

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master :

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème :

Polynôme de Taylor pour l'équation intégrale de Volterra-Fredholm du premier type

Présenté par:
BENAISSI Sarra
Soutenu publiquement le: 03/06/2026

Devant le jury composé de:

LAKHAL Aissa	M.C.B,	Université de M'sila	Président :
NADIR Mostefa	Prof	Université de M'sila	Encadreur :
GAGUI Bachir	M.C.A,	Université de M'sila	Examineur :

Année universitaire 2025/2026





Avant tout nous remercions
ALLAH *le tout puissant*
et miséricordieux, De nous avoir
donné la force , le courage et la
patience pour accomplir ce
modeste travail .

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre profonde gratitude à
notre encadreur

Monsieur le Professeur **NADIR Mostefa**

pour son encadrement, ses précieux conseils, sa disponibilité ainsi que son soutien tout
au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous adressons également nos vifs remerciements aux membres du jury :

Monsieur le Professeur « **LAKHAL Aïssa** » et Monsieur le Professeur « **GAGUI**

Bachir »,

pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'examiner et d'évaluer ce travail. Nos
remerciements les plus sincères s'adressent également à tous nos enseignants qui ont
contribué à notre formation universitaire.

Enfin, nous remercions chaleureusement toutes les personnes qui ont participé de près ou
de loin à la réalisation de ce mémoire

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire :

À mon très cher père « **Ben Aïssi Mohamed** » pour son soutien, ses sacrifices, sa
patience

et ses encouragements permanents. Merci d'avoir toujours cru en moi et d'avoir été ma
force dans les moments difficiles.

À ma très chère mère « **Ben Aïssi Aïcha** », source infinie de tendresse, d'amour et de
générosité.

Merci pour vos prières, votre affection et votre présence constante à mes côtés.

À mes chères sœurs : « **Mariem** », « **Dima** » et « **Bochra** », pour leur soutien moral et
leur affection.

À mes chers oncles :

« **Ben Aïssi Brahim** », « **Sofiane** », « **Djamel** » et « **Khaled** »,

À mes chers oncles paternels : « **Ahmed** », « **Ali** » et « **Rachid** », avec toute ma
reconnaissance et mon respect.

À mes très chers grands-parents : Mon grand-père « **Mohamed** »
et ma grand-mère « **Dif Hada** »,

Mon grand-père paternel « **Aïssa** » et ma grand-mère paternelle « **Ben Aïssi Tourkia** »,
Que Dieu vous garde et vous bénisse.

Enfin, à toute ma famille, à mes amis(es) et à toutes les personnes qui m'ont soutenue de
près ou de loin durant mon parcours universitaire

Table des matières

Introduction	i
1 Préliminaires en analyse fonctionnelle	1
1.1 Base de l'analyse fonctionnelle	1
1.1.1 Espace vectoriel normé :	1
1.1.2 Opérateurs linéaires bornés	2
1.1.3 Espace de Banach :	4
1.1.4 Opérateurs compact :	5
1.1.5 Espace de Hilbert	7
1.1.6 Equations aux Opérateurs compacts :	9
2 Equations intégrales et leurs classification	12
2.1 Classification des équations intégrales première espèce :	12
2.1.1 Equations intégrales de Volterra de première espèce :	12
2.1.2 Equations intégrales de Fredholm de première espèce :	12
2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce	13
2.2 Régularisation de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm	13
2.3 Classification des équations intégrales de seconde espèce	14
2.3.1 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce :	14
2.3.2 Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce :	14
2.3.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm de seconde espèce	14
2.4 Résultat existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm	15
2.5 Polynômes de Taylor	17
3 Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm	18
3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm :	18
3.1.1 Méthode de Taylor	18
3.2 Exemples Numériques	20
3.3 Conclusion	23
Bibliographie	24

Introduction

Les équations intégrales occupent une place importante dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées, de la physique, de l'ingénierie et des sciences économiques. Elles interviennent naturellement dans la modélisation de nombreux phénomènes tels que les problèmes de transfert de chaleur, la mécanique des fluides, la théorie du potentiel, la dynamique des populations et le traitement du signal. Parmi ces équations, les équations intégrales de Volterra-Fredholm représentent une classe particulière combinant les caractéristiques des équations de Volterra et de Fredholm.

