



N° d'ordre :

**UNIVERSITÉ \*MOHAMED BOUDIAF \*DE M 'SILA  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE  
L'INGÉNIEUR  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

**MÉMOIRE**

Présenté par : MOUSSAOUI Mustapha

Pour l'obtention du diplôme de

**MAGISTER**

**Spécialité : Génie Mécanique  
Option : Construction Mécanique**

**Thème**

**MODÉLISATION ET SIMULATION ÉLASTOPLASTIQUE  
DES ACIERS DE CONSTRUCTION**

Soutenu publiquement le ...../...../.....devant le jury composé de :

Mr. BOUCHOUCHA A.	Président	(Prof U.S.T Constantine)
Mr. NECIB B.	Examineur	(Prof U.S.T Constantine)
Mr. MEZIANI S.	Promoteur	(Prof U.S.T Constantine)
Mr. FARSI CH.	Examineur	(C.C U.S.T M' sila)

# SOMMAIRE

---

<b>SOMMAIRE</b>	i,ii,iii
<b>REMERCIEMENTS</b>	iv
<b>NOTATIONS</b>	v
<b>RESUME</b>	vii
<b>INTRODUCTION</b>	1

## **Chapitre I –ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

I.1.Historique	3
I.2.Revue bibliographique	4

## **Chapitre II –ETUDE THEORIQUE SUR LA MECANIQUE DE LA**

### **RUPTURE**

II.1.Introductions	11
II.2.Définitions	11
II.3.Etude d'un milieu fissuré	11
II.3.1.Mode de rupture	13
II.3.2.Etat de contrainte	13
II.4. Effets de microstructure sur la rupture ductile	15
II.5.Equations de la mécanique de la rupture	16
II.5.1.Equations d'élasticité planes	16
a) Etat de contraintes planes	16
b) Etat de déformations planes	16
II.5.2.Résolutions de la fonction d'AIRY	17
a) Solution par les potentiels complexes	19
b) Représentations d'un état élastique plan à l'aide des potentiels complexes	20
Ø Expressions des déplacements	20
Ø Expressions des contraintes	22
II.5.3.Expréssions des contraintes et déplacements en coordonnées cylindriques	23

II.5.4 Champs des contraintes et déplacements au voisinage de l'extrémité d'une fissure _____	23
II.5.5.Méthode de WESTERGAARD _____	27
II.5.6.Décomposition en champs symétriques et champs antisymétriques _____	28
II.5.7.Calcul du facteur d'intensité de contraintes _____	28
II.5.8.Expressions des champs de contraintes en mode I et II en coordonnées polaires _____	32
II.6.Calcul de l'énergie de propagation G _____	34
II.6.1. Critère d'énergie _____	34
II.6.2. Relation entre le K et l'énergie G _____	35

### **Chapitre III – ANALYSE DES FISSURES EN ELASTO-PLASTICITE \_\_\_\_\_**

III.1. Cas de la plasticité confinée _____	39
III.1.1.Taille de la zone plastique _____	39
1. Modèle d'IRWIN _____	39
2. Modèle de DUGDALE-BARENBLATT _____	40
III.1 .2.Géométrie de la zone plastique _____	42
III.2.Cas de la plasticité étendue _____	44
III.2.1.Ecartement à fond de fissure CTOD _____	45
III.2.2.Estimation du CTOD à partir du modèle Dugdale-Barenblatt _____	46
III.2.3.Taux de restitution d'énergie non linéaire _____	49
III.2.3.1.Intégrales de contour _____	50
1. Intégral –J _____	51
2. Calcul de l'intégral –J _____	52
III.2.3.2.Relation entre le CTOD et l'intégral -J _____	54
III.2.4.Méthodologie de mesure de l'intégral –J _____	55
III.2.5.Triaxialité des contraintes en tête de fissure _____	58
III.2.6.Courbe $J_R$ de résistance à la fissuration _____	60
III.2.7.Fissuration stable et instable _____	61
III.2.8..Détermination de J lorsque la fissure se propage _____	61
III.2.9.La contraintes élastiques T _____	62
III.2.10.Théorie de J-Q _____	63

---

<b>Chapitre IV – SIMULATION ELASTOPLASTIQUE</b>	
IV.1.Présentation du code de calcul	66
IV.1.1. Introductions	66
IV.1.2.Organisations d'un calcul	66
1. Choix de la géométrie et du maillage	67
2. Définitions du modèle mathématique	67
3. Résolutions du problème discrétisé	67
4. Analyse et post –traitement des résultats	67
IV.1.3.Préparation du modèle de calcul	67
IV.2.Analyse élastoplastique	70
IV.2.1.Choix du modèle	70
IV.2.2.Procédure de calcul	71
IV.2.3.Commentaires des résultats	75
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	84
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	87
<b>ANNEXE</b>	90

## REMERCIEMENTS

- Je désire exprimer mes sincères remerciements à Messieurs BOUCHOUCHA A. d'avoir bien accepté de présider le jury de la commission d'examen.
- J'exprime ma reconnaissance à Messieurs MEZIANI S. de m'avoir encadré et pour m'avoir fait profiter de ses conseils et de ses connaissances.
- Je tiens également à remercier Messieurs NECIB B. et FARSI CH. pour avoir participé à l'examen de ce travail.
- Mes remerciements vont également à tous les professeurs qui ont assuré mon enseignement de la post-graduation de l'option construction mécanique en particulier à M. ZIDANI K. de son aide pour l'utilisation du code CASTEM et son accueil chaleureux à l'université de BATNA.
- Je remercie vivement mes collègues du travail du service étude de SONELGAZ-MEI(maintenance des équipements industriels) et à mes amis de la promotion du post de graduation avec qui j'ai passé et partagé de très bons moments.
- Un remerciement très spécial à mon père et mes sœurs et à mes frères qui ont bien su comment m'aider à mener à terme ce travail. Merci à toute ma famille.

# NOTATIONS

$r; \theta$	Coordonnées polaires
$G$	Energie de Griffith
$\sigma_{ij}$	Composantes des contraintes
$\tau_{ij}$	Contraintes de cisaillement
$\sigma$	Tenseur des contraintes
$\varepsilon$	Tenseur des déformations
$\varepsilon_{ij}$	Composantes des déformations
$u_i$	Déplacements
$\sigma_\infty$	Contrainte de traction
$\sigma_E$	Limite d'élasticité
$K_I$	Facteur d'intensité de contrainte en mode I
$K_{II}$	Facteur d'intensité de contrainte en mode II
$K_{III}$	Facteur d'intensité de contrainte en mode III
$E$	Module d'young
$\mu$	Module de cisaillement
$\nu$	Coefficient de poisson
$\lambda$	Coefficient de lamé
$K$	Matrice rigidité
$A$	Fonction d'Airy
$2a$	Longueur de la fissure
$e$	Epaisseur
$n$	Exposant d'écrouissage
$\Delta W_{\text{ext}}$	Variation d'énergie due aux forces extérieures
$\Delta W_{\text{élastiques}}$	Variation d'énergie emmagasinée
$\Delta W_{\text{sép}}$	Energie de séparation des surfaces fissurées
$\Delta W_{\text{plastique}}$	Energie dissipée dans la plastification
$\Delta U$	Energie dépensé lors de la propagation de la fissure
$F$	Force par unité d'épaisseur

$K_{\text{eff}}$	Facteur d'intensité de contrainte effectif
$\delta$	Ouverture en fond de fissure
$J$	Intégrale-J ou taux de restitution d'énergie non linéaire
$\rho$	Taille de la zone plastique
$W$	Densité d'énergie de déformation
$\varphi; \chi; \psi$	Fonction de Kolosov
$\Delta$	Opérateur de Laplace
$z$	Nombre complexe
$\bar{z}$	Conjugué du nombre complexe
$P$	Matrice de passage
$\text{Re}$	Réelle d'une fonction
$\text{Im}$	Imaginaire d'une fonction

## **RESUME**

Les discontinuités dans les matériaux font appel à l'application de la mécanique de rupture. Ces discontinuités ou défauts, qui sont le plus souvent responsables de l'amorçage de fissures, ont des origines multiples internes ou externes au matériau, résultant d'une conception impropre, d'une mise en œuvre imparfaitement maîtrisée ou d'une utilisation abusive. Comprendre, voire éviter les ruptures, en utilisant des critères de conception adéquats, revient à étudier le développement de la géométrie de la fissure et à analyser les caractéristiques d'amorçage et de propagation. Ce travail a porté sur la simulation du comportement d'une plaque pré entaillée sollicitée en traction(mode I de rupture). Cette modélisation a permis d'une part de caractériser la singularité du champ de contrainte en fond de fissure par le calcul de l'intégral-J et d'autre part, d'étudier de façon énergétique le corps fissuré. Ce paramètre qui gouverne la fissuration. A permis également de prédire l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure.

## **SUMMARY**

Discontinuities in materials call upon the application of the breaking process. These discontinuities or defects, which are generally responsible for the starting of cracks, have multiple origins internal or external with material, resulting from an unsuitable design, implementation an imperfectly controlled or from an abusive use. To understand, to even avoid the ruptures, using adequate criteria of design, reverts studying the development of the geometry of the crack and analyzing the characteristics of starting and propagation. This work concerned the simulation of the behavior of a notched pre plate requested in traction(mode I of rupture). This modeling made it possible on the one hand to characterize the singularity of the stress field in bottom of crack by the calculation of integral-J and on the other hand, to study in an energy way the fissured body. This parameter which controls cracking. With licence also to predict the evolution of the crack until the ruin of the structure.

## الخلاصة

ان التقطعات داخل المعادن تستدعى منا تطبيق عملي لميكانيكا التشققات . و غالبا ما تكون هذه التقطعات او ما يسمى بالعيوب المسؤولة عن بداية تشققات المعدن . و هذه الاخيرة لها اسباب متعددة سواء كانت داخلية او خارجية ،نتيجة لانجاز غير سليم او استعمال مفرط او خاطيء . و لفهم كيفية تطور هذه التشققات و تجنبها يتطلب منا تطبيق قوانين الانجاز المطابقة و هذا يعود بنا لدراسة تطور شكل التشقق و تحليله لمعرفة خصائصه من بدايته و كيفية انتشاره . و هذا العمل المقدم حول تصنع رد فعل قطعة معدنية تم شقها مسبقا سمح لنا باءطاء الخصائص المتكونة من حقل الضغط المميز داخل التشقق بواسطة حساب تكامل  $J$  - من جهة و من جهة اخرى دراسة الجسم المتشقق بطريقة فعالة . و هذا العامل هو اساس حساب التشققات و يمكننا القول اخيرا ان تطور هذه الاخيرة (القطعة المعدنية) يظل مستمرا حتى انهيار الهيكل .

# INTRODUCTION

Dès la moitié du 19<sup>ème</sup> siècle l'usage accru de l'acier et des autres alliages métalliques a entraîné une augmentation du nombre d'accidents Ponts, chemins de fer, réservoirs sous pression, conduites et toitures connurent des accidents aussi spectaculaires que meurtriers. En effet, l'utilisation d'alliages métalliques était réservée à des structures fortement sollicitées.

Un certain nombre de ces accidents étaient dus à un mauvais dimensionnement ou à une mauvaise conception, mais certains accidents étaient également dus à la présence de défauts initiaux qui avaient permis l'initiation de fissures, ceci a conduit à la création d'une nouvelle discipline la mécanique de la rupture, qui permet de décrire la propagation d'une fissure et la rupture d'un élément fissuré.

Dans la plupart des structures contiennent des défauts introduit pendant la fabrication qui génèrent l'endommagement du matériau sous l'action des sollicitations mécanique et favorisant l'amorçage et la propagation des fissures, ces défauts sont inévitables dans toutes les structures, même dans des matériaux aussi propres que possible. Les défauts peuvent se créer après soudage ou par corrosion ou par fatigue si la structure est soumise à des charges cycliques.

Devant l'impossibilité de calculer les structures convenablement par les méthodes classiques, il a paru fondamental de pouvoir prévoir des dimensions critiques des défauts qui, sous des conditions de contraintes données, provoqueraient des ruptures caractéristiques, cela a conduit à l'introduction de la notion de la ténacité.

Suivant le niveau de ductilité du matériau, le comportement à la rupture c'est à dire à l'amorçage et à la propagation de fissures est analysé à l'aide des concepts de la mécanique linéaire-élastique de la rupture (MLR) et la mécanique élasto- plastique de la rupture (MEPR). Selon le cas, la notion de ténacité (encore appelée résistance à la fissuration) est ainsi représentée par l'intégral de contour J ou intégrale de RICE et le déplacement à fond de fissure ou CTOD, paramètres caractérisant la rupture élasto- plastiques. Ils décrivent tous les deux, les conditions à l'extrémité d'une fissure (champs des contraintes et de déplacements) et peuvent être utilisées comme critère de rupture.

Les valeurs critiques de J et du CTOD conduisent à des valeurs de la ténacité des matériaux à peu près indépendants de la géométrie des structures même lorsque la plastification à l'extrémité des fissures est importante.

Dans une plaque mince ou à la surface d'une pièce, on se trouve en état de contrainte plane la déformation dans la zone plastifiée se produit par glissement incliné à 45° vers la surface latérale  
Dominique François [41]

L'objectif de notre travail est d'évaluer les paramètres caractérisant la ténacité du matériau J ou CTOD à partir d'une simulation sur le code CASTEM2000 d'une plaque pré entaillée sollicitée en traction et d'analyser leurs évolutions sous la sollicitation de traction.

Notre mémoire comporte quatre chapitres :

- ✓ Dans le premier chapitre, nous présentons ici un historique des événements catastrophiques de la rupture et une synthèse de quelques travaux sur la science de la rupture.
- ✓ Le deuxième chapitre est consacré à l'étude théorique de la rupture et la détermination des équations fondamentales qui régissent la mécanique de la rupture avec une résolution de l'équation biharmonique par la méthode de Westergaard et une représentation des expressions de contrainte et déplacement au voisinage de l'extrémité de la fissure sous diverse forme ainsi que l'approche de Griffith énergétique.
- ✓ Le troisième chapitre s'est orienté vers l'analyse des fissures élasto plastique où on a présenté une étude sur les deux cas de la plasticité confinée à l'aide de deux modèles en évaluant leur  $K_{Ic}$  corrigé et la plasticité étendue. De même un calcul de la forme de la zone plastique par les deux critères VONMISES, TRESCA. et le calcul du taux de restitution d'énergie non linéaire.
- ✓ Le quatrième chapitre, nous présentons dans ce dernier une analyse sur la simulation élasto plastique sur une plaque pré entaillée sollicitée en traction avec un commentaire des résultats trouvés
- ✓ Part la suite une conclusion générale tirée de ce présent travail.

## Chapitre I

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

#### I.1. Historique

Grâce aux progrès réalisés dans le domaine de la mise en forme des métaux durant les trois derniers siècles, le fer et l'acier ont progressivement remplacé le bois et le ciment comme matériaux structuraux de base. Malgré leurs hautes caractéristiques, les structures réalisées à partir de ces matériaux ont connu des accidents importants dès le milieu du 19<sup>ème</sup> siècle. L'origine de ces accidents était la rupture inattendue de composants critiques de ces structures.

L'un des premiers incidents enregistrés sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu **Montrose en Mars/1830 en Grande Bretagne**. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le **King's Bridge à Melbourne/1962** ou encore le **Point Pleasant Bridge en Virginie /1967**. Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. De nombreux accidents intervinrent également sur des pipelines, des pétroliers, ou encore sur des avions. En 1950, deux avions Comet se sont brisés à haute altitude à cause d'un problème de rupture par fatigue sur les trous des rivets près des hublots, lesquels étaient de forme carrée !

Ces risques d'accidents étaient d'autant plus grand que l'utilisation d'alliages à hautes caractéristiques mécaniques (ténacité, rigidité...), permettant la réalisation de structures de plus en plus complexes et sollicitées, a énormément augmenté. En fait, les estimations de tenue des structures, fondées sur les caractéristiques mécaniques classiques, ne tenaient pas compte de la ténacité des matériaux en conditions réelles de service, à cette époque le phénomène de rupture brusque n'est pas encore bien expliqué sous des sollicitations inférieures à la limite élastique.

Si Griffith est souvent cité comme le premier chercheur à avoir introduit la mécanique de la rupture (en tant que science), ses travaux restent basés sur des études antérieures. On peut notamment citer l'article de Wieghardt, paru en 1907 et dans lequel l'existence de la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure dans un matériau élastique linéaire fut reconnue.

A partir de ces résultats, Griffith s'est intéressé en 1920 au problème de la rupture, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique.

Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard **taux de restitution d'énergie**) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau. Vinrent ensuite les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité. Ces études, menées notamment par Sneddon en 1946, puis Irwin en 1957, ont permis de définir les **facteurs d'intensité de contraintes**, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture a connu un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période, on peut citer par exemple Rice en 1968 et Bui en 1973 qui introduisirent la notion d'**intégrales indépendantes du contour connu par l'intégral-J**, dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de fissure. C'est également à cette période que les premiers travaux concernant la mécanique de la rupture dans les matériaux multicouches sont réalisés Sih (1964), Erdogan (1965) et Comninou (1977).

Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité et des champs asymptotiques en pointe de fissure, nécessaires à l'analyse et à l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à de nombreux problèmes de géométries simples et pouvant donc être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes.

L'apparition de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la mécanique de la rupture d'un point de vue numérique, proposant ainsi des solutions plus précises à des problèmes plus complexes.

Apparurent alors une multitude de méthodes permettant de calculer les facteurs d'intensité de contraintes, le taux de restitution d'énergie ou encore de découpler les différents modes de rupture. Parmi ces nombreuses méthodes, les plus facilement implémentables donnent bien souvent des résultats approchés ou dépendants du maillage, alors que les autres nécessitent des techniques éléments finis avancées.

## I.2. Revue bibliographique

De nombreux travaux ont été réalisés dans le domaine. On présente dans ce qui suit une synthèse de quelques travaux réalisés ces dernières années.

Objectif des travaux de Dimitris .K [1] est de donner les principaux concepts de la mécanique de la rupture et de fournir les recommandations pour son application pratique. Il présente des informations pour l'évaluation de la durée de vie en fatigue et une définition sur la résilience qui est définie comme la capacité du matériau à absorber l'énergie quand la charge est dynamique, en présence de défaut.

-**Le** comportement ductile et fragile des matériaux comme l'acier, dépend de plusieurs conditions, telles que : la température, le taux de chargement et les contraintes.

-**La** rupture ductile est généralement précédée par une grande montée de déformation plastique, qui se produit souvent, dans une direction de 45° par rapport à la contrainte appliquée.

-**Et** la rupture fragile ou clivage se produit généralement, avec une petite déformation plastique dans une direction souvent normale à la direction des contraintes principales -**L'**aluminium et l'acier à haute résistance ou le titanium ne subissent pas la transition ductile fragile ; la température a un effet faible sur la résistance de ces matériaux.

-**Une** analyse sur la mécanique linéaire élastique au voisinage de la fissure, effet de l'épaisseur sur le facteur d'intensité de contrainte

-**Présentation** des approches de la mécanique élastique-plastique de la rupture tel que le COD, la courbe R et l'intégral- J

-**Une** formulation de l'instrument d'évaluation de la structure tenant compte de la géométrie de la surface, de la forme de la fissure et des dimensions de la plaque  $K = F_e \cdot F_s \cdot F_w \cdot F_g \cdot \sigma \sqrt{\pi a}$  .

Une analyse des essais en élastique-plastique des deux types d'éprouvettes en acier inoxydable à 3 dimensions, utilisant les équations de RICE pour l'éprouvette à trois points de flexion et les équations de MERKLE CORTEN pour l'éprouvette de CT a été menée par Kenji Machida & Masanori Kikuchi [2]. Les conclusions principales suivantes, ont été déduites :

- Ø L'intégral J dans le centre des éprouvettes à 1/4in CT et des éprouvettes à 3points de flexions, peut être estimé par les équations conventionnelles ;
- Ø La tri axialité des contraintes de l'éprouvette de flexion de 3pts est plus grande que l'éprouvette de 1/4in CT. Pour 1/4in (0,64cm) éprouvette de traction CT de 1mm d'épaisseur, l'intégral-J le long du front de la fissure est plus grand au milieu de la section qu'à la surface de l'éprouvette et l'intégral-J au milieu de l'éprouvette, coïncide avec la valeur de J estimée par l'équation conventionnel MERKLE-CORTEN utilisant 0,8B<sub>0</sub> comme épaisseur fictive. Pour l'éprouvette 3pts de flexion, la distribution de l'intégral-J le long du front de la fissure est similaire à 1/4in de l'éprouvette de traction (2mmx2mmx1mm). L'intégral J au milieu de la section peut être estimé par la courbe force-déplacement déduite de l'équation de RICE.

L'éprouvette à 3pts de flexion est plus appropriée à l'essai de résistance à la rupture que l'éprouvette CT à 1/4in dans le cas des petites éprouvettes.

S. Dhar, R. Sethuraman et P. M. Dixit [3] ont fait une analyse de la loi d'endommagement de nucléation et croissance des vides. Ils ont observé que lorsque la déformation augmente, la triaxialité diminue et ils concluent que la triaxialité a un effet majeur sur la croissance des vides et l'initiation de la fissure.

Li-Sha Niu, Hui-Ji Shi, Claude Robin et G. Pluvinage [4] ont présenté une analyse élastique et élastique plastique de trois types d'éprouvettes sous la forme de bague circulaire à encoche intérieure en V, à l'aide de la méthode des éléments finis. Ils ont déterminé le paramètre de rupture K (FIC) en mode I et II. Ces bagues diffèrent l'une de l'autre, par la présence de pré fissures. La première contient une pré fissure interne, la deuxième - une encoche en V interne et la troisième - une encoche en V avec une pré fissure près de la racine de l'encoche. Différentes charges de compression sont appliquées extérieurement avec un angle d'inclinaison par rapport à l'axe de l'éprouvette, ce qui provoque une sollicitation en mode mixte (ouverture et glissement). Dans l'analyse élastique du champ de contraintes en mode mixte près de la racine de l'encoche, avec un angle  $\varphi=0$ , le FIC  $K_I$  atteint le maximum alors que le  $K_{II} = 0$  dans le cas de la bague circulaire avec une pré fissure interne ou une encoche. Quand l'angle de la charge augmente ( $\varphi>0$ ), la valeur de  $K_I$  diminue et  $K_{II}$  augmente ;  $K_{II}$  prend la valeur maximale quand  $\varphi$  atteint  $20^\circ$  et  $K_I$  tend vers zéro quand  $\varphi$  est environ égal à  $31,5^\circ$ . Dans ce dernier cas, l'état des contraintes est un cisaillement pur et l'extension de la fissure est dans une direction dans laquelle le taux d'énergie de restitution est à sa valeur maximale.

Pour l'analyse élastique-plastique de la distribution des contraintes d'un acier inoxydable 304L, une application du critère de Von Mises, permet d'identifier les surfaces des bagues circulaires à encoche en V ; une zone plastique se forme en papillon le long avec une montée du rayon de la racine du défaut. Si l'angle de la charge augmente, une asymétrie des champs de contraintes et de déformations devient plus claire et la zone plastique tourne du côté de l'encoche.

Georges Cailletaud [5] a fait une étude décrivant le concept de la mécanique de la rupture- Le taux d'énergie de restitution définit le comportement de la rupture et contribue à l'initiation et propagation et arrêt de la fissure –La propagation de fissure en fatigue ce phénomène se manifeste sur le matériau soumis à des chargements de faible intensité qui individuellement ne présenteraient pas de danger, appliqué de façon cyclique conduisent à l'amorçage puis à la propagation des fissures.

Majid Mirzaei [6] a présenté une description de la rupture élasto-plastique par l'introduction de l'intégral-J.

Lin Xia, I. C. Fong Shih et J. W. Hutchings [7] ont utilisé un modèle de calcul pour le mode I en déformation plane pour des alliages de métaux durs. Ils ont prédit la croissance des fissures ont présenté le comportement force-déplacement de 5 éprouvettes avec une comparaison avec des résultats expérimentaux pour 2 types d'acier.

L'initiation et croissance des vides et le regroupement au voisinage du fond de la fissure en mode I, dans le cas de déformation plane, pour des métaux durs, sont calculés en utilisant le modèle élastique-plastique continu sur des éprouvettes. Le modèle emploi des éléments cellulaires dans le plan au voisinage de la fissure. Chaque cellule contient des vides encadrés par le modèle conventionnel continu élastique plastique sous l'augmentation de la charge ; les vides croissent et se regroupent pour former de nouvelles fissures et par conséquent une avancée de la fissure. Un calcul numérique utilisant la méthode des éléments finis avec un maillage quadrilatéral. La variation des deux paramètres  $D$  et  $f_0$  (fraction volumique des vides) du modèle influe considérablement sur la croissance de la fissure.

Les travaux réalisés de H.Oudin [8] est de présenter le modèle du comportement élasto-plastique classique dans le cadre des petites transformations et une introduction des mécanismes physiques de déformation, le comportement macroscopique observé est en fait le résultat de déformations locales à une échelle microscopique. Ces phénomènes observés sont les déformations élastiques, déformations visqueuses (correspondent à la poursuite de la déformation alors la charge est constante, il n'y a plus d'équilibre), déformations permanentes et écrouissage.

Les travaux de l'Administrateur [9] présente l'étude de la théorie d'élasticité pour déterminer les équations fondamentales de la mécanique de la rupture. La méthode des éléments finis est la méthode numérique pour les solutions des valeurs limites du problème. Un calcul de la solution analytique par la méthode de Westergaard en utilisant la théorie de potentiel.

