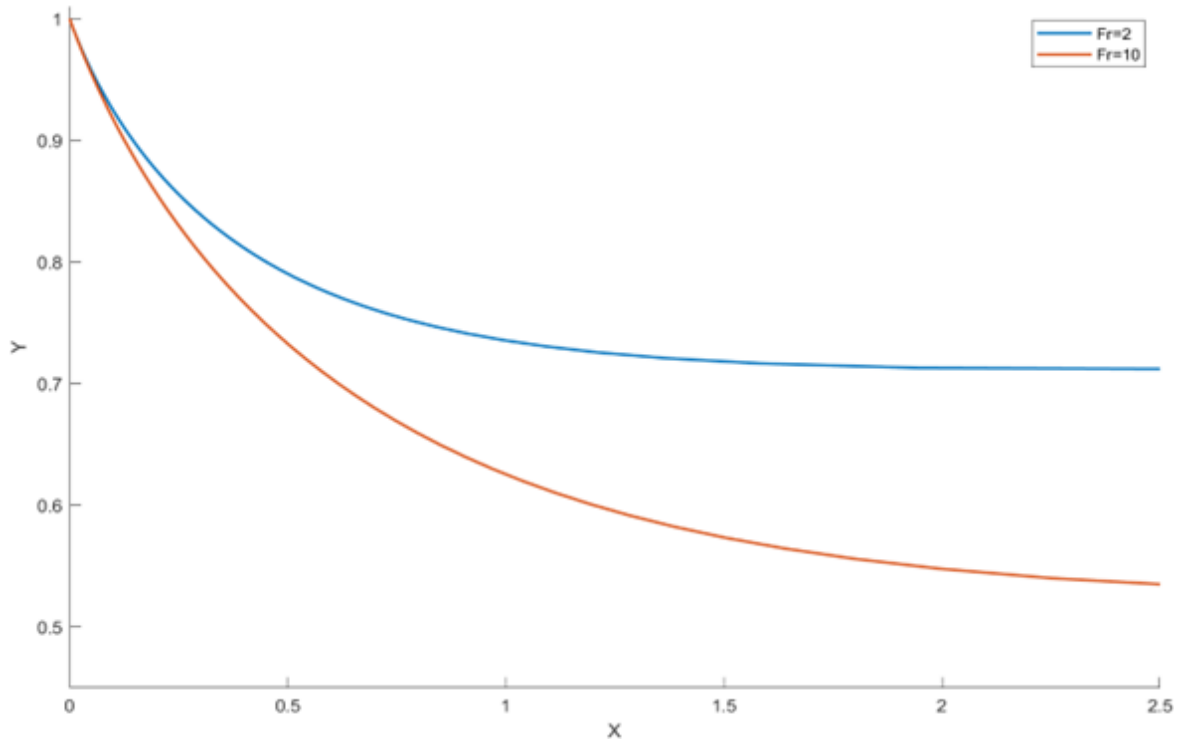
La méthode décrite ci-dessus nous permet de trouver l'angle γ et les coefficients a_k de la série pour chaque $0 < \beta < \pi$. Le tableau 8 montre quelques valeurs de γ et a_k pour différentes valeurs de β pour $Fr > 2$.



3.12: Forme de la surface libre pour $\beta = 0$ et $Fr = 2,5,10,50$

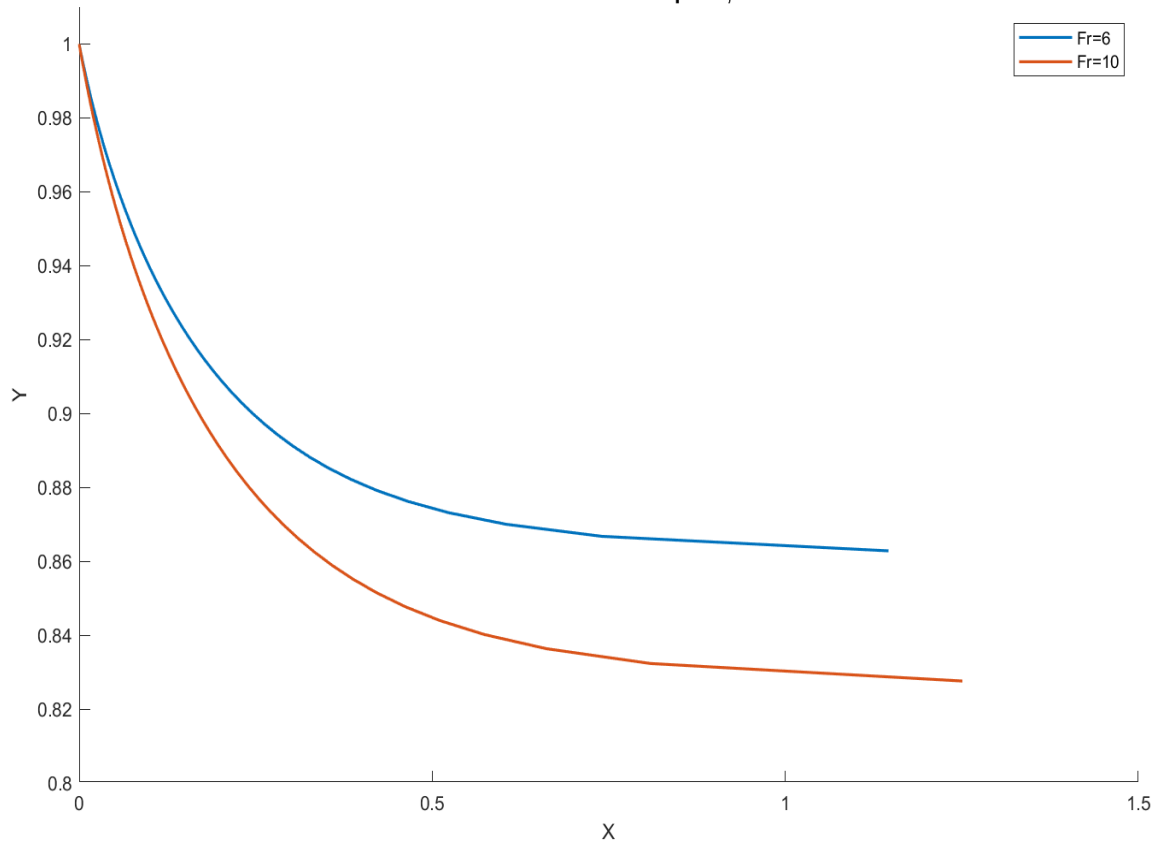


3.13 : Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $Fr = 2,20$



3.14 : Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{4}$ et $Fr = 2,10$

Forme de la Surface Libre pour $\beta = 3\pi/4$



3.15 : Forme de la surface libre pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$ et $Fr = 6, 10$

k	A (k)	$\left(\frac{3}{4}\right)^k$
1	1.0136335273	0.7500000000
2	-0.0205788336	0.5625000000
3	0.0053110151	0.4218750000
4	-0.0027449354	0.3164062500
5	0.0014817165	0.2373046875
6	-0.0009600944	0.1779785156
7	0.0005800523	0.1334838867
8	-0.0004698495	0.1001129150
9	0.0003663807	0.0750846863
10	-0.0002655663	0.0563135147
11	0.0001758979	0.0422351360
12	-0.0001703553	0.0316763520
13	0.0001561911	0.0237572640
14	-0.0001132898	0.0178179480
15	0.0000740341	0.0133634610
16	-0.0000819579	0.0100225958
17	0.0000843309	0.0075169468
18	-0.0000588510	0.0056377101
19	0.0000361891	0.0042282826
20	-0.0000452337	0.0031712119
21	0.0000505929	0.0023784090
22	-0.0000337841	0.0017838067
23	0.0000190355	0.0013378550
24	-0.0000268404	0.0010033913
25	0.0000325890	0.0007525435
26	-0.0000202670	0.0005644076
27	0.0000099633	0.0004233057
28	-0.0000162429	0.0003174793
29	0.0000209720	0.0002381095
30	-0.0000121663	0.0001785821
31	0.0000050009	0.0001339366
32	-0.0000097040	0.0001004524
33	0.0000136793	0.0000753393
34	-0.0000070434	0.0000565045
35	0.0000019542	0.0000423784
36	-0.0000054517	0.0000317838
37	0.0000083424	0.0000238378
38	-0.0000037197	0.0000178784
39	0.0000004345	0.0000134088
40	-0.0000027732	0.0000100566
41	0.0000049363	0.0000075424
42	-0.0000016495	0.0000056568
43	-0.0000003643	0.0000042426
44	-0.0000011063	0.0000031820
45	0.0000023891	0.0000023865
46	-0.0000004853	0.0000017899
47	-0.0000003243	0.0000013424
48	-0.0000002720	0.0000010068
49	0.0000009803	0.0000007551
50	0.0000000248	0.0000005663

Tableau 5 : La comparaison des coefficients a_k de la série (3.22) par la série $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$ et Pour Fr=6

k	A (k)	$\left(\frac{3}{4}\right)^k$
1	0.8453619787	0.7500000000
2	0.0165133545	0.5625000000
3	-0.0079092859	0.4218750000
4	0.0052115333	0.3164062500
5	-0.0037979097	0.2373046875
6	0.0029674235	0.1779785156
7	-0.0023938515	0.1334838867
8	0.0019957451	0.1001129150
9	-0.0016867768	0.0750846863
10	0.0014519049	0.0563135147
11	-0.0012588735	0.0422351360
12	0.0011072341	0.0316763520
13	-0.0009766095	0.0237572640
14	0.0008687427	0.0178179480
15	-0.0007735386	0.0133634610
16	0.0006950194	0.0100225958
17	-0.0006242075	0.0075169468
18	0.0005628122	0.0056377101
19	-0.0005066174	0.0042282826
20	0.0004591777	0.0031712119
21	-0.0004148969	0.0023784090
22	0.0003756141	0.0017838067
23	-0.0003386573	0.0013378550
24	0.0003070748	0.0010033913
25	-0.0002771893	0.0007525435
26	0.0002501466	0.0005644076
27	-0.0002244261	0.0004233057
28	0.0002024229	0.0003174793
29	-0.0001812373	0.0002381095
30	0.0001621110	0.0001785821
31	-0.0001437124	0.0001339366
32	0.0001280369	0.0001004524
33	-0.0001129768	0.0000753393
34	0.0000993889	0.0000565045
35	-0.0000863222	0.0000423784
36	0.0000753935	0.0000317838
37	-0.0000647832	0.0000238378
38	0.0000554647	0.0000178784
39	-0.0000464715	0.0000134088
40	0.0000391531	0.0000100566
41	-0.0000321422	0.0000075424
42	0.0000261836	0.0000056568
43	-0.0000204726	0.0000042426
44	0.0000161399	0.0000031820
45	-0.0000119392	0.0000023865
46	0.0000087369	0.0000017899
47	-0.0000056796	0.0000013424
48	0.0000037018	0.0000010068
49	-0.0000018680	0.0000007551
50	0.0000008971	0.0000005663

Tableau 6 : La comparaison des coefficients a_k de la série (3.22) par la série $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$ et Pour Fr=10

CHAPITRE

IV

**Résolution numérique d'un problème
d'écoulement à travers des parois
solides par la méthode d'équation
intégré-différentielle**

CHAPITRE IV: Résolution numérique d'un problème d'écoulement à travers des parois solides par la méthode d'équation intégrodifférentielle

Résumé :

Afin de mieux comprendre le comportement asymptotique des solutions, nous appliquons une méthode numérique fondée sur une équation intégrodifférentielle au problème étudié précédemment.

Contenu :

Introduction

IV .1 Position du problème

IV .2 Approche intégrale

IV .3 Procédure numérique

IV.4 Forme de la surface libre

IV.5 Résultats et discussions

Introduction :

La méthode intégrro-différentielle constitue une approche hybride combinant les avantages des méthodes intégrales et différentielles pour résoudre les problèmes d'écoulements à surface libre. Son intérêt réside dans sa capacité à traiter des géométries complexes et des singularités locales.

Dans cette section, nous reprenons le problème étudié au chapitre précédent, mais en adoptant cette fois-ci la méthode intégrro-différentielle. Le principe de cette méthode repose sur la reformulation du problème sous forme d'une équation intégrro-différentielle, grâce à l'utilisation de l'intégrale de Cauchy. Cette approche est largement employée dans les recherches dans ce domaine.

Cette méthode a été introduite par P. Guayjarenpnishk et J. Asavanant [28], Frédéric Dias et Vanden-Broeck [24], A. Laiadi et A. Merzougui [1], ainsi que par d'autres chercheurs. Le problème se réduit à un système algébrique de $N + 1$ équations non linéaires qu'on résout par la méthode de Newton.

IV .1 Position du problème :

Selon le chapitre précédent. On a :

$$u = \frac{d\psi}{dy} \quad \text{et} \quad v = -\frac{d\psi}{dx}$$

L'écoulement est irrotationnel, alors sa vorticité est nulle :

$$\nabla \times \vec{u} = 0$$

Et donc il existe une fonction dite potentiel de vitesse telle que :

$$\vec{u} = -\nabla\varphi.$$

Nous nous plaçons aussi en régime permanent de telle sorte que le théorème de Bernoulli soit vérifié le long des lignes de courant $\psi = cte$.

On peut définir un potentiel complexe : $f = \varphi + i\psi$.

La dérivée de ce potentiel par rapport à $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe :

$$\frac{df}{dz} = u - iv$$

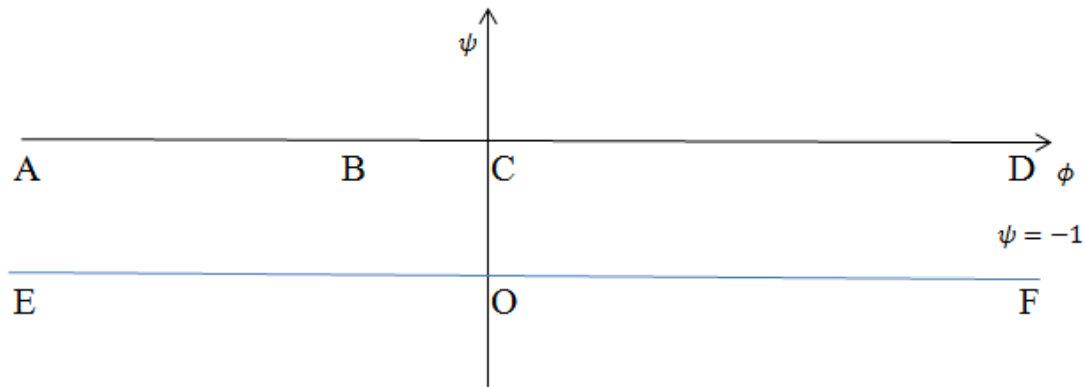


Figure 4.1 Le plan f

L'équation de Bernoulli sur CD est donnée par :

$$q^2 - \frac{2}{\alpha} K = 1 \quad \text{tel que } K = \frac{1}{R}$$

On définit la fonction $\tau - i\theta$ par :

$$\xi = u - iv = \exp(\tau - i\theta)$$

$$K = \frac{1}{R} = \exp(\tau) \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right|,$$

où θ désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale. Nous avons :

Donc L'équation de Bernoulli est :

$$e^{2\tau} - \frac{2}{\alpha} e^{\tau} \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| = 1 \quad \text{sur } CD$$

$$\begin{cases} \frac{Im\xi}{Re\xi} = \tan\beta \Rightarrow \theta = \beta & \text{si } \psi = 0 & \text{et } -\infty < \phi < \phi_B & \text{sur } AB \\ Re\xi = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} & \text{si } \psi = 0 & \text{et } \phi_B < \phi < 0 & \text{sur } BC \\ Im\xi = 0 \Rightarrow \theta = 0 & \text{si } \psi = -1 & \text{et } -\infty < \phi < +\infty & \text{sur } EF \\ \theta \text{ est non connue} & \text{si } \psi = 0 & \text{et } 0 < \phi < +\infty & \text{sur } CD \end{cases} \quad (4.1)$$

Le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable f est une bande infinie dans la région $-1 < \psi < 0$ et $-\infty < \phi < \infty$.