Les équations intégrales de première espèce sont souvent plus difficiles à résoudre que celles de seconde espèce, car elles sont généralement mal posées au sens de Hadamard. En effet, l'existence, l'unicité ou la stabilité de la solution ne sont pas toujours garanties. Pour cette raison, le développement de méthodes analytiques et numériques efficaces pour obtenir des solutions approchées constitue un sujet de recherche important.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce en utilisant la méthode des polynômes de Taylor. Cette méthode repose sur l'approximation de la fonction inconnue par un polynôme de Taylor, ce qui permet de transformer l'équation intégrale en un système algébrique plus simple à résoudre. Elle présente l'avantage d'être facile à mettre en œuvre et de fournir de bonnes approximations lorsque la solution est suffisamment régulière.

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier l'efficacité de cette méthode et de montrer son application sur quelques exemples numériques. Nous analyserons également la précision des résultats obtenus ainsi que la convergence de la méthode.

Chapitre 1

Préliminaires en analyse fonctionnelle

1.1 Base de l'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace vectoriel normé :

Normes

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$, et $\lambda \in K$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in E$

on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$

Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrisable

Proof. Pour tout $x, y \in E$ on définit la fonction ϕ par

$$\phi(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\phi(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $\phi(x, y)$ est symétrique

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|y - x\| = \phi(y, x)\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= \phi(x, z) + \phi(z, y)\end{aligned}$$

□

1.1.2 Opérateurs linéaires bornés

Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

– *Condition additive*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

– *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \| \cdot \|_1)$ et $(E, \| \cdot \|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \| \cdot \|_1)$ et $(E, \| \cdot \|_2)$.

1.1.3 Espace de Banach :

Suite de Cauchy :

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \| \cdot \|)$; on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si, on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ contient une sous suite x_{n_k} convergente vers x alors la suite x_n est aussi convergente vers le même élément x .

Soit x_n une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x

$$\begin{aligned}\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \quad \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon\end{aligned}$$

Espaces complets

Definition 1.1 *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'éléments de E est une suite convergente dans E*

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Espaces de Banach

Definition 1.2 *On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.*

1.1.4 Opérateurs compacts :

Definition 1.3 *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.*

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F .

Theorem 1.4 *(critère de compacité)*

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F .

Proof. Il suffit d'appliquer les définitions appropriées d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. $\square$

Theorem 1.5 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Theorem 1.6 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Proof. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autre part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. $\square$

Theorem 1.7 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Corollary 1.8 *La boule unité $B(0, 1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Theorem 1.9 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Theorem 1.10 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Noyau faiblement singulier

Definition 1.11 On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,

$$\forall x, y \in G, x \neq y, \exists M > 0, |K(x, y)| < \frac{M}{|x - y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

Theorem 1.12 L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.

1.1.5 Espace de Hilbert

Produit scalaire

Definition 1.13 On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application : $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Definition 1.14 un espace de Hilbert H est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.

Généralement l'espace H est séparable est de dimension infinie, en d'autre terme, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout

entier $n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Exemple 1.15 L'espace $L^2(a, b)$

L'espace $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrales défini par

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f; \int_I |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

ou l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt$$

induite par le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert

Orthogonalité

Definition 1.16 (*Vecteurs orthogonaux*) On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Base hilbertienne

Une partie X de H est dite dense dans H si :

$$\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; \|x - y\| < \varepsilon$$

de manière équivalente si tout y de H est limite d'une suite d'éléments x_n de X :

$$\|x_n - y\| \longrightarrow 0$$

Definition 1.17 Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$ et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que F est une base de Hilbert (base hilbertienne) de H si :

1. F est une famille orthonormée de H , c'est-à-dire :
$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$$
2. La famille F est de plus complète ou totale, c'est-à-dire : l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H

Theorem 1.18 (*Riesz-Fischer*) Soit un système orthonormé dans un espace de Hilbert H , et soient les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$, tel que

$$\alpha_i = \langle f; \varphi_i \rangle, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f; \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

ou encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H , pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de H orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H , qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$

Theorem 1.19 *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

Remark 1.20 *Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies n sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace K^n alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à L_2*