Travaux de CCMR [10] présente des formulations du comportement non-linéaire en définissant les paramètres nécessaires caractérisant la non linéarité.

Hamid R. Ghorbani, Prof. J. K. Spelt [11] ont exposé une analyse d'étude sur les approches de la mécanique de rupture pour les deux cas de la mécanique de rupture MRLE et MRNL. Selon le premier principe de la thermodynamique, quand le système passe d'un état non équilibre à l'état d'équilibre, l'énergie décroît ; GRIFFITH a montré sur la base du 1<sup>er</sup> principe que s'il y a une propagation de fissure alors l'énergie totale de système décroît et cela pour le cas de la mécanique

de rupture élastique linéaire. Pour la mécanique de la rupture élasto dynamique définit par croissance brusque de l'inertie de la force entraîne une croissance rapide de la fissure, une part de l'énergie se convertie en énergie cinétique.

La déformation à haute température définit le fluage, la croissance de la fissure se produit soit sous une charge constante à long temps soit sous une haute température le fluage peut être décomposer en quatre régimes.

- Ø Déformation instantanée (élastique)
- Ø Fluage primaire
- Ø Fluage secondaire
- Ø Fluage tertiaire (rupture finale)

La rupture en fatigue se produit sous une charge répétitive, les 3 phases successives de la fatigue sont :Initiation de la fissure,propagation ,rupture finale.

La conclusion tirée de l'étude de Dr Majid Mirzaei [12] en élasto plasticité, c'est si la zone plastique est assez petite le FIC K ou le G peut être utiliser comme paramètre caractérisant la rupture élastique linéaire, si la zone plastique est importante le modèle de non-linéarité doit être utiliser et le taux d'énergie de restitution est introduit pour le contrôle du champ de contrainte, si la plasticité est étendue même au ligament le paramètre approprié est le CTOD fut employé pour caractériser la distribution des contraintes.

M. Janssen J. Zuidema R.J.H. Wanhill [13] ont réalisés des travaux d'étude sur des méthodes d'essai pour le calcul des valeurs de l'intégral-J et du CTOD et les valeurs critiques  $J_{Ic}$  et  $\delta_{Ic}$  .

Pour déterminer l'influence de la température sur les propriétés de l'acier ; une étude menée par C.Guedes et al [14] sur l'effondrement des plaques en aciers soumises à un chargement thermique, cette étude fournit des courbes charges-températures pour plusieurs plaques pour différents rapports de a/b (variant de 1 à 3) et b/t (variant de 20 à 100), les constatations déterminer à partir de cette étude sont :

- Ø Le maximum de la courbe contrainte-température décroît avec une réduction de la rigidité.
- Ø Pour une haute température à 200° les caractéristiques contraintes-déformations (stress-strain) des aciers changent par une décroissance de la limite élastique et du module d'young
- Ø A température ambiante, la résistance à l'effondrement des plaques est gouvernée principalement par le paramètre  $\beta$  (slenderness  $\beta = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_0}{E}}$  ) de la plaque.
- Ø A 400° la limite élastique est beaucoup plus faible quoique la contrainte ultime soit similaire à 200°.

Ø L'effondrement dans la direction transversale se produit à faible température et à un niveau de contrainte faible.

G.Pluvinage and S.Jallouf [15] ont déterminé qu'il y a deux extrêmes limites pour le comportement de la rupture, élastique linéaire et complètement plastique, par une utilisation des courbes universelles pour déterminer la configuration intermédiaire à partir des interpolations entre ces 2 extrêmes, ces courbes donnent des résultats équivalentes concernant l'intégral-J ou le COD.

Le but des travaux de Takamoto Itoh [16] est de présenter une simple équation pour l'évaluation de la valeur de l'intégral J pour des contraintes biaxiales en mode I ; L'analyse par les éléments finie est employée pour obtenir le rapport entre le taux d'énergie de restitution (intégrale J) et le COD par la variation des rapports entre longueur de la fissure et contraintes déformation dans cette publication est présentée une études pour une zone plastique confinée l'équation est fonction de la longueur de la fissure et module d'young, pour une plastification généralisée l'équation est fonction des constantes élastique plastique du matériaux, longueur de la fissure et la biaxialité de déformation.

L'objectif des travaux réalisés de David M et al [17] dans cette étude est de déterminer l'effet de la géométrie et des inclusions contenues dans le matériau au condition critique sur l'initiation de la fissure ductile. Des éprouvettes cylindriques à encoche sont utilisées pour l'investigations du model GURSON-TVERGAARD dont des essais de traction sont appliquées sur trois types d'acier A,B,C d'où deux paramètres sont détermines qui pourront influencer sur le modèle, ces paramètres sont la fraction volumique des vides critique et la nucléation des vides secondaires .La structure des aciers utilisés ont des microstructures de ferrite +perlites, GURSON-TVERGAARD a montré que la nucléation des vides secondaires de perlite joue un rôle dominant dans l'initiation des fissures ductile.

Le comportement de la croissance de vide et de nucléation des vides ont fortement influé par la triaxialité des contraintes et de la déformation plastique. Le processus de la rupture ductile est expliqué par le comportement des vides à travers le processus de la nucléation des vides des inclusions ou des particules de secondes phases, croissance des vides et coalescence qui conduisent à la déchirure.

La résistance à la traction est de 490MPa pour tout les aciers utilisés dans les essais, mais seulement le taux de soufflure qui se différent, les dimensions de grain de ferrite est le même pour tout les aciers A,B,C.Les distances entre inclusion adjacentes ou entre nodule de perlite sont à considérer pour le comportement de l'initiation de fissure car le vide sont souvent nucléés au inclusion MnS ou au nodule de perlite.

Les conclusions déterminées de cette étude sont :

La fissure ductile s'initie au centre pour les éprouvettes de rayon 1,0mm et 2,0mm tandis que les éprouvettes à rayon vif 0,1mm et 0,25mm se produit au fond de l'encoche .

La déformation nominale augmente avec l'augmentation du rayon de l'encoche et se réduit en présence de MnS.

Dans la région au fond de l'encoche de l'éprouvette à encoche de rayon faible laquelle montre une grande déformation plastique et faible triaxialité de contrainte, un grand nombre des vides secondaires sont nucléés dans une étape tôt de déformation et la fraction volumique des vides croit à la valeur critique malgré le taux faible de la croissance des vides, de l'autre coté et dans la région de faible déformation plastique et une haute triaxialité de contrainte, les centres des éprouvette avec des rayons de 1,0mm et 2,0mm les vides peuvent accroître rapidement même à travers le volume des vides secondaires nucléés est faible par rapport à la région à haute déformation plastique

La fraction volumique des vides décroît largement en croissance de MnS dans la région à haute triaxialité de contrainte cependant l'effet de soufflure MnS est faible dans la région à faible triaxialité de contrainte et grande déformation.

D'après la publication de F.Wang , H.P.Lee , C.Lu [39] par la revue [science@direct](#) qui présente une étude sur le concept de l'intensité structural dont il démontre la relation existante entre l'intégral-J et l'intensité structurelle SI. Ce travail présente une démonstration théorique, arrivant à montrer que la composante normale de l'intégral de l'intensité structurelle le long du bord de la fissure est égal à l'intégral- J. Le facteur SI (Structural Intensity) est le flux de puissance ou la représentation vectorielle de l'intégral-J au fond de la fissure, le calcul numérique de SI est adopté pour visualiser l'intégral-J au fond de la fissure.

## Chapitre II

### ETUDE THEORIQUE SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

#### II.1. Introduction

La mécanique de la rupture a pour objet d'étudier et de prédire l'amorçage et la propagation de la fissure dans le solide. Le début de l'étude de la rupture des matériaux ductiles (grande déformation avant la rupture) n'a débuté qu'à la fin des années 1970 avec les travaux fondamentaux de RICE et TRACEY et GURSIN et l'étude de la rupture fragile (peu de déformation avant la rupture) remonte aux années 1920 avec les travaux de Griffith.

Selon le comportement physique du matériau, on utilise les concepts adaptés de la mécanique de la rupture. La classification habituellement utilisée pour ces concepts est la suivante :

-La mécanique linéaire de la rupture (MLR) pour les matériaux dont le comportement est essentiellement linéaire ;

-La mécanique non linéaire de la rupture (MNLR) ou mécanique élastoplastique de la rupture (MEPR), pour les matériaux ductiles, tels que les aciers à faible ou moyenne résistance, les INOX....

#### II.2. Définitions

On peut définir la ténacité d'un matériau avant d'exposer le concept de mécanique de rupture, comme étant l'aptitude du matériau à résister à la propagation des fissures. Nous nous intéresserons dans la présente étude, principalement à la mécanique élasto-plastique de la rupture, qui demeure applicable aux matériaux ductiles.

#### II.3. Etude d'un milieu fissuré

Dans un **milieu élastique** fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones (figure 1) Bouchard [ 26 ]:

1. La **zone d'élaboration** : au voisinage direct de la pointe de fissure, l'étude de cette zone (considérée comme ponctuelle, d'un point de vue mécanique) est très complexe dans la mesure où les contraintes tendent vers l'infini (d'un point de vue théorique) par rapport à la pointe de fissure ;
2. La **zone singulière** : dans cette zone, le champs de contrainte présente une singularité en  $r^{-1/2}$

3. La **zone des champs lointains** : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement.

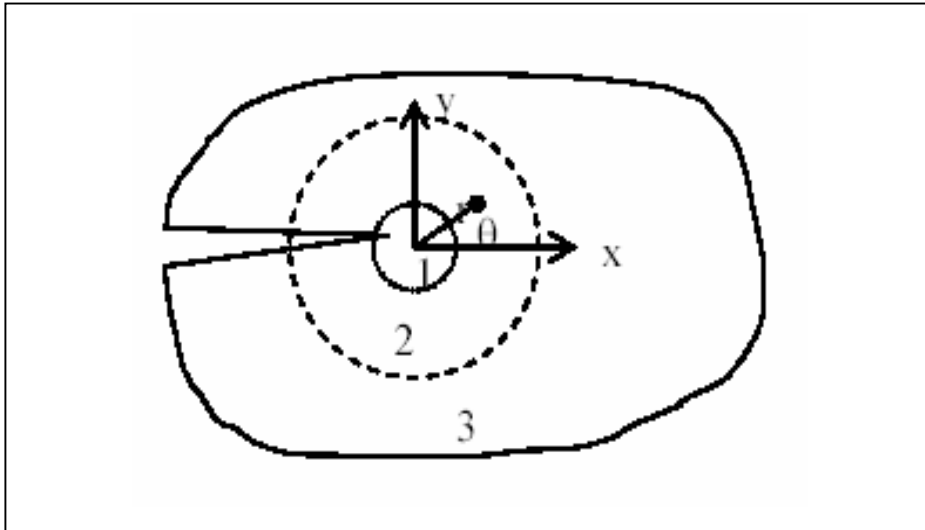


Figure 1 : Les zones de champs mécaniques

C'est la singularité d'ordre  $-1/2$  dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure. Cette solution n'est physiquement pas réaliste. En fait, les contraintes en pointe de fissure (figure 2) sont « écrêtées » par la plasticité Bouchard [26]. De plus, la signification énergétique de la rupture proposée par Griffith devient plus ambiguë, dans la mesure où elle consiste à représenter la propagation de la fissure comme un déchargement. Or, en plasticité, une partie de l'énergie est dissipée (phénomène irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie « disponible » pour la propagation.

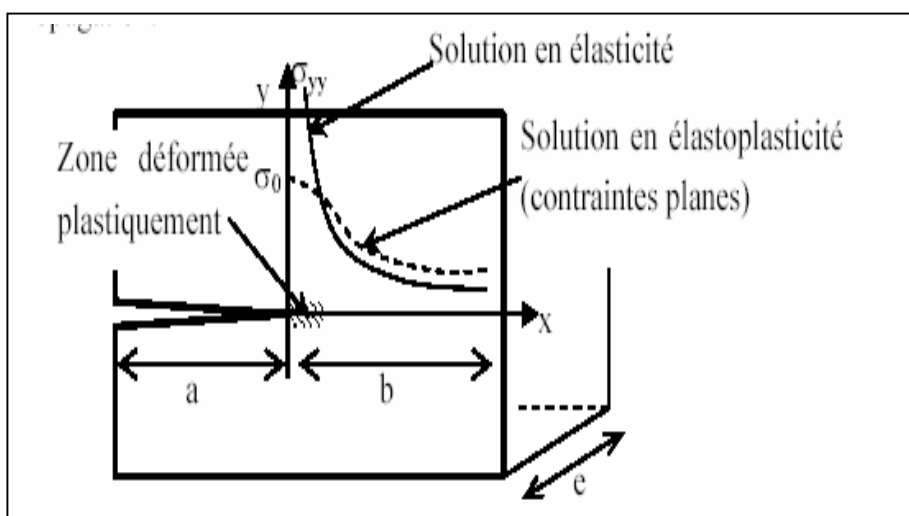


Figure 2 : Plasticité en pointe de fissure

### II.3.1. Modes de rupture

Pour décrire les déplacements ou les contraintes dans une fissure, il est nécessaire de distinguer trois modes, décrivant le mouvement relatif des deux surfaces de la fissure (figure 3) :

- **Mode I** : « mode par ouverture » ; les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre.
- **Mode II** : « glissement droit » ; les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan, perpendiculairement au plan de la fissure.
- **Mode III** : « glissement vis » ou « déchirement » ; les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan, parallèlement au front de la fissure.

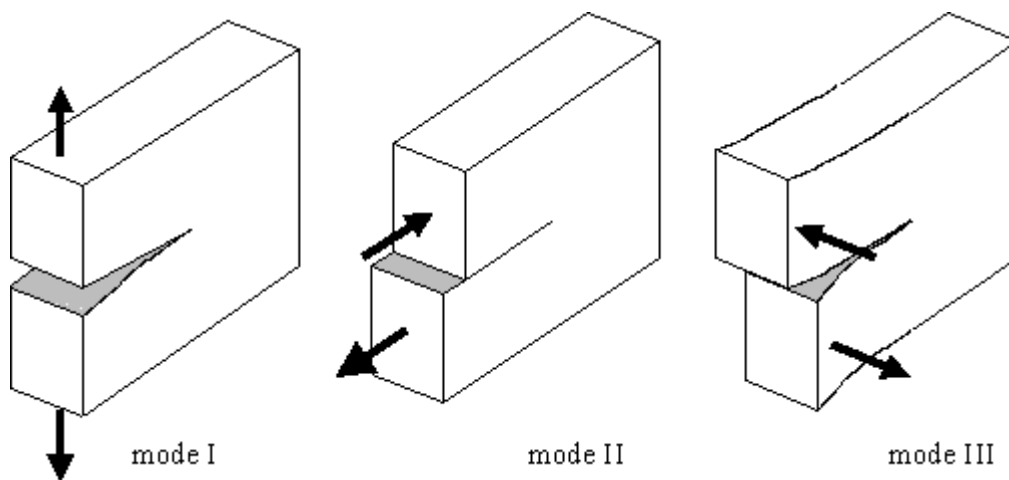


Figure 3 : Modes principaux de chargement

Le mode I est le mode principal de rupture. Il concerne les cas de chargement les plus importants et les plus dangereux.

### II.3.2. Etat de contrainte.

On peut distinguer deux états particuliers de contraintes : l'état plan de contrainte et l'état plan de déformation (figure 4). On est en état plan de contraintes lorsqu'on a :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$$

On se trouve en état plan de contrainte, par exemple, dans le cas d'une tôle mince soumise à des efforts dans son plan. On est, par contre, en état plan de déformation lorsque :

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$$

L'état plan de déformation peut avoir lieu au centre d'une pièce épaisse, où la tri axialité des contraintes est importante.

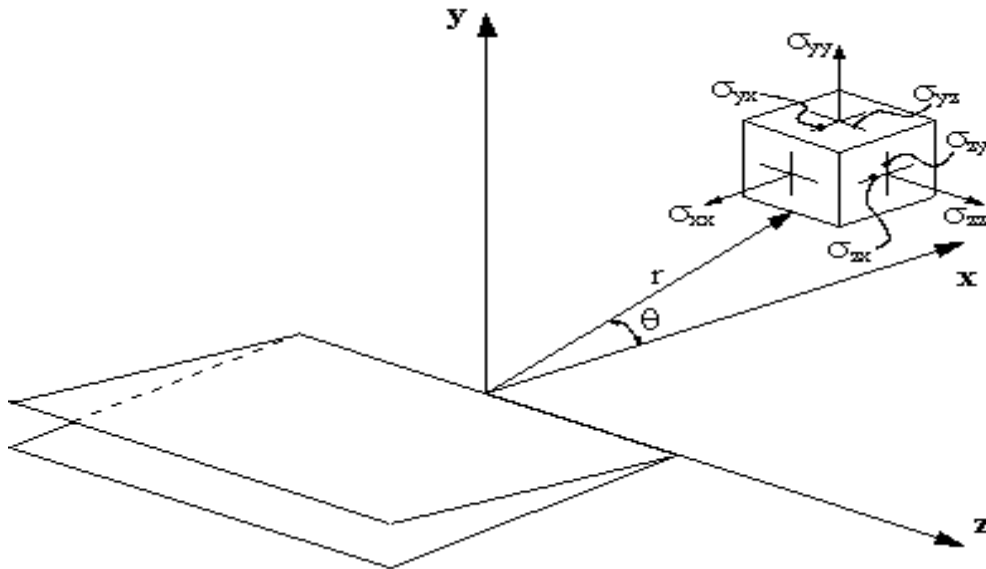


Figure 4 : Etat de contrainte

Pour décrire le champ de contrainte au voisinage du front d'une fissure, on peut utiliser la méthode d'IRWIN pour une plaque sollicitée en mode I :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

avec : K facteur d'intensité de contrainte

La cause principale de la rupture de la structure est la croissance des défauts type fissure, qui atteignent ou dépassent une taille critique. Ces défauts, qui sont pratiquement présents dans toutes les structures métalliques, apparaissent essentiellement, lors de la fabrication. A la solidification, les variations de volumes de température et de composition, induisent des séries de défauts. Parmi ces défauts structurels, il y a en particulier les inclusions, qui sont des particules généralement non métalliques et insolubles, emprisonnées dans le front de solidification.

Le mécanisme de formation de fissures, se produit par accroissement et étirement des cupules, ou tous juxtaposées en creux, s'initient aux niveaux des particules par décohésion de l'interface ou clivage de ces particules, qui sont très faiblement liées à la matrice.

Les paramètres importants qui contrôlent la déformation à la rupture sont la fraction volumique des particules, leur espacement, leur taille ainsi que le degrés de cohésion.

### **II.4. Effets de la microstructure sur la rupture ductile**

L'influence de la microstructure sur la rupture des métaux a été introduit suite aux travaux métallographique de Masounave.J, Bathias.C, Dickson.I [40], qui a montré que les ruptures ductiles, qui généralement se produisent dans les métaux et principalement les aciers, sont normalement causées par la nucléation, l'accroissement et la jonction de cupules (trous) dans les matériaux. Les cupules s'initient au niveau des particules, par décohésion de l'interface ou par clivage de ces particules et s'accroissent par mécanisme plastique.

Les particules non métalliques, typique de l'acier sont des inclusions, qui sont très faiblement liées à la matrice et donc initient très facilement des cupules. La rupture par coalescence de cupules est caractérisée par des surfaces de rupture, consistant en des activités ductiles et l'état de contraintes en tête de fissure à une importante composante hydrostatique.

En résumé, une rupture ductile se produit normalement par accroissement et étirement des cupules inities aux particules non métalliques. Ce mode rupture résulte de la naissance de cavités, puis de leur croissance et de leur coalescence sous l'effet de la déformation plastique. L'apparition des cavités à lieu surtout sur des inclusions par rupture de ces dernières ou par décohésion de leur interface, avec la matrice. A l'échelle macroscopique, la cassure à un aspect fibreux et à l'échelle microscopique, on voit des cupules correspondant à chaque cavité.

Dans de nombreuses cupules subsistent les inclusions ou les morceaux d'inclusions, qui leur ont donné naissance. Ces cupules peuvent avoir une forme sensiblement circulaire ou au contraire allongée dans une direction, si leur formation est accompagnée d'un cisaillement.

Le mécanisme de rupture ductile est donc essentiellement un phénomène de déformation plastique, qui survient quand la déformation atteint une valeur critique. Donc la formation des surfaces de rupture de faciès ductiles, peut être analysé en trois phases qui se succèdent au cours de la déformation du métal conduisant à la rupture :

- 1) Formation de fissures au niveau de précipités ou inclusion contenue dans le métal ;
- 2) A partir de ces fissures, formation de trous très allongés dans le sens de la déformation ;
- 3) Coalescence de ces trous conduisant à la rupture.

## II.5. Equations de la mécanique de la rupture

### II.5.1- Equations de l'élasticité plane

Les équations de comportement d'un milieu élastique linéaire et isotrope au point (M) peuvent être exprimées en utilisant les 2 paramètres  $E, \nu$  ou  $\mu, \lambda$

Avec :  $E$  module de YOUNG ;  
 $\nu$  coefficient de poisson ;  
 $\mu$  module cisaillement ;  
 $\lambda$  coefficient de Lamé.

$$m = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad n = \frac{l}{2(l+m)} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \frac{n}{E} = \frac{l}{2m(3l+2m)}$$

$$l = \frac{En}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad E = m \frac{3l+2m}{l+m}$$

La loi de Hooke :

$$\bar{s} = 2m \bar{e} + l (\text{tr} \bar{e}) \bar{I} ; \quad s_{ij} = l (\text{tr} \bar{e}) d_{ij} + 2m e_{ij}$$

$$\bar{e} = \frac{1+\nu}{E} \bar{s} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{s}) \bar{I} ; \quad e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \bar{s} d_{ij}$$

**a) Etat de contraintes planes :  $s_{zz} = s_{xz} = s_{yz} = 0$**

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{xx} = \frac{1+\nu}{E} s_{xx} - \frac{l}{E} (s_{xx} + s_{yy}) \\ e_{xy} = \frac{1+\nu}{E} s_{xy} \\ e_{yy} = \frac{1+\nu}{E} s_{yy} - \frac{l}{E} (s_{xx} + s_{yy}) \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} e_{xx} = \frac{1}{2m} \left[ s_{xx} - \frac{l}{3l+2m} (s_{xx} + s_{yy}) \right] \\ e_{yy} = \frac{1}{2m} \left[ s_{yy} - \frac{l}{3l+2m} (s_{xx} + s_{yy}) \right] \\ e_{xy} = \frac{1}{2m} s_{xy} \end{array} \right.$$

**b) Etat de déformations planes :  $(e_{xx} = e_{yz} = e_{zz} = 0)$**

En remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda^*$  tel que :  $l^* = \frac{2lm}{l+2m}$

d'où :

$$\frac{l}{3l+2m} = \frac{l^*}{2(l^*+m)}$$

on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x = \frac{1+u}{E} [s_x - u (s_x + s_y)] \\ e_y = \frac{1+u}{E} [s_y - u (s_x + s_y)] \\ e_{xy} = \frac{1+u}{E} s_{xy} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} e_x = \frac{1}{2m} \left[ s_x - \frac{l}{2(l+m)} (s_x + s_y) \right] \\ e_y = \frac{1}{2m} \left[ s_y - \frac{l}{2(l+m)} (s_x + s_y) \right] \\ e_{xy} = \frac{1}{2m} s_{xy} \end{array} \right.$$

On peut écrire pour les 2 états, dans une forme unique avec  $\lambda^* = \lambda$  :

- en déformations planes :

$$l^* = \frac{2lm}{l+2m}$$

- en contraintes planes :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{xx} = \frac{1}{2m} \left[ s_{xx} - \frac{l^*}{2(l^*+m)} (s_{xx} + s_{yy}) \right] \\ e_{yy} = \frac{1}{2m} \left[ s_{yy} - \frac{l^*}{2(l^*+m)} (s_{xx} + s_{yy}) \right] \\ e_{xy} = \frac{1}{2m} s_{xy} \end{array} \right.$$

### II.5.2. Résolution de la fonction d'AIRY

Pour un état plan les équations d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \end{array} \right.$$

En notant que X, Y sont les composantes de la force de volume, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{xy,x} + (s_y - v),y = 0 \\ (s_x - v),x + s_{xy,y} = 0 \end{array} \right.$$

En élasticité plane :

$$s_{xz} = s_{yz} = 0$$

Si on pose :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_x - V = A, yy = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \\ \mathbf{s}_y - V = A, xx = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\ \mathbf{s}_{xy} = -A, yy = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Les équations de compatibilité s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow e_{x,yy} + e_{y,xx} = 2e_{xy,xy}$$

Portant les équations de contrainte dans l'équation de compatibilité, on aura :

$$\left[ (1-\nu)\mathbf{s}_x - \nu\mathbf{s}_y \right], yy + \left[ (1-\nu)\mathbf{s}_y - \nu\mathbf{s}_x \right], xx = 2\mathbf{s}_{xy,xy}$$

$$(1-\nu) \Delta(\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_y) - \mathbf{s}_{x,xx} - \mathbf{s}_{y,yy} = 2\mathbf{s}_{xy,xy}$$

$$\text{avec : } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$(1-\nu)\Delta(\Delta A + 2V) - (A, yy + V), xx - (A, xx + V), yy = -2A, xxyy$$

$$\text{D'où (*) } \begin{cases} \Delta(\Delta A) + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta V = 0 \\ \Delta(\Delta A) + \frac{2m}{1+2m} \Delta V = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\Delta A)(1-\nu) + (1-\nu)\Delta(2V) - A, yyxx - V, xx - A, xxyy - V, yy = 0$$

$$(1-\nu)\Delta\Delta A - 2\nu\Delta V + \Delta V = \Delta V(1-2\nu) + \Delta\Delta A(1-\nu) = 0$$

En contraintes planes et en remplaçant  $\nu$  par  $n^* = \frac{n}{1+n}$  et  $\lambda$  par  $l^* = 2lm/(1+2m)$

$$(**) \begin{cases} \Delta(\Delta A) + (1-n) \Delta V = 0 \\ \Delta(\Delta A) + \frac{l+2m}{2(l+m)} \Delta V = 0 \end{cases}$$

Si les forces de volume sont négligeables, les relations (\*) et (\*\*) se réduisent à :

$$(1) \Delta(\Delta A) = 0$$

Donc les équations des contraintes seront :

$$\mathbf{s}_x = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}; \quad \mathbf{s}_y = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}; \quad \mathbf{s}_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$$

## Chapitre II – Etude théorique sur la mécanique de la rupture

La recherche de l'équation (1) revient donc à trouver une fonction bi harmonique  $\Delta(\Delta A)$  qui vérifie les conditions aux limites.