La transformation conforme d'une bande infinie dans le plan f au demi plan inférieur ξ est donnée par la relation :

$$\xi = \eta + i\mu = e^{\pi f} = e^{\pi(\phi+i\psi)} = e^{\pi\phi}(\cos \pi\psi - i \sin \pi\psi) . \quad (4.2)$$

Le plan complexe ξ est donnée dans (la figure 4.2)

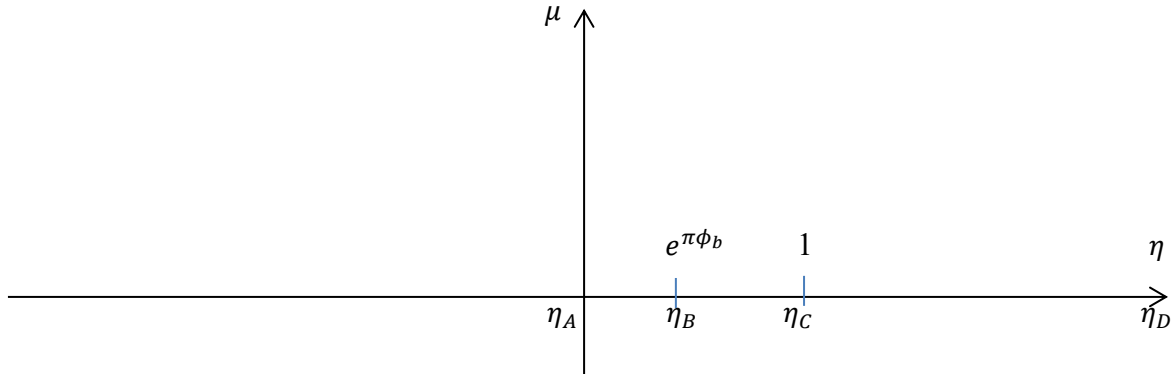


Figure 4.2 Le plan complexe $\xi = \eta + i\mu$

Les conditions aux limites (4.1) dans le plan f deviennent alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = \beta & \Rightarrow \mu = 0 \text{ et} & 0 < \eta < e^{\pi\phi_b} \text{ sur } AB \\ \theta = -\frac{\pi}{2} & \Rightarrow \mu = 0 \text{ et} & e^{\pi\phi_b} < \eta < 1 \text{ sur } BC \\ \theta = 0 & \Rightarrow \mu = 0 \text{ et} & 0 < \eta < \infty \text{ sur } EF \\ \theta \text{ est non connue} & \Rightarrow \mu = 0 \text{ et} & 1 < \eta < \infty \text{ sur } CD \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Nous cherchons $\xi(\tau; \theta)$ qui vérifie l'équation (4.2) avec les conditions (4.3)

En utilisant la technique d'intégrale de Cauchy dans le plan ξ .

IV .2 Approche intégrale :

Nous considérons ensuite la vitesse complexe est une fonction analytique de ξ . En appliquant la formule intégrale de Cauchy à $\Omega = \tau - i\theta = \ln \xi$ et en supposant que le contour est constitué d'un demi-cercle de centre à $\xi = 0$ et de rayon R (voir figure 4.3).

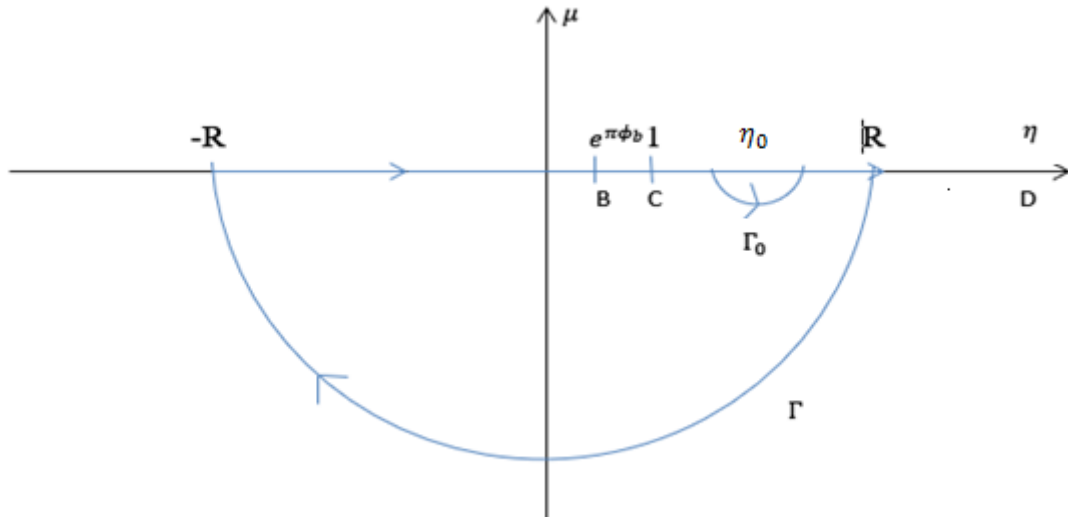


Figure 4.3 : Le plan ξ

Selon la formule de Plemelj (**voir** [12]), on définit :

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (4.4)$$

Nous pouvons dériver un tel système pour le problème de la figure 4.1 en appliquant la formule de l'équation intégrale de Cauchy dans le plan (ϕ, ψ) de la figure 4.2 à la fonction $\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)$ avec un contour Γ constitué de l'axe $\mu = 0$ et d'un demi-cercle dans $\mu < 0$ centré à l'origine $\mu = \eta = 0$ et de grand rayon arbitraire R .

$$\tau(\eta_0, 0) - i\theta(\eta_0, 0) = \oint_{\Gamma} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi$$

Où η_0 est une image d'un point sur la surface libre CD

Γ_0 est un arc de rayon r (voir figure 4.3). En décomposant l'intégrale (4.4) sur le contour Γ ; on trouve :

$$\oint_{\Gamma} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi = \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi + \int_{\Gamma_0} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi + \int_{-R}^R \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\eta - \eta_0} d\eta \quad (4.5)$$

La première intégrale porte sur une fonction analytique le long du chemin fermé Γ . Par conséquent, d'après le théorème de Cauchy, cette intégrale (le membre de gauche de l'équation (4.5)) est nulle. L'équation (4.5) se réduit alors à :

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi + \int_{\Gamma_0} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi + \int_{-R}^R \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\eta - \eta_0} d\eta = 0 \quad (4.6)$$

Si $R \rightarrow \infty$: L'écoulement tend vers un état uniforme où la vitesse adimensionnelle s'approche de 1.

$$u - iv \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu) \rightarrow 0$$

Par conséquent, la limite de la première intégrale lorsque $R \rightarrow \infty$, devient :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi = 0$$

On pose : $\xi = \eta_0 + re^{i\delta} \Rightarrow d\xi = ire^{i\delta} d\delta$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi &= \int_{\pi}^0 \frac{\tau(\eta_0 + r\cos\delta, r\sin\delta) - i\theta(\eta_0 + r\cos\delta, r\sin\delta)}{re^{i\delta}} ire^{i\delta} d\delta \\ &= \int_{\pi}^0 \tau(\eta_0 + r\cos\delta, r\sin\delta) - i\theta(\eta_0 + r\cos\delta, r\sin\delta) i d\delta \end{aligned}$$

Lorsque $r \rightarrow 0$, alors :

$$= (\tau(\eta_0, 0) - i\theta(\eta_0, 0))i \int_{\pi}^0 d\delta = -\pi i (\tau(\eta_0, 0) - i\theta(\eta_0, 0))$$

En remplaçant ce résultat dans (4.5), on obtient :

$$\tau(\eta_0, 0) - i\theta(\eta_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\xi - \eta_0} d\xi + \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\eta - \eta_0} d\eta$$

Si $R \rightarrow \infty$:

$$\tau(\eta_0, 0) - i\theta(\eta_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\eta, \mu) - i\theta(\eta, \mu)}{\eta - \eta_0} d\eta \quad (4.7)$$

En prenant la partie réelle de (4.7), la relation intégrale entre θ et τ , sur la surface libre CD, s'écrit alors :

$$\tau(\eta_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta \quad (4.8)$$

Où $\tau(\eta)$ et $\theta(\eta)$ désignent la valeur de τ et θ sur les surfaces libres CD.

L'intégrale est séparée en quatre parties donner par :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\theta(\eta)}{\eta - \eta_0} + \int_0^{e^{\pi\phi_b}} \frac{\theta(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta + \int_{e^{\pi\phi_b}}^1 \frac{\theta(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta + \int_1^{+\infty} \frac{\theta(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{e^{\pi\phi_b}} \frac{\beta}{\eta - \eta_0} d\eta + \int_{e^{\pi\phi_b}}^1 \frac{\frac{\pi}{2}}{\eta - \eta_0} d\eta + \int_1^{+\infty} \frac{\theta(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta \right) \\
 &= \frac{\beta}{\pi} \ln \left| \frac{\eta_0 - e^{\pi\phi_b}}{\eta_0} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \eta_0}{e^{\pi\phi_b} - \eta_0} \right| + \int_1^{+\infty} \frac{\theta(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta \\
 \tau(e^{\pi\phi_0}) &= \frac{\beta}{\pi} \ln \left| \frac{e^{\pi\phi_0} - e^{\pi\phi_b}}{e^{\pi\phi_0}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \eta_0}{e^{\pi\phi_b} - \eta_0} \right| + \int_0^{+\infty} \frac{\theta(e^{\pi\phi})}{e^{\pi\phi} - e^{\pi\phi_0}} d\phi \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Cette équation est valable le long de la surface libre $\psi = 0$ et donc en utilisant (4.4) on obtient :

$$\xi = \eta + i\mu = e^{\pi f} = e^{\pi\phi} \Rightarrow \eta = e^{\pi\phi} \quad \text{et} \quad \eta_0 = e^{\pi\phi_0}$$

On pose : $\tau'(\phi_0) = \tau(e^{\pi\phi_0})$ et $\theta'(\phi) = \theta(e^{\pi\phi})$

La condition de Bernoulli s'écrit maintenant en termes de τ' et θ' comme :

$$e^{2\tau'} - \frac{2}{\alpha} e^{\tau'} \left| \frac{d\theta'}{d\phi} \right| = 1 \quad \text{sur } CD \quad (\psi = 0 \text{ et } 0 < \phi < +\infty) \quad (4.10)$$

En remplaçant (4.9) par (4.10) on obtient une équation intégrale différentielle non linéaire fonction inconnue θ' .

Ensuite, en utilisant la relation :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dz} &= u - iv = \exp(\tau - i\theta) \\
 \frac{dz}{df} &= \frac{1}{u - iv} = \exp(i\theta - \tau) \\
 \Rightarrow dz &= \exp(i\theta - \tau) (d\phi + id\psi)
 \end{aligned}$$

Et pour $d\psi = 0$ sur la surface libre. On obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases}$$

IV .3 Procédure numérique :

Dans le plan potentiel complexe f , les points de la surface libre CD sont définis par :

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad 0 < \varphi < +\infty.$$

Pour discrétiser l'intervalle $]0 ; a[$ en N points (où a est un nombre positif suffisamment grand), nous utilisons une subdivision avec un pas de longueur h . Les points de discrétisation sont alors donnés par :

$$\phi_i = (i - 1)h \quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

Le calcul de l'intégrale est effectué à l'aide de la règle des trapèzes, impliquant une sommation sur les points milieux des sous-intervalles. Chaque point milieu ϕ_M est défini comme suit :

$$\phi_M = \left(\frac{\phi_{i+1} + \phi_i}{2} \right) \quad i = 1, \dots, N - 1$$

Alors :

$$\tau'(\phi_M) = \frac{\beta}{\pi} \ln \left| \frac{e^{\pi\phi_M} - e^{\pi\phi_b}}{e^{\pi\phi_M}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - e^{\pi\phi_M}}{e^{\pi\phi_b} - e^{\pi\phi_M}} \right| + \int_0^{+\infty} \frac{\theta'(\phi)(e^{\pi\phi})}{e^{\pi\phi} - e^{\pi\phi_M}} d\phi$$

En utilisant la règle des trapèzes, on obtient :

$$\tau'_M = \tau'(\phi_M) = \frac{\beta}{\pi} \ln \left| \frac{e^{\pi\phi_M} - e^{\pi\phi_b}}{e^{\pi\phi_M}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - e^{\pi\phi_M}}{e^{\pi\phi_b} - e^{\pi\phi_M}} \right| + \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j(e^{\pi\phi_j})\omega_j h}{e^{\pi\phi_j} - e^{\pi\phi_M}} \quad (4.11)$$

La dérivée $\frac{d\theta}{d\phi}$ approximée par une différence finie, donnée par :

$$\frac{d\theta}{d\phi} \approx \left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} \right) \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (4.12)$$

En remplaçant (4.11) et (4.12) dans (4.13) on obtient :

$$e^{2\tau'_M} - \frac{2}{\alpha} e^{\tau'_M} \left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} \right) = 1 \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (4.13)$$

$$\text{Si } |x| \rightarrow \infty : \quad \theta_{N+1} = \theta_N$$

On aboutit ainsi à un système de N équations non linéaires à N inconnues. Ces inconnues sont les θ_i pour i allant de 1 à N . La valeur de ϕ_b peut être fixée comme un paramètre du système. Pour résoudre ce système, nous employons la méthode de Newton.