1.1.6 Equations aux Opérateurs compacts :

Equations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ définit l'équation de second espèce donnée par

$$\varphi - A\varphi = f; \quad \varphi, f \in X$$

où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue

Theorem 1.21 *Le noyau de l'opérateur T défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X ; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie

Theorem 1.22 *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit, elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts, c'est à dire il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0\} \subset N(T), N(T^2) \subset \dots \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = \dots$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

Theorem 1.23 *L'image de l'opérateur T défini par ,*

$$\operatorname{Im} T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé

Le nombre de Riez p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez q pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Theorem 1.24 *Les sous espaces $N(T^n)$ et $R(T^n)$ sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^r \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

Lemma 1.25 *L'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si, T^r est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Lemma 1.26 *L'opérateur $T = I - A$ est surjectif si et seulement si T^r est surjectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Theorem 1.27 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ borné*

Theorem 1.28 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification

2.1 Classification des équations intégrales première espèce :

2.1.1 Equations intégrales de Volterra de première espèce :

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Definition 2.1 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

2.1.2 Equations intégrales de Fredholm de première espèce :

Definition 2.2 On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme :

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où φ est la fonction inconnue, f et k sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm .

2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce

Definition 2.3 On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

2.2 Régularisation de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm

Pour des fonctions lisses $k_1(x, t)$, $k_2(x, t)$ et $f(x)$ l'équation (2.1) peut être convertie en une équation de Volterra-Fredholm de seconde espèce en différenciant par rapport à x

$$k_1(x, x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial k_1}{\partial x}(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b \frac{\partial k_2}{\partial x}(x, t)\varphi(t)dt = f'(x) \quad (2.2)$$

Si $k_1(x, x) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, la division de l'équation (2.2) par le facteur $k_1(x, x)$ nous donne une équation intégrale de seconde espèce, connue en tant que problème bien posé

$$\varphi(x) + \int_a^x k_3(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_4(x, t)\varphi(t)dt = g(x) \quad (2.3)$$

où les fonctions k_3, k_4 et g sont données par :

$$k_3 = \frac{1}{k_1(x, x)} \frac{\partial k_1}{\partial x}(x, t), \quad k_4 = \frac{1}{k_1(x, x)} \frac{\partial k_2}{\partial x}(x, t) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{f'(x)}{k_1(x, x)}$$

Si $k_1(x, x) = 0$ pour $t \in [a, b]$, alors nous répétons le processus de différenciation jusqu'à obtenir $\frac{\partial^q k_1}{\partial x^q}(x, t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, avec k_1, k_2 et f dans $C^{q+1}([a, b] \times [a, b])$ et $C^{q+1}([a, b])$, respectivement, où q représente le plus petit entier pour lequel la dérivée de k_1 d'ordre q ne s'annule pas. Ainsi, nous avons :

$$\frac{\partial^q k_1}{\partial x^q}(x, t)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial^{q+1} k_1}{\partial x^{q+1}}(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b \frac{\partial^{q+1} k_2}{\partial x^{q+1}}(x, t)\varphi(t)dt = f^{(q+1)}(x) \quad (2.4)$$

2.3 Classification des équations intégrales de seconde espèce

2.3.1 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce :

Definition 2.4 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

2.3.2 Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce :

Definition 2.5 On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue , $k(x, y)$, et $f(x)$ des fonctions donnés, λ est un facteur connu

2.3.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm de seconde espèce

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints, apparaît dans une équation intégrale .

Definition 2.6 On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt , \quad x \in [a, b] \quad (2.5)$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme :2

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt ds$$

où les fonctions k_1 , k_2 et f sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

2.4 Résultat existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.5)

Definition 2.7 Soit X un espace normé et $T : X \rightarrow X$ un opérateur, T est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

Theorem 2.8 (principe de contraction). Soit X un espace normé. Si $T : X \rightarrow X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ , alors T est un opérateur de Picard

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Théorèmes d'existence et d'unicité :

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.6)$$

où

1. $f \in C[a, b]$, $k_1(x, t) \in C(D_1)$, avec $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\}$
2. $\varphi \in C[a, b]$, $k_2(x, t) \in C(D_2)$, avec $D_2 = [a, b] \times [a, b]$
3. $M_1 = \max_{(x, t) \in D_1} |k_1(x, t)|$, et $M_2 = \max_{(x, t) \in D_2} |k_2(x, t)|$