### a) Solution par les potentiels complexes :

\*Fonctions holomorphes ou analytiques :

En tout point M (x, y) du plan on associe le complexe :  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$

on peut tirer :  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  et  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$(x, y) \in \text{Plan} \longrightarrow g(x, y)$

$(x, y) \longrightarrow (z, \bar{z}) \longrightarrow g(z, \bar{z})$

Soient P(x, y) et Q(x, y) deux fonctions définies sur un domaine S du plan. La fonction g définie par  $g = P + iQ$  est holomorphe dans S si et seulement si :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

C'est-à-dire, si P et Q, parties réelle et imaginaire de g, vérifiant les relations de Cauchy-Riemann, traduisent l'holomorphes de g (z).

$(g = P + iQ)$  est holomorphe dans S  $\Rightarrow g_{,\bar{z}} = 0$

$$\begin{cases} g_{,z} = \frac{1}{2}(g_{,x} - ig_{,y}) \\ g_{,\bar{z}} = \frac{1}{2}(g_{,x} + ig_{,y}) \end{cases}, \quad \begin{cases} g_{,x} = (g_{,z} + g_{,\bar{z}}) \\ g_{,y} = i(g_{,z} - g_{,\bar{z}}) \end{cases}$$

$g_{,\bar{z}} = 0 \Rightarrow g_{,x} + ig_{,y} = 0$  à reporter dans les relations ci-dessus :

$$\begin{cases} g_{,z} = \frac{1}{2}(g_{,x} + g_{,x}) = g_{,x} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} \\ g_{,\bar{z}} = \frac{1}{2}(-ig_{,y} - ig_{,y}) = -ig_{,y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = -i \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann impliquent donc :

$\Delta P = \Delta Q = 0$  (les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques)

$\Delta(\Delta A) = 0 \Rightarrow \Delta(P) = 0$

Avec :  $P = \Delta A$

Donc, P est harmonique, on peut le considérer comme partie réelle d'une fonction analytique « f »

telle que :

$$f(z) = P + iQ$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{Posant : } j(z) = \frac{1}{4} \int f(z) dz$$

Or la fonction  $f(z)$  étant analytique, son intégrale l'est aussi :  $j(z) = p + iq \Rightarrow P = 4 \frac{\partial p}{\partial x} = 4 \frac{\partial q}{\partial y}$

Soit :  $\Delta(A - px - qy) = 0 \Rightarrow A - px - qy$  est harmonique, on lui associe une fonction analytique  $c(x)$  définie par :

$$c(z) = p_1 + iq_1$$

$$\text{Où : } p_1 = A - px - qy \Rightarrow A = px + qy - p_1$$

$$\text{Où encore : } A = \text{Re} [z\phi(z) + \chi(z)] = \frac{1}{2} [z\phi(z) + \chi(z) + z\overline{\phi(z)} + \overline{\chi(z)}]$$

$$\begin{aligned} g_{,z} = \frac{1}{2}(g_{,x} + ig_{,y}) &\Rightarrow 2 \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\partial A}{\partial y} \\ &= j(z) + z \overline{j'(z)} + \overline{c'(z)} \dots \\ &= j(z) + z \overline{j'(z)} + \overline{y'(z)} \dots \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } y(z) = c'(z)$$

$$\Delta A = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$\text{Soit : } \Delta A = 2 [j(z) + \overline{j'(z)}] = 4 \text{Re} [j'(z)]$$

## b) Représentation d'un état élastique plan à l'aide des potentiels complexes

### Ø Expressions des déplacements

Considérons les relations suivantes :

$$2me_x = s_x - \frac{l}{2(l+m)}(s_x + s_y) = \frac{l+2m}{2(l+m)}(s_x + s_y) - s_y$$

$$\text{Et } 2me_y = s_y - \frac{l}{2(l+m)}(s_x + s_y) = \frac{l+2m}{2(l+m)}(s_x + s_y) - s_x$$

En utilisant la fonction d'AIRY on aura :

$$\begin{cases} 2m\epsilon_x = \frac{I+2m}{2(I+m)}\Delta A - A_{xx} \\ 2m\epsilon_y = \frac{I+2m}{2(I+m)}\Delta A - A_{yy} \end{cases}$$

Sachant que :  $\Delta A = P = 4 \frac{\partial p}{\partial x} = 4 \frac{\partial q}{\partial y}$

L'intégration conduit à :

$$\begin{cases} 2mU_x = 2 \frac{I+2m}{I+m} p - A_{,x} + a(y) \\ 2mU_y = 2 \frac{I+2m}{I+m} q - A_{,y} + b(x) \end{cases}$$

Avec :  $\alpha(y)$ ,  $\beta(x)$  constantes

$$4m\epsilon_{xy} = 2m(U_{x,y} + U_{y,x}) = 2 \frac{I+2m}{I+m} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) - 2A_{,xy} + a'(y) + b'(x)$$

Les constantes  $\alpha(y)$  et  $\beta(x)$  n'interviennent pas dans le calcul des déformations, correspondant à un déplacement rigide d'ensemble, on peut écrire à partir de la relation précédente :

$$\begin{aligned} 2m(U_x + iU_y) &= 2 \frac{I+2m}{I+m} (p + iq) - (A_{,x} + iA_{,y}) \\ &= 2 \frac{I+2m}{I+m} j(z) - 2 \frac{\partial A}{\partial z} \\ 2m(U_x + iU_y) &= 2 \frac{I+2m}{I+m} j(z) - j(z) - z\bar{j}'(\bar{z}) - \bar{y}(\bar{z}) \end{aligned}$$

D'où finalement : 
$$2m(U_x + iU_y) = kj(z) - z\bar{j}'(\bar{z}) - \bar{y}(\bar{z})$$

Avec :  $k = \frac{I+3m}{I+m} = 3 - 4u$

Pour un état de contraintes planes, prédominant (plaque mince), en changeant  $\lambda$  par :  $I^* = \frac{2Im}{I+2m}$

Et  $\nu$  par :  $n^* = \frac{u}{1+u}$

On aura :  $k = \frac{3-u}{1+u}$

**Ø Expressions des contraintes :**

En établissant les relations des contraintes en fonction de l'expression de la fonction d'Airy on aura

Donc :  $s_x + i s_{xy} = A_{,yy} - i A_{,xy} = -i (A_{,x} + i A_{,y})_{,y}$

Or :  $A_{,x} - i A_{,y} = 2 \frac{\partial A}{\partial z}$

Alors :  $-i (A_{,x} + i A_{,y})_{,y} = -i \left( 2 \frac{\partial A}{\partial z} \right)_{,y} = 2 (A_{,z} - A_{,z})$

Sachant que :  $g_{,y} = i(g_{,z} + g_{,\bar{z}}) = -i \left( 2 \frac{\partial A}{\partial z} \right)_{,y} = -i \cdot i \left[ \left( 2 \frac{\partial A}{\partial z} \right)_{,z} - \left( 2 \frac{\partial A}{\partial z} \right)_{,\bar{z}} \right] = 2(A_{,zz} - A_{,\bar{z}\bar{z}})$

D'où :  $s_x + i s_{xy} = j'(z) + \bar{j}'(\bar{z}) - z j''(z) - \bar{y}'(\bar{z})$   
 $s_y - i s_{xy} = A_{,xx} + i A_{,xy} = (A_{,x} + i A_{,y})_{,x} = 2(A_{,z})_{,x} = 2(A_{,z\bar{z}} - A_{,\bar{z}z})$   
 $\sigma_y - i \sigma_{xy} = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) + z \varphi''(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})$

On déduit des 2 relations ci-dessus :  $s_x + s_y = 2(j'(z) + \bar{j}'(\bar{z})) = 4 \text{Re}(j'(z))$

$s_y - s_x + 2i s_{xy} = 2(\bar{z} j''(z) + y'(z))$

**II.5.3. Expressions des contraintes et déplacement en coordonnées cylindrique**

On effectue une rotation par rapport à un axe d'un angle « θ » (figure 5), la matrice de passage s'écrit donc :

$$P = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}$$

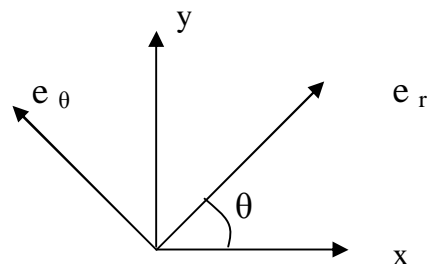


Figure 5. Repère de rotation

Les déplacements s'écrivent en fonction des nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_q \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Soit :  $\begin{cases} u_r = u_x \cos q + u_y \sin q \\ u_q = -u_x \sin q + u_y \cos q \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } (u_r + iu_q) &= (u_x \cos q + u_y \sin q) + i(-u_x \sin q + u_y \cos q) \\ &= \cos q (u_x + iu_y) + i \sin q (u_x + iu_y) \\ &= (u_x + iu_y)(\cos q + i \sin q) = e^{-iq} (u_x + iu_y) \end{aligned}$$

D'où la formule de déplacement en fonction des coordonnées cylindriques :

$$2m(U_r + iU_q) = e^{-iq} (kj(z) - z\bar{j}'(\bar{z}) - \bar{y}(\bar{z}))$$

Le tenseur de contrainte s'écrit dans le nouveau repère :  $(s)_{r,q} = P \begin{pmatrix} s \end{pmatrix}_{x,y} P^t$

$$\begin{cases} s_r = s_x \cos^2 q + s_y \sin^2 q + 2s_{xy} \sin q \cos q \\ s_q = s_y \cos^2 q + s_x \sin^2 q - 2s_{xy} \sin q \cos q \\ s_{qr} = s_{xy} \cos 2q + \frac{s_y - s_x}{2} \sin 2q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_q - s_r + 2is_{rq} &= e^{2iq} (s_y - s_x + 2is_{xy}) \\ &= 2e^{2i\theta} (\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s_q + s_r = s_x + s_y = 2(j'(z) + \bar{j}'(\bar{z})) = 4\text{Re}(j'(z))$$

#### II.5.4. Champs des contraintes et de déplacement au voisinage de l'extrémité d'une fissure.

En élasticité plane, les contraintes dérivent d'une fonction biharmonique de la fonction d'AIRY qui s'exprime, en utilisant les potentiels complexes  $j(z)$  et  $y(z)$  par :

$$A = \text{Re} \left[ \bar{z}j'(z) + y(z) \right] \quad \text{et} \quad \begin{cases} s_x + s_y = y \text{ Re } j'(z) \\ s_y - s_x + 2is_{xy} = 2 \left[ \bar{z}j''(z) + y''(z) \right] \end{cases}$$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{cases} s_y = \text{Re} \left[ 2j'(z) + \bar{z}j''(z) + y''(z) \right] \\ s_x = \text{Re} \left[ 2j'(z) - \bar{z}j''(z) - y''(z) \right] \\ s_{xy} = \text{Im} \left[ \bar{z}j''(z) + y''(z) \right] \end{cases}$$

**Hypothèses :** on considère un corps solide fissuré, dont le comportement est élastique linéaire. La taille de la fissure est supposée petite par rapport aux dimensions du corps. Le corps étant soumis à un chargement donné (figure 6).

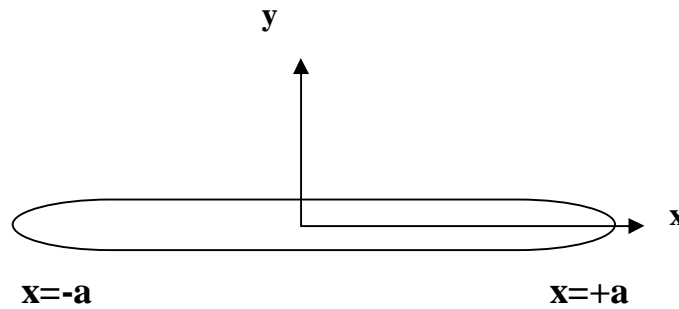


Figure 6. Fissure

Les lèvres « L » de la fissure étant non chargées, le vecteur des contraintes est nul :

$$\bar{T}(M \in L, \pm y) = 0 \Rightarrow s_y = s_{xy} = 0$$

Autrement dit sur la fissure, c'est-à-dire pour :  $z = \bar{z}$  et  $|z| < a$

$$\text{On a : } \begin{cases} \text{Re} [2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] = 0 \\ \text{Im} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} 2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \text{ imaginaire pur} \\ \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \text{ réel pur} \end{cases} \text{ sur la fissure}$$

Des deux conditions précédentes, il s'ensuit sur la fissure :

$$\text{Re} (2j'(z)) = -zj''(z) - y''(z)$$

On peut donc décomposer  $\varphi(z)$  en deux fonctions  $j_1(z)$  et  $j_2(z)$  telles que :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \varphi_2' = -z\varphi_2'' - \psi'' \\ \psi'' = -z\varphi_2'' - \varphi_2' \end{cases}$$

Avec :  $\begin{cases} j_1(z) \text{ et ses dérivées sont imaginaires sur la fissure} \\ j_2(z) \text{ et ses dérivées sont réelles sur la fissure} \end{cases}$

En intégrant la relation  $\psi'' = -d(z\phi') - \phi'_2 + \phi'_1 \quad \bar{\psi}' = -z\phi'_1 + \phi - \phi_2$

$$= -d(z\phi) + 2\phi - \phi_2$$

Soit :  $y(z) = -zj + \int j_1 dz$

La fonction d’AIRY et les contraintes sont alors données par :

$$A = \text{Re} \left[ \bar{z}j - zj + \int j_1 dz \right] \text{ et } \begin{cases} s_x = \text{Re} [j_1' + 2j_2' - \bar{z}j'' + zj''] \\ s_y = \text{Re} [j_1' + \bar{z}j'' - zj''] \\ s_{xy} = \text{Im} [\bar{z}j'' - zj'' - j_2'] \end{cases}$$

Soit en définitive avec :  $z = x + iy$  et  $\bar{z} = x - iy$

$$A = \text{Re} \int j_1 dz + y \text{Im} j_1 + y \text{Im} j_2$$

Et  $\begin{cases} s_x = \text{Re} j_1' - y \text{Im} j_1'' + 2 \text{Re} j_2' - y \text{Im} j_2'' \\ s_y = \text{Re} j_1' + y \text{Im} j_1'' + y \text{Im} j_2'' \\ s_{xy} = -y \text{Re} j_1'' - y \text{Re} j_2'' - \text{Im} j_2' \end{cases}$

On peut donc considérer que le champs des contraintes  $[s]$  est la superposition de deux champs  $[\sigma_I]$  et  $[\sigma_2]$  dérivant des deux fonctions d’AIRY :

$$A_I = \text{Re} \int j_1 dz + y \text{Im} j_1 \text{ et } A_{II} = y \text{Im} j_2$$

Pour calculer le champ des déplacements, on intègre les relations suivantes :

$$e_x = \frac{1}{2m} \left[ s_x - \frac{l}{2(l+m)} (s_x + s_y) \right] \text{ et } e_y = \frac{1}{2m} \left[ s_y - \frac{l}{2(l+m)} (s_x + s_y) \right]$$

$$* e_x = \frac{1}{2m} \left[ \text{Re} j_1' - y \text{Im} j_2'' - y \text{Im} j_2'' + 2 \text{Re} j_2' - \frac{l}{2(l+m)} (2 \text{Re} j_1' + 2 \text{Re} j_2') \right]$$

Soit :  $e_x = \frac{1}{2m} \left[ \frac{m}{l+m} \text{Re} j_1' - y \text{Im} j_1'' + \frac{l+2m}{l+m} \text{Re} j_2' - y \text{Im} j_2'' \right]$

Comme pour toute fonction analytique  $g(z)$  on a :

$$\begin{cases} \text{Re} g'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \text{Re} g(z) \\ \text{Im} g'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \text{Im} g(z) \end{cases}$$

Par intégration de  $e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ , on obtient :

$$u_x = \frac{1}{2m} \left[ \frac{m}{l+m} \operatorname{Re} j_1 - y \operatorname{Im} j_1' + \frac{l+2m}{l+m} \operatorname{Re} j_2 - y \operatorname{Im} j_2' \right]$$

$$*e_y = \frac{1}{2m} \left[ \operatorname{Re} j_1' + y \operatorname{Im} j_1'' + y \operatorname{Im} j_2'' - \frac{l}{2(l+m)} (2 \operatorname{Re} j_1' + 2 \operatorname{Re} j_2') \right]$$

Soit :

$$e_y = \frac{1}{2m} \left[ \frac{m}{l+m} \operatorname{Re} j_1' + y \operatorname{Im} j_1'' - \frac{l}{l+m} \operatorname{Re} j_2' + y \operatorname{Im} j_2'' \right]$$

Comme pour toute fonction analytique  $g(z)$  on a :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} g'(z) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} g(z) \\ \operatorname{Im} g'(z) = -\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} g(z) \end{cases}$$

D'où :

$$y \operatorname{Im} j_1'' = -y \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} j_1' = -\frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{Re} j_1') + \operatorname{Re} j_1' = \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} j_1 - y \operatorname{Re} j_1')$$

Et de même :  $y \operatorname{Im} j_2'' = \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} j_2 - y \operatorname{Re} j_2')$

Par intégration de  $e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$ , on obtient :

$$u_y = \frac{1}{2m} \left[ \frac{m}{l+m} \operatorname{Im} j_1 + \operatorname{Im} j_1 - y \operatorname{Re} j_1' - \frac{l}{l+m} \operatorname{Im} j_2 + \operatorname{Im} j_2 - y \operatorname{Re} j_2' \right]$$

Soit :

$$u_y = \frac{1}{2m} \left[ \frac{l+2m}{l+m} \operatorname{Im} j_1 - y \operatorname{Re} j_1' + \frac{m}{l+m} \operatorname{Im} j_2 - y \operatorname{Re} j_2' \right]$$

**Remarque :** Les calculs sont effectués pour l'état de déformations planes. Pour obtenir les expressions correspondantes à l'état de contraintes planes, il suffit de remplacer  $l$  par :

$$l^* = \frac{2lm}{l+2m}$$

### II.5.5. Méthode de WESTERGAARD

Westergaard décompose le déplacement que subit la fissure en mode I et mode II de sollicitation. Il pose :  $Z_I = j'_1$  et  $Z_{II} = j'_2$  respectivement pour les modes I et II et considère :

$$Z = Z_I + Z_{II} = j'_1 + j'_2 = 2j'$$

#### Notations

$Z(z)$  étant une fonction analytique, ses dérivées successives sont analytiques eux aussi et notées

$Z', Z'' \dots$  et ses primitives successives  $\bar{Z}, \bar{\bar{Z}} \dots$

En reprenant la relation suivante :  $A = \text{Re} \int j_1 dz + y \text{Im} j_1 + y \text{Im} j_2$

Il apparaît que la fonction d'Airy A et la somme de deux fonctions  $A_I$  et  $A_{II}$  pour les modes I et II :

avec 
$$A_I = \text{Re} \bar{\bar{Z}}_I + y \text{Im} \bar{Z}_I$$

$$A_{II} = y \text{Im} \bar{Z}_{II}$$

Les contraintes et les déplacements se déduisent des relations précédentes :

#### Pour le mode I :

$$\begin{cases} s_x = \text{Re} Z_I - y \text{Im} Z'_I \\ s_y = \text{Re} Z_I + y \text{Im} Z'_I \\ s_{xy} = -y \text{Re} Z'_I \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2m} \left[ \frac{m}{1+m} \text{Re} \bar{Z}_I - y \text{Im} Z_I \right] \\ = \frac{1+u}{E} \left[ (1-2u) \text{Re} \bar{Z}_I - y \text{Im} Z_I \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_y = \frac{1}{2m} \left[ \frac{1+2m}{1+m} \text{Im} \bar{Z}_I - y \text{Re} Z_I \right] \\ = \frac{1+u}{E} \left[ 2(1-u) \text{Im} \bar{Z}_I - y \text{Re} Z_I \right] \end{cases}$$

#### Pour le mode II :

$$\begin{cases} s_x = 2 \text{Re} Z_{II} - y \text{Im} Z'_{II} \\ s_y = y \text{Im} Z'_{II} \\ s_{xy} = -y \text{Re} Z'_{II} - \text{Im} Z_{II} \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2m} \left[ \frac{1+2m}{1+m} \text{Re} \bar{Z}_{II} - y \text{Im} Z_{II} \right] \\ = \frac{1+u}{E} \left[ 2(1-u) \text{Re} \bar{Z}_{II} - y \text{Im} Z_{II} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_y = \frac{1}{2m} \left[ \frac{m}{1+m} \text{Im} \bar{Z}_{II} - y \text{Re} Z_{II} \right] \\ = \frac{1+u}{E} \left[ (1-2u) \text{Im} \bar{Z}_{II} - y \text{Re} Z_{II} \right] \end{cases}$$

### II.5.6. Décomposition en champs symétriques et champs antisymétriques

La sollicitation plane que subit la fissure peut être décomposée en un chargement symétrique et un chargement antisymétrique par rapport au plan de la fissure (figure 7).



Figure 7. Décomposition de la charge

\*Le chargement symétrique correspond à une sollicitation conduisant à l'ouverture de la fissure donc à une discontinuité de la composante «  $u_y$  » du déplacement des lèvres de la fissure, ce chargement est appelé, mode d'ouverture ou **mode I**, on choisi pour ce cas :  $A = \text{Re} \bar{Z}_I + y \text{Im} \bar{Z}_I$

\*Le chargement antisymétrique provoque un cisaillement des lèvres de la fissure et conduit à une discontinuité de la composante «  $u_x$  » du déplacement, ce chargement est appelé : mode de cisaillement plan au **mode II**. On a pris comme fonction :  $A = -y \text{Re} \bar{Z}_{II}$ .

### II.5.7. Calcul du facteur d'intensité des contraintes

L'expérience a montré que la progression des fissures et la résistance résiduelle d'une structure possédant un défaut sont très bien gouvernées par le facteur d'intensité des contraintes  $K$ .