IV.4 La forme de la surface libre :

La forme de la surface libre est déterminée par l'intégration numérique des relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases}$$

Et en utilisant la méthode d'Euler ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{i+1} = x_i + h e^{-\tau'_M} \cos \theta_M \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{i+1} = y_i + h e^{-\tau'_M} \sin \theta_M \end{cases}$$

$$\text{Tel que : } \theta_M = \left(\frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} \right)$$

IV.5 Résultats et discussion :

La méthode de résolution décrite précédemment est appliquée pour résoudre le système non linéaire pour différentes valeurs des trois paramètres le nombre de Weber α , l'angle β et la valeur de ϕ_b .

a/Solution sans tension de surface :

En l'absence de tension de surface ($\alpha \rightarrow \infty$), l'équation (4.13) prend la forme suivante :

$$e^{2\tau'_M} = 1 \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad \text{sur } CD$$

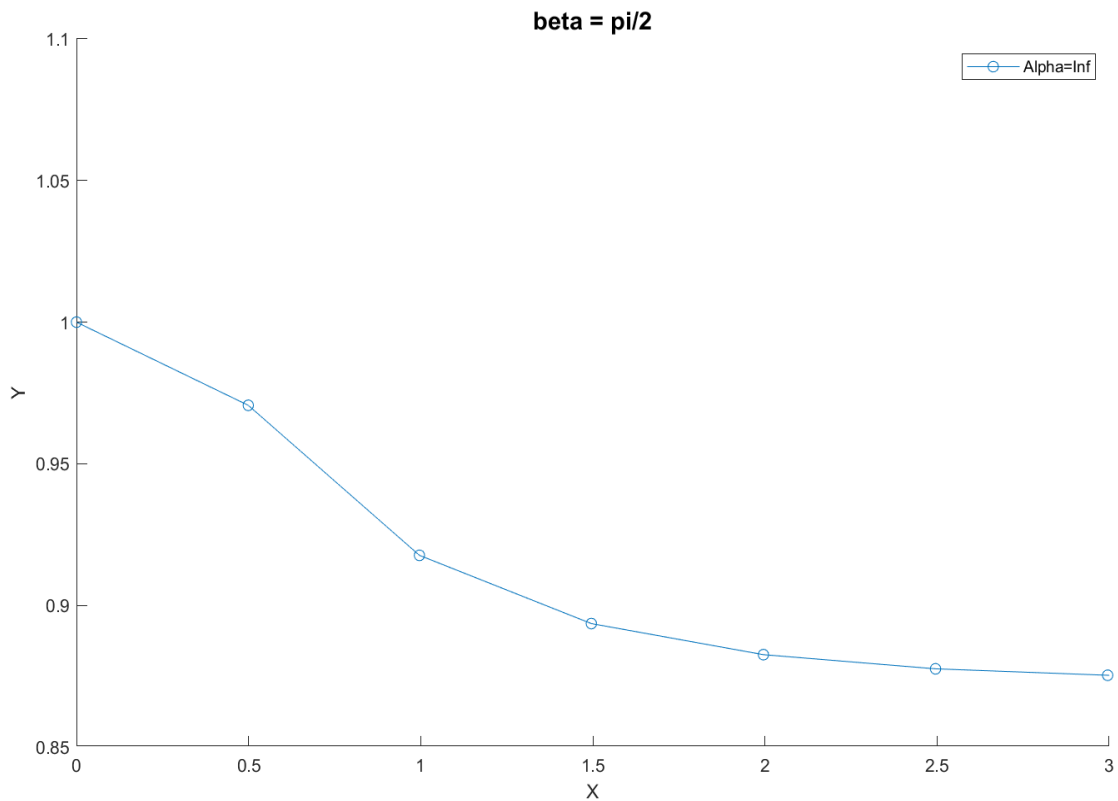


Figure4.4 Solution sans tension de surface pour $\beta = \frac{\pi}{2}$

B/Solution avec l'effet de tension de surface :

La même méthode pour résoudre le système non linéaire pour différentes valeurs du nombre de weber ($0 < \alpha < \infty$) et l'angle β et pour plusieurs valeurs de $e^{\pi\phi_b}$ $0 < e^{\pi\phi_b} < 1$. La surface libre est représentée pour $N = 200$ et en les cas suivants : $\beta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = 3.6, 10, 50, 100, \alpha \gg 1000$. Le calcul numérique montre qu'il existe une valeur minimale de $\alpha^* = 3,6$ en dessous de laquelle la convergence n'est plus assurée et on remarque que pour $\alpha \geq 200$ tous les graphes de la forme de la surface libre sont les mêmes et coïncident avec la solution exacte. Toutefois, aucune solution physique n'existe pour $\alpha < 3,6$.

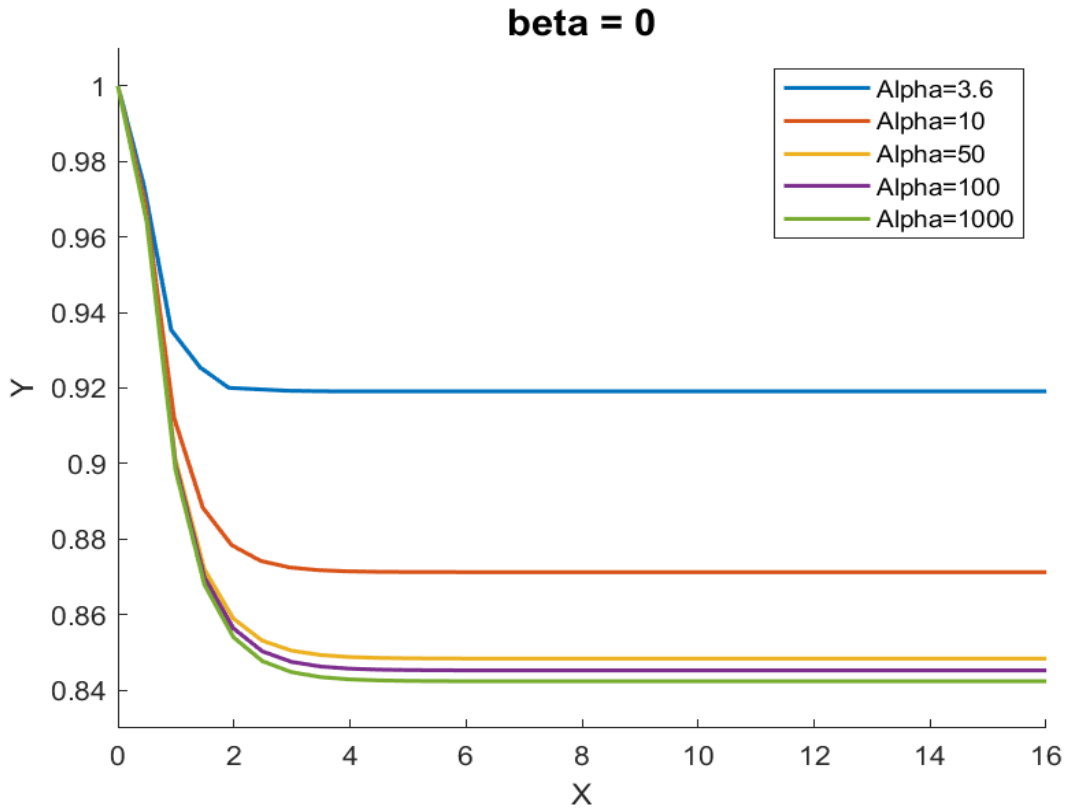


Figure4.5 Forme de surface libre pour $\beta=0$

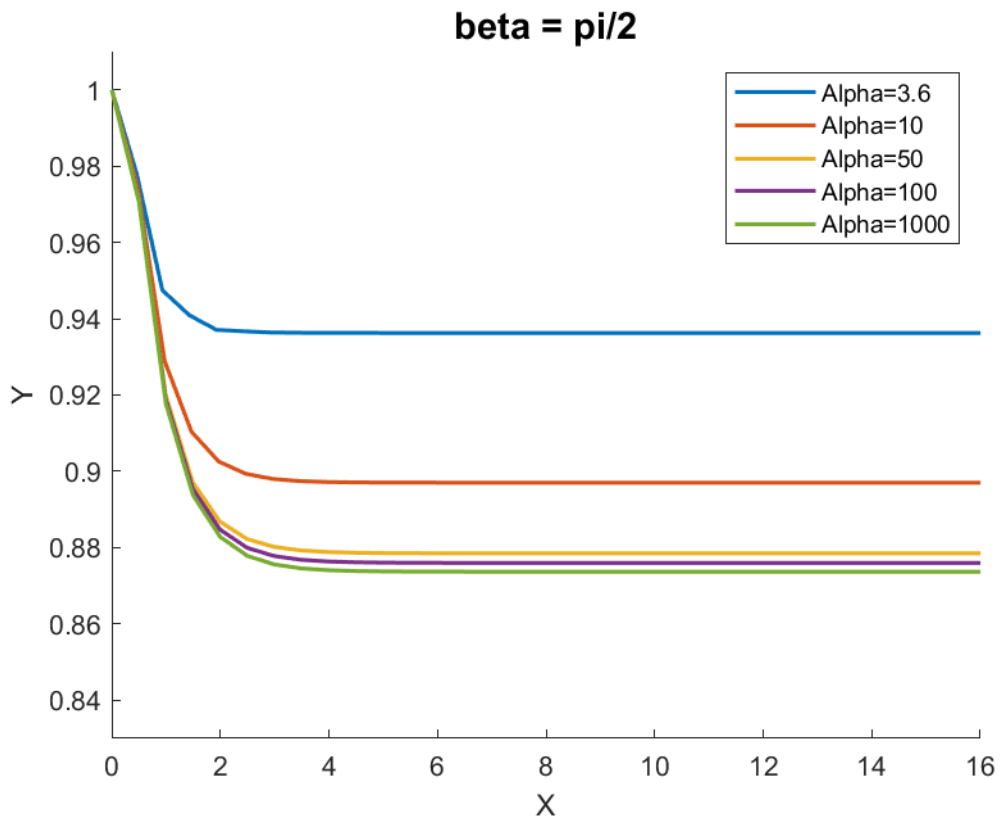


Figure4.6 Forme de surface libre pour $\beta=\frac{\pi}{2}$

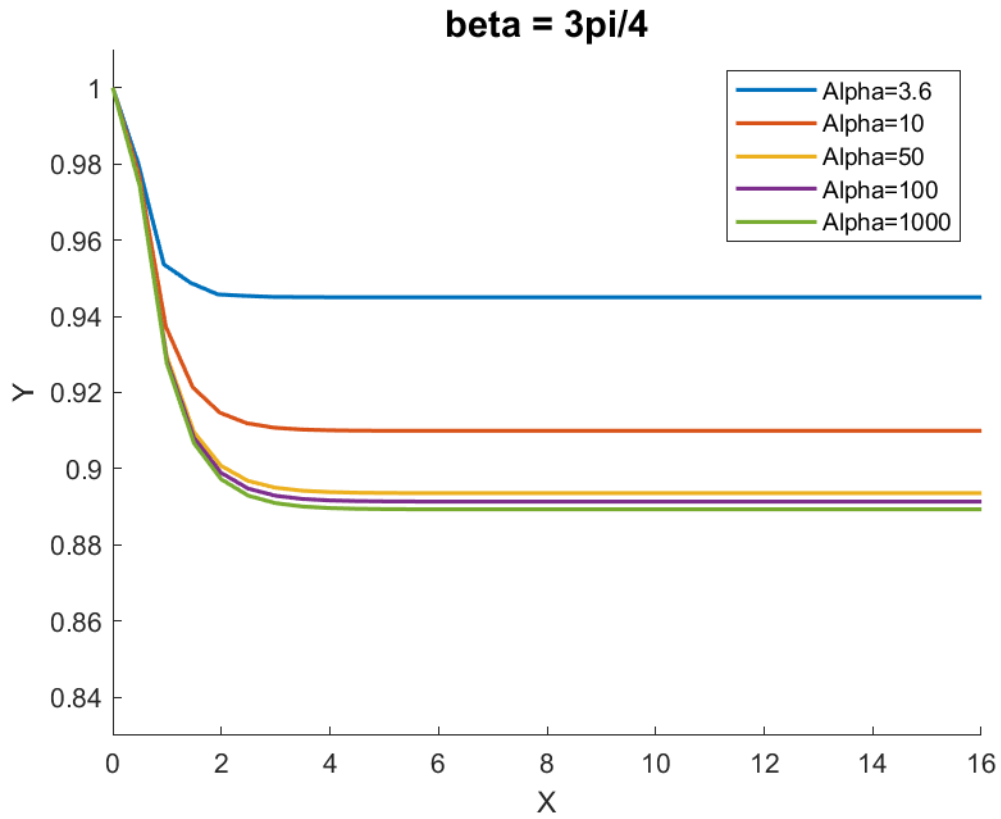


Figure4.7 Forme de surface libre pour $\beta = \frac{3\pi}{4}$

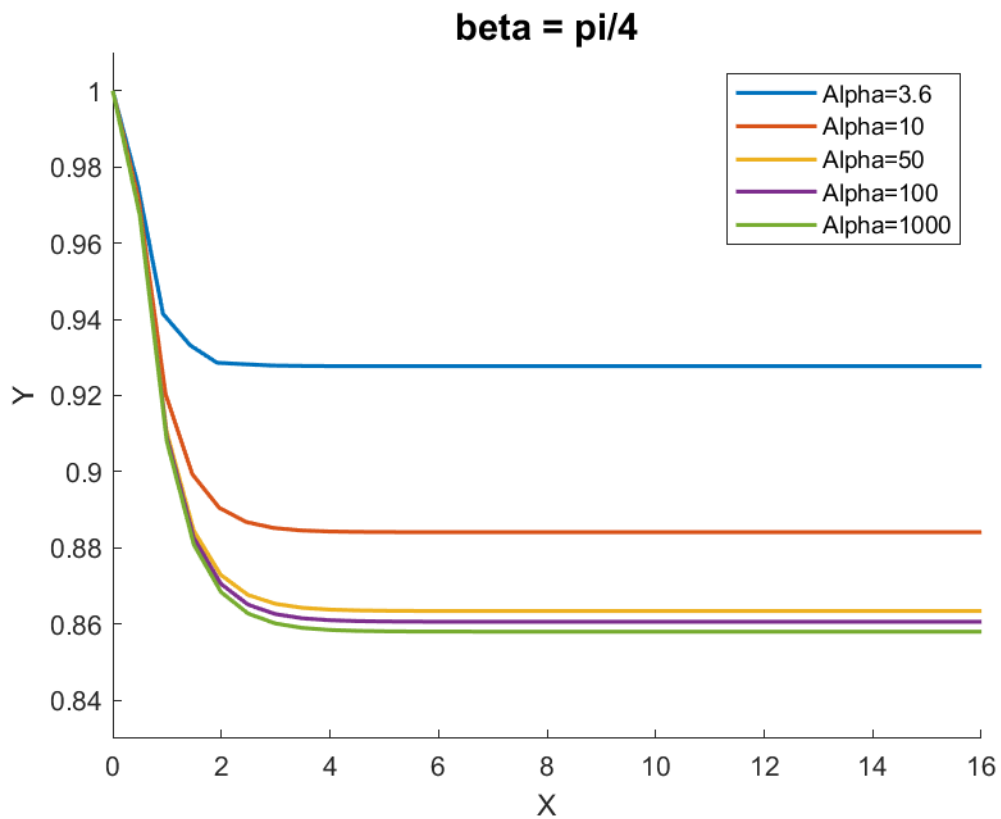


Figure4.8 Forme de surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{4}$

CHAPITRE

V

Application de la méthode des volumes finis

Chapitre V : Application de la méthode des volumes finis

Résumé :

Dans ce dernier chapitre, nous présentons la méthode des volumes finis et son application aux écoulements à surface libre. Nous avons ensuite réalisé des simulations numériques à l'aide du logiciel ANSYS Fluent.