Theorem 2.9 Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que :

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b-a))] < 1$$

Alors l'équation (2.6) a une solution unique $\varphi \in C[a, b]$, et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C[a, b]$

Proof. Soit l'opérateur intégral $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt + \int_a^b k_2(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt \\ &\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt + \\ &\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} (\exp(c(x-a)) - 1) + \frac{M_2}{c} (\exp(c(b-a)) - 1) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} \exp(c(x-a)) + \frac{M_2}{c} \exp(c(x-a+b-x)) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-x))) \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|, \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur A est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a)))$

La condition supposée garantit que A est une contraction. Alors on applique principe de contraction $\square$

2.5 Polynômes de Taylor

Definition 2.10 Soit n un entier. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I contenant un point a , dérivable n fois sur I , et dont la dérivée n -ième en a existe. On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en a de f , le polynôme :

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

On appelle reste de Taylor d'ordre n en a de f , la fonction R_n qui à $x \in I$ associe :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Chapitre 3

Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm

3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm :

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Tchebychev.

3.1.1 Méthode de Taylor

Soit l'équation intégrale de type Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (3.1)$$

Une fonction $\varphi(x)$ est dite analytique si elle dérivable de tous les ordres, en chacun de ses points et peut être représenter au voisinage de ses points par une série entière. Pour le point $x = 0$, on a

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.2)$$

On veut appliquer la méthode des solutions en série, qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, pour l'équation intégrale de Volterra-Fredholm, nous supposons l'analyticité la solution $\varphi(x)$ de l'équation (3.1). On remplace la série Taylor (3.2) dans l'équation (3.1) où on aboutit à un système algébrique dont les

coefficients sont les inconnues.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = Tf(x) + \int_0^x k_1(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt + \int_a^b k_2(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt, \quad (3.3)$$

pour plus de simplicité on écrit

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots &= Tf(x) + \int_0^x k_1(x, t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \\ &+ \int_a^b k_2(x, t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt, \end{aligned}$$

où $Tf(x)$ est le développement de Taylor de la fonction f .

Exemple 3.1 Résoudre par la méthode des séries l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante :

$$\varphi(x) = x^5 - 6x^3 - x^2 - x + 2 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 (x+t)\varphi(t)dt,$$

en remplaçant $\varphi(x)$ par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^5 - 6x^3 - x^2 - x + 2 + \int_0^x t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt + \int_{-1}^1 (x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$$

Évaluons les intégrales de l'équation, et comparons les termes des deux côtés de l'équation de même puissances de x , on obtient

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + \dots &= 2 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{5}a_3 \\ &+ \left(-1 + 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 \right) x + \left(-1 + \frac{1}{2}a_0 \right) x^2 \\ &+ \left(-6 + \frac{1}{3}a_1 \right) x^3 + \frac{1}{4}a_2 x^4 + \left(1 + \frac{1}{5}a_3 \right) x^5 + \dots \end{aligned}$$

Finalement, il faut résoudre le système algébrique obtenu dont les coefficients de la solution $\varphi(x)$ sont les inconnues

$$a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = -5, a_4 = a_5 = \dots = 0.$$

D'où la solution exacte est obtenue comme

$$\varphi(x) = 2 + 3x - 5x^2$$

3.2 Exemples Numériques

Après avoir traité les aspects théoriques liés aux équations intégrales et aux méthodes d'approximation en utilisant le polynôme de Taylor, nous passons dans ce chapitre l'aspect pratique, en présentant des exemples numériques visant à évaluer l'efficacité de la méthode proposée.

Exemple 3.2 Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \varphi(t) (xt + 2) dt + \int_0^1 \varphi(t) e^{x^2-t} dt = f(x)$$