Donnons l'expression de  $K$  dans le cas d'une plaque infinie comportant une fissure de longueur  $2a$

considérons une fissure de longueur  $2a$  de direction perpendiculaire à la contrainte de traction  $S_y$  (figure 8)

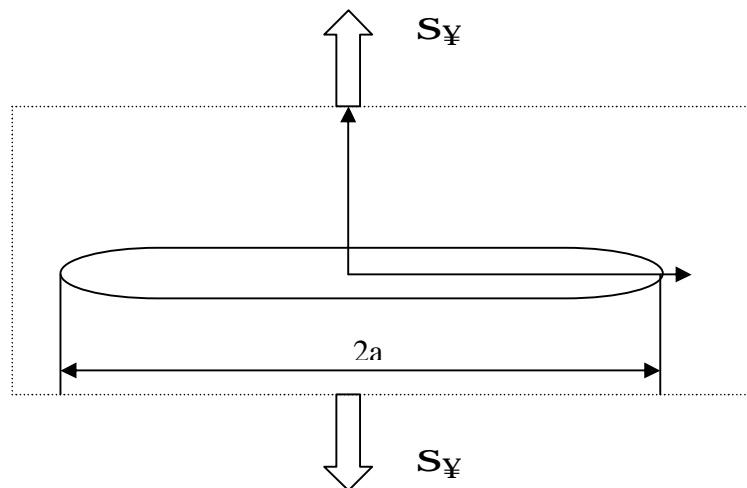


Figure 8. Plaque infinie fissurée

Pour donner la forme des fonctions de Westergaard  $Z_I$  (le raisonnement est applicable au mode II aussi), on examine les conditions limites au voisinage des extrémités d'une fissure sur le plan de la

fissure :

$$\begin{cases} s_y = s_{xy} = 0 \\ \text{pour } y = 0 \text{ et } |z| < a \end{cases} \Rightarrow s_x = 0$$

On choisit :  $Z_I(z) = \frac{g(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}$  avec  $g(z)$  réelle pour  $y=0$  finie pour  $z = \pm a$

Les extrémités  $z = \pm a$  jouent des rôles identiques, on ne considérera par la suite que l'extrémité  $z = +a$ , en effectuant une translation de repère pour se mettre sur cette extrémité, ce qui revient à faire le changement de variable :  $z = z - a$

La fonction de contrainte de Westergaard s'écrit alors :

$$Z_I(z) = \frac{g_1(z)}{\sqrt{z}}$$

Avec :

$$g_1(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots$$

Au voisinage de l'extrémité de la fissure c'est-à-dire lorsqu'on a :

$$Z_I(z) \approx \frac{a_0}{\sqrt{z}} \quad |z| \rightarrow 0$$

## Chapitre II – Etude théorique sur la mécanique de la rupture

En fait, au lieu de considérer la constante  $a_0$ , on définit une autre notée  $K_I$  par :

$$Z_I(z) = \frac{K_I}{\sqrt{z}} = \frac{K_I}{\sqrt{z-a}}$$

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2p(z-a)} Z_I(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2pz} Z_I(z) = \sqrt{2p} a_0$$

D'où

$$Z_I(z) \approx \frac{K_I}{\sqrt{2pz}}$$

$$|z| \rightarrow 0$$

$K_I$  : est le facteur d'intensité des contraintes (FIC) pour le mode I de sollicitation (dimension *contrainte*  $\times \sqrt{\text{longueur}}$  ou bien  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ )

En posant  $Z = re^{i\theta}$ , les contraintes et les déplacements (figure 9), s'expriment par :

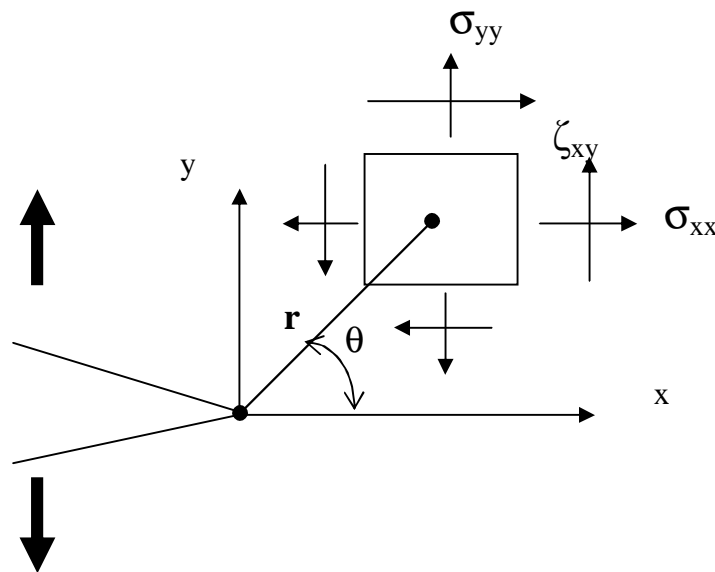


Figure 9. Etat de contraintes en un point

### Mode I :

$$s_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \cos \frac{q}{2} \left( 1 - \sin \frac{q}{2} \sin \frac{3q}{2} \right)$$

$$s_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \cos \frac{q}{2} \left( 1 + \sin \frac{q}{2} \sin \frac{3q}{2} \right) - u_x = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \cos \frac{q}{2} \left( \frac{m}{1+m} + \sin^2 \frac{q}{2} \right)$$

$$t_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2p}} \cos \frac{q}{2} \sin \frac{q}{2} \cos \frac{3q}{2} \quad u_y = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2} \left( \frac{1+2m}{1+m} - \cos^2 \frac{q}{2} \right)$$

En contraintes planes les relations donnant les déplacements, s'obtiennent en remplaçant :

$$I \text{ par } I^* = \frac{2Im}{I + 2m}$$

**Mode II :**

Le choix de la fonction sous la forme :

$$Z_{II}(z) = \frac{ig(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

est compatible avec les conditions limites.

Soit : 
$$Z_{II}(z) \approx \frac{-iK_{II}}{\sqrt{2pz}}$$

$$|z| \rightarrow 0$$

avec : 
$$K_{II} = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2pz} \ iZ_{II}(z)$$

$$\begin{aligned} s_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \sin \frac{q}{2} \left( 2 + \cos \frac{q}{2} \cos \frac{3q}{2} \right) & u_x &= \frac{K_{II}}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2} \left( \frac{1+2m}{1+m} + \cos \frac{2q}{2} \right) \\ s_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \left( \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} \cos \frac{3q}{2} \right) & u_y &= \frac{K_{II}}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \cos \frac{q}{2} \left( -\frac{m}{1+m} + \sin \frac{2q}{2} \right) \\ t_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \cos \frac{q}{2} \left( 1 - \sin \frac{q}{2} \sin \frac{3q}{2} \right) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un chargement plan combinant du mode I et du mode II et on écrit :

$$Z(z) = Z_I(z) + Z_{II}(z) \approx \frac{K_I - iK_{II}}{\sqrt{2pz}} = \frac{K^*}{\sqrt{2pz}}$$

$$|z| \rightarrow 0$$

avec :  $K^* = K_I - iK_{II}$  appelé facteur d'intensité des contraintes complexe défini par :

$$K^* = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2pz} Z(z)$$

### II.5.8. Expressions des champs de contraintes en mode I et II en coordonnées polaires

$$\begin{cases} s_{rr} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \left[ -\frac{5}{4} \sin \frac{q}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3q}{2} \right] \\ s_{qq} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \left[ -\frac{3}{4} \sin \frac{q}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3q}{2} \right] \\ t_{rq} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \left[ \frac{1}{4} \cos \frac{q}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3q}{2} \right] \end{cases}$$

Les relations suivantes peuvent se regrouper en seule relation :

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \cos \frac{q}{2} \left( \frac{m}{1+m} + \sin^2 \frac{q}{2} \right) \\ u_y = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2} \left( \frac{1+2m}{1+m} - \cos^2 \frac{q}{2} \right) \end{cases}, \begin{cases} u_x = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \cos \frac{q}{2} \left( \frac{1+2m}{3l+2m} + \sin^2 \frac{q}{2} \right) \\ u_y = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2} \left( \frac{4(1+m)}{3l+2m} - \cos^2 \frac{q}{2} \right) \end{cases}$$

qui est :

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \cos \frac{q}{2} \left( \frac{k-1}{2} + \sin^2 \frac{q}{2} \right) \\ u_y = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2} \left( \frac{k+1}{2} - \cos^2 \frac{q}{2} \right) \end{cases}$$

avec, pour l'état de déformation plane :  $k = \frac{l+3m}{l+m} = 3-4u$  et pour l'état de contraintes planes :

$$k = \frac{5l+6m}{3l+2m} = \frac{3-u}{1+u}$$

Pour le mode II les relations des déplacements pour les 2 états contraintes planes et de déformations planes .

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_{II}}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2} \left( \frac{k+1}{2} + \cos^2 \frac{q}{2} \right) \\ u_y = \frac{K_{II}}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \cos \frac{q}{2} \left( -\frac{k-1}{2} + \sin^2 \frac{q}{2} \right) \end{cases}$$

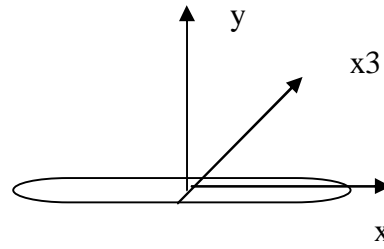
#### Mode III : Mode cisaillement anti-plan

Les lèvres de la fissure se déplacent selon la direction  $x_3$  perpendiculaire au plan (x, y).

Le champ des déplacements anti-plan est de la forme :  $\mathbf{u} = u_3 \mathbf{x}_3$  avec  $u_3 = u_3(x, y)$

Les déformations s'écrivent :

$$\begin{cases} e_{13} = \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}u_{z,x} = \frac{1}{2}u_{3,1} \end{cases}$$



$$\begin{cases} e_{23} = \frac{1}{2}(u_{3,2} + u_{2,3}) = \frac{1}{2}u_{3,2} = \frac{1}{2}u_{z,y} \end{cases}$$

La loi de Hooke  $\begin{cases} s_{13} = 2me_{13} = mu_{3,1} \\ s_{23} = 2me_{23} = mu_{3,2} \end{cases}$

L'équation d'équilibre s'écrira donc :

$$s_{13,1} + s_{23,2} = 0 \Rightarrow m(u_{3,11} + u_{3,22}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 u_3 = 0$$

La composante  $u_3$  du déplacement est donc harmonique, elle peut être alors considérée comme partie réelle ou imaginaire d'une fonction analytique. Deux choix sont possibles et avec les conditions limites suivantes sur la fissure :

C.L :  $\begin{matrix} s_{23} \rightarrow 0 & s_{23} \rightarrow \infty \\ z \rightarrow 0^- & z \rightarrow 0^+ \end{matrix}$

Choix 1 ( imaginaire )

$$u_3 = \frac{1}{m} \text{Im } \bar{Z}_{III}$$

$$\begin{cases} s_{13} = \text{Im } Z_{III} \\ s_{23} = \text{Re } Z_{III} \end{cases}$$

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2pz}}$$

Choix 2 ( Réelle )

$$u_3 = \frac{1}{m} \text{Re } \bar{Z}_{III}$$

$$\begin{cases} s_{13} = \text{Re } Z_{III} \\ s_{23} = -\text{Im } Z_{III} \end{cases}$$

$$Z_{III} = -i \frac{K_{III}}{\sqrt{2pz}}$$

$$s_{13} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2pr}} \sin \frac{q}{2}$$

$$s_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2pr}} \cos \frac{q}{2}$$

$$u_3 = \frac{K_{III}}{m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2}$$

## II.6.Calcul de l'énergie de propagation G.

### II.6.1. Critère d'énergie

Les relations que l'on utilise pour déterminer le comportement à la rupture de solides élastiques, contenant une fissure, furent développées dans les années 1920 par GRIFFITH.

GRIFFITH constata que, lorsqu'une fissure est introduite dans une plaque de matériaux élastique ou qu'une fissure se propage, deux phénomènes se produisent, en rapport avec la quantité d'énergie dans la plaque :

- La relaxation des contraintes autour de la fissure, provoquant une diminution de l'énergie potentielle.
- La création de nouvelles surfaces de rupture, provoquant une augmentation de l'énergie potentielle dans la plaque.

La relaxation de contraintes est un processus qui fournit de l'énergie au système. La création des nouvelles surfaces de rupture est un processus qui absorbe de l'énergie et qui constitue un frein à la propagation de la fissure. Il s'agit de quantifier ces processus énergétiques.

Considérons une fissure de longueur « a » se propageant de « Δa » dans une plaque (figure 10). Une variation d'énergie se produit lors de cette propagation selon la relation suivante :

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{élastique} + \Delta U$$

avec :

- $\Delta W_{ext}$  : la variation d'énergie due aux forces extérieures ;
- $\Delta W_{élastiques}$  : la variation d'énergie emmagasinée ;
- $\Delta U$  : l'énergie dépensé lors de la propagation de la fissure

D'une façon générale, « U » désigne l'énergie potentielle stockée dans la structure et « Δa » est l'incrément de surface, correspondant à l'extension de la fissure. En désignons par G la force d'extension de la fissure ou encore taux de restitution d'énergie élastique, on peut définir l'énergie de griffith par :

$$G = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A}$$

Où :

$$\Delta A = e \Delta a$$

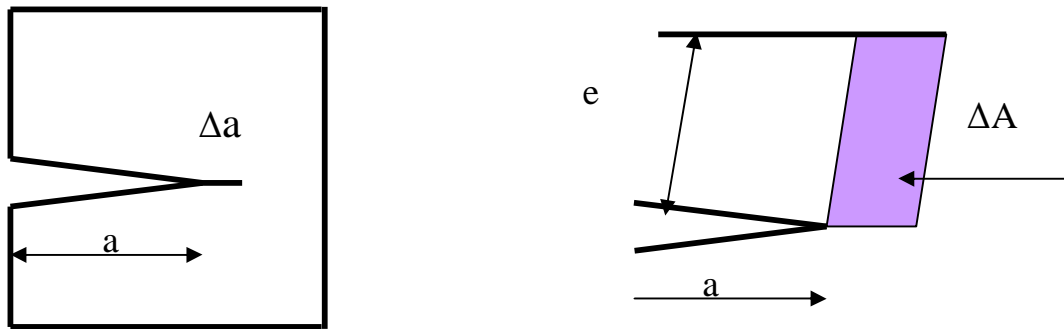


Figure 10. Plaque fissure

### II.6.2. Relation entre le K et l'énergie G

Considérant une fissure élastique sollicitée en mode I (figure 11). Supposons que la fissure avance de la position initiale « a » à la position « a+ Δa », donc l'extrémité se déplace de A (x = a) à A'(x = a+Δ a). Le champ de contrainte en aval de l'extrémité de la fissure (q=0) est donnée par :

$$s_y = \frac{K_I}{\sqrt{2pr}}$$

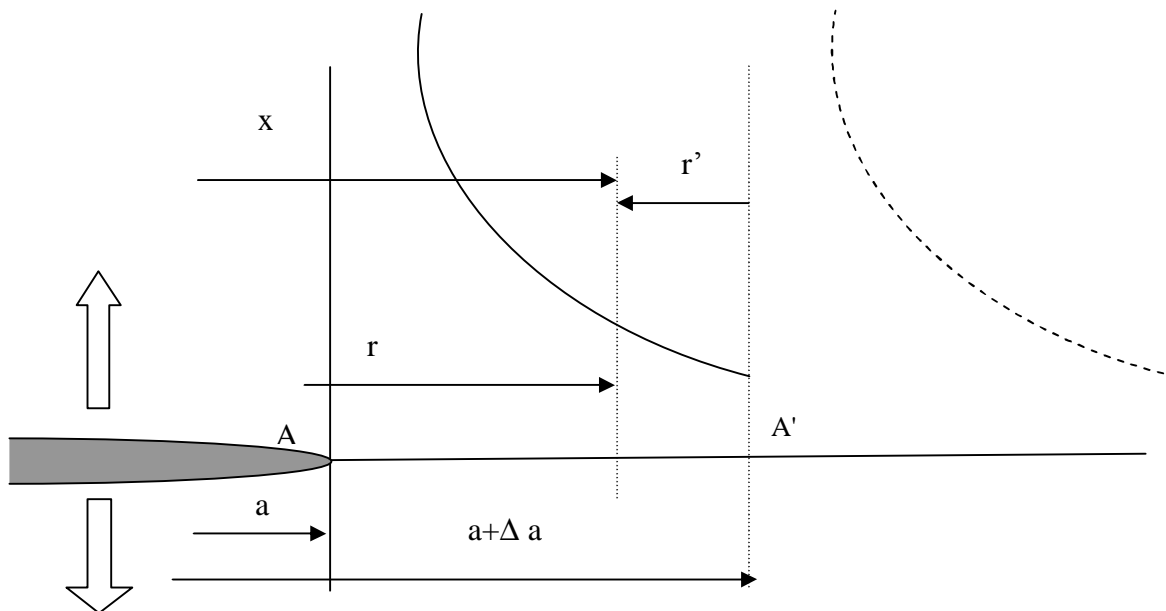


Figure 11. Fissure sollicitée en mode I

## Chapitre II – Etude théorique sur la mécanique de la rupture

Le champ des déplacements des lèvres en amont de l'extrémité de la fissure ( $q = \pi$ ) :

$$u_y = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2} \left( \frac{k+1}{2} - \cos^2 \frac{q}{2} \right) \Rightarrow u_y = \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{2r}{p}} \left( \frac{k+1}{2} \right)$$

où :  $u_y = \frac{K_I}{m} \sqrt{\frac{2r}{p}} (1 - u^*)$

avec : 
$$\begin{cases} u^* = u & \text{déformations planes} \\ u^* = \frac{u}{1+u} & \text{contraintes planes} \end{cases}$$

Appliquons aux lèvres des forces de façon que les lèvres de la fissure se referment, l'énergie totale n'a pas varié et la force appliquée est :

$$S_y(r) e dx$$

Avec :  $r = x - a$

Si on prend l'épaisseur « e » égal à l'unité, le travail de régression du point A' au point A pour  $r' = a + \Delta a - x$  s'écrit :

$$\Delta W = -\Delta U = 2 \int_{a+\Delta a}^a \frac{S_y(r) u_y(r')}{2} dx = \frac{K_I^2}{m} \frac{1-u^*}{p} \int_{a+\Delta a}^a \sqrt{a+\Delta a-x} dx$$

On effectue un changement de variable suivant :

$$\frac{\Delta a}{x-a} = X \Rightarrow dx = -\frac{dX}{X^2} \Delta a \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = a \Rightarrow X = \infty \\ x = a + \Delta a \Rightarrow X = 1 \end{cases}$$

1) L'intergale « I » devient alors  $I = \Delta a \int_1^\infty \sqrt{X-1} \left( -\frac{dX}{X^2} \right)$  que l'on intègre par parties en

posant :

$$\begin{cases} a = \sqrt{X-1} & dX = \frac{dX}{2\sqrt{X-1}} \\ db = -\frac{dX}{X^2} & \Rightarrow b = \frac{1}{X} \end{cases} \Rightarrow I = \Delta a \left[ \left[ \frac{\sqrt{X-1}}{X} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{dX}{2X\sqrt{X-1}} \right]$$

Soit :  $I = \Delta a \left[ -\arctg \sqrt{X-1} \right]_1^\infty = -\frac{p}{2} \Delta a$

et  $\Delta U = -\Delta W = \frac{K_I^2}{m} \frac{(1-u^*)}{2} \Delta a$

Or : 
$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a}$$

D'où pour le mode ouvert ( mode I ) :

\* **Mode I :** 
$$G_I = \frac{K_I^2}{m} \frac{(1 - u^*)}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{En déformation planes : } u^* = u \quad G_I = \frac{K_I^2}{E} (1 - u^2) \\ \text{En contraintes planes : } u^* = \frac{u}{1 + u} \quad G_I = \frac{K_I^2}{E} \end{array} \right.$$

De même pour le mode II :

\*\* **Mode II :** 
$$\left\{ \begin{array}{l} s_{xy}(r, q = 0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \\ u_x(r, q = p) = \frac{K_{II}}{m} \sqrt{\frac{2r}{p}} (1 - u^*) \end{array} \right.$$

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{2m} (1 - u^*)^2 \Rightarrow \begin{array}{l} G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} (1 - u^2) \text{ en déformations planes} \\ G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} \text{ en contraintes planes} \end{array}$$

\*\*\* **Mode III :** les champs des contraintes en aval et des déplacements en amonts de l'extrémité de la fissure s'écrivent :

$$s_{yz}(r, q = 0) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2pr}}$$

$$u_z(r, q = p) = \frac{K_{III}}{m} \sqrt{\frac{2r}{p}}$$

L'énergie de Griffith : 
$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2m}$$

**Cas général :** l'énergie de Griffith s'écrit :

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{K_I^2}{m} \left( \frac{1 - u^*}{z} \right) + \frac{K_{II}^2}{m} \left( \frac{1 - u^*}{z} \right) + \frac{K_{III}^2}{2m}$$

$$= \frac{1}{2m} \left\{ (1 - u^*) (K_I^2 + K_{II}^2) + K_{III}^2 \right\}$$

$$*G = \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu^2) (K_I^2 + K_{II}^2) + (1 + \nu) K_{III}^2 \right] \quad \text{Déformations planes}$$

$$*G = \frac{1}{E} \left[ K_I^2 + K_{II}^2 + (1 + \nu) K_{III}^2 \right] \quad \text{Contraintes planes}$$

## Chapitre III

### **ANALYSE DES FISSURES EN ELASTO-PLASTICITE**

#### **III.1. Cas de la plasticité confinée**

Dés que la taille de la zone plastifiée, qui se forme à l'extrémité de la fissure, devient importante, l'application de la MLR ne peut décrire réellement le comportement du matériau. Pour cela il est important de connaître la taille de la zone plastifiée en utilisant des approches telles que l'approche IRWIN et DUGDALE-BARENBLATT, qui conduisent à des corrections du FIC. Ces approches arrivent à des résultats proches de la taille de la zone plastifiée.

#### **III .1.1. Taille de la zone plastique**

##### **1) Modèle d'Irwin**

Le modèle d'Irwin s'applique aux conditions de contrainte plane. Le matériau est supposé être parfaitement plastique et obéit au critère de Tresca et il considère que la frontière entre zones élastique et plastique, correspond au lieu des points où les contraintes atteignent la limite d'élasticité du matériau :

$$s_y = \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \quad \text{Lorsque la sollicitation est au mode I } (\theta = 0)$$

$$\text{On écrit alors :} \quad s_y = s_E \quad \Rightarrow \quad r_E = \frac{1}{2p} \left( \frac{K_I}{s_E} \right)^2$$

La zone plastique à fond de fissure est en fait plus étendue car le matériau doit supporter localement une surface supplémentaire correspondant à l'Aire hachurée (1) de la figure 12. D'après IRWIN la structure se comporte comme si elle contenait une fissure de longueur effective égale à ( $a_{\text{eff}} = a + r_E$ ).

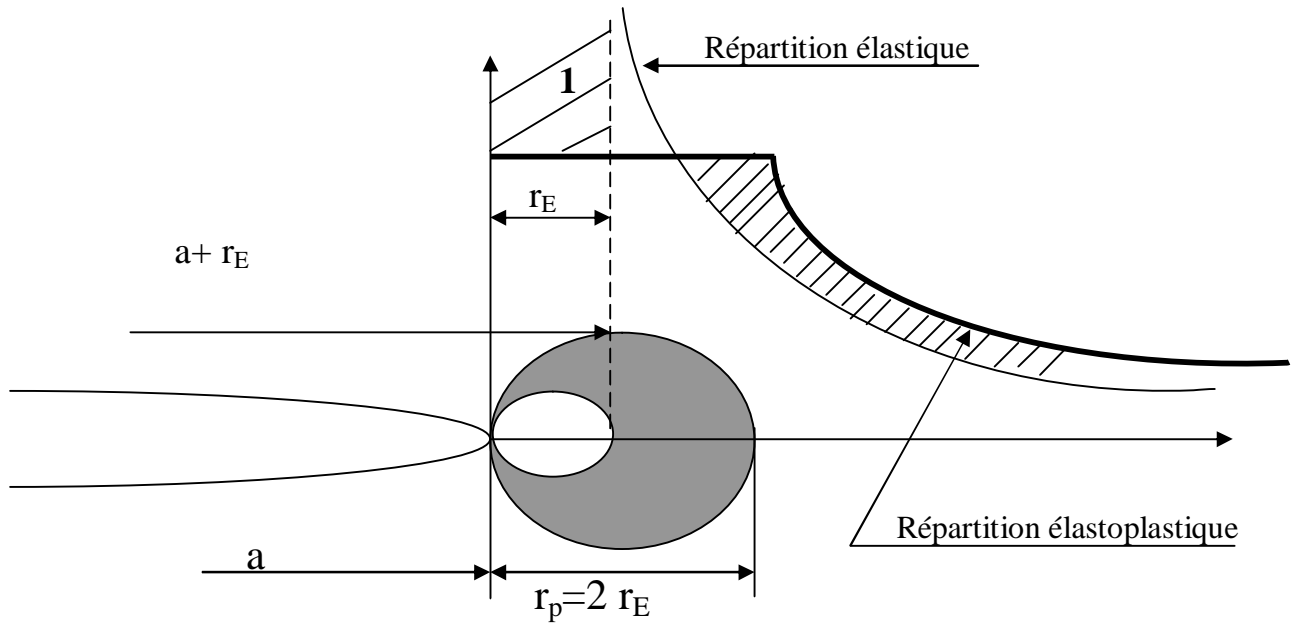


Figure 12. Modèle d'Irwin

## 2) Modèle de DUGDALE-BARENBLATT

Le modèle de Dugdale–Barenblatt considère une fissure de longueur  $a + r$  avec des contraintes de compression d'intensité d'élasticité  $\sigma_E$ , qui s'exercent sur la longueur «  $r$  » qui représente la taille de la zone plastique (figure 13). Lorsqu'on charge une structure fissurée, une zone plastique se forme à l'extrémité de la fissure, lors de la décharge le reste de la structure qui est reste élastique, exerce alors sur la zone plastique des contraintes de compression  $-\sigma_E$ , si on suppose que le comportement du matériau est élastique plastique parfait.

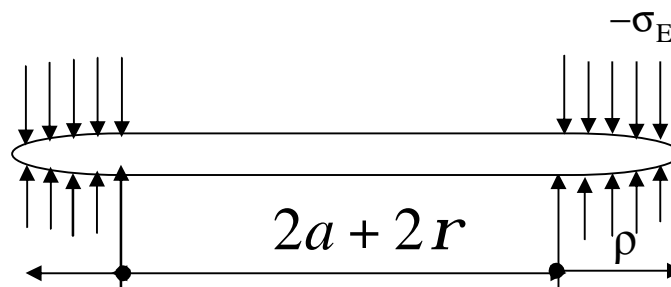


Figure 13. Modèle de Dugdale–Barenblatt

Le calcul de la taille de la zone plastique «  $r$  » est déterminée dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie par la relation suivante :

$$K_I = S^\infty \sqrt{p(a+r)}$$

Dugdale et Barenblatt utilisent la fonction de Westergaard pour la configuration du chargement pour le calcul du FIC.