Contenu :

Introduction

V .1 Définitions

V .2 Principe général de la méthode des volumes finis

V.3 Application à l'équation de Bernoulli

V.4.Procédure de résolution en utilisant le code Fluent

Introduction :

La méthode des volumes finis (FVM) est l'une des méthodes numériques les plus puissantes et les plus utilisées dans le domaine de la dynamique des fluides numérique (CFD). Elle est particulièrement appréciée pour sa capacité à résoudre les équations aux dérivées partielles qui régissent le comportement des fluides, tout en préservant les quantités physiques fondamentales telles que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie au niveau discret. Cette propriété de conservation en fait un outil unique pour aborder les problèmes liés aux lois de conservation. La méthode des volumes finis (FVM) a été introduite dans les années 70 par McDonald, McCormack et Paullay .

L'un des points forts de cette méthode est son applicabilité aux géométries complexes, telles que les conduits et tuyaux de forme irrégulière, où il peut être difficile, voire impossible, d'obtenir des solutions analytiques, en particulier celles basées sur l'équation de Bernoulli. Dans ce contexte, la méthode des volumes finis permet d'intégrer des effets approximatifs tels que la viscosité ou la compressibilité, l'équation de Bernoulli servant de première approximation ou de cas limite.

Bien que l'équation de Bernoulli, dans sa forme classique, se limite à décrire des fluides incompressibles et non visqueux à l'état stationnaire, elle reste une base conceptuelle essentielle pour comprendre les relations fondamentales entre la pression, la vitesse et la hauteur dans les écoulements de fluides. La méthode des volumes finis s'inscrit naturellement dans cette continuité, offrant la possibilité d'étendre ces principes à des scénarios plus complexes. Ainsi, il peut être utilisé pour explorer des configurations où l'équation de Bernoulli n'est qu'un élément d'un système global, ou même comme première approximation dans certaines circonstances spécifiques.

En tant que pierre angulaire de la dynamique des fluides numérique, la méthode des volumes finis est largement adoptée par les communautés scientifiques et industrielles. Elle est utilisée quotidiennement par des milliers de chercheurs et d'ingénieurs comme H. K. Versteeg [34] ; M. Perić ; J. H. Ferziger et R. L. Street [35] F. Berrahil, A. Cheriet et de nombreux chercheurs à travers le monde pour modéliser des écoulements allant de systèmes simples, tels que ceux décrits par l'équation de Bernoulli, à des phénomènes complexes rencontrés dans divers secteurs de l'ingénierie et des sciences. Le grand nombre

de publications et d'applications témoigne de son importance et de son rôle central dans l'avancement des connaissances en mécanique des fluides.

V .1 Définitions

V .1.1 Maillages du domaine :

Le domaine physique est divisé en un ensemble de volumes de contrôle (ou cellules) bidimensionnels. Ces volumes peuvent être structurés (grille régulière) ou non structurés (triangles, quadrilatères irréguliers). Plus récemment, une troisième catégorie a émergé : les maillages hybrides, qui combinent les atouts des deux types de maillages pour traiter des configurations encore plus complexes. Le choix du type de maillage dépend de la géométrie du problème et des conditions aux limites.

1. Maillages structurés :

Dans ce type de maillage, on peut repérer chaque point (nœud) très facilement avec des coordonnées simples, comme si on donnait un numéro de ligne et un numéro de colonne (par exemple, le point (i, j) en 2D).

Pour construire une partie de ce maillage (un bloc), on a besoin de définir :

- * Combien de points on aura dans chaque direction.
- * Les coordonnées exactes de tous ces points dans l'espace (x et y en 2D).
- * Le nombre de petites zones (volumes de contrôle) qui se forment entre ces points, et qu'on peut aussi identifier facilement.

Cependant, ce type de maillage éprouve des difficultés à s'adapter aux formes compliquées en un seul morceau. Par exemple, impossible de faire un maillage structuré parfait pour un disque sans créer des zones très écrasées sur les bords. Pour des formes complexes comme une aile d'avion en 3D, on est obligé d'utiliser plusieurs blocs structurés qu'il faut raccorder entre eux. De plus, les lignes du maillage doivent aller jusqu'aux limites de la zone étudiée.

Le grand avantage des maillages structurés, c'est qu'il est très facile de retrouver et d'organiser les informations (les zones, les points, les surfaces de contact) grâce à ces fameux numéros (i, j) . De plus, on peut orienter les lignes du maillage dans le sens de l'écoulement de l'air ou de l'eau, ce qui peut simplifier les calculs.

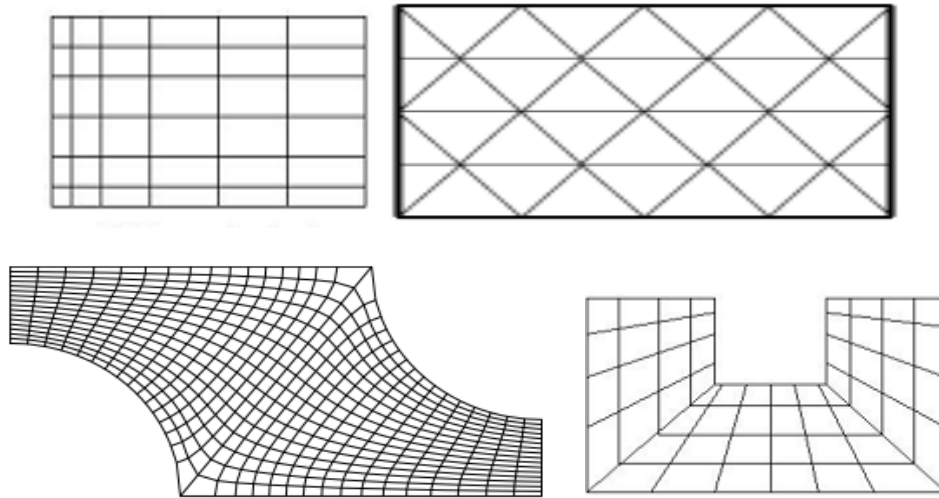


Figure 5.1: maillages structurés

2. Un maillage non structuré :

Un maillage non structuré est construit à partir d'un ensemble de points (les nœuds) dont on connaît les coordonnées dans l'espace (x, y, z) . Ensuite, on définit les petites zones (les volumes) en disant quels points forment les coins de chaque zone. C'est ce qu'on appelle la table de connectivité.

Contrairement au maillage structuré, ici, il n'y a pas d'ordre simple comme les lignes et les colonnes. Pour savoir quels points forment une zone, il faut consulter cette table de connectivité. C'est comme chercher dans une liste pour voir quelles pièces du puzzle sont connectées. Donc, retrouver des informations dans ce type de maillage est plus compliqué.

Un maillage non structuré peut être composé de différents types de formes géométriques mélangées : des tétraèdres (des pyramides à base triangulaire) des prismes, des pyramides classiques, des hexaèdres (des cubes déformés) ou un mélange de tout ça. On parle alors de maillage non structuré multi-éléments.

Le grand avantage de cette approche, c'est la rapidité de création du maillage. On peut généralement générer un maillage non structuré pour une forme complexe sur un ordinateur normal en quelques heures. Par contre, obtenir un maillage de bonne qualité pour que les calculs soient précis peut être plus difficile. Il faut souvent essayer plusieurs configurations et vérifier si les formes des zones sont adaptées à l'écoulement qu'on veut étudier. Visualiser et analyser la qualité de ces maillages complexes peut devenir une tâche très ardue, surtout quand il y a beaucoup de zones.

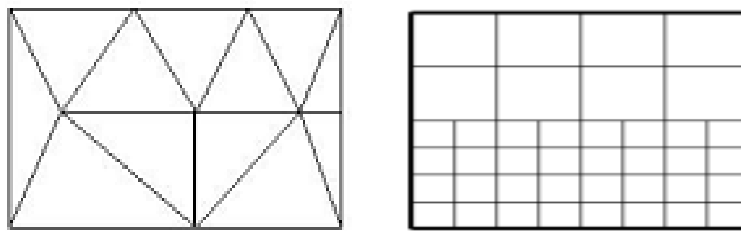


Figure 5.2: maillages non structurés

3. Maillages hybrides :

Les maillages hybrides combinent à la fois des zones bien ordonnées comme dans les maillages structurés, et des zones plus flexibles avec des formes variées comme dans les maillages non structurés.

Parfois le terme "hybride" est utilisé pour parler uniquement des maillages non structurés qui utilisent plusieurs types de formes (comme des triangles et des carrés mélangés). Mais ici, on parle vraiment d'un mélange de zones structurées et non structurées.

Pour faire le lien entre ces différentes zones, on a deux options :

Points coïncidents : Les points à la limite entre la zone structurée et la zone non structurée se touchent parfaitement. C'est comme assembler deux puzzles où les bords des pièces correspondent exactement.

Points non coïncidents : Les points à la limite ne se touchent pas forcément. C'est plus flexible car on n'a pas besoin d'avoir une correspondance parfaite entre les points des deux types de maillage.

L'idée principale des maillages hybrides est de profiter des avantages de chaque type : la simplicité et l'efficacité des maillages structurés dans les zones

où la géométrie est simple et où on peut aligner le maillage avec l'écoulement, et la flexibilité des maillages non structurés pour s'adapter aux formes complexes.

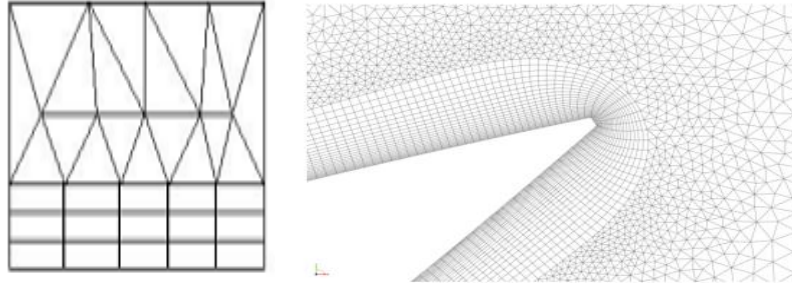


Figure 5.3: maillages hybrides

Les maillages non structurés sont flexibles et rapides à créer pour des formes complexes, mais l'organisation des données est moins simple et obtenir une qualité optimale peut demander plus d'efforts et les maillages structurés sont simples à organiser et efficaces quand la forme est régulière, mais ils deviennent compliqués à utiliser et longs à créer pour les formes complexes. Les maillages hybrides sont un mélange intelligent de maillages structurés et non structurés pour s'attaquer aux problèmes complexes en mécanique des fluides, en essayant de combiner leurs forces respectives.

V .1. 2 Volumes de contrôle (cellules) :

Les volumes de contrôle ou cellules sont les éléments de base du maillage dans la méthode des volumes finis. Ils représentent les petites portions de l'espace sur lesquelles les équations de conservation sont intégrées pour obtenir un système d'équations algébriques qui peut être résolu numériquement. Le choix et la qualité de ces volumes de contrôle (leur taille, leur forme, leur arrangement) ont un impact significatif sur la précision et la stabilité de la solution numérique.

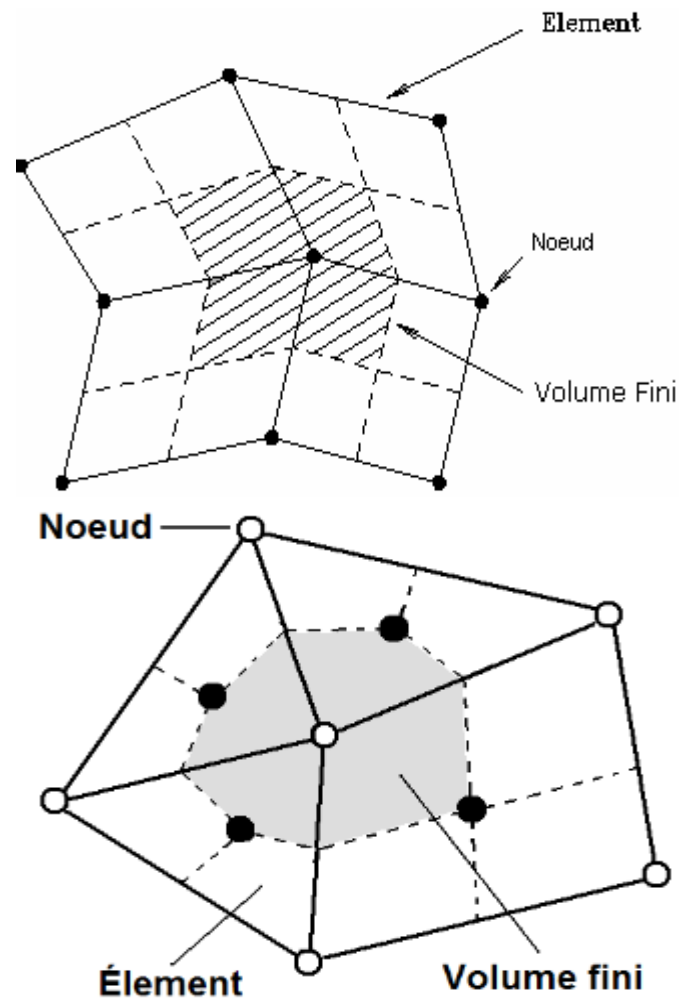


Figure 5.4: types de cellules

V.1.3 ANSYS Fluent :

ANSYS Fluent est un puissant outil de simulation numérique des fluides (CFD). Ce logiciel permet de prédire le comportement des écoulements en résolvant les équations fondamentales (équations de bilan) à l'aide de la méthode des volumes finis et d'une vaste bibliothèque de schémas de discrétisation.

Fluent excelle par son éventail étendu de capacités pour modéliser des phénomènes physiques complexes tels que l'écoulement des fluides, la turbulence, le transfert de chaleur et les réactions chimiques. Son champ d'application industriel est remarquablement large, allant de l'aérodynamique des ailes d'avion à la combustion dans les fours, en passant par les colonnes à bulles, les plateformes pétrolières, l'écoulement sanguin, la fabrication de

semi-conducteurs, la conception de salles blanches et les usines de traitement des eaux usées.

V.2. Principe général de la méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires (ou cellules), les équations aux dérivées partielles représentant le problème physique. En particulier, pour une équation comme celle de Bernoulli, cette méthode permet de capturer les variations spatiales des variables physiques telles que la pression, la vitesse ou la hauteur dans un domaine bidimensionnel.

V.2. 1 Discrétisation du domaine (maillage) : Le domaine physique où l'on cherche la solution est divisé en un ensemble de petits sous-domaines non chevauchants appelés volumes de contrôle ou cellules. Ces volumes peuvent avoir des formes variées (hexaèdres, tétraèdres en 3D ; quadrilatères, triangles en 2D ; intervalles en 1D).