après la régularisation

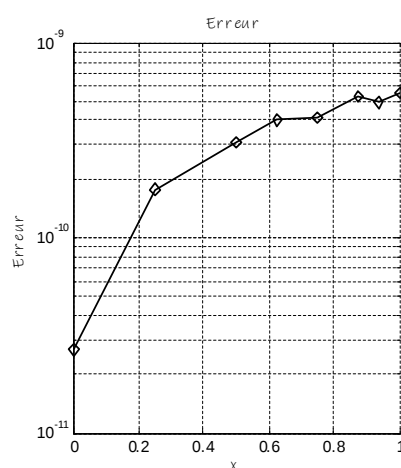
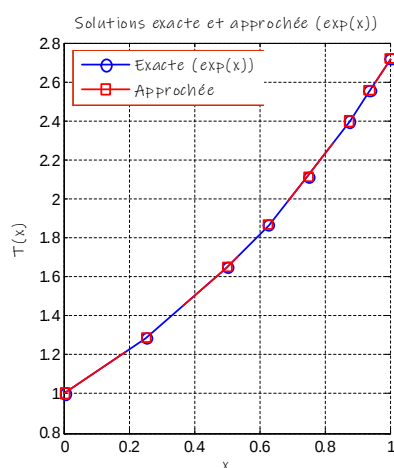
$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(t) \frac{t}{(x^2 + 2)} dt + \int_0^1 \frac{2x}{(x^2 + 2)} \varphi(t) e^{(x^2-t)} dt = \frac{1}{x^2 + 2} (e^x + 2xe^{x^2} + x^2e^x + xe^x + 1)$$

où la fonction $f(x) = x + 2e^x + e^{x^2} + x^2e^x - xe^x - 2$ est calculée une fois que l'on affecte l'équation la solution $\varphi(x)$ donnée par

$$\varphi(x) = e^x, \quad \frac{1}{(x^2 + 2)} \frac{d}{dx} (x + 2e^x + e^{x^2} + x^2e^x - xe^x - 2)$$

Nous appliquons Polynômes de Taylor $T(x)$ pour approximer la solution $\varphi(x)$ c'est-à-dire que $\varphi_N(x)$ solution du système algébrique avec $N = 8$

Pts de x	Solu exacte	Solu approx	Erreur
0.000000e + 000	1.000000e + 000	1.000000e + 000	2.670530e - 011
2.500000e - 001	1.284025e + 000	1.284025e + 000	1.765605e - 010
5.000000e - 001	1.648721e + 000	1.648721e + 000	3.069687e - 010
6.250000e - 001	1.868246e + 000	1.868246e + 000	4.025149e - 010
7.500000e - 001	2.117000e + 000	2.117000e + 000	4.140901e - 010
8.750000e - 001	2.398875e + 000	2.398875e + 000	5.298904e - 010
9.375000e - 001	2.553589e + 000	2.553589e + 000	4.938263e - 010
1.000000e + 000	2.718282e + 000	2.718282e + 000	5.503744e - 010



Exemple 3.3 Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \varphi(t) (xt - 2) dt + \int_0^1 \varphi(t) x^2 t dt = f(x)$$

après la régularisation

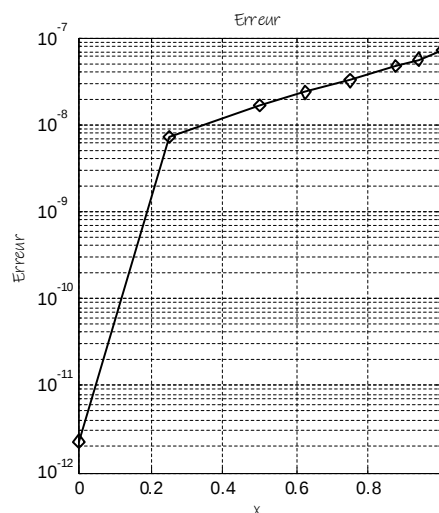
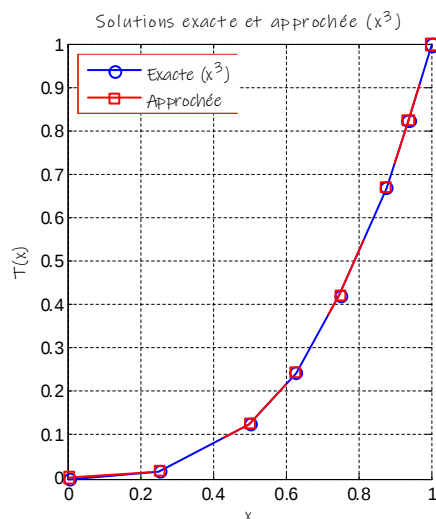
$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{t}{x^2 - 2} \varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{2xt}{(x^2 - 2)} \varphi(t) dt = \frac{2}{5} \frac{x}{x^2 - 2} (3x^4 - 5x^2 + 1)$$

où la fonction $f(x) = \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^2$ est calculée une fois que l'on affecte l'équation la solution $\varphi(x)$ donnée par

$$\varphi(x) = x^3$$

Nous appliquons Polynômes de Taylor $T(x)$ pour approximer la solution $\varphi(x)$ c'est-à-dire que $\varphi_N(x)$ solution du système algébrique avec $N = 8$