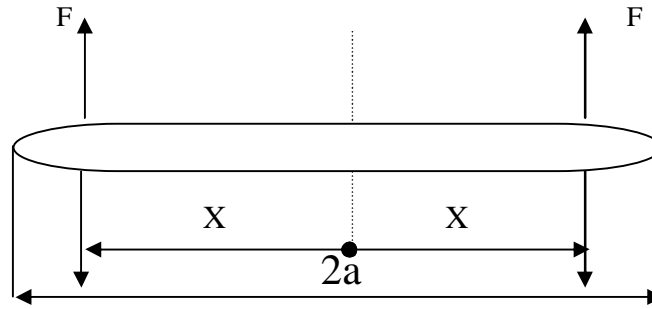


Figure 14. Fissure chargée en mode I par deux forces F appliquées sur les lèvres

La fonction étant choisie, pour ce type de chargement où F est une force par unité d'épaisseur (figure 14) :

$$Z(z) = \frac{F}{p(z-X)} \sqrt{\frac{a^2 - X^2}{z^2 - a^2}} \quad \text{Pour la moitié du chargement}$$

$$\text{Pour les deux moitiés : } Z(z) = \frac{2Fz}{p(z^2 - X^2)} \sqrt{\frac{a^2 - X^2}{z^2 - a^2}}$$

Calculons maintenant le FIC à l'extrémité « +a » :

$$K_I(+a) = \lim_{Z \rightarrow a} \sqrt{2p(z-a)} Z(z) = 2F \sqrt{\frac{a^2 - X^2}{z^2 - a^2}}$$

Pour un chargement réparti sur la longueur « ρ », en remplaçant F par « σ<sub>E</sub> .dx » et « a » par « a+ρ » :

$$K_I = \int_a^{a+r} -2s_E dx \cdot \frac{\sqrt{a+r}}{\sqrt{z^2 - (a+r)^2}} = -2s_E \sqrt{\frac{a+r}{p}} \int_a^{a+r} \frac{dx}{\sqrt{(a+r)^2 - x^2}}$$

$$K_I = -2s_E \sqrt{\frac{a+r}{p}} \text{Arc cos} \left( \frac{a}{a+r} \right)$$

En utilisant le principe de superposition (figure 15), on détermine la taille de la zone plastique « ρ » :

$$K_I + s_\infty \sqrt{p(a+r)} = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{a}{a+r} = \cos \left( \frac{ps_\infty}{2s_E} \right)$$

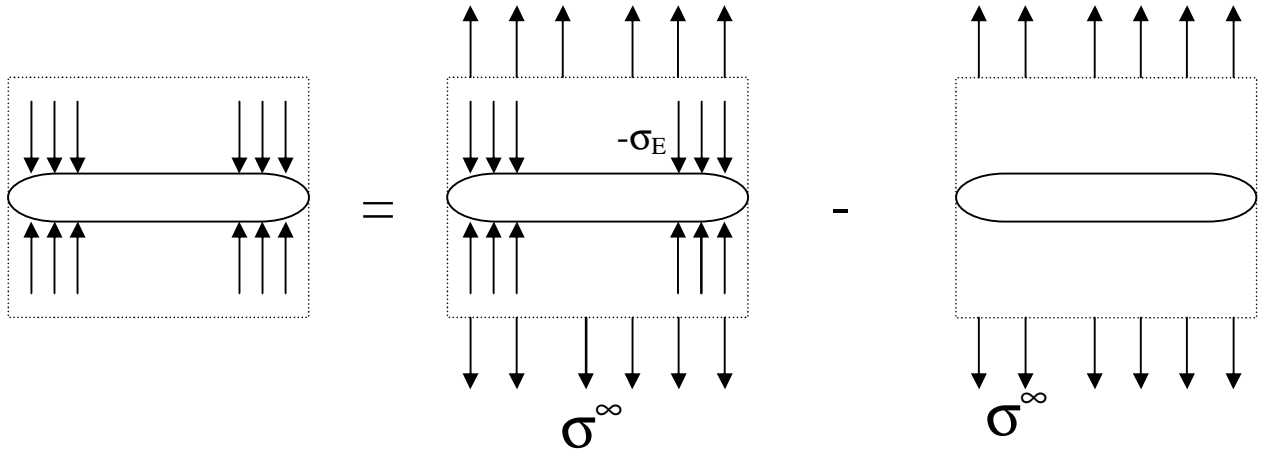


Figure 15. Principe de superposition pour le modèle de Dugdale–Barenblatt

- Si  $s_\infty \rightarrow s_E \Rightarrow \rho$  (taille de la zone plastique) est grande ;
- Si  $\sigma^\infty$  est faible par rapport à  $\sigma_E \Rightarrow$  par un développement limité au voisinage de 0 :

$$\cos\left(\frac{p s_\infty}{2 s_E}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{p s_\infty}{2 s_E}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{p s_\infty}{2 s_E}\right)^4 + \dots$$

D'où :

$$r = \frac{p}{8} \left( \frac{K_I}{s_E} \right)^2$$

Dugdale–Brenblatt établissent pour leur modèle un FIC qui est effectif. Sa valeur est donnée

comme suit :

$$K_{eff} = \frac{s_\infty \sqrt{pa}}{\sqrt{\cos\left(\frac{p s_\infty}{2 s_E}\right)}}$$

Burdekin et Stone ont apporté des corrections au FIC effectif de Dugdale –Brenblatt qui est :

$$K_{eff} = s_E \sqrt{pa} \sqrt{-\frac{8}{p} \log\left(\cos\left(\frac{p s_\infty}{2 s_E}\right)\right)}$$

### III.1.2. Géométrie de la zone plastique

Les modèles précédents donnent des estimations de la taille de la zone plastique  $rp$  à  $q = 0$ . Pour avoir  $rp(q)$ , lorsque on fait varier l'angle  $q$ , on applique les critères de plasticité.

Les critères de Von Mises et de Tresca s'écrivent respectivement, dans l'espace des contraintes principales :

$$\text{Von Mises : } (s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 = 2s_E^2$$

$$\text{Tresca : } \text{Max}(s_i - s_j) = s_E$$

**Pour le mode I :**

\* En contraintes planes :

$$\text{Von Mises : } rp(q) = \frac{K_I^2}{2ps_E^2} \cos^2\left(\frac{q}{2}\right) \left(1 + 3\sin^2\left(\frac{q}{2}\right)\right)$$

$$\text{Tresca : } rp(q) = \frac{K_I^2}{2ps_E^2} \cos^2\left(\frac{q}{2}\right) \left(1 + \sin\frac{q}{2}\right)^2 \text{ pour } 0 < q < p$$

\* En déformations planes :

$$\text{Von Mises : } rp(q) = \frac{K_I^2}{2ps_E^2} \cos^2\left(\frac{q}{2}\right) \left((1-2u)^2 + 3\sin^2\left(\frac{q}{2}\right)\right)$$

$$\text{Tresca : } \begin{cases} rp(q) = \frac{K_I^2}{2ps_E^2} \cos^2\left(\frac{q}{2}\right) \left(1 - 2u + \sin\frac{q}{2}\right)^2 & \text{si } 0 \leq q \leq 2\text{Arc sin}(1-2u) \\ rp(q) = \frac{K_I^2}{2ps_E^2} \sin^2(q) & \text{pour } 2 \text{Arc sin}(1-2u) < q \leq p \end{cases}$$

En mode II et III, on peut appliquer le critère de Von Mises qui s'écrit dans l'espace :

$$(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz})^2 - 3(s_{xx}s_{yy} + s_{yy}s_{zz} + s_{zz}s_{xx} - t_{xy}^2 - t_{yz}^2 - t_{zx}^2) = s_E^2$$

• **Mode II**

\* En contraintes planes :

$$rp(q) = \frac{K_{II}^2}{2ps_E^2} \left[ \begin{aligned} &4\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) + 3\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) \left(\cos\frac{q}{2}\cos\frac{3q}{2}\right) \left(2 + \cos\frac{q}{2}\cos\frac{3q}{2}\right) \\ &+ 3\cos^2\left(\frac{q}{2}\right) \left(1 - \sin\frac{q}{2}\sin\frac{3q}{2}\right) \end{aligned} \right]$$

\* En déformation planes :

$$rp(q) = \frac{K_{II}^2}{2ps_E^2} \left[ \begin{aligned} &4(1+u)^2 \sin^2\left(\frac{q}{2}\right) + 3\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) \left(\cos\frac{q}{2}\cos\frac{3q}{2}\right) \left(2 + \cos\frac{q}{2}\cos\frac{3q}{2}\right) \\ &- 12u \sin^2\left(\frac{q}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{q}{2}\right) \left(1 - \sin\frac{q}{2}\sin\frac{3q}{2}\right) \end{aligned} \right]$$

• **Mode III :**

$$r_p(q) = \frac{3K_{III}^2}{2pS_E^2}$$

La figure 16 représente la géométrie de la zone plastique qui se forme à l'extrémité de la fissure sollicitée en mode I, nous constatons que :

1) L'étendue de la zone plastique est plus importante en contraintes planes qu'en déformations planes.

2) Le critère Tresca conduit à des zones de déformations planes et de contraintes planes plus étendue que le critère Von Mises.

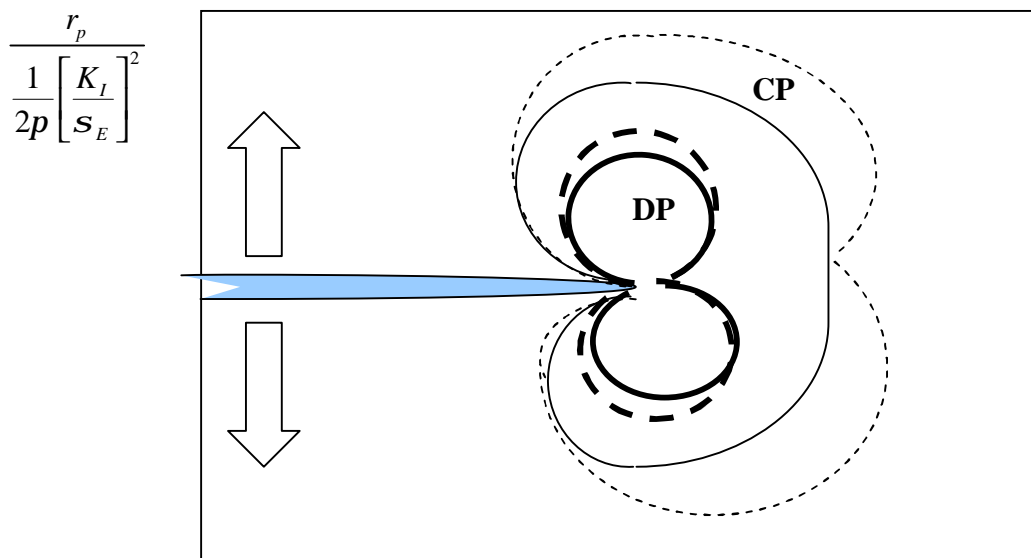


Figure 16. Etendue de la zone plastique selon :

- Critère de Von Mises : trait continu
- Critère de Tresca : trait pointillé

### III.2. Cas de la plasticité étendue

L'étude de la rupture en situation de plasticité étendue, c'est-à-dire lorsque la taille de la zone plastique n'est plus négligeable devant la longueur de la fissure, constitue ce qu'on appelle la mécanique de la rupture en comportement non linéaire.

La mécanique élasto-plastique de la rupture (MEPR) s'applique aux matériaux ductiles lorsque le comportement reste toute fois indépendant du temps, comme pour le MLR où le FIC est le paramètre utilisé comme critère de rupture. Deux paramètres caractéristiques de la MEPR décrivent le critère de rupture, le CTOD et l'intégrale -J.

### III.2.1. Ecartement à Fond de Fissure (CTOD)

En 1961 Wells introduit le paramètre CTOD (Crack Tip Opening Displacement) comme approche pour la mesure de la ténacité du matériau et constata sur la pointe de la fissure, dans la zone de plasticité, qu'il y a émoussement de l'extrémité de la fissure avec l'augmentation de la charge ainsi que la ténacité du matériau.

L'analyse de Wells proposé, tente de relier le CTOD au FIC lorsqu'on est en régime de plasticité confinée.

Pour examiner cette approche on va considérer une fissure avec une faible zone plastifié (figure 17), Irwin montra qu'une telle fissure se comporte comme si elle était effectivement, plus longue du fait de l'écoulement plastique à fond de fissure.

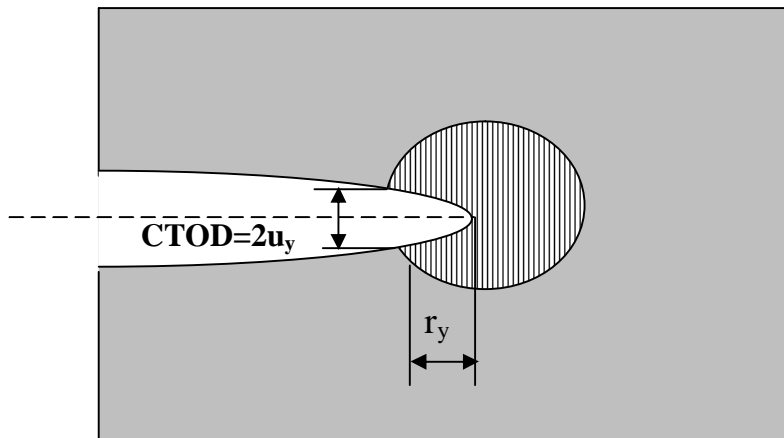


Figure 17. Estimation du CTOD à partir du déplacement à la distance  $r_y$  en amont de l'extrémité d'une fissure de longueur  $a+r_y$

Le CTOD est pris égal à l'ouverture de la fissure à la distance «  $r_y$  » en amont de l'extrémité, le déplacement à cette distance est estimé pour le **Mode I** :

$$u_y = \frac{k+1}{2m} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2p}}$$

Avec :  $k = 3 - 4u$  en Déformations planes  
 $k = (3-u)/(1+u)$  en contraintes planes

La longueur effective de Fissure est :  $a+r_y$

$$r_y = \frac{1}{2p} \left( \frac{K_I}{s_E} \right)^2$$

Avec :  $r_y$  rayon de zone plastifiée calculé d'après Irwin

$$\Rightarrow d = 2u_y = \frac{4}{p} \frac{K_I^2}{s_E E}; \quad d : \text{ est le CTOD}$$

Le CTOD peut être relié au taux de restitution d'énergie G par la relation :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \Rightarrow d = \frac{4}{p} \frac{G}{s_E}$$

Ainsi, lorsqu'on est en régime de plasticité confinée où la MLR s'applique, le CTOD est relié à G et au FIC  $K_I$ . Wells postula alors que le CTOD est un paramètre approprié pour caractériser le comportement à l'extrémité d'une fissure, lorsqu'on atteint les limites d'application de la MLR.

### III.2.2. Estimation du CTOD à partir du Modèle Dugdale –Barenblatt

L'expression du CTOD est déterminée en superposant un chargement de compression (contraintes de fermeture s'appliquant à l'extrémité des lèvres d'une fissure (figure 18)) et en considérant que l'ouverture à fond de fissure est donnée par l'écartement des lèvres en amont de la zone de fermeture (figure 18) ; les contraintes en mode I s'expriment en utilisant la fonction Z de Westergaard :

$$\begin{cases} s_x = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z \\ s_y = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z \\ t_{xy} = -y \operatorname{Re} Z \end{cases}$$

Z est une fonction telle que  $z = x+iy$  de variables complexe z.

Déplacements dans la direction y :

$$u_y = \frac{1}{2m} \left[ \frac{1+2m}{1+m} \operatorname{Im} \bar{Z} - y \operatorname{Re} Z \right] = \frac{1+u}{E} \left[ 2(1-u) \operatorname{Im} \bar{Z} - y \operatorname{Re} Z \right] \text{ en DP}$$

$$u_y = \frac{1}{2m} \left[ 4 \frac{1+m}{3l+2m} \operatorname{Im} \bar{Z} - y \operatorname{Re} Z \right] = \frac{1+u}{E} \left[ \frac{2}{1+u} \operatorname{Im} \bar{Z} - y \operatorname{Re} Z \right] \text{ en CP}$$

La fonction de Westergaard s'écrit dans le cas d'une fissure de longueur  $2a$ , dans une plaque de grandes dimensions, soumise à un chargement de traction uniforme :

$$s_\infty : Z(z) \frac{s_\infty z}{\sqrt{z^2 - a_1^2}}$$

$$Z(z) = \frac{2Fz}{p(z^2 - x^2)} \sqrt{a_1^2 - x^2}$$

$$z(z) = - \frac{2S_E}{p} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a_1^2}} \int_a^z \frac{\sqrt{a_1^2 - x^2}}{z^2 - x^2} dx$$

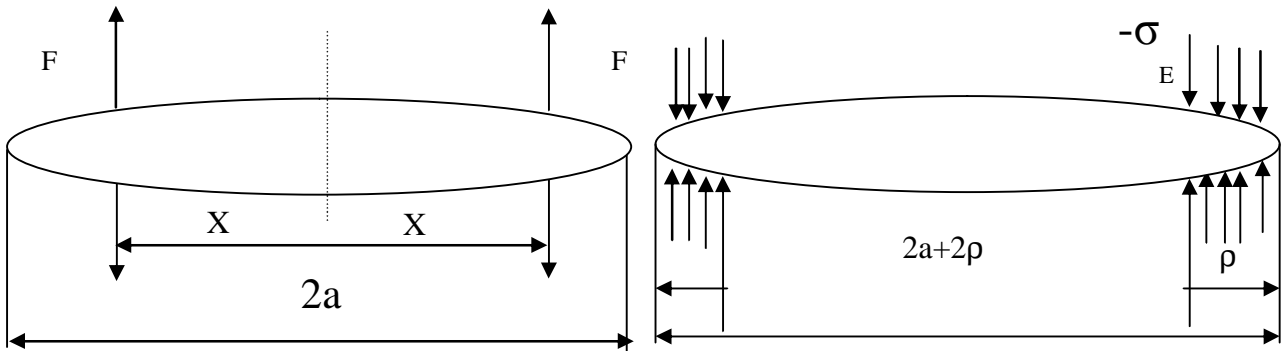


Figure 18. Contraintes de fermeture appliquées à l'extrémité des lèvres d'une fissure

En faisant successivement les changements variables suivants :

$$x = a \cos \theta$$

Puis :

$$t = \cos \theta$$

On obtient :

$$Z(z) = - \frac{2S_E}{p} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 - a_1^2}} \cos^{-1} \left( \frac{a}{a_1} \right) - \cot^{-1} \left( \frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2}{a_1^2 - a^2}} \right) \right]$$

La zone plastifiée d'après le modèle Dugdale-Barenblatt :

$$\frac{a}{a+r} = \frac{a}{a_1} = \cos \left( \frac{pS_\infty}{2S_E} \right)$$

$$I = - \frac{2S_E}{p} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 - a_1^2}} \cos^{-1} \left( \frac{a}{a_1} \right) \right] = - \frac{2S_E}{p} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 - a_1^2}} \cdot \frac{pS_\infty}{2S_E} = - \frac{S_\infty z}{\sqrt{z^2 - a_1^2}}$$

En superposant le chargement de traction  $\sigma^\infty$  au chargement de compression sur les lèvres de la fissure, la fonction de Westergaard s'écrit :

$$Z(z) = \frac{s_{\infty} z}{\sqrt{z^2 - a_1^2}} - \frac{2s_E}{p} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 - a_1^2}} \cos^{-1} \left( \frac{a}{a_1} \right) - \cot^{-1} \left( \frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2}{a_1^2 - a^2}} \right) \right]$$

$$= \frac{2s_E}{p} \cot^{-1} \left( \frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2}{a_1^2 - a^2}} \right) \quad \text{posant } k = \frac{a}{a_1}$$

$$z(z) = \frac{2s_E}{p} \cot^{-1} \left( \frac{k}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2}{1 - k^2}} \right) \Rightarrow \bar{Z}(z) = \frac{2s_E}{p} (z w_1 - w_2 a)$$

Avec :

$$w_1 = \cot^{-1} \left[ \frac{k}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2}{1 - k^2}} \right], \quad w_2 = \cot^{-1} \left[ \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2}{1 - k^2}} \right]$$

Dans le plan de la fissure  $y = 0 \Rightarrow u_y = \frac{2}{E} \text{Im} \bar{Z}$ , on se place le long des lèvres comprimées de la fissure ( $|z| \leq a_1$ ) et en considérant la partie imaginaire de  $\bar{z}$ , on obtient :

$$u_y = \frac{4s_E}{pE} \left[ a \coth^{-1} \left( \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{a_1^2 - z^2}{1 - k^2}} \right) - z \cot^{-1} \left[ \frac{k}{z} \sqrt{\frac{a_1^2 - z^2}{1 - k^2}} \right] \right]$$

Pour déterminer l'écartement à fond de fissure, on fait  $z \rightarrow a$

$$(*) \quad r = 2u_y = 2 \cdot \frac{4s_E}{pE} a \text{Ln} \left( \frac{1}{k} \right) = - \frac{8s_E a}{pE} \text{Ln} \left( \cos \frac{p s_{\infty}}{2s_E} \right)$$

( $z = a$ )

Le développement limite au voisinage de 0 de l'équation (\*) donne :

$$\cos \left( \frac{p s_{\infty}}{2 s_E} \right) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{p s_{\infty}}{2 s_E} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{p s_{\infty}}{2 s_E} \right)^4 + \dots$$

$$d = \frac{8s_E a}{pE} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{p s_{\infty}}{2 s_E} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{p s_{\infty}}{2 s_E} \right)^4 + \dots \right] = \frac{K_I^2}{s_E E} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{p s_{\infty}}{2 s_E} \right)^2 + \dots \right]$$

En considérant uniquement le premier terme, on aura :

$$d = \frac{K_I^2}{s_E E}$$

La relation plus générale entre le CTOD  $\delta$  et le Fic  $K_I$ :

$$d = \frac{K_I^2}{m s_E E} = \frac{G}{m s_E} \quad \text{où} \quad \begin{cases} m = 1 & \text{CP} \\ m = 2 & \text{DP} \end{cases}$$

### III.2.3.Taux de restitution d'énergie non linéaire

Rice a appliqué la théorie de la déformation pour analyser un solide fissuré, Il a démontré que le taux de restitution d'énergie non linéaire en mode I, peut être déterminé à partir d'un intégrale de contours indépendants du contour d'intégration, la valeur de cette intégrale est égale au taux de restitution d'énergie dans un matériau non linéaire, les variations d'énergie qui accompagnent une extension  $\Delta a$  d'une fissure dans un solide :

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{elastique} + \Delta U$$

Où :  $\Delta U$  : l'énergie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur  $\Delta a$  .

$$\Delta U = \Delta W_{séparation} + \Delta W_{plastification}$$

||  $\Delta W_{séparation}$  :Energie de separation des surfaces  
 ||  $\Delta W_{plastification}$  :Energie de plastification

Considérons deux cas de propagation de fissure (figure 19) et calculons l'énergie nécessaire

- Propagation à déplacement imposé ;
- Propagation à force imposée.

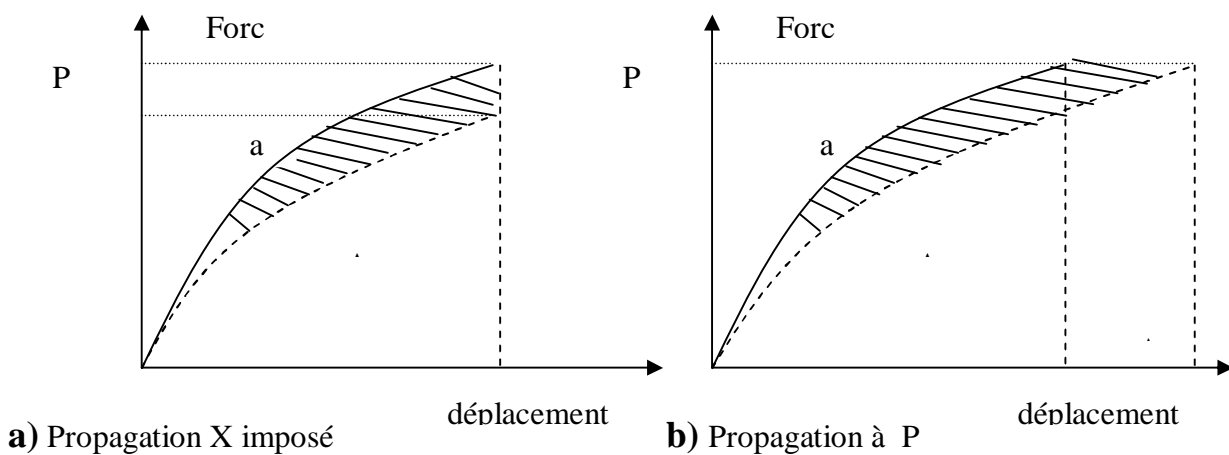


Figure 19. Diagrammes Force - Déplacement

a) Propagation à déplacement imposé :  $\Delta x=0$

$$\Delta W_{ext} = \Delta U + \Delta W_{élas}$$

$$\Delta W_{elast} = \int_0^x P|_{a+\Delta a} dx - \int_0^x P|_a dx = \int_0^x \Delta P dx \Rightarrow \Delta U = \Delta W_{ext} - \Delta W_{elast}$$

Et :  $DW_{ext}=0$

$$\Delta U = -\Delta W_{elast} = \int_0^x \Delta P dx$$

$$J = -\frac{dU}{da} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = -\int_0^x \left( \frac{\partial P}{\partial a} \right) dx$$

b) Propagation à force imposée :  $\Delta P=0$

$$\Delta W_{elast} = \int_0^{x+\Delta x} P|_{a+\Delta a} dx - \int_0^x P|_a dx \quad \text{et} \quad \Delta W_{ext} = P\Delta x$$

D'où :

$$\Delta U = \Delta W_{ext} - \Delta W_{elast} = P\Delta x - \left( \int_0^{x+\Delta x} P|_{a+\Delta a} dx - \int_0^x P|_a dx \right)$$

$$J = -\frac{dU}{da} = -\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \int_0^x \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right) dP$$

Pour les deux cas la quantité de l'intégral-J est semblable ce qui explique que la propagation de la fissure est causée par

- La diminution d'énergie élastique
- La différence entre l'énergie des forces extérieure et l'énergie élastique

$$J = -\int_0^x \left( \frac{\partial P}{\partial a} \right) dx = \int_0^P \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right) dP$$

### III.2.3.1. Intégrales de contour

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour, déduites de la loi de conservation de l'énergie Bouchard [26]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie et indépendants du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connues, on peut citer l'intégrale  $J$  de Rice -Bouchard [26]. l'intégrale duale  $I$  de Bui -Bouchard [26]. l'intégrale hybride s'appuyant sur le super élément de Tong et Pian (Bouchard [26]). ou encore les intégrales  $T$  et  $A$  proposés par Bui et Proix -Bouchard [26]. et mises en œuvre et étudiés par Zhang- Bouchard [26].