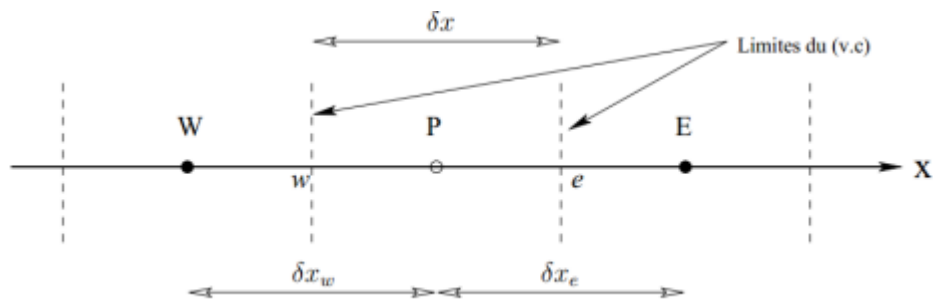


Figure 5.5: un maillage unidimensionnel

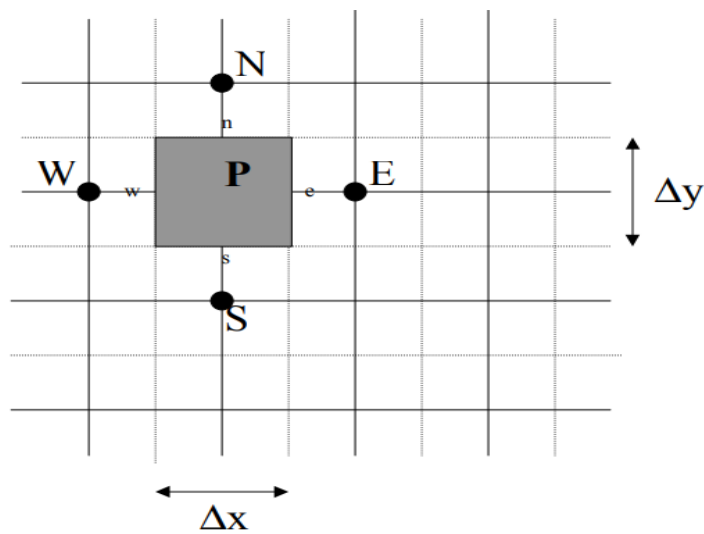


Figure 5.6: un maillage bidimensionnel

V.2. 2 Intégration sur les volumes de contrôle :

L'équation aux dérivées partielles à résoudre est intégrée sur chaque volume de contrôle. Cette étape transforme les équations différentielles en équations intégrales qui décrivent les variations de la quantité étudiée dans l'espace et dans le temps. Cette équation intégrale exprime les relations entre les quantités à la surface du volume de contrôle et la variation de la quantité à l'intérieur du volume, ce qui facilite souvent la résolution du problème.

V.2. 3 Application du Théorème de la Divergence (Théorème de Green - Ostrogradski) :

Pour les termes de flux (comme la chaleur, la quantité de mouvement, la masse), le théorème de la divergence est appliqué pour convertir les intégrales de volume en intégrales de surface sur les faces des volumes de contrôle. Cela permet d'exprimer les flux à travers les frontières des cellules

Formule de Green-Ostrogradski :

Soit un volume V de frontière S sur laquelle est définie en tout point régulier la normale unitaire extérieure \vec{n} . Soient A , \vec{A} et $\bar{\bar{A}}$ des champs scalaires, vectoriels et tensoriels d'ordre deux, respectivement, continus et dérivables sur V . On a :

$$\int_S A \vec{n} ds = \int_V \overrightarrow{grad} A dV \Leftrightarrow \int_S A n_i ds = \int_V A_{,i} dV$$

$$\int_S \vec{A} \vec{n} ds = \int_V div \vec{A} dV \Leftrightarrow \int_S A_i n_i ds = \int_V A_{i,i} dV$$

$$\int_S \bar{\bar{A}} \vec{n} ds = \int_V \overrightarrow{div} \bar{\bar{A}} dV \Leftrightarrow \int_S A_{ij} n_j ds = \int_V A_{ij,j} dV$$

La notation $A_{,i}$ indique la dérivée partielle de A par rapport à la i^e coordonnée. La formule de Green-Ostrogradski porte aussi le nom de théorème de la divergence dans certains ouvrages.

V.2. 4 Approximation des flux aux interfaces :

Les intégrales de surface représentant les flux à travers les faces des volumes de contrôle doivent être approximées en utilisant les valeurs des variables aux centres ou sur les faces des cellules voisines. Différents schémas d'approximation existent (par exemple, schéma centré, schéma décentré amont/aval).

1. Schéma centré :

Un schéma centré utilise des points de maillage situés de part et d'autre du point où la dérivée est approximée. L'idée est d'obtenir une approximation plus symétrique et souvent plus précise.

Du premier ordre :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

Où Δx est la taille du pas spatial et u_i représente la valeur de la variable u au point de maillage i .

De deuxième ordre :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

Les schémas centrés ont typiquement un ordre de précision plus élevé que les schémas décentrés pour la même largeur de stencil (nombre de points utilisés). Les schémas centrés peuvent être instables pour certaines équations, notamment les équations hyperboliques comme l'équation d'advection, car ils ne tiennent pas compte de la direction de la propagation de l'information. Ils peuvent introduire des oscillations numériques non physiques. Ils sont souvent utilisés pour approximer les termes de diffusion dans les EDP, où la directionnalité n'est pas un facteur dominant.

2. Schéma décentré (Upwind / Downwind):

Un schéma décentré (parfois appelé "upwind" ou "downwind" selon la direction du "vent" ou du flux) utilise des points de maillage situés uniquement d'un seul côté du point où la dérivée est approximée. Le choix du côté dépend de la direction de la vitesse ou du flux dans l'équation.

Schéma décentré amont (Upwind) :

Si la vitesse est positive :

Du premier ordre : $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$.

De deuxième ordre :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}.$$

Schéma décentré aval (Downwind) :

Si la vitesse est négative :

Du premier ordre : $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}.$

De deuxième ordre :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}.$$

Les schémas décentrés du premier ordre ont généralement un ordre de précision plus faible (ordre 1 en espace) que les schémas centrés. Des schémas décentrés d'ordre supérieur existent mais sont plus complexes. Ils sont souvent plus stables pour les équations hyperboliques car ils prennent en compte la direction de la propagation de l'information. Le schéma "upwind" suit la direction d'où provient l'information, ce qui a un sens physique pour les problèmes de transport. Ils introduisent cependant une certaine dissipation numérique, qui peut lisser les solutions et atténuer les détails.

Ils sont couramment utilisés pour approximer les termes d'advection ou de convection dans les EDP, où la direction du flux est importante pour la stabilité et la physique de la solution.

Le choix entre un schéma centré et un schéma décentré dépend fortement de l'équation aux dérivées partielles à résoudre et des propriétés souhaitées de la solution numérique (précision, stabilité, dissipation). Il est parfois nécessaire d'utiliser des combinaisons de ces schémas pour traiter différents termes au sein de la même EDP.

V.2. 5 Obtention d'un Système Algébrique :

Après l'intégration et l'approximation, on obtient un système d'équations algébriques linéaires ou non linéaires, où les inconnues sont généralement les valeurs moyennes de la variable dépendante à l'intérieur de chaque volume de contrôle.

V.2. 6 Résolution du Système :

Ce système d'équations est ensuite résolu à l'aide de techniques d'algèbre linéaire ou de méthodes itératives pour obtenir la solution numérique approchée.

V.3 Application à l'équation de Bernoulli :

V.3.1 Formulation du problème :

Comme nous l'avons vu au chapitre I, le but du problème consiste à déterminer la fonction potentielle de vitesse $\phi(x, y)$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \text{ dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \text{ sur } BC \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } EF \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = \tan \beta \quad \text{sur } AB \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const sur } CD \text{ de forme inconnue} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Où p et ρ sont la pression et la densité du fluide respectivement.

V.3.2. Divisez le domaine en volumes de contrôle :

Considérons un volume de contrôle type, illustré à la **figure 5.6** centré autour du point P. Ce volume échange avec ses quatre voisins via ses quatre faces. Les centres de ces volumes voisins sont désignés par E (Est), W (Ouest), N (Nord) et S (Sud). Il est souvent préférable d'opter pour un maillage non uniforme. En effet, à nombre de points égal, un tel maillage permet de concentrer davantage de points dans les régions où la variable ϕ présente de fortes variations et d'en réduire la densité là où ϕ évolue plus lentement, optimisant ainsi la résolution.

V.3.3. Intégrez l'équation différentielle sur chaque volume de contrôle :

Nous commençons par intégrer l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ sur un volume de contrôle Ω :

$$\int_{\Omega} \Delta\phi \, dV = 0.$$

En utilisant le théorème de divergence, nous pouvons écrire ceci comme suit :

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\phi \cdot n \, dS = 0.$$

Où : n est le vecteur unitaire normal à la surface S

$\partial\Omega$ est la surface entourant le volume de contrôle.

$\nabla\phi$ représente le vecteur vitesse $\vec{u} = (u, v) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$.

L'intégration devient donc :

$$\oint_S (ui + vj) \, n \, dS = 0.$$

V.3.4. Estimation des écoulements sur les faces des volumes de contrôle :

Nous divisons la surface $\partial\Omega$ en plusieurs faces et calculons le flux à travers chaque face.

Supposons que nous ayons un point central P à l'intérieur du volume de contrôle et un ensemble de points voisins N, S, E, W (pour deux dimensions) (voir Figure 5.6)

Nous utilisons des différences finies pour estimer les premières dérivées :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_W - \phi_E}{2\Delta x} \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial y} \approx \frac{\phi_S - \phi_N}{2\Delta y}.$$

V.3.5. Application des conditions aux limites :

a. Condition limite BC :

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$ sur BC Signifie que le débit à travers cette limite est nul.

Donc:

$$\phi_P = \phi_W \text{ (Aucun changement de } \phi \text{ à travers la limite).}$$

b. Condition limite EF :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } EF \text{ Signifie que : } \phi_P = \phi_S.$$

C. Condition limite AB :

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \tan \beta \quad \text{sur } AB \Rightarrow \tan \beta = \frac{\phi_S - \phi_N}{\phi_W - \phi_E}.$$

d. Condition limite CD :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Il peut être utilisé pour déterminer numériquement la forme de la limite CD après avoir trouvé ϕ .

V.3.6. Construire un système d'équations algébriques :

Pour chaque point intérieur P , on obtient une équation algébrique en sommant les flux à travers toutes les faces. Nous avons un point intérieur P entouré de quatre points (N, S, E, W)

Alors l'équation devient :

$$\frac{\phi_P - \phi_E}{\Delta x} + \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} + \frac{\phi_P - \phi_N}{\Delta y} + \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y} = 0.$$

V.3.7. Résolvez le système numérique

Toutes les équations algébriques sont combinées dans un système linéaire :

$$A\phi = b.$$

Où :

A est la matrice des coefficients.

ϕ est le vecteur des valeurs inconnues.

b est le vecteur des sources et des limites.

Ce système est résolu à l'aide de méthodes numériques telles que la méthode de Gauss-Seidel ou la méthode d'itération d'ordre simultané

V.4.Procédure de résolution en utilisant le code Fluent :

Fluent, basé sur la **méthode des volumes finis (FVM)**, procède à l'intégration des équations différentielles régissant l'écoulement sur chaque volume élémentaire du maillage. Cette intégration transforme ces équations en un système d'équations algébriques linéaires, qui est ensuite résolu numériquement.

La simulation d'un écoulement à surface libre avec Fluent suit un processus itératif comportant plusieurs étapes interdépendantes : de la préparation minutieuse de la géométrie à l'analyse approfondie des résultats. Le logiciel Fluent organise les données de manière structurée : il gère d'une part les propriétés physiques du fluide (comme la nature du fluide, la gravité, la viscosité, la pression) et d'autre part les spécificités géométriques et numériques du problème à résoudre (notamment les schémas de discrétisation spatiale et temporelle, ainsi que les conditions aux limites appliquées).

Nous proposons, à titre d'exemple, un modèle avec $\beta = \frac{\pi}{4}$ (voir Figure 5.7)

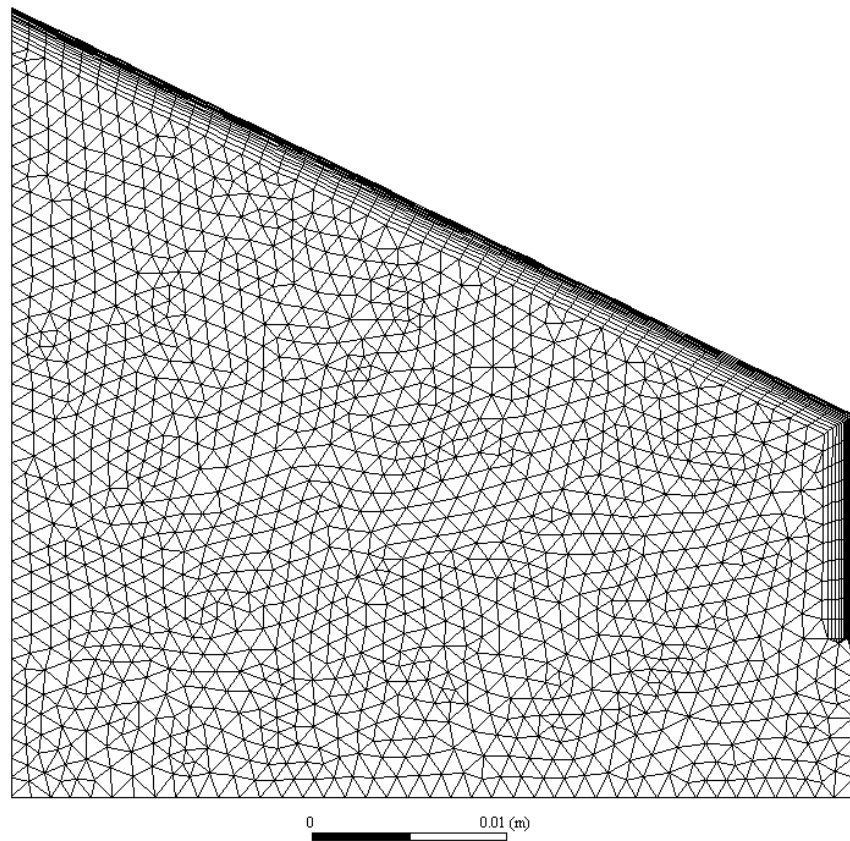


Figure 5.7: Maillages hybrides (Triangulaires)