Pts de x	Solu exacte	Solu approx	Erreur
0.000000e + 000	0.000000e + 000	2.249113e - 012	2.249113e - 012
2.500000e - 001	1.562500e - 002	1.562501e - 002	7.241835e - 009
5.000000e - 001	1.250000e - 001	1.250000e - 001	1.660759e - 008
6.250000e - 001	2.441406e - 001	2.441406e - 001	2.323839e - 008
7.500000e - 001	4.218750e - 001	4.218750e - 001	3.251142e - 008
8.750000e - 001	6.699219e - 001	6.699219e - 001	4.670548e - 008
9.375000e - 001	8.239746e - 001	8.239747e - 001	5.714164e - 008
1.000000e + 000	1.000000e + 000	1.000000e + 000	7.139996e - 008



3.3 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la résolution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce à l'aide de la méthode des polynômes de Taylor. Cette méthode permet d'approximer la fonction inconnue par un polynôme de Taylor afin de transformer l'équation intégrale en un système algébrique plus simple à résoudre.

Bibliographie

- [1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [2] M. N. NADIR, Sur la Solution Numérique des équations Intégrales de Volterra-Fredholm en Utilisant les Polynômes de Tchebyshev, Master, University of Msila (2022).
- [3] K. E. Atkinson, "The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind," Cambridge University Press, 2010.
- [4] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA
- [5] L. Aissa, N. Mostefa, N. Mohamed. Nasseh. Application of Chebyshev Polynomials to Volterra-Fredholm Integral. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7, 10 (2022), pp. 1-8.
- [6] NADIR, Mohamed Nasseh ; JAWAHDOU, Adel. Chebyshev polynomials to Volterra-Fredholm integral equations of the first kind. REMAT :, v. 10, n. 1, p. e3002,
- [7] S. Andréas,,weakly singular Volterra and Fredholm-Volterra integral equation, Studia Univ . "Babeş-Bolyar, Mathematica , Volume XLVIII, Number 3, September 2003
- [8] Mohsen Didgar,Alireza Vahidi :Approximate Solution of Linear VolterraFredholm Integral Equations and Systems of Volterra-Fredholm Integral Equations using Taylor Expansion Method,Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics,Vol. 15, No. 1 (2020), pp 31-50.
- [9] P. Kumar and G. C. Dubey, An application of Volterra integral equation by expansion of Taylor s series in the problem of heat transfer and electrostatics, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), vol.11, no. 5, pp. 59-62, 2015.

الملخص:

الهدف من هذا البحث هو إيجاد حلول عددية تقريبية للمعادلات التكاملية من نوع فولتيرا-فريدولم من النوع الأول، وذلك بعد تحويلها إلى معادلات من النوع الثاني باستخدام تقنية النظام. تم استخدام كثيرات حدود تايلور لتقريب الحل. وفقد تقدير أمثلة عددية لتوضيح فعالية ودقة الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية:

كثيرات حدود تايلور - المعادلات التكاملية - النظام - الطرق العددية

Résumé :

Le but de ce mémoire est de trouver des solutions numériques approximatives aux équations intégrales de Volterra-Fredholm du premier type, en les transformant en équations du second type à l'aide de la technique de régularisation. Les polynômes de Taylor sont utilisés pour approximer la solution. Des exemples numériques sont présentés pour démontrer l'efficacité et la précision de la méthode proposée.

Mots clés :

Polynômes de Taylor – Équations intégrales – Régularisation – Méthodes numériques

Abstract:

The objective of this study is to find approximate numerical solutions for Volterra-Fredholm integral equations of the first kind by transforming them into second kind equations using a regularisation technique. Taylor polynomials are used to approximate the solution. Numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness and accuracy of the proposed method.

Keywords:

Taylor polynomials – Integral equations – Regularisation – Numerical methods