Pour l'intégrale de Rice, on considère un milieu bidimensionnel fissuré, dont la fissure sera supposée rectiligne. Le contour  $C$  est un contour ouvert orienté dont les extrémités se trouvent sur les faces supérieure et inférieure de la fissure.

1) L'intégral J

Rice (1968) présenta une intégrale de contour, le long d'un chemin qui entoure les lèvres de la fissure, permettant d'évaluer l'effort de propagation de la fissure (figure 20). Il montra que la valeur de cette intégrale est égale au taux de restitution d'énergie non linéaire. Cette intégrale se définit par :

$$J = \int_{\Gamma} (w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds)$$

Où :  $w = \int \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{e}_{ij}$  - densité d'énergie de déformation,  $T_i = \mathbf{s}_{ij} n_j$  composantes du vecteur contrainte et  $u_i$  vecteur déplacement induit par le chargement

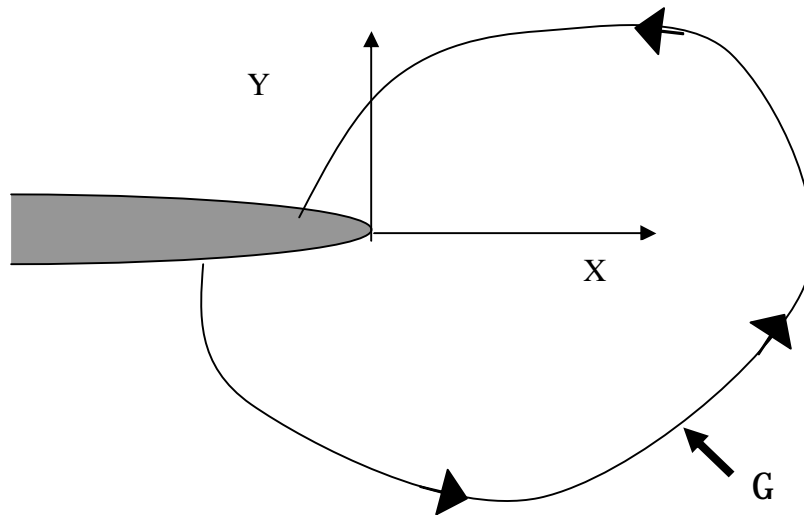


Figure 20. Contour arbitraire autour de l'extrémité d'une fissure

La figure 21 représente la variation d'énergie lors de la propagation de la fissure pour un déplacement imposé

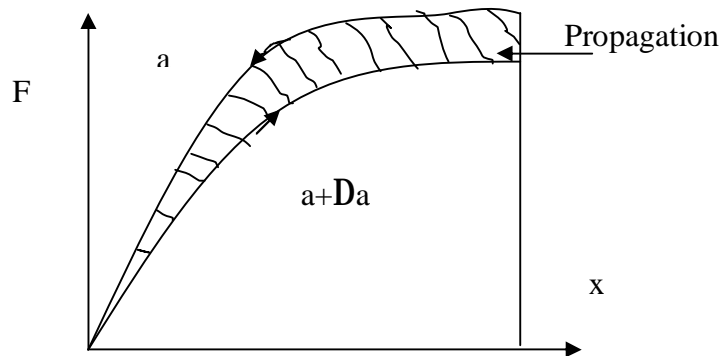


Figure 21. Variation d'énergie lors de la propagation

Hutchinson, Rice et Rosengren ont optés l'intégral  $J$  pour caractériser les champs de contraintes et déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau élastique –plastique obéissant à la relation de Ramberg – Osgood :

$$\frac{e}{e_0} = \frac{s}{s_0} + a \left( \frac{s}{s_0} \right)^n$$

Où :  $s_0, e_0$  - sont respectivement la limite d'élasticité et la déformation ;

$n$  - exposant d'écrouissage.

L'intégrale  $J$  prédit deux zones de singularité dominantes près de l'extrémité de la fissure. Dans la région élastique les contraintes varient en  $1/r$  et dans la zone plastique  $1/r^{n+1}$  quand  $r$  tend vers zéro, par conséquent la répartition des tenseurs de contraintes et déformations peuvent s'écrire en générale :

$$s_{ij} = k_1 \left( \frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$e_{ij} = k_2 \left( \frac{J}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

Avec :  $k_1$  et  $k_2$  des constantes

Le calcul précis montre que le champ HRR (Hutchinson, Rice et Rosengren) donné par les relations précédentes, s'écrit :

$$s_{ij} = s_0 \left( \frac{J}{a s_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{s}_{ij}(n, q)$$

$$e_{ij} = \frac{a s_0}{E} \left( \frac{E J}{a s_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{e}_{ij}(n, q)$$

Où :  $I_n$  constante d'intégration qui dépend de  $n, \tilde{s}_{ij}$  et  $\tilde{e}_{ij}$  des fonctions adimensionnelles de  $n$  et  $\theta$ .

## 2) Calcul de l'intégral $J$

Considérons un solide fissuré limité par le contour « $\Gamma$ » et de surface  $A'$ (figure 22).

L'énergie potentielle peut s'écrire en l'absence des forces de volumes :

$$E_p = \int_A w dA - \int_{\Gamma'} T_i u_i ds,$$

Où :  $\Gamma''$  est la portion du contour  $\Gamma'$  sur laquelle s'exerce le chargement de traction  $T_i$ .

La variation de l'énergie potentielle associée à une propagation virtuelle de « da » de la fissure suivant l'axe x, conduit à écrire la relation suivante :

$$\frac{dE_p}{da} = \int_A \frac{dw}{da} dA - \int_{\Gamma'} T_i \frac{du_i}{da} ds \quad (*)$$

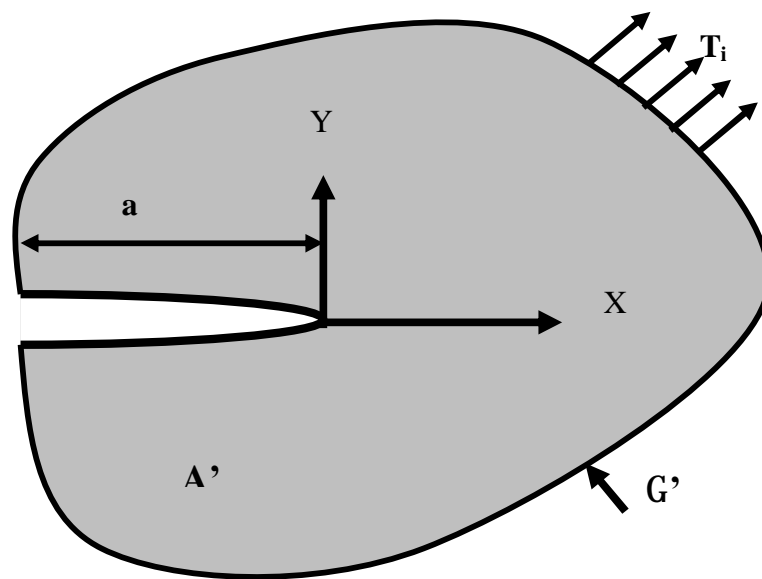


Figure 22. Solide fissuré

Les déplacement ne varient pas sur la portion ( $G' - G''$ ), l'intégrale peut être prise sur tout le contour  $\Gamma'$ , pour une extension da, la dérivée par rapport à a s'écrit :

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x}$$

La relation (\*) devient alors :

$$\frac{dE_p}{da} = \int_A \left( \frac{\partial w}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA - \int_{\Gamma'} T_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds$$

Avec :

$$\frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\partial w}{\partial e_{ij}} \frac{\partial e_{ij}}{\partial a} = s_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right)$$

Le principe des travaux virtuels permet d'écrire :

$$\int_{A'} s_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) dA = \int_{\Gamma'} T_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) ds$$

L'énergie potentielle peut s'exprimer alors :

$$\frac{dE_p}{da} = \int_{\Gamma''} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds - \int_{A'} \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right) dA$$

Appliquons le théorème de Stokes pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de contour :

$$\frac{dE_p}{da} = \int_{\Gamma'} (T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds - w n_x) ds$$

Et comme :  $n_x ds = dy$ , l'intégrale aura finalement pour expression :

$$J = -\frac{dE_p}{da} = \int_{\Gamma'} \left( w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right)$$

Le paramètre J est défini pour une structure :

$$J = \left( \frac{\partial E_p}{\partial a} \right)_x = - \left( \frac{\partial}{\partial a} \int_0^x F dx \right) = - \int_0^x \left( \frac{\partial F}{\partial a} \right)_x dx$$

Dans le cas d'un comportement linéaire élastique J=G

- $J = G = \frac{K_I^2}{E}$                       Etat plan de contrainte
- $J = G = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2)$               Etat plan de déformation
- 

### III.2.3.2 Relation entre le CTOD et l'intégral- J

La relation qui existe entre « J » et «  $\delta$  (CTOD) » est donnée par :

$$J = m S_E d$$

Où : m - constante sans dimension qui dépend de l'état des contraintes et des propriétés du matériau

Considérons le modèle de Dugdale-Barenblatt en choisissant le contour de l'intégral de la figure 23.

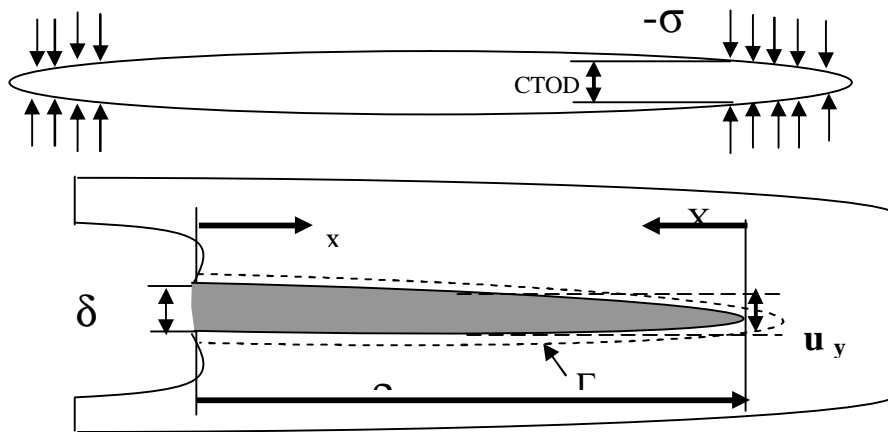


Figure 23. Modèle de Dugdale-Barenblatt

Si la longueur  $\rho$  est grande devant le CTOD  $\delta$ , la relation de J devient alors

$$J = \int_{\Gamma} (w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds) = s_E \int_{\Gamma} \frac{\partial u_y(x)}{\partial x} ds \quad \text{Pour } dy \approx 0$$

En changeant l'origine du repère, faisant le changement du variable  $X=x-\rho$ , l'Intégrale s'écrit alors pour  $\delta$  fixe :

$$J = 2s_E \int_0^r du_y(X) = s_E \int_0^d dd = s_E d$$

### III.2.4. Méthodologie de mesure de l'intégral –J

Tant que le comportement du matériau est linéaire, l'intégral J correspond à l'énergie de GRIFFITH qui est directement lié au FIC K, lui-même proportionnel à la charge appliquée et pouvant être calculé à partir des conditions de chargement et de la taille de la fissure.

Lorsque le comportement est non-linéaire l'intégral J n'est plus proportionnel à la charge appliquée et la méthode de calcul utilisé est basée sur des méthodes expérimentales. Parmi ces méthodes, les plus appliquées actuellement, utilisent la définition du paramètre J donnée par la relation suivante :

$$J = \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_x$$

Où :  $\partial U$  l'énergie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur  $\partial a$ .

A partir d'une série d'éprouvettes de même géométrie et de même taille, on introduit des fissures de différentes longueurs, obtenues généralement par essai de fatigue (figure 24). Les variations entre les forces appliquées « F » et les déplacements «  $\Delta$  », sont ensuite enregistrées pour les différentes

### Chapitre III – Analyse des fissures en élasto-plasticité

fissures puis on trace pour un «  $\Delta$  » fixé, l'énergie «  $U$  » à partir des enregistrements  $(F, \Delta)$ . L'aire sous la courbe  $(F, \Delta)$  est comptée négative. En fonction de la longueur de la fissure «  $a$  » de ces tracés on déduit la pente des courbes qui correspond à la valeur de l'intégrale  $-J$  donnée pour des éprouvettes d'épaisseur  $e$ , par :

$$J = \frac{1}{e} \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_{\Delta} F$$

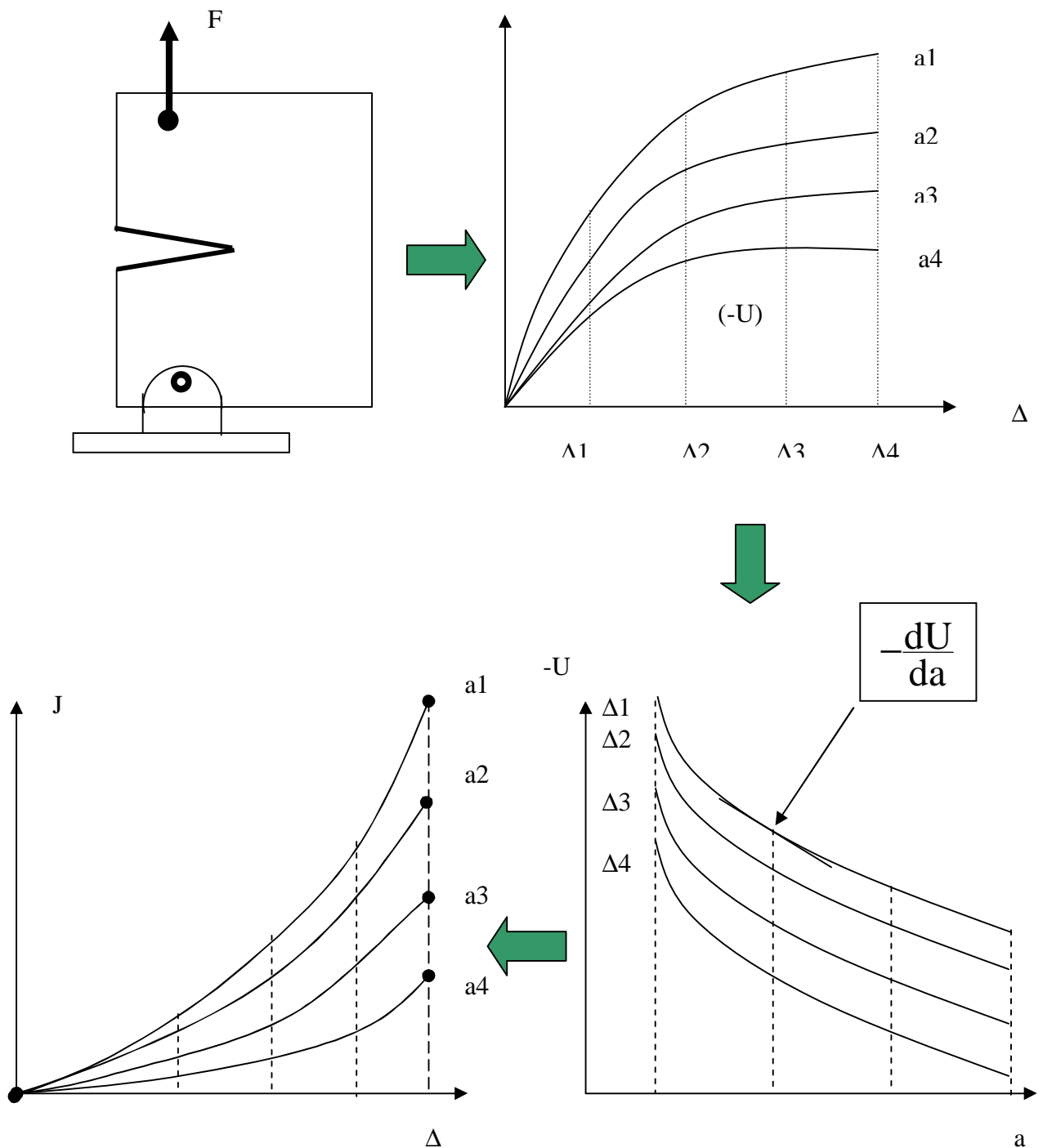


Figure 24. Détermination expérimentale du paramètre  $J$

Rice a montré qu'il était possible de déterminer l'intégrale  $-J$  dans certain cas par un seul enregistrement de la variation «F» avec le déplacement « $\Delta$ » il utilise pour cela l'analyse dimensionnelle.

Soit à considérer une plaque doublement fissurée, sollicitée en traction (figure 25)

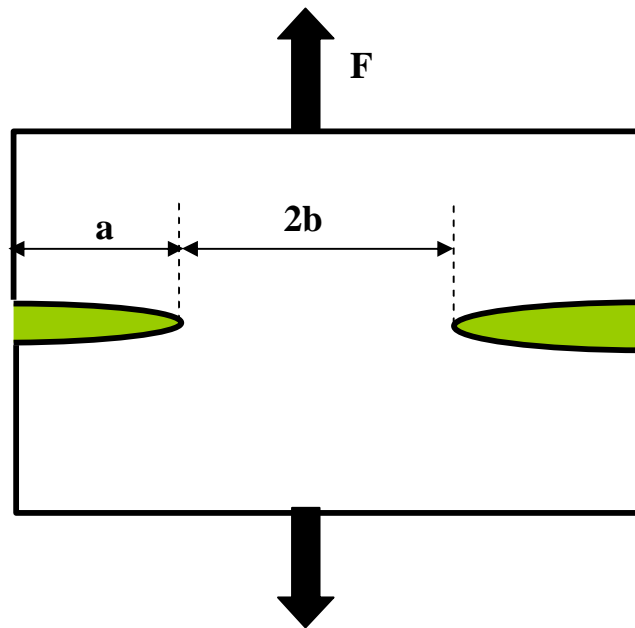


Figure 25. Plaque doublement fissurée

L'intégral - J est défini par :

$$J = \left( \frac{\partial U}{\partial A} \right)_F$$

$$dA = 2eda = -2edb$$

Pour  $e=1$  on a alors :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^F \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_F dF = -\frac{1}{2} \int_0^F \left( \frac{\partial \Delta}{\partial b} \right)_F dF$$

Si le comportement du matériau est décrit par la loi de Ramberg-Osgood, l'analyse dimensionnelle permet d'écrire :

$$\Delta = bf \left( \frac{F}{S_e b}, \frac{a}{b}, \frac{S_e}{E}, n, a, n \right)$$

### Chapitre III –Analyse des fissures en élasto-plasticité

Pour des propriétés données du matériau, on ne considère alors que la charge et les dimensions de la plaque comme variable.

Le déplacement total s'écrit alors par :

$$\Delta = \Delta_e + \Delta_p$$

$$\text{Donc : } J = -\frac{1}{2} \int_0^F \left[ \left( \frac{\partial \Delta_e}{\partial b} \right)_F + \left( \frac{\partial \Delta_p}{\partial b} \right)_F \right] dF = \frac{K_I^2}{E'} - \frac{1}{2} \int_0^F \left( \frac{\partial \Delta_p}{\partial b} \right) dF \quad (*)$$

$$\text{Où : } \begin{aligned} E' &= \frac{E}{1-n^2} && \text{en DP} \\ E' &= E && \text{en CP} \end{aligned}$$

Pour utiliser l'analyse dimensionnelle suivante :

$$\Delta_p = bH \left( \frac{F}{b} \right)$$

Si la déformation reste confinée dans le ligament  $2b$  non fissuré on peut considérer que cette longueur est la seule dimension qui influencera la composante  $\Delta_p$  et que la contrainte moyenne est bien plus élevée que la contrainte appliquée.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Delta_p}{\partial b} \right)_F &= H \left( \frac{F}{b} \right) - H' \left( \frac{F}{b} \right) \frac{F}{b} \\ \left( \frac{\partial \Delta_p}{\partial F} \right)_b &= H' \left( \frac{F}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui conduit à : } \left( \frac{\partial \Delta_p}{\partial b} \right)_F = \frac{1}{b} \left[ \Delta_p - F \left( \frac{\partial \Delta_p}{\partial F} \right)_b \right] \quad (**)$$

En substituant (\*\*) dans (\*) on obtient :

$$\boxed{J = \frac{K_I^2}{E} + \frac{1}{2b} \left[ 2 \int_0^{\Delta_p} F d\Delta_p - F \Delta_p \right]}$$

#### III.2.5 Tri axialité des contraintes en tête de fissure

Considérons un cube élémentaire pris d'un matériau proche du fond d'une fissure. Si ce cube est totalement libre de se déformer sous l'effet de la contrainte locale  $\sigma_Y$ , il se tirera dans la direction  $y$  et se contractera librement dans la direction  $x$  et  $z$  mais dans les directions  $x$  et  $z$  ce cube est retenue à ces voisins, par les liaisons atomique, par conséquent sa contraction selon  $x$  et  $z$  n'est

### Chapitre III –Analyse des fissures en élasto-plasticité

pas totalement libre et il y a apparition des contraintes de tension  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$  dans les directions x et z, perpendiculaire à la direction de la contrainte appliquée. C'est le phénomène de tri axialité des contraintes en tête de fissure. Dans le plan (x y) on peut schématiquement tracer la variation des contraintes locales  $\sigma_y$  et  $\sigma_x$  (figure 26). La contrainte  $\sigma_y$  parallèle à la contrainte nominale appliquée décroît constamment en fonction de la distance x, pour atteindre la valeur de la contrainte normale quand la fissure ne peut plus sentir sa présence. Par contre la contrainte  $\sigma_x$  est

nulle à la racine de la fissure car le cube élémentaire n'est pas retenu par des voisins. Quand il est situé à la surface, cette contrainte  $\sigma_x$  passe par une valeur maximale à quelques distances en avant de la fissure puis décroît pour atteindre une valeur nulle quand la fissure ne peut plus sentir sa présence

La distance x où la contrainte  $\sigma_x$  est maximale, dépend de la géométrie de la fissure c'est-à-dire, de sa profondeur et de son rayon de courbure. On constate donc que la tri axialité des contraintes dues à la présence d'une fissure est maximale à une certaine distance en avant de cette fissure et non pas à sa racine.

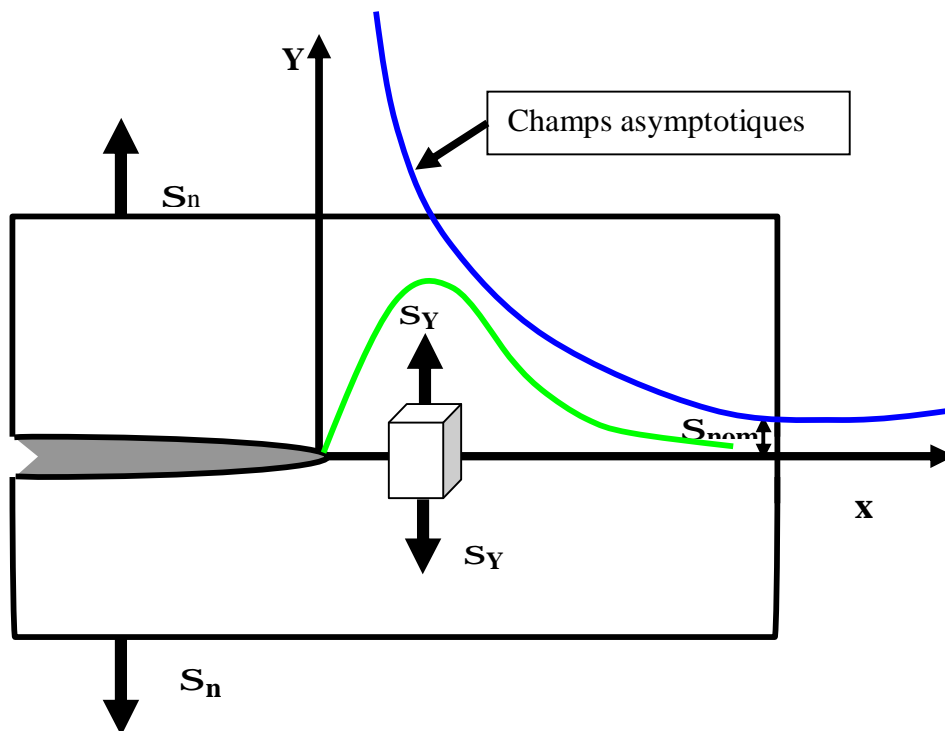


Figure 26. Champs HRR et contrainte  $\sigma_x$  près du fond de la fissure

### III.2.6 Courbe $J_R$ de résistance à la fissuration

La figure 27 représente la courbe  $R$  dans un matériau ductile. Lorsqu'on charge jusqu'à  $\sigma_1^\infty$ , la longueur de fissure reste constante. Entre  $\sigma_2^\infty$  et  $\sigma_R$ , la fissure se propage de façon stable mais lorsque la charge  $\sigma_R$  est atteinte, l'énergie  $G$  tangente la courbe  $R$  et la propagation est alors brutale.