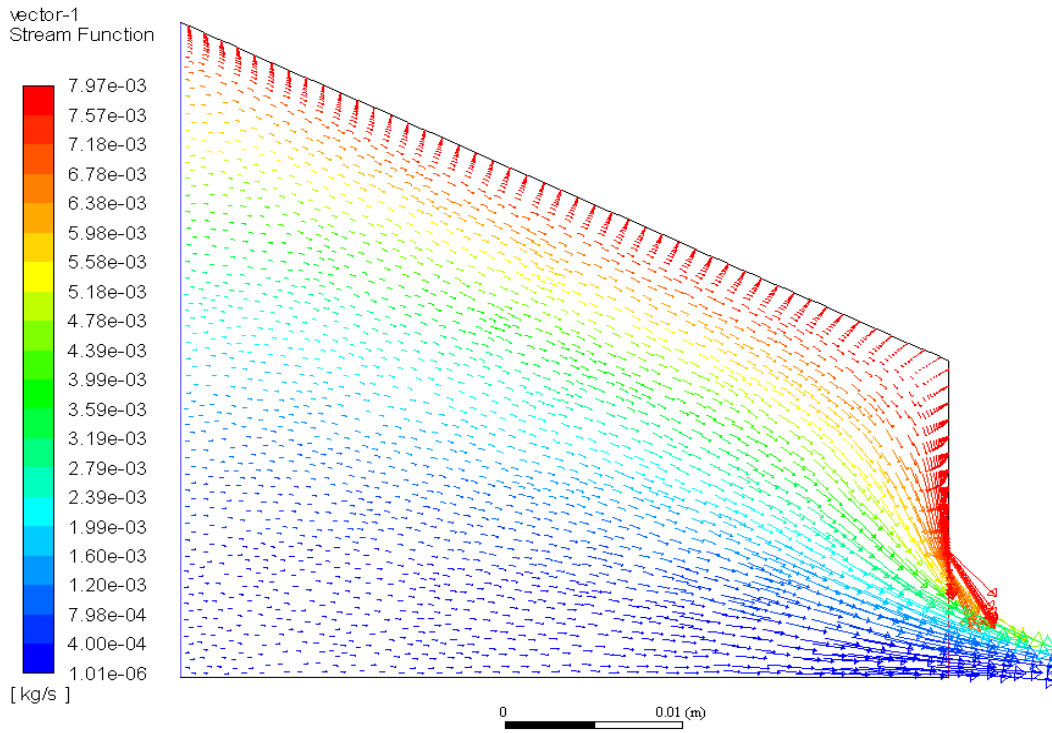


Figure 5.8: La fonction de courant

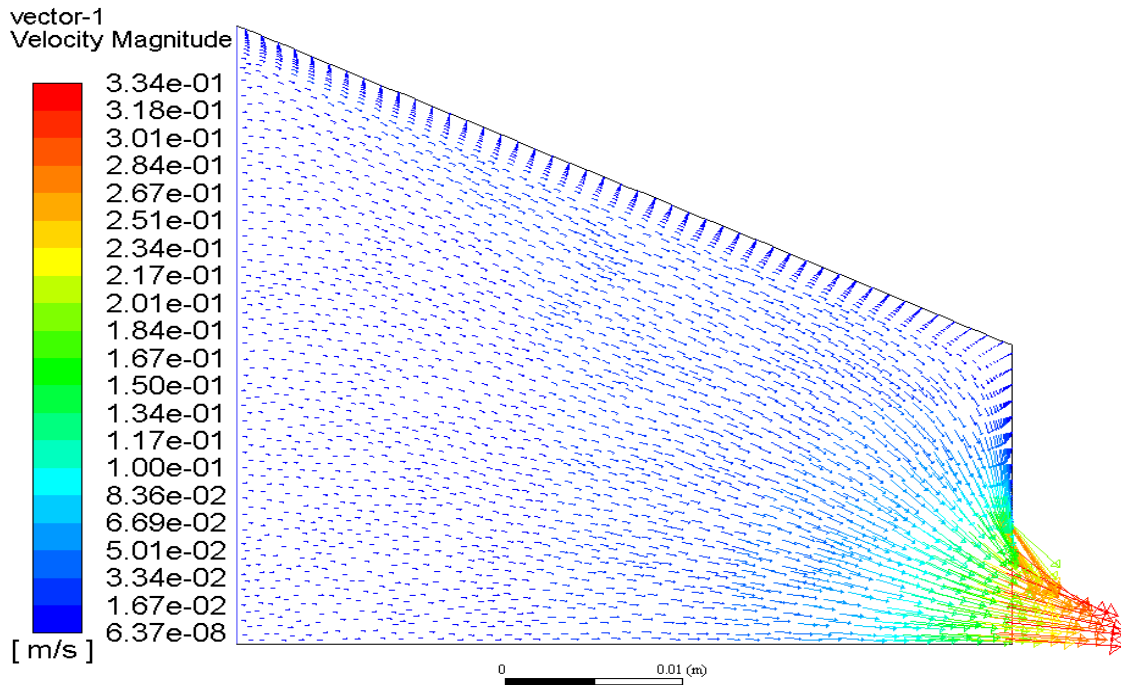


Figure 5.9: Amplitude de la vitesse

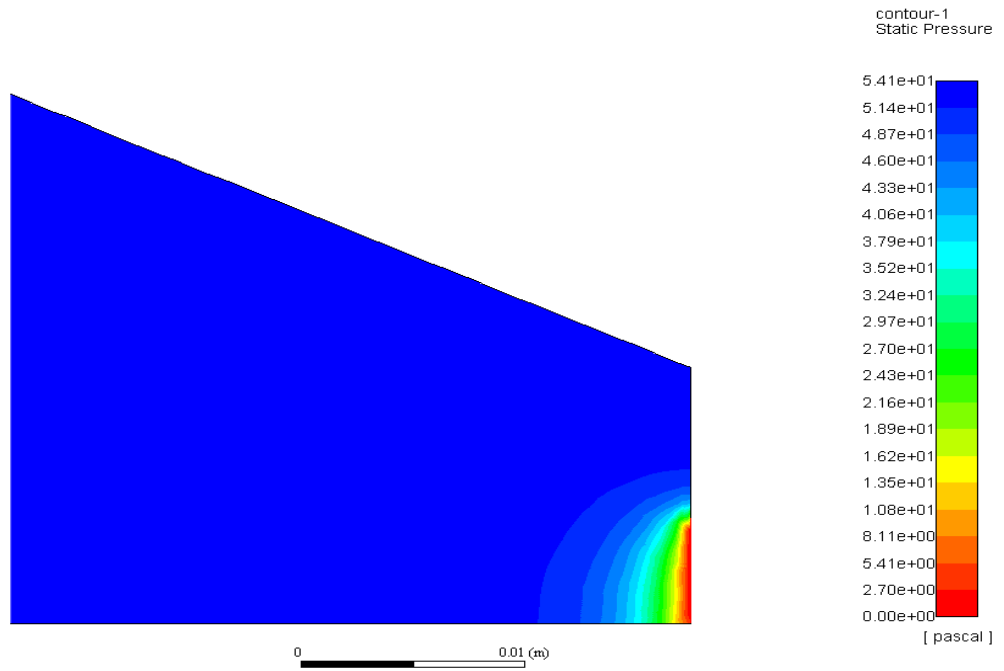


Figure 5.10: Contour de pression statique

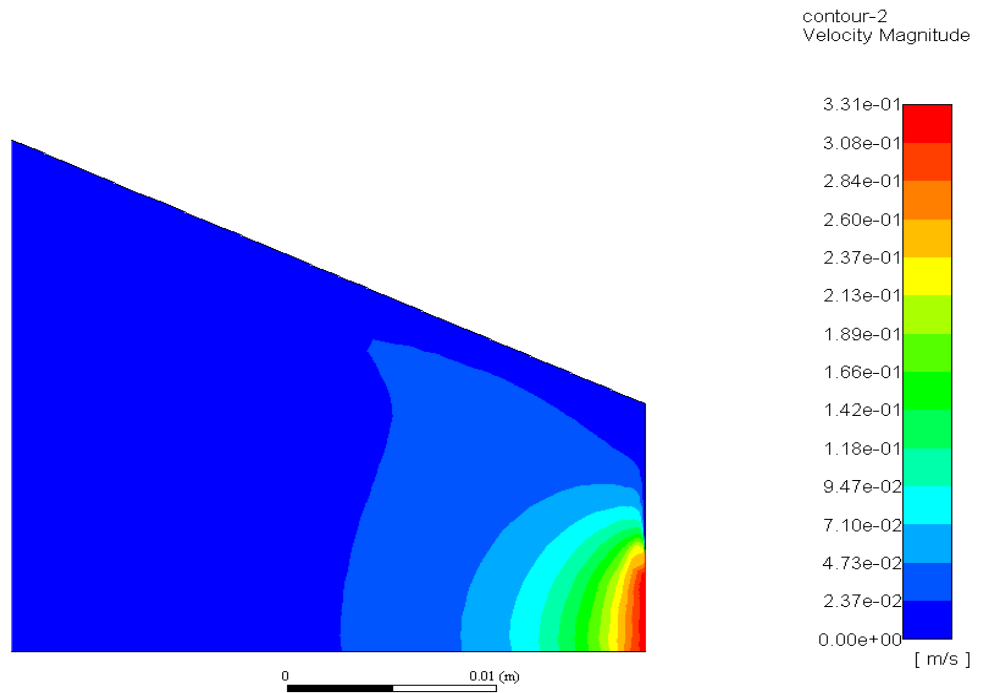


Figure 5.11: Contour de la vitesse

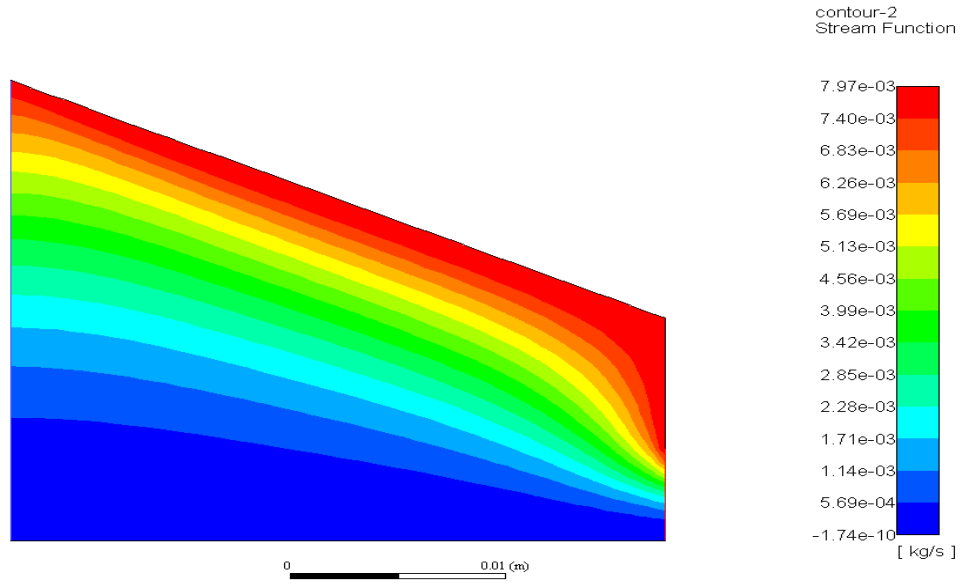


Figure 5.12: Contour de la fonction de courant

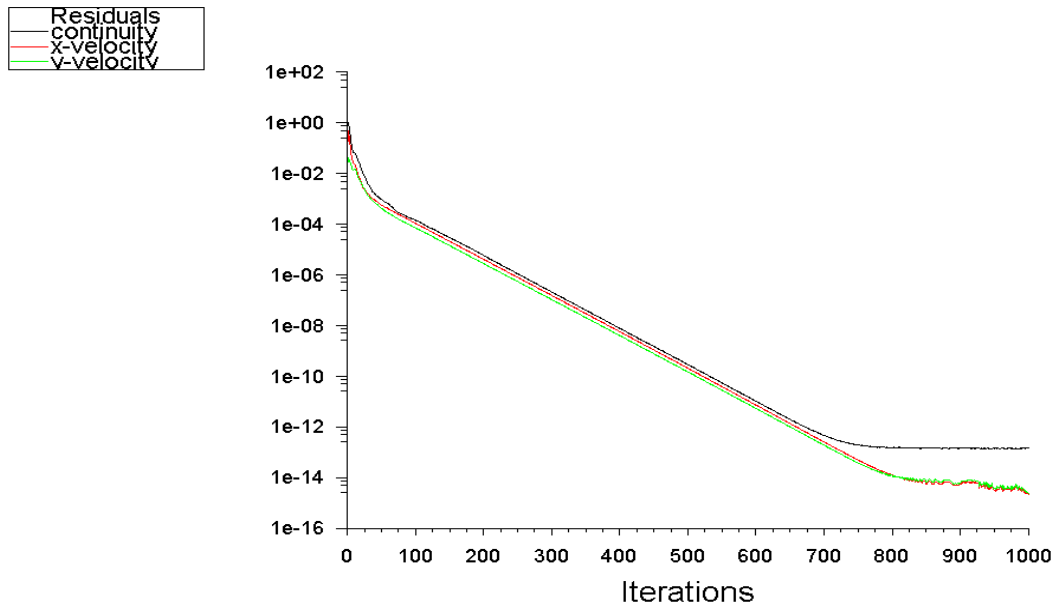


Figure 5.13: La pression statique

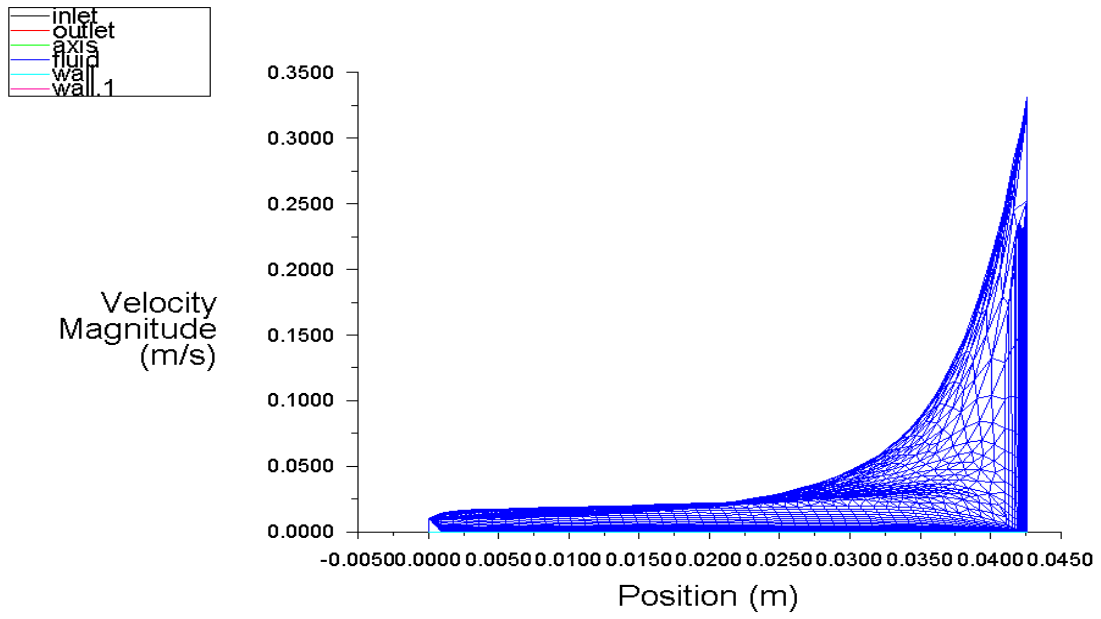


Figure 5.14: La vitesse

Conclusions et discussions :

Analyse de la figure (5.12) : Ce diagramme représente la distribution de la fonction d'écoulement (ψ) dans un champ d'écoulement laminaire. Le dégradé de couleur illustre les variations de l'intensité de l'écoulement : les couleurs chaudes (rouge) indiquent les zones de fort débit et les couleurs froides (bleu) les zones de faible débit. La présence de parois ou de limites externes affecte le mouvement du fluide, induisant une courbure des lignes de fonction d'écoulement. Ce type d'analyse est important pour étudier les écoulements laminaires et comprendre la distribution du fluide dans le champ étudié.

À droite, une barre de couleurs indique les différentes valeurs de la fonction d'écoulement (ψ). Les valeurs vont de $-1,74 \times 10^{-10}$ kg/s (bleu foncé) à $7,97 \times 10^{-3}$ kg/s (rouge). Le dégradé de couleur commence par le bleu foncé (valeurs très faibles ou proches de zéro) et progresse vers le vert et le jaune, puis vers le rouge (valeurs plus élevées).

En écoulement laminaire, les lignes de la fonction d'écoulement indiquent que l'écoulement se produit perpendiculairement à ces lignes. D'après ce diagramme :

L'écoulement semble se déplacer de haut en bas (du rouge au bleu foncé), indiquant un champ d'écoulement passant d'une zone présentant des valeurs élevées de la fonction d'écoulement (rouge) à une zone présentant des valeurs faibles (bleu foncé).

On observe également une pente de l'écoulement vers l'angle inférieur droit, indiquant la présence de parois solides ou de limites physiques modifie l'écoulement, ce qui se traduit par une courbure des lignes de courant.

La figure illustre une évolution progressive de la forme géométrique en fonction des valeurs croissantes de la fonction d'écoulement. Dans les zones de fort débit (en rouge), les lignes de courant sont rapprochées, tandis qu'elles s'éloignent dans les zones de faible débit (en bleu). Cette observation reflète la relation directe entre la densité des lignes de courant et la vitesse de l'écoulement :

Lorsque les lignes planes sont proches l'une de l'autre, la vitesse d'écoulement est élevée. Lorsqu'elles sont éloignées l'une de l'autre, la vitesse d'écoulement est faible.

Une courbure marquée apparaît dans les lignes de la fonction d'écoulement près du coin, indiquant que la paroi solide obstrue ou modifie la direction de l'écoulement.

Cette courbure reflète le phénomène de **compression** ou de **déviation** qui se produit à la jonction entre le fluide et la paroi.

La fonction d'écoulement (ψ) permet de comprendre la répartition du fluide dans le champ étudié et d'identifier les points critiques, tels que les points où le débit est élevé ou faible.

L'unité utilisée pour la fonction d'écoulement est le kg/s , qui exprime le débit massique traversant toute droite perpendiculaire aux lignes de la fonction d'écoulement.

Analyse de la figure (5.9) : La figure présente un graphique de la vitesse du fluide (amplitude) à l'aide de flèches vectorielles et de dégradés de couleurs. Cet outil permet d'illustrer la force de l'écoulement (amplitude) en différents points du champ étudié, ainsi que sa direction.

Les valeurs varient de $6,37 \times 10^{-8} \text{ m/s}$ (bleu foncé) à $3,34 \times 10^{-1} \text{ m/s}$ (rouge). L'écoulement semble se déplacer généralement de haut en bas, avec une nette tendance vers le coin inférieur droit.

On observe que la vitesse est maximale dans les zones proches du bord supérieur (rouge), tandis qu'elle diminue progressivement vers le bas (bleu foncé).

En haut à gauche de la figure, des zones de vitesses élevées sont visibles. Cela reflète la présence d'un champ d'écoulement rapide dans cette région. Un déplacement vers le bas indique une diminution de la vitesse du fluide.

L'unité utilisée pour la grandeur de la vitesse est le m/s , qui exprime la vitesse linéaire d'un fluide.

Une valeur minimale très faible ($6,37 \times 10^{-8} \text{ m/s}$) indique un débit faible, voire nul.

Analyse de la figure (5.13) : La figure présente un graphique de la pression constante (pression statique) en fonction de la distance (position x). Les pascals représentent la position (x).

Le graphique montre plusieurs courbes correspondant aux variations de pression statique selon les régions étudiées : l'entrée, la sortie, l'axe central, le fluide et la paroi.

Le comportement général de la pression constante est évident dans la zone de départ (à gauche) à une pression de $55 Pa$ (près de $x = 0$). Cela indique que la pression dans la zone d'entrée (entrée) est restée constante et relativement élevée.

Dans la zone d'arrivée (à droite) (près de $x = 0,045 m$) La pression diminue progressivement. Cela indique un effet significatif dans cette zone, dû à la présence d'une paroi qui entrave l'écoulement.

On observe une diminution significative de la pression au niveau de la paroi

Conclusion générale

Conclusion générale :

Le problème étudié dans cette thèse concerne l'écoulement à surface libre en présence d'une paroi rigide, une configuration susceptible de modéliser divers phénomènes physiques, tels que l'écoulement sous une vanne, à la sortie d'une conduite ou lors de la vidange d'un réservoir. En adoptant une approche bidimensionnelle et potentielle, nous avons analysé l'influence combinée de la tension de surface et de la gravité sur la forme de la surface libre.

Pour résoudre ce problème, une combinaison de méthodes analytiques et numériques a été mise en œuvre. La théorie des lignes de courant et les transformations conformes - notamment celle de Schwarz-Christoffel - ont permis d'obtenir des solutions analytiques exactes dans le cas où les effets de la tension superficielle et de la gravité sont négligés.

Lorsque ces forces ne peuvent plus être ignorées, la méthode de troncature de série a été employée pour évaluer leur impact sur la courbure de la surface libre. Cette approche permet non seulement de réduire la dimensionnalité du problème, mais aussi d'identifier précisément la nature de la singularité au point de contact entre la surface libre et la paroi solide. Par ailleurs, la méthode intégro-différentielle a été appliquée afin de valider les résultats obtenus par la méthode de troncature, en particulier pour les faibles valeurs du nombre de Weber.

Les résultats montrent que la tension superficielle et la gravité influencent fortement la géométrie de la surface libre. Les deux méthodes utilisées se sont révélées efficaces pour déterminer sa forme sur une large gamme de paramètres, à l'exception des valeurs très faibles du nombre de Weber et du nombre de Froude, où la convergence numérique devient problématique.

Enfin, afin de compléter l'approche théorique par une analyse numérique, une étude préliminaire basée sur la méthode des volumes finis a été menée, suivie d'une simulation d'un cas type à l'aide du logiciel ANSYS Fluent.

Les résultats obtenus dans le cadre de cette recherche ouvrent des perspectives prometteuses pour la modélisation numérique des écoulements à surface libre. Les méthodes développées peuvent être étendues à des configurations plus complexes (écoulements tridimensionnels, fluides visqueux, interfaces multiples, etc.). À l'avenir, il serait pertinent d'explorer davantage leurs applications pratiques, ainsi que de procéder à une comparaison systématique avec d'autres techniques numériques - notamment la méthode des volumes finis - afin d'en évaluer rigoureusement les performances, les avantages et les limites.

Annex

ANNEXE

Chapitre3-1

```
% Parameters
n = valeur;
nmaxb = valeur;
h2 = 31415e-4 / (2 * n);
Epsilon = 1e-5;
pivotmin = 1e-3;

% Initialize variables
A = zeros(1, n-1);
sum1_val = 0;
sum2_val = 0;
sum3_val = 0;
sum4_val = 0;
h = 0;
F_val = 0;
alpha = 0;
t = zeros(1, n);
h1 = zeros(1, n-1);
deltaA = zeros(n, 1);
y = zeros(1, n+1);
sa = zeros(1, n);
EF = zeros(n, n+1);
f1 = zeros(1, n);
f2 = zeros(1, n);
x = zeros(1, n+1);
A1 = zeros(1, n-1);
lamda = 0;
lamda1 = 0;

% Open file 'res2.dat' for reading
fid7 = fopen('res2.dat', 'r');
if fid7 == -1
    error('Cannot open file res2.dat');
end

% Read lamda and A from file
data = fscanf(fid7, '%lf', [51, 1]);
lamda = data(1);
A = data(2:51)';
fclose(fid7);

% Data initialization
pi_val = 3.1415e0;
alpha = 3e0;
bita = 0e0;
```

```
b = 1e-2;

% Initialize x and y
x(n+1) = 0;
y(n+1) = 1;

% Main iteration loop
for nbiteration = 1:nmaxb
    fprintf('iteration: %3d\n', nbiteration);

    % Formula to compute angles sigma
    for i = 1:n
        t(i) = pi_val / (2 * n) * (single(i) - 5e-1);
    end

    % Evaluation of function F
    for i = 1:n

        EF(i, n+1) = F(A, t(i), n-1, lamda, bita);
    end

    % Evaluation of the Jacobian E
    for i = 1:n
        for j = 1:n-1
            for k = 1:n-1
                h1(k) = 0.001;
            end

            for k = 1:n-1
                if k ~= j
                    h1(k) = 0;
                end
            end

            for k = 1:n-1
                A1(k) = A(k) + h1(k);
            end
            lamda1 = lamda + 0.001;

            EF(i, j) = (F(A1, t(i), n-1, lamda, bita) - F(A, t(i), n-1,
lamda, bita)) / 0.001;
        end

        EF(i, n) = (F(A, t(i), n-1, lamda1, bita) - F(A, t(i), n-1,
lamda, bita)) / 0.001;
    end

    % Calculation of the velocity
    for i = 1:n
```

```

        sa(i) = (2 * cos(t(i)))^(1 - lamda / 3.1415) * exp(sum2(A, t(i),
n-1));
    end

    % Call Jordan subroutine
    [deltaA] = jordan(EF, n, deltaA, pivotmin);

    % Update vectors X and lamda
    for i = 1:n-1
        A(i) = A(i) - deltaA(i,1);
    end
    lamda = lamda - deltaA(n,1);

    % Calculate the norm of F
    h = 0;
    for i = 1:n

        current_F = F(A, t(i), n-1, lamda, bita);
        if abs(current_F) > abs(h)
            h = current_F;
        end
    end
    fprintf('h=%.6f\n', h);

    if abs(h) < Epsilon
        break;
    end
end

% Write results to file 'res2.dat'
fid7 = fopen('res2.dat', 'w');
if fid7 == -1
    error('Cannot open file res2.dat for writing');
end
fprintf(fid7, '%12.6f\n', lamda);
fprintf(fid7, '%12.6f ', A);
fprintf(fid7, '\n');
fclose(fid7);

% Calculate f1 and f2
for i = 1:n
    f1(i) = -1 / (pi_val * tan(t(i)/2)) * (2 * cos(t(i)))^(-1 + lamda /
3.1415) * ...
        exp(-sum2(A, t(i), n-1)) * ...
        cos(t(i)*(bita/3.1415) + atan((sin(t(i)) - b)/cos(t(i)))*(1/2 -
bita/3.1415) + ...
        t(i)*(1 - lamda/3.1415) + sum1(A, t(i), n-1));

    f2(i) = 1 / (pi_val * tan(t(i)/2)) * (2 * cos(t(i)))^(-1 + lamda /
3.1415) * ...
        exp(-sum2(A, t(i), n-1)) * ...

```

```

        sin(t(i)*(bita/3.1415) + atan((sin(t(i)) - b)/cos(t(i)))*(1/2 -
bita/3.1415) + ...
        t(i)*(1 - lamda/3.1415) + sum1(A, t(i), n-1));
end

% Update x and y
sk1 = 0;
for j = 1:n
    sk1 = sk1 + h2 * f2(j);
end
c_val = 1 / (1 + sk1);
for j = 0:n-1
    x(n-j) = x(n-j+1) - h2 * c_val * f1(n-j);
    y(n-j) = y(n-j+1) - h2 * c_val * f2(n-j);
end
c_val = 1 / (1 + sk1);

% Write results to file 'res.dat'
fid6 = fopen('res.dat', 'w');
if fid6 == -1
    error('Cannot open file res.dat for writing');
end
for i = 1:50
    fprintf(fid6, '%2d %12.4e %12.4e %12.4e\n', i, A(i), x(i), y(i));
end
fclose(fid6);

plot(x, y, 'LineWidth', 1.5);
disp('fin du programme');

% Jordan subroutine equivalent
function deltaA = jordan(EF, n, deltaA, pivotmin)
    Nmax = 81;
    c = zeros(1, Nmax);
    l = zeros(1, Nmax);
    p = zeros(1, Nmax);
    w = 0;

    for k = 1:n
        p(k) = 0;
        for i = 1:n
            for j = 1:n
                if k > 1
                    flag = false;
                    for s = 1:k-1
                        if i == l(s) || j == c(s)
                            flag = true;
                            break;
                        end
                    end
                    if flag

```

```

        continue;
    end
    end
    end
    if abs(EF(i,j)) > abs(p(k))
        p(k) = EF(i,j);
        l(k) = i;
        c(k) = j;
    end
    end
    end
    if abs(p(k)) == pivotmin
        disp(' pivot petitmatrice DSINGuli679re');
        return;
    end
    for j = 1:n+1
        EF(l(k),j) = EF(l(k),j) / p(k);
    end
    for i = 1:n
        if i ~= l(k)
            w = EF(i, c(k));
            for j = 1:n+1
                EF(i,j) = EF(i,j) - w * EF(l(k),j);
            end
        end
    end
    end
    end
    for k = 1:n
        deltaA(c(k),1) = EF(l(k), n+1);
    end
end

% sum1 function
function s = sum1(c, s_val, m)
    s = 0;
    for k = 1:m
        s = s + c(k) * sin(2 * (k-1) * s_val);
    end
end

% sum2 function
function s = sum2(c, s_val, m)
    s = 0;
    for k = 1:m
        s = s + c(k) * cos(2 * (k-1) * s_val);
    end
end

% sum3 function
function s = sum3(c, s_val, m)
    s = 0;
    for k = 1:m

```

```
        s = s + 2 * (k-1) * c(k) * sin(2 * (k-1) * s_val);
    end
end

% sum4 function
function s = sum4(c, s_val, m)
    s = 0;
    for k = 1:m
        s = s + 2 * (k-1) * c(k) * cos(2 * (k-1) * s_val);
    end
end

% Function F
function F_val = F(c, s_val, m, r, bita)

    F_val = -1 + (2 * cos(s_val))^(2 * (1 - r / 3.1415)) * exp(2 *
sum2(c, s_val, m));
end
```