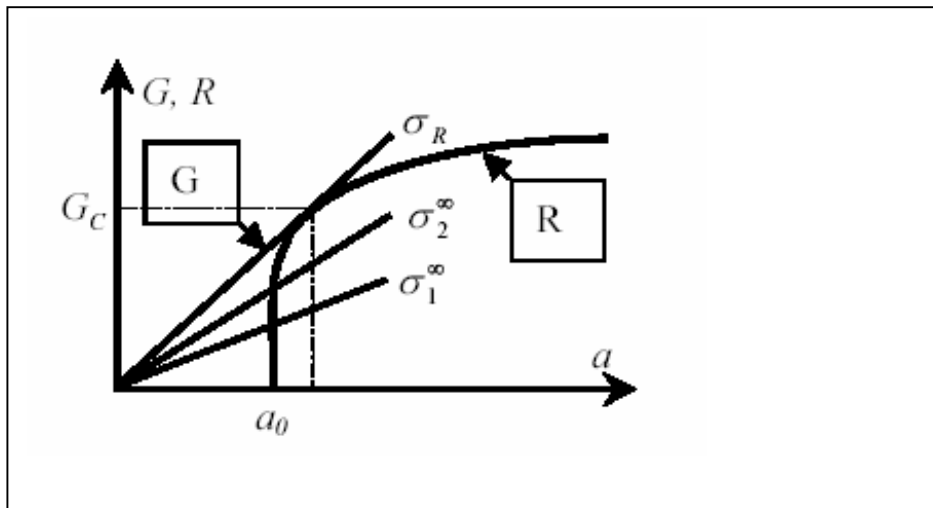


Figure 27. Type de courbes R du matériau ductile

Au delà de  $\sigma_2^\infty$ , la résistance à la rupture augmente ; ce qui explique l'existence d'une zone plastique à l'extrémité de la fissure qui concentre une énergie de résistance devant laquelle l'énergie nécessaire à provoquer les micro ruptures à fond de fissure est bien plus faible.

L'examen de l'allure des courbes R de fissuration est stable tant que :

$$G = R \quad \text{et} \quad \frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da}$$

La propagation instable intervient lorsque :

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da}$$

L'évolution sur cette courbe est liée au développement d'une fissuration stable par déchirure ductile à fond de fissure avant la rupture. Cette déchirure est due à une croissance suivie d'une coalescence des cavités qui se forment par écoulement plastique autour des micros hétérogénéités. La figure 27 montre l'allure de la courbe de résistance à la fissuration exprimée en termes d'intégrale-  $J$ , la courbe  $R$  correspondante est appelée courbe  $J_R$ .

Dans les premiers stades de la déformation, l'émoussement de l'extrémité de la fissure est équivalent à une propagation apparente. Lorsque  $J$  augmente et dépasse  $J_{IC}$  (figure 28) une micro

fissuration se développe au fond de la fissure émoussée. Cette micro fissure se propage ensuite de façon stable jusqu'à rupture. La pente de la courbe  $J_R$  est ainsi utilisée pour évaluer la stabilité de la fissure.

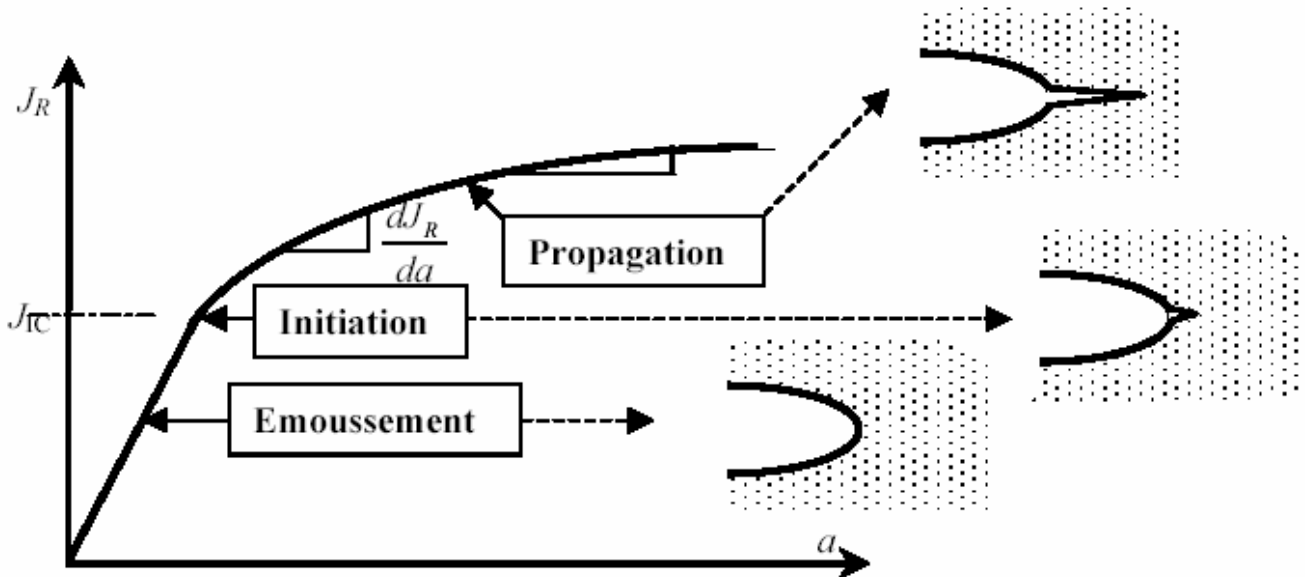


Figure 28. Courbe  $J_R$  de résistance à la fissuration dans un matériau ductile

### III.2.7. Fissuration stable et instable

La condition de stabilité dans le cas de matériaux élastoplastiques est virtuellement identique à celle établie pour les matériaux élastiques. L'instabilité se produit lorsque la valeur du paramètre  $J$ , devient tangente à la courbe  $J_R$ .

### III.2.8 Détermination de $J$ lorsque la fissure se propage

Pour le calcul de  $J$  dans le cas d'une fissure se propageant, il est donc nécessaire de réexaminer la variation de la force en fonction du déplacement, reposant sur l'hypothèse du comportement du matériau élastique non linéaire. Considérons le point A sur la figure 29, la fissure de longueur initiale  $a_0$  s'est propagée jusqu'à une longueur  $a_1$ , l'aire sous la courbe représente l'énergie dépensée si le comportement était élastique non linéaire .

Dans un matériau élastoplastique, le retour élastique ne suit pas le même chemin et le surplus d'énergie est dissipé dans la déformation plastique qui accompagne la fissure. L'aire en dessous de la courbe de retour élastique est l'énergie de déformation  $U_D$ , cette énergie dépend uniquement de la force courante et de la longueur de la fissure.

Elle est donnée par :

$$U_D = U_D(F, a) = \int_0^{\Delta} F d\Delta \Big|_{a=a_1}$$

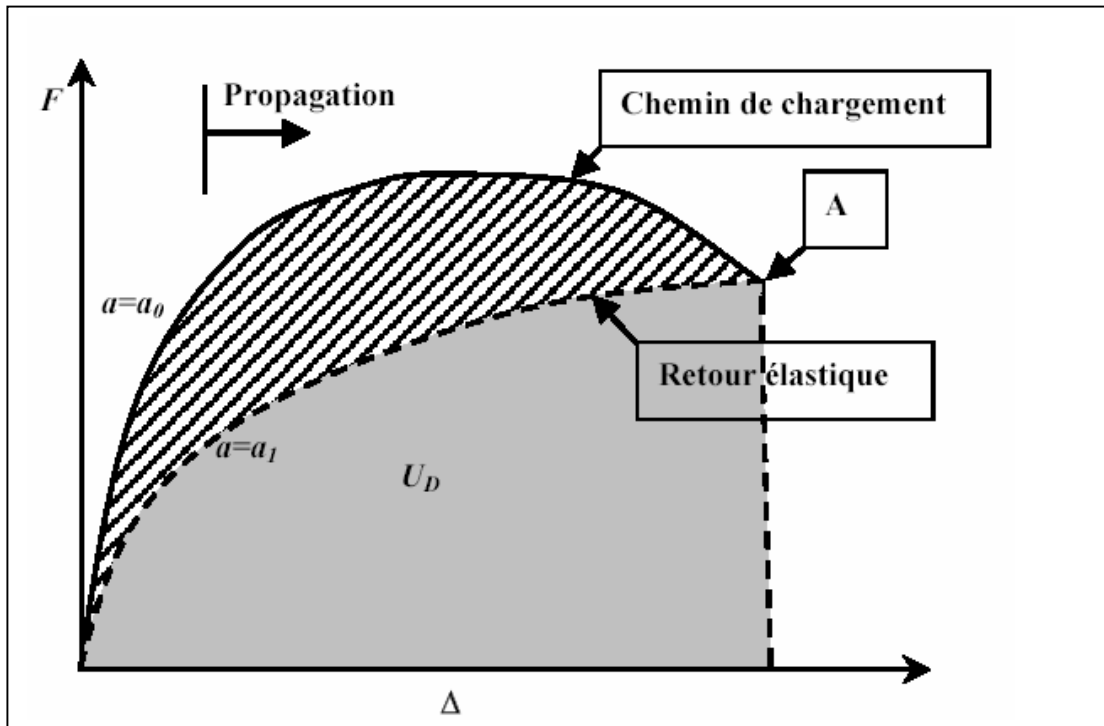


Figure 29. Courbe force-déplacement lorsque la fissure se propage de  $a_0$  à  $a_1$

L'intégral J pour un matériau élastique non linéaire et comportant une fissure qui se propage s'écrit alors :

$$J_D = -\frac{1}{e} \left( \frac{\partial U_D}{\partial a} \right)_{\Delta} = \frac{h U_D}{eb} \quad \text{b : Ligament non fissuré}$$

La relation précédente peut être décomposée-en :

$$J_D = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{h_P U_{D(P)}}{eb}$$

### III.2.9 La contrainte élastique T

Williams a montré que les champs de contrainte à l'extrémité d'une fissure dans un matériau isotrope et élastique, peuvent être exprimés à l'aide de séries infinies en puissance de  $r$  dont le 1<sup>er</sup> terme prépondérant correspond à la singularité en  $1/\sqrt{r}$ , le 2<sup>nd</sup> terme est constant, le 3<sup>ème</sup> terme est proportionnel à  $\sqrt{r}$ . La théorie classique de la mécanique de la rupture néglige habituellement tous les termes à l'exception du terme singulier. Cependant, si les termes au-delà du second terme, en

$r^{1/2}$ ,  $r^{3/2}$ ... s'annulent à l'extrémité de la fissure, le second terme qui lui est constant, garde sa valeur. Ce terme peut avoir une influence importante sur la forme de la zone plastifiée et sur les contraintes en profondeur à l'intérieur de cette zone.

Pour une fissure dans un matériau élastique et isotrope, sollicité en mode I sous déformation plane, les deux premiers termes intérieurement dans l'expression des contraintes sont :

$$s_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} f_{ij}(q) + \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & uT \end{bmatrix}$$

Où :  $T$  est une contrainte uniforme qui correspond aux contraintes de compression transverses évoquées lors de l'étude de la fissure stationnaire.

### III.2.10 Théorie du $J-Q$

Dans le cas de la plasticité étendue, le champ singulier HRR (A.ZEGHLOUL) [18] représente le premier terme de la solution complète qui pourrait se présenter sous la forme d'un développement en série. Tout comme le rajout de la contrainte transverse  $T$  en élasticité linéaire, on montre qu'en plasticité étendue il est parfois nécessaire de prolonger le développement en série et de prendre en compte le premier terme non singulier  $Q$ .  $Q$  est appelé facteur d'amplitude du champ du second ordre, ou paramètre de tri axialité du confinement. Sa prise en compte prend une importance croissante avec l'extension de la plasticité et devient indispensable pour la prédiction de rupture dans certains cas de pré chargement à chaud A.ZEGHLOUL [18].

Avec l'hypothèse de la théorie de la déformation, les champs de contraintes en pointe d'une fissure, peuvent être représentés par une série en puissance de  $r$  dont le 1<sup>er</sup> terme correspond à la solution HRR. Les autres termes peuvent être regroupés dans un champ de différence qui vient s'ajouter au champ HRR. On peut alors écrire :

$$s_{ij} = (s_{ij})_{HRR} + (s_{ij})_{dif}$$

On peut aussi définir ce champ de différence comme le complément au champ prévu pour  $T=0$ , écrire alors :

$$s_{ij} = (s_{ij})_{T=0} + (s_{ij})_{dif}$$

On peut quantifier l'amplitude du champ de différence avec un paramètre  $Q$ , défini initialement par O'Dowd et Shih, et écrire :

$$s_{ij} = (s_{ij})_{T=0} + Q s_E d_{ij} \quad \text{pour } |q| \leq p/2$$

Le paramètre  $Q$  peut être obtenu par soustraction de la solution obtenue à  $T = 0$  du champ des contraintes. Il est souvent défini par :

$$Q = \frac{s_y - (s_y)_{T=0}}{s_E} \quad \text{à } q=0 \quad \text{et} \quad \frac{r s_E}{J} = 2$$

**Bilan :**

Il est possible de résumer les zones de prédominance des différents paramètres de calcul utilisés en mécanique de la rupture à l'aide de la (figure 30) :

Le solide fissuré est subdivisé en plusieurs zones de dominance et on peut alors être confronté à plusieurs situations **Bouchard [26]**.

- Ø **En élasticité linéaire**, les zones I et II n'existent pas, et on peut déterminer la rupture uniquement à l'aide de  $K$  (et la contrainte  $T$ ). Le paramètre  $G$  peut également être utilisé, et s'avère très précis lorsqu'il est calculé par des méthodes d'intégrales surfaciques. De plus, la fissure reste aiguë.
  
- Ø **En plasticité confinée**, la fissure subit un léger émoussement, la zone I apparaît, mais reste de petite taille (2CTOD). Il apparaît une zone de plasticité (zone II) dominée par le paramètre  $J$  (et le terme  $Q$ ). La zone III reste valide. On peut continuer à utiliser  $K$  à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes équivalents, et des méthodes élastiques équivalentes **Bouchard [26]**.
  
- Ø **En plasticité étendue**, la fissure s'émousse encore. La zone de dominance de  $K$  (et de  $KT$ ) disparaît, et les zones I et II s'agrandissent. Les méthodes élastiques équivalentes ne sont plus valables, et la méthode élastoplastique incrémentale est nécessaire pour le calcul des paramètres  $G$  ou  $J$ . Lorsque la plasticité s'étend encore, la rupture ne peut plus être caractérisée à l'aide d'un seul paramètre, et on rentre dans la zone de dominance de  $J-Q$ . Enfin, il peut arriver que la zone de grande déformation recouvre toutes les autres. Il n'est

alors plus possible d'utiliser les différents paramètres  $J$ ,  $K$ ,  $Q$  ou  $T$  pour caractériser la rupture.

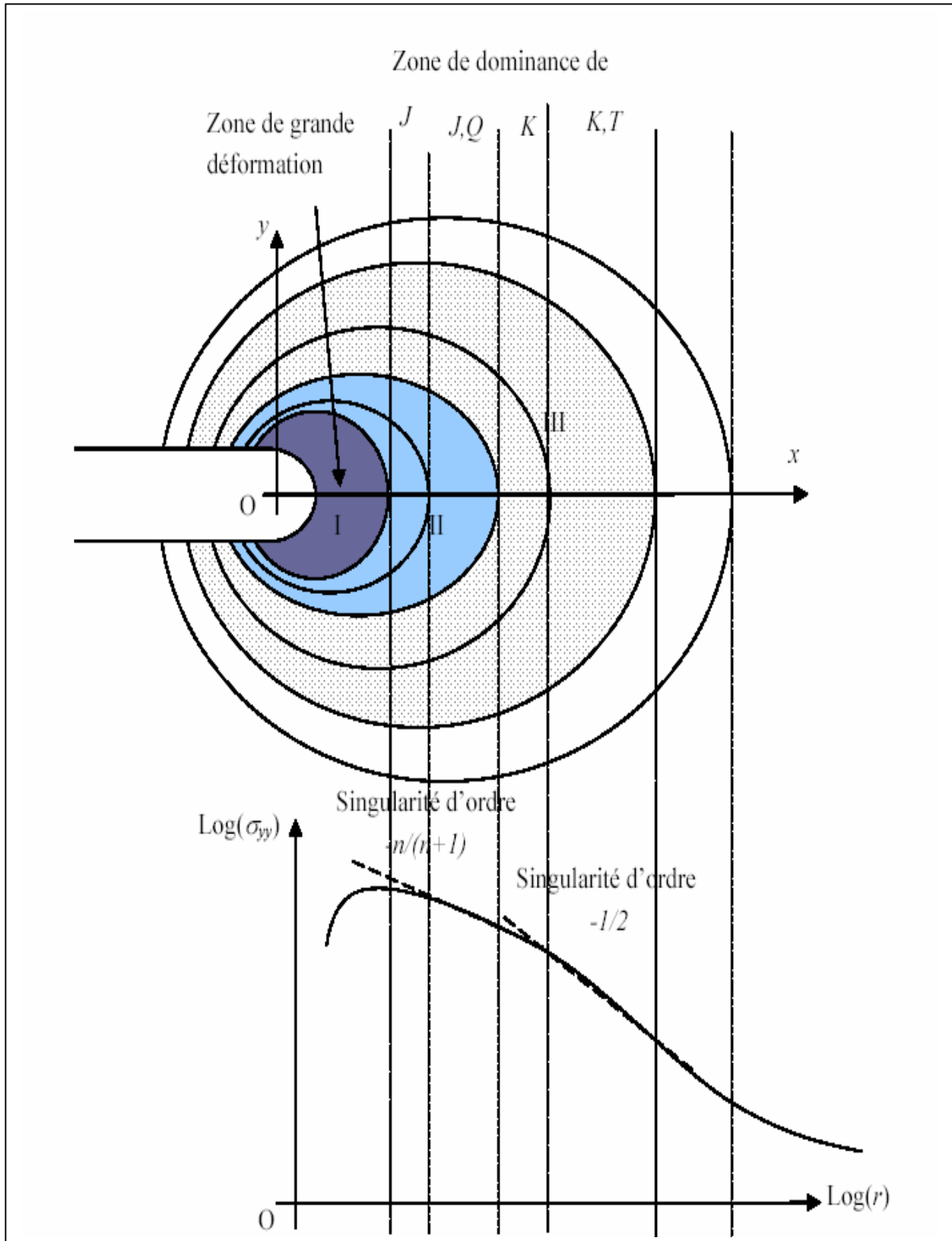


Figure 30. Zones de dominance des différents paramètres

## Chapitre IV

### **SIMULATION ELASTOPLASTIQUE**

#### IV.1- Présentation du code de calcul

##### **IV.1.1- Introduction**

La complexité des problèmes de mécanique a poussé les ingénieurs à penser à concevoir des programmes informatiques de plus en plus puissants et rapide, pour répondre à leurs besoins, qui ne cessent de se développer et aux problèmes qui s'impose de jour en jour. Le code CASTEM est parmi les programmes qui ont évolués et ont fini à ce niveau pour résoudre des problèmes mécaniques. Ce code a été développé par le Département Mécanique et technologie (DMT) du commissariat français à l'énergie Atomique (CEA) et entre dans le cadre de la recherche dans le domaine mécanique dont le but est de définir un instrument pouvant servir de support pour la conception ,le dimensionnement et l'analyse de structure et de composant dans le domaine du nucléaire comme dans le secteur Industriel classique ces fonctions apporte aux utilisateurs la possibilité d'adopter leurs problèmes de façon structuré.

Le code Castem est un outil de calcul basé sur la méthode des éléments finis disposant d'un langage jouant le rôle d'interface de communication, qui est le langage GIBIANE.

Trois programmes constituent le noyau du CASTEM, Il s'agissait :

- Ø Programme de maillage
- Ø Programme de calcul
- Ø Programme de visualisation des résultats.

##### **IV.1.2- Organisation d'un calcul**

A l'aide de la méthode des éléments fini utilisé comme procédé de calcul dans castem2000, le processus de la méthode peut se décomposer en quatre étapes :

- Le choix de la géométrie et du maillage
- La définition du modèle mathématique
- Résolution du problème discrétisé
- Analyse et le post traitement

Chacune des étapes peut également être décomposée en une série de processus élémentaires.

### 1) Choix de la géométrie et du maillage

- Définition de la géométrie : définitions des points, lignes, surfaces et volumes
- Discrétisation

### 2) Définition du modèle mathématique

-type d'analyse : déformation ou contraintes planes, axisymétrique

-formulation : mécanique, thermique

-comportement du matériau : élastique (isotrope, orthotrope ...), plastique

-type d'éléments : poutres, barres, coques

- Définition des propriétés matérielles (constantes d'élasticité, masse volumique...)
- Définition des propriétés géométriques (section, inertie, épaisseurs coque.. )
- Définition des sollicitations
- Conditions initiales

### 3) Résolution du problème discrétisé

- Calcul des matrices de rigidité et de masse de chaque élément finis
- Assemblage des matrices de rigidités et de masse de la structure complète
- Application des conditions aux limites
- Application des chargements
- Résolution du système d'équation

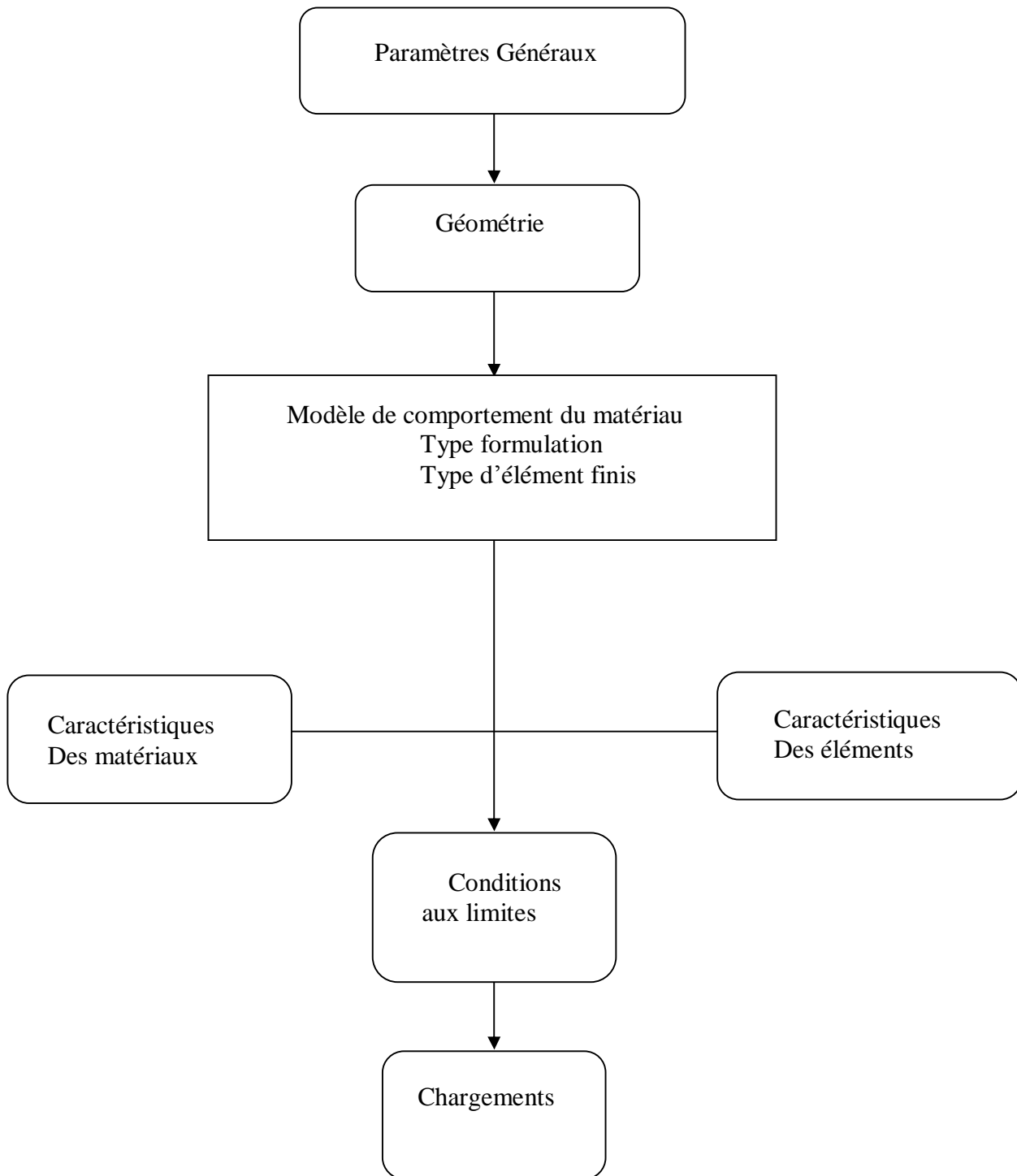
### 4) Analyse et post-traitement des résultats

- Visualisation des quantités locales : déplacements, contraintes, déformations...
- Visualisation des quantités globales : déformation maximale, énergie de déformation, etc.