Chapitre3-2

```
function Gravity
% Constants
n = valeur;
nmaxb = valeur;
h2 = pi/(2*n);
Epsilon = 1e-5;
pivotmin = 1e-3;

% Parameters
bita = valeur;
b = valeur;

t = zeros(n, 1);
x = zeros(n+1, 1);
y = zeros(n+1, 1);
EF = zeros(n, n+1);
f1 = zeros(n, 1);
f2 = zeros(n, 1);

% Initialize boundary conditions
x(n+1) = 0;
y(n+1) = 1;

disp('Computing results...');
figure('Name', 'Flow Profile');
hold on;

froude_numbers = [6 10];
for nFr = froude_numbers
    lamda = 3;
    A = zeros(n-1, 1);
    fprintf('Processing Fr = %d\n', nFr);
    % Main iteration loop
    for nbiteration = 1:nmaxb
        % Calculate angles
        for i = 1:n
            t(i) = pi/(2*n)*(i- 0.5);
        end

        % Evaluate function F and Jacobian
        for i = 1:n
            EF(i, n+1) = F(A, t(i), n-1, nFr, lamda, b, bita, n);
        end

        % Calculate Jacobian
        for i = 1:n
            for j = 1:n-1
                h1 = zeros(n-1, 1);
                h1(j) = 0.001;
```

```

        A1 = A + h1;

        EF(i,j) = (F(A1,t(i),n-1,nFr,lamda,b,bita,n)-
F(A,t(i),n-1,nFr,lamda,b,bita,n))/ 0.001;
        end
        lamda1 = lamda + 0.001;
        EF(i,n) = (F(A,t(i),n-1,nFr,lamda1,b,bita,n)-F(A,t(i),n-
1,nFr,lamda,b,bita,n))/ 0.001;
        end

% Solve system using Jordan elimination
deltaA = jordan(EF, n, pivotmin);

% Update variables
A = A - deltaA(1:n-1);
lamda = lamda - deltaA(n);

% Check convergence
h = max(abs(arrayfun(@(i) F(A, t(i), n-1, nFr, lamda, b, bita,
n), 1:n)));

fprintf('Iteration %d: h = %e\n', nbiteration, h);
if abs(h) < Epsilon
    break;
end
end

% Calculate final profiles
for i = 1:n
    f1(i) = -1/(pi*tan(t(i)/2)) * (2*cos(t(i)))^(-1 + lamda/pi) *
...
    exp(-sum2(A, t(i), n-1)) * ...
    cos(t(i)*(bita/pi)+atan((sin(t(i))-b)/cos(t(i)))*(1/2-
bita/pi))+...
    t(i)*(1 - lamda/pi) + sum1(A, t(i), n-1));

    f2(i) = 1/(pi*tan(t(i)/2)) * (2*cos(t(i)))^(-1 + lamda/pi) *
...
    exp(-sum2(A, t(i), n-1)) * ...
    sin(t(i)*(bita/pi)+atan((sin(t(i))-b)/cos(t(i)))*(1/2-
bita/pi))+...
    t(i)*(1 - lamda/pi) + sum1(A, t(i), n-1));
end

sk1 = sum(h2 * f2);
c = 1/(1 + sk1);

for j = 0:n-1
    x(n-j) = x(n-j+1) - h2 * c * f1(n-j);
    y(n-j) = y(n-j+1) - h2 * c * f2(n-j);
end

```

```

    % Plot results
    plot(x, y, 'LineWidth', 1.5);

    % Save results for this Froude number
    saveResults(A, x, y, bita, nFr, b, lamda, c, n);
end

% Formatting plot
xlim([0 1.5]);
ylim([0.8 1.01]);
xlabel('X'); ylabel('Y');
legend(arrayfun(@(fr) sprintf('Fr=%d', fr), froude_numbers, 'UniformOutput', false));
%title('Forme de la Surface Libre pour \beta = \pi/4', 'FontSize', 12);
title('Forme de la Surface Libre pour \beta = 3\pi/4', 'FontSize', 12);
hold off;

disp('Computation completed successfully');
end

%=====!
function saveResults(A, x, y, bita, nFr, b, lamda,c, n)
    fid = fopen('res.dat', 'w');
    for i = 1:n-1
        fprintf(fid, '%2d %12.4f %12.4f %12.4f\n', i, A(i), x(i), y(i));
    end
    fclose(fid);
end

%=====!
function deltaa = jordan(EF, n, pivotmin)
    % Initialize arrays
    c = zeros(n, 1);
    l = zeros(n, 1);
    p = zeros(n, 1);
    deltaa = zeros(n, 1);

    % Main elimination loop
    for k = 1:n
        p(k) = 0;

        % Find pivot
        for i = 1:n
            for j = 1:n

                if k > 1
                    skip = false;
                    for s = 1:k-1

```

```

        if i == l(s) || j == c(s)
            skip = true;
            break;
        end
    end
    if skip
        continue;
    end
end

% Update pivot if larger absolute value is found
if abs(EF(i,j)) > abs(p(k))
    p(k) = EF(i,j);
    l(k) = i;
    c(k) = j;
end
end
end

% Check for singular matrix
if abs(p(k)) == pivotmin
    error('Pivot too small - singular matrix');
end

% Normalize pivot row
EF(l(k),:) = EF(l(k),:) / p(k);

% Eliminate in other rows
for i = 1:n
    if i ~= l(k)
        w = EF(i,c(k));
        EF(i,:) = EF(i,:) - w * EF(l(k),:);
    end
end

% Extract solution
for k = 1:n
    deltaa(c(k)) = EF(l(k),n+1);
end
end

%=====!
function tot1 = sum1(c, s, m)
    tot1 = 0;
    for k = 1:m
        tot1 = tot1 + c(k) * sin(2 * (k - 1) * s);
    end
end
end

```

```

%=====
=!
function tot2 = sum2(c, s, m)
    tot2 = 0;
    for k = 1:m
        tot2 = tot2 + c(k) * cos(2 * (k - 1) * s);
    end
end

%=====!
function tot3 = sum3(c, s, m)
    tot3 = 0;
    for k = 1:m
        tot3 = tot3 + 2 * (k - 1) * c(k) * sin(2 * (k - 1) * s);
    end
end

%=====!
function fun = F(c, s, m, nFr, r, b, bita, n)
    fun = (((2 * cos(s)).^(2*(1 - r / pi))).* exp(2 * sum2(c,s,m))).* ...
    (-pi * tan(s / 2)) .* ((1 - r / pi) .* (-2 * sin(s)) .* ...
    (2 * cos(s)).^(-r / pi)) + (2 * cos(s)).^(1 - r / pi) .* ...
    (sum3(c, s, m)) .* exp(sum2(c, s, m)) - (1 / nFr^2) * ...
    (2 * cos(s)).^(r / pi - 1) .* exp(-sum2(c, s, m)) .* ...
    sin(s * (bita / pi + 1 - r / pi) + ...
    (atan((sin(s) - b) / cos(s)) * (1 / 2 - bita / pi)) + ...
    sum1(c, s, n - 1));
end

```

Chapitre 4 Méthode intégró-différentielle

```

N = valeur;
max_iter = valeur;
h = valeur;
b = valeur;
alpha = valeur;
beta =valeur;

% Initialize arrays
a = zeros(N, 1);
t = zeros(N-1, 1);
w = zeros(N, 1);
d = eye(N);
dd = diag(ones(1,N-1), 1);
phi = zeros(N, 1);
sum1 = zeros(N-1, 1);
to = zeros(N-1, 1);
ff = zeros(N, 1);
diff = zeros(N, N);
aa = zeros(N-1, 1);
X = zeros(N, 1);
Y = zeros(N, 1);

% Create points in F-plane
for i = 1:N
    phi(i) = (i-1) * h;
end

% Calculate midpoints
for i = 1:N-1
    t(i) = (phi(i+1) + phi(i))/2;
end

% Set weights for numerical integration
w(2:N-1) = 1;
w([1,N]) = 0.5;

% Main iteration loop
for iter = 1:max_iter
    % Calculate Sum1 for each point
    for i = 1:N-1
        sum1(i) = 0;
        for k = 1:N
            denominator = exp(pi*phi(k)) - exp(pi*t(i));
            if abs(denominator) > eps
                sum1(i) = sum1(i) + a(k)*exp(pi*phi(k))*h*w(k)/denomina-
tor;
            end
        end
    end
end
end

```

```

    % Calculate to(i)
    for i = 1:N-1
        term1 = beta/pi * log(abs((exp(pi*t(i)) -
exp(pi*b))/exp(pi*t(i))));
        term2 = -0.5 * log(abs((1 - exp(pi*t(i)))/(exp(pi*b) -
exp(pi*t(i))))));
        to(i) = term1 + term2 + sum1(i);
    end

    % Evaluate function f
    for i = 1:N-1
        if abs(a(i+1)-a(i)) < eps
            ff(i) = exp(2*to(i)) - 1; % Handle zero derivative case
        else
            ff(i) = exp(2*to(i)) - 2/alpha*exp(to(i))*abs((a(i+1)-
a(i))/h) - 1;
        end
    end
    ff(N) = a(N) - pi/2;

    % Calculate difference matrix
    for i = 1:N-1
        for j = 1:N
            if abs(exp(pi*phi(j)) - exp(pi*t(i))) > eps
                diff(i,j) = 2*(exp(pi*phi(j))*h*w(j)/(exp(pi*phi(j)) -
exp(pi*t(i))))*exp(2*to(i)) - ...
                2/alpha*
                pha*((exp(pi*phi(j))*h*w(j)/(exp(pi*phi(j)) - exp(pi*t(i))))*exp(to(i))*
                ...
                (abs((a(i+1)-a(i))/h) + sign(a(i+1)-
a(i))*exp(to(i))*(dd(i,j) - d(i,j))/h));
            end
        end
    end
    diff(N,:) = d(N,:);

    % Update solution
    c = pinv(diff) * ff;
    a = a - c;
end

% Calculate theta at midpoints
for i = 1:N-1
    aa(i) = (a(i+1) + a(i))/2;
end

% Calculate X and Y coordinates
X(1) = 0;
Y(1) = 1;
for i = 1:N-1

```

```
X(i+1) = X(i) + h*exp(-to(i))*cos(aa(i));  
Y(i+1) = Y(i) + h*exp(-to(i))*sin(aa(i));  
end  
  
% Plot the result  
plot(X, Y)  
xlabel('X')  
ylabel('Y')  
title('Curve Plot')
```

Bibliographie

- [1] Laiadi, A. & Merzougui, A. *Free surface flows over a successive obstacle with surface tension and gravity effects*. AIMS Mathematics, 4(2):316–326, 2019.
- [2] Amara, A. & Gasmi, A. *The effect of surface tension on the jet flow in U-shaped channel*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 118(3):625–635, 2018.
- [3] Doak, A. & Vanden-Broeck, J. M. *New exotic capillary free-surface flows*. Journal of Fluid Mechanics, 899:R4, 2020.
- [4] Elcrat, A. R. & Trefethen, L. N. *Classical free-streamline flow over a polygonal obstacle*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 18:251–265, 1986.
- [5] Gasmi, A. *Numerical study of two-dimensional jet flow issuing from a funnel*. Advances in Applied Mathematics, 87:161–169, 2014.
- [6] Gasmi, A. & Mekias, H. *A jet from container and flow past a vertical flat in a channel with the surface tension effects*. Applied Mathematical Sciences, 1(54):2687–2698, 2007.
- [7] Gasmi, A. & Mekias, H. *The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 36:851–862, 2004.
- [8] Merzougui, A., Mekias, H. & Guechi, F. *Surface tension effect on a two-dimensional channel flow against an inclined wall*. Applied Mathematical Sciences, 1(47):2313–2326, 2007.
- [9] Bouderah, B., Gasmi, A. & Serguine, H. *Zero gravity of free-surface jet flow*. International Mathematical Forum, 2(66):3273–3277, 2007.
- [10] Bouderah, B., Delloume, W. and Gasmi, A. *A free surface flow over a polygonal obstacle*. International Mathematical Forum, 2(66):3279–3284, 2007.
- [11] Birkhoff, G. & Zarantonello, E. H. *Jets, Wakes, and Cavities*. Academic Press, New York, 1957.

- [12] Ancey, C. *Analyse différentielle : Outils mathématiques pour la dynamique des fluides*. Laboratoire d'Hydraulique Environnementale, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 2009.
- [13] Guechi, F. *Analysis of a two-dimensional ideal jet flow*. International Journal of Mathematical Archive, 3(1):99–104, 2012.
- [14] Guechi, F. & Khermache, M. *Free streamline for a flow over a step*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 74(3):367–372, 2012.
- [15] Guechi, F., Mekias, H. & Merzougui, A. *Free surface flow with surface tension and gravity*. Applied Mathematical Sciences, 1(49):2399–2408, 2007.
- [16] Batchelor, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [17] Cheng, J., Du, L. & Xin, Z. *Incompressible impinging jet flow with gravity*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 62:1–30, 2023.
- [18] Chuang, J. M. *Numerical studies on nonlinear free surface flow using generalized Schwarz-Christoffel transformation*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 32:745–772, 2000.
- [19] Vanden-Broeck, J. M. *The effect of surface tension on the shape of the Kirchhoff jet*. Physics of Fluids, 27:1933–1936, 1984.
- [20] Vanden-Broeck, J. M. *Gravity-Capillary Free-Surface Flows*. Cambridge University Press, 1991.
- [21] Vanden-Broeck, J. M. *Nonlinear capillary free-surface flows*. Journal of Engineering Mathematics, 50:415–426, 2004.
- [22] Vanden-Broeck, J. M. & Doak, A. *Nonlinear two-dimensional free surface solutions of flow exiting a pipe and impacting a wedge*. Journal of Engineering Mathematics, 126:1431–1434, 2021.
- [23] Vanden-Broeck, J. M. & Asavanant, J. *Nonlinear free-surface flows emerging from vessels and flows under a sluice gate*. Journal of the Australian Mathematical Society, Series B, 38:63–86, 1996.

- [24] Vanden-Broeck, J. M. & Dias, F. *Flows emerging from a nozzle and falling under gravity*. Journal of Fluid Mechanics, 213:465–477, 1990.
- [25] Euler, L. *Principes généraux du mouvement des fluides*. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 11:274–315, 1757.
- [26] Abd-el-Malek, M. B., Hanna, S. N. & Kamel, M. T. *Approximate solution of gravity flow from a uniform channel over triangular bottom for large Froude number*. Applied Mathematical Modelling, 15:25–32, 1989.
- [27] Bounif, M. M. & Gasmi, A. *The application of the hodograph method to free surface flow problem*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 52(2):118–128, 2022.
- [28] Guayjareernpanishk, P. & Asavanant, J. *Numerical solutions of flows under an inclined gate*. Thai Journal of Mathematics, 7(1):171–187, 2009.
- [29] Porter, R. *Fluid Dynamics (MATH33200)*. University of Bristol, 2020.
- [30] Panda, S., Martha, S. C. & Chakrabarti, A. *Three-layer fluid flow over a small obstruction on the bottom of a channel*. ANZIAM Journal, 56:248–274, 2015.
- [31] Tooley, S. & Vanden-Broeck, J. M. *Waves and singularities in nonlinear capillary free-surface flows*. Journal of Engineering Mathematics, 43:89–99, 2002.
- [32] Kambe, T. *Elementary Fluid Mechanics*. Institute of Dynamical Systems, Tokyo, Japan, 2007.
- [33] Peng, W. & Parker, D. F. *An ideal fluid jet impinging on an uneven wall*. Journal of Fluid Mechanics, 336:21–41, 1997.
- [34] Versteeg, H. K. & Malala Sekera, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited, 1995.
- [35] Ferziger, J. H., Perić, M. & Street, R. L. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [36] Guellati, Z. Gasmi, A. *Two-Dimensional Free Surface Flow Through Solid Walls with Surface Tension Effects*. Engineering Reports, 2025.