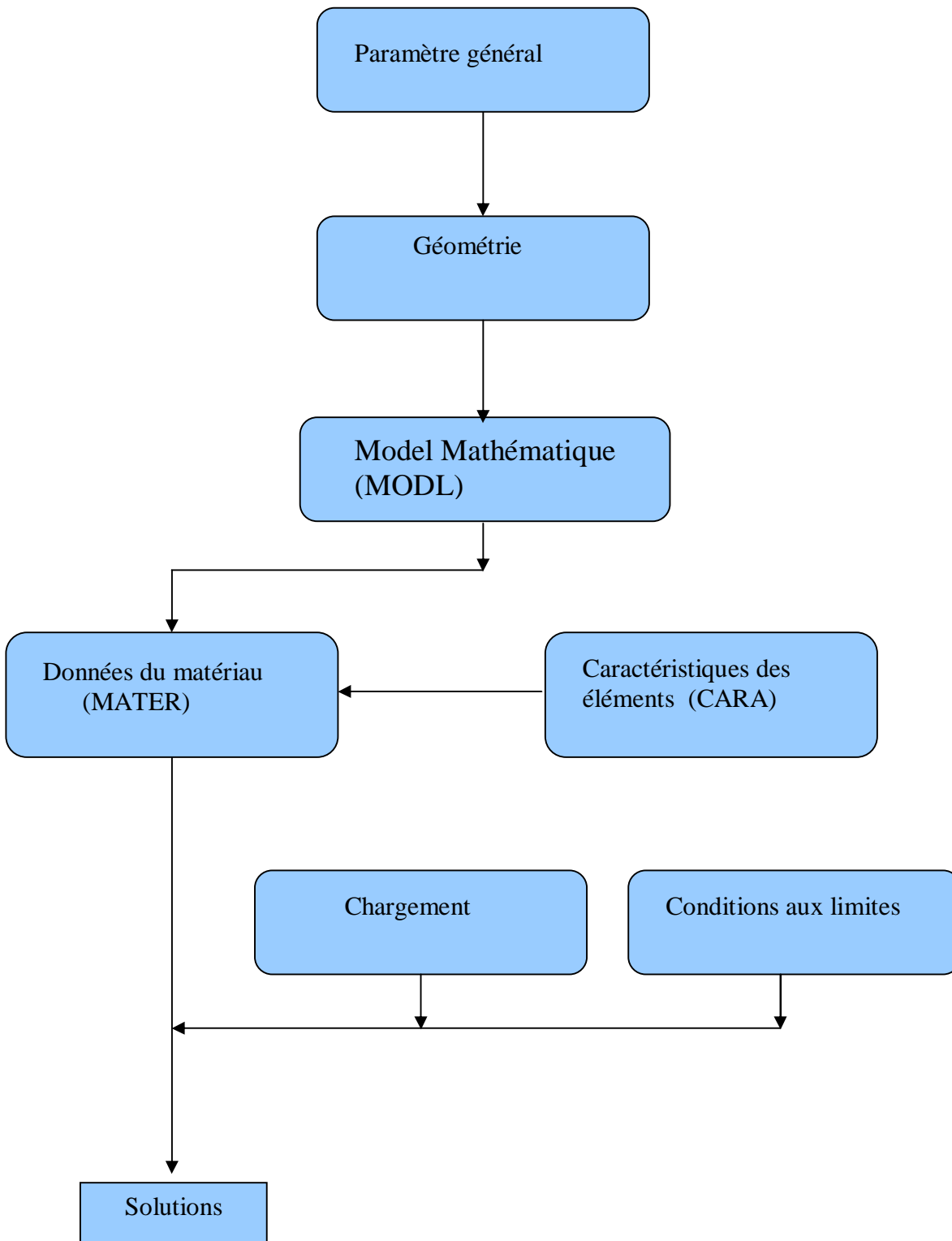
### IV.1.3- Préparation du modèle de calcul

Selon les caractéristiques du problème à analyser et les conditions limites, le modèle peut être choisi parmi un nombre figurant dans le code qui répond aux conditions du système,

**Schémas décrivant les étapes du choix du modèle**



On peut décrire un organigramme représentant le processus de calcul du problème traité par le code castem2000



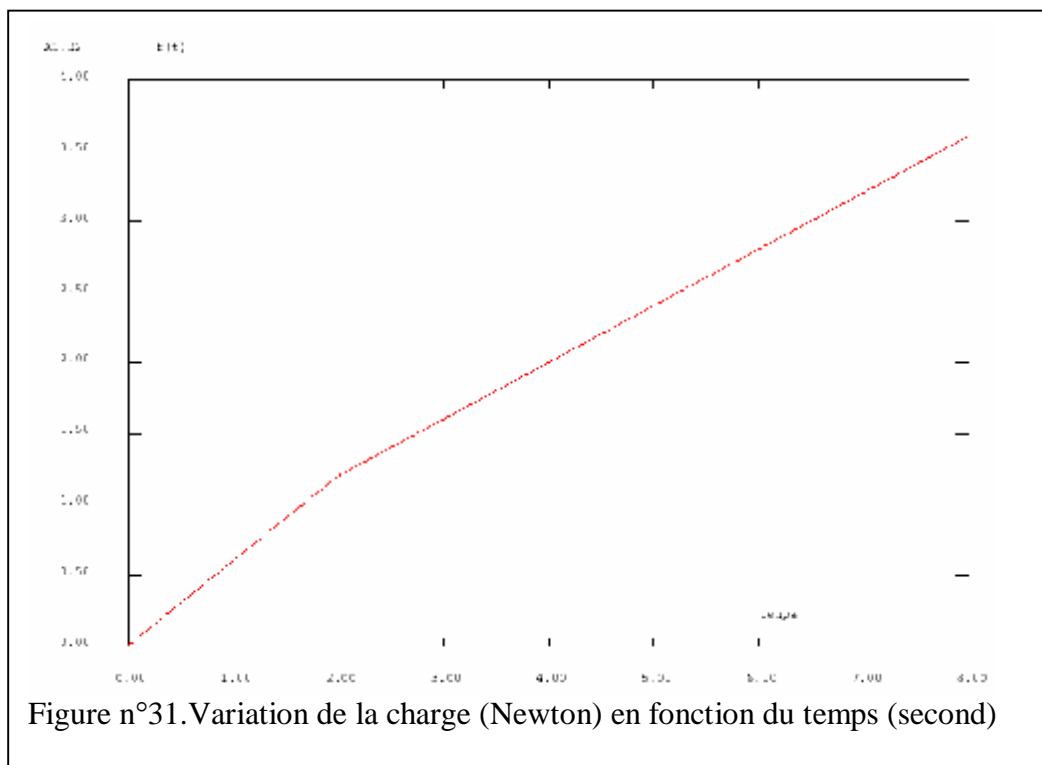
### IV.2. 1Choix du Modèle

Dans ce travail, on considère une plaque pré entaillée, sollicité à la traction (mode I), provoquant une ouverture de la fissure. La plaque a été discrétisée par éléments finis (figure 32). La simulation est faite à l'aide du code de calcul CASTEM 2000, en appliquant une procédure de calcul en respectant les étapes de calcul décrites par le code et les résultats sont ensuite validés par des résultats bibliographiques [39].

La charge appliquée est variable croissante en fonction du temps de 60N à 360N (figure n.31).

Les caractéristiques de la plaque sont les suivantes :

- Ø Dimensions de la plaque :
  - largeur : 10mm ;
  - longueur : 30mm
- Ø Dimensions de la fissure :
  - longueur 5mm ;
  - rayon en fond d'entaille 0.02mm ;
- Ø Module de young :230MPa
- Ø Limite élastique : 670Mpa
- Ø Le comportement est élastoplastique parfait.



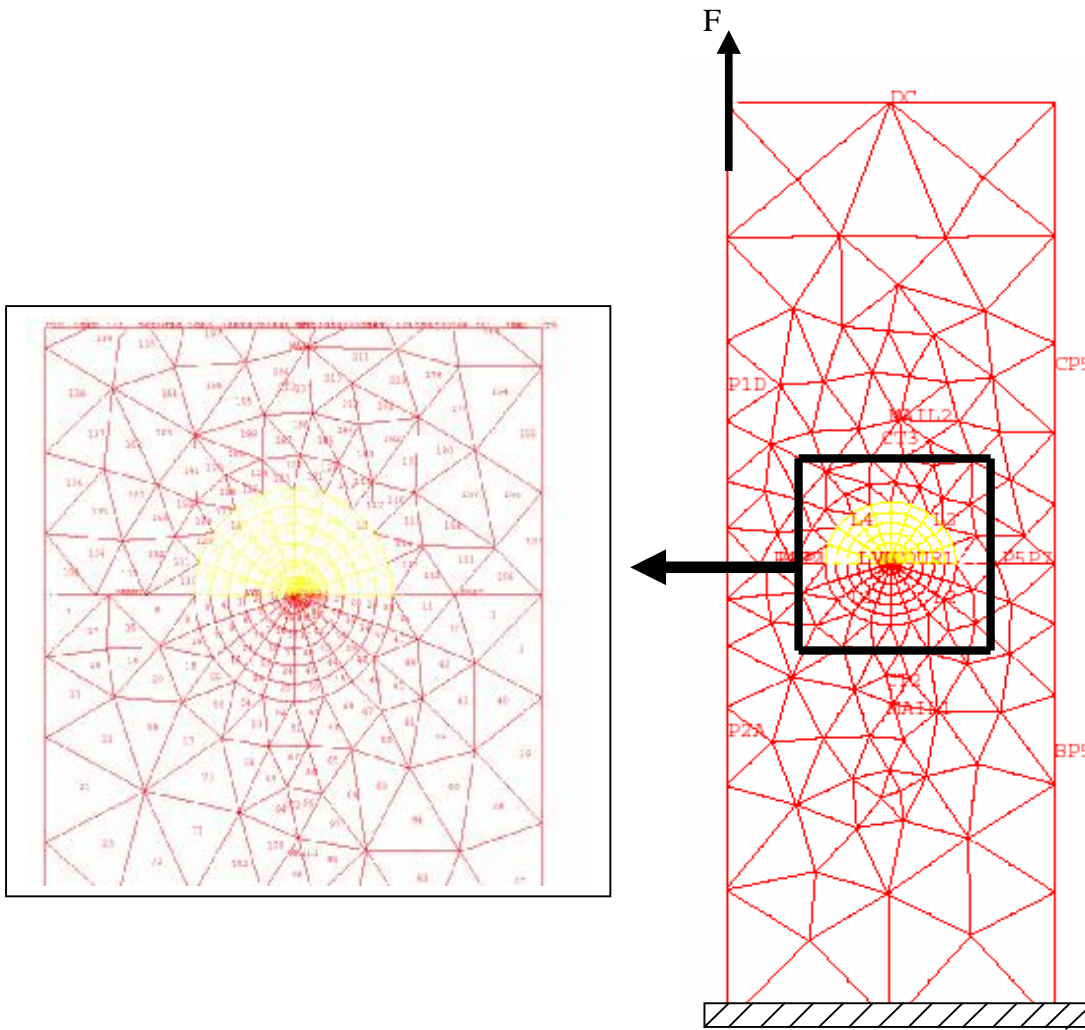


Figure 32. Plaque discrétisée

### IV.2.2. Procédure de calcul

#### Ø Déclaration des paramètres généraux :

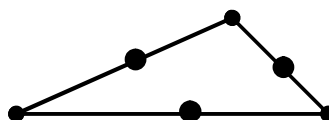
Option de calcul à 2 dimensions, élément géométrique triangle à 6 nœuds et un mode de calcul en contrainte plane.

Support géométrique

Type

Eléments finis

**TRI6**



**TRI6.....**

Ø **Maillage :**

Autour de la pointe de fissure (extrémité de la fissure) le maillage a été effectué par l'élément géométrique TRI6 (figure 34), en utilisant la procédure « @rayonnant » cette procédure crée un maillage rayonnant symétrique autour de la pointe de fissure. La zone centrale entourant la pointe de fissure est maille en TRI6, les NBC-1 autres zones étant mailles en QUA8. Tandis que l'ensemble de la plaque a été discrétisée en utilisant l'opérateur « SURF » afin de généraliser le maillage à l'ensemble de la plaque (figure 32).

§ **Maillage Concentrique (figure 33):**

Afin d'utiliser certaines techniques de calcul propres à la mécanique de la rupture, la gestion du maillage à la pointe d'une fissure est primordiale. Ainsi, pour pouvoir utiliser les éléments singuliers proposés par Barsoum **Bouchard [26]**, il est important d'avoir un maillage triangulaire concentrique autour de la pointe de la fissure. De même, pour pouvoir implémenter la méthode  $G\theta$  décrite dans le code CASTEM, la procédure @rayonnant crée une couronne d'éléments qui servira de surface d'intégration pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

Pour la création de ces contours circulaires, des rayons relatifs au contour concentrique  $C_{con}$ , au contour interne de la couronne  $C_{int}$ , et au contour externe de la couronne  $C_{ext}$ . Ces trois contours sont des contours ouverts (puisque'ils s'appuient sur les lèvres de la fissure), et non orientés (puisque la matière se situe à l'intérieur et à l'extérieur des contours). Puis, le mailleur détermine automatiquement les points d'intersection des différents contours, et il génère un maillage triangulaire s'appuyant sur les contours ainsi définis. La finesse du maillage étant alors déterminée par les paramètres de maillage définis par l'utilisateur ainsi que par la taille des contours en pointe de fissure :

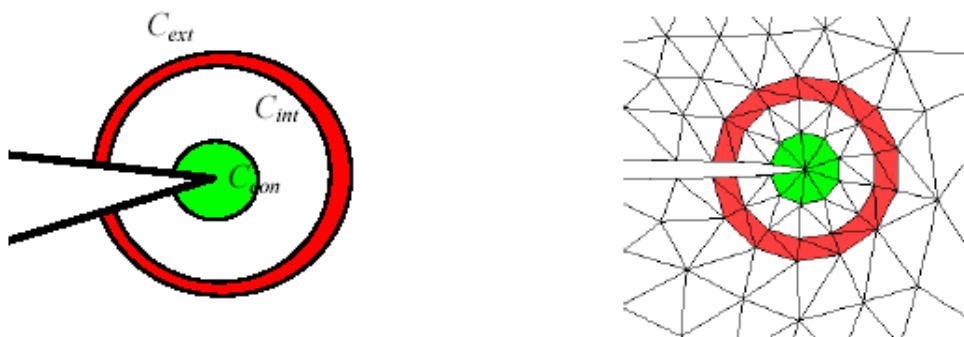


Figure 33. Contours circulaires pour le maillage en tête de fissure

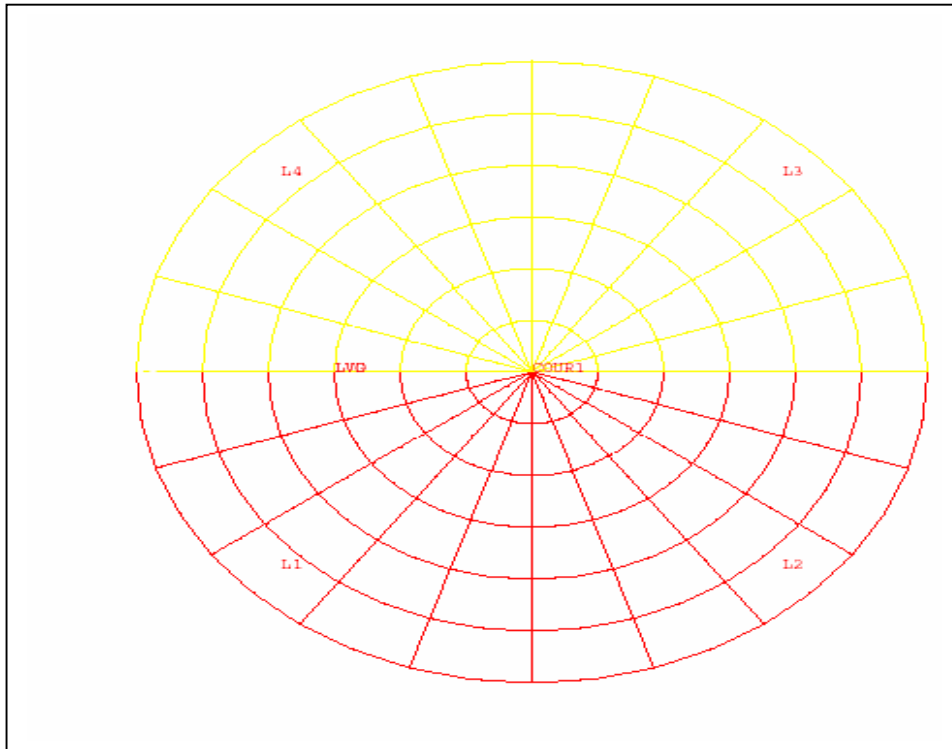


Figure 34. Maillage autour de la pointe de la fissure du modèle

Par un agrandissement de la zone proche du fond de la fissure, nous constatons bien les éléments géométriques TRI6 et l'élément QUA8, cette technique de maillage est contenue dans la procédure @rayonnant figure n°35

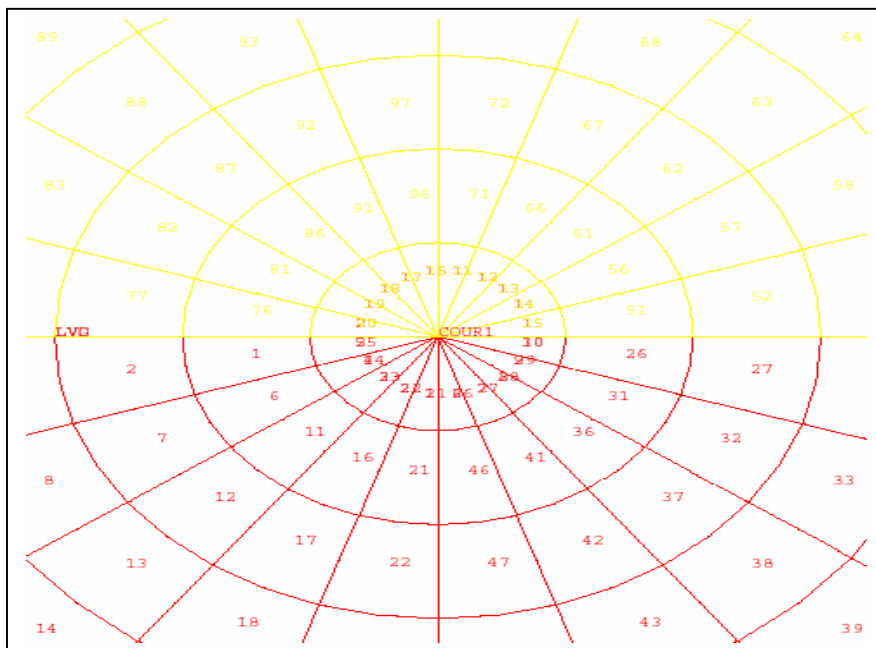


Figure n°35. Maillage de la zone centrale au fond de la fissure

### § Propriétés du champ $q$ :

Le champ  $\theta$  de déplacements, introduit pour représenter la cinématique virtuelle du mouvement doit vérifier les propriétés suivantes:

- $\theta$  est parallèle au plan de la fissure (automatique en 2D) ;
- $\theta$  est normal au front de la fissure ;
- le support de  $\theta$  est limité à un voisinage de la fissure ;
- $\theta$  est constant dans une zone entourant la pointe de fissure.

En pratique, on définit deux contours  $C1$  et  $C2$  entourant-la pointe de fissure. Ces deux contours divisent la pièce en trois parties (Figure 36) :

- Dans  $C_{int}$ , le champ  $\theta$  est constant de norme unitaire (1,0) ;
- Dans  $C_{ext}$  le champ  $\theta$  est nul (0,0) ;
- dans la couronne  $C_{cour}$  le champ  $\theta$  varie ;
- Continûment de (1,0) à (0,0).

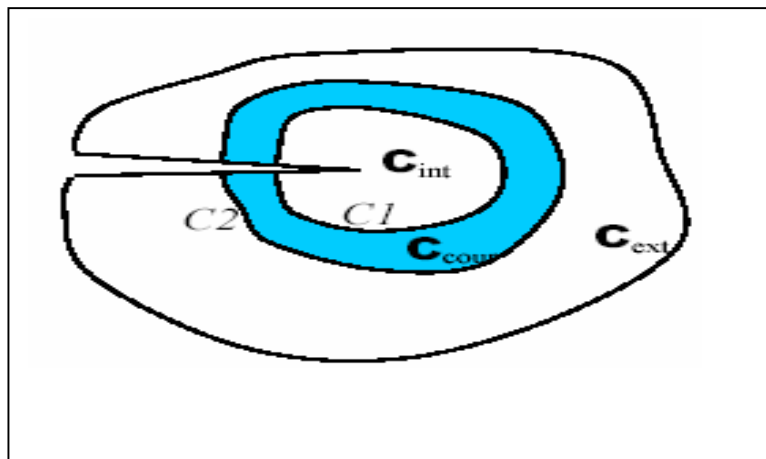


Figure 36.. Couronnes d'intégration pour la méthode  $G\theta$

### § Le principe de la méthode $G\theta$ :

Cette méthode introduite par Destuynder et Djaoua au début des années 1980, **Bouchard [26]**, Consiste à calculer le taux de restitution d'énergie  $G$  par dérivation (par la méthode lagrangienne2) de l'énergie potentielle d'une structure fissurée par rapport à un domaine. Elle revient à effectuer une intégration non pas sur un contour, mais sur une couronne  $C_{cour}$  entourant la pointe de fissure. Cette couronne dont les frontières coïncident avec les côtés des éléments doit être prise assez loin du fond de fissure pour bénéficier d'une bonne approximation de la solution. De plus, l'intégration numérique est effectuée aux points de Gauss des éléments appartenant à la couronne, ce qui lui donne plus de précision.

**Ø Définition du modèle et des propriétés du matériau :**

Le comportement de la plaque est ELASTIQUE PLASTIQUE PARFAIT selon les hypothèses données dans **F.Wang et al [39]**. Le modèle mathématique est choisi, conformément aux comportements de la plaque avec les propriétés du matériau nécessaires, introduites par l'opérateur « MATE » (E module de Young, limite d'élasticité, coefficient de poisson  $\nu$  ).

**Ø Définition du chargement et des conditions aux limites:**

La charge est appliquée sur l'extrémité libre de la plaque, l'autre extrémité est bloquée en mouvement.

**Ø Résolution du système discrétisé :**

- Calcul de la matrice masse et matrice rigidité de chaque élément ;
- Assemblage des matrices pour tout le système ;
- Résolution du système ( $F=K u$ ).

**IV.2.3. Commentaires des résultats :**

La courbe de l'intégral J en fonction de la charge présentée sur la figure 37, croit progressivement et atteint son maximum en développant une zone de déformation plastique en pointe de fissure et les résultats trouvés sont proches de ceux calculés par **F.Wang et al [39]**.

(Tableau n° 1 et figure 38) .

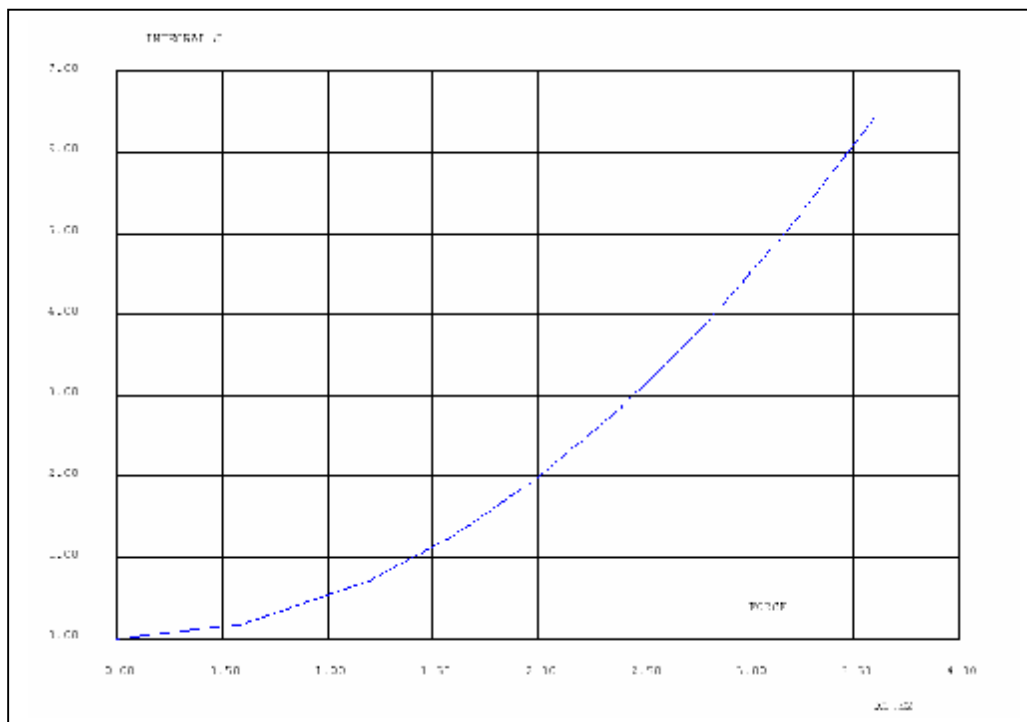


Figure 37. Courbe de l'intégral-J (N mm /mm<sup>2</sup>) en fonction de la charge (N)

Tableau n. 1. Tableau comparatif des valeurs de l'intégral –J

Charge (N)	60	120	160	200	240	280	320	360
Intégrale–J (Nmm /mm <sup>2</sup> ) selon [Wang]	0,1767	0,7042	1,3297	2,0893	2,7680	3,8164	5,1006	6,1521
Intégrale –J (Nmm /mm <sup>2</sup> ) <b>Calculée</b>	0,178599	0,714394	1,27003	1,98443	2,85758	3,88948	5,08014	6,42955
Erreur (%)	1,063	1,427	4,698	5,285	3,135	1,879	0,403	4,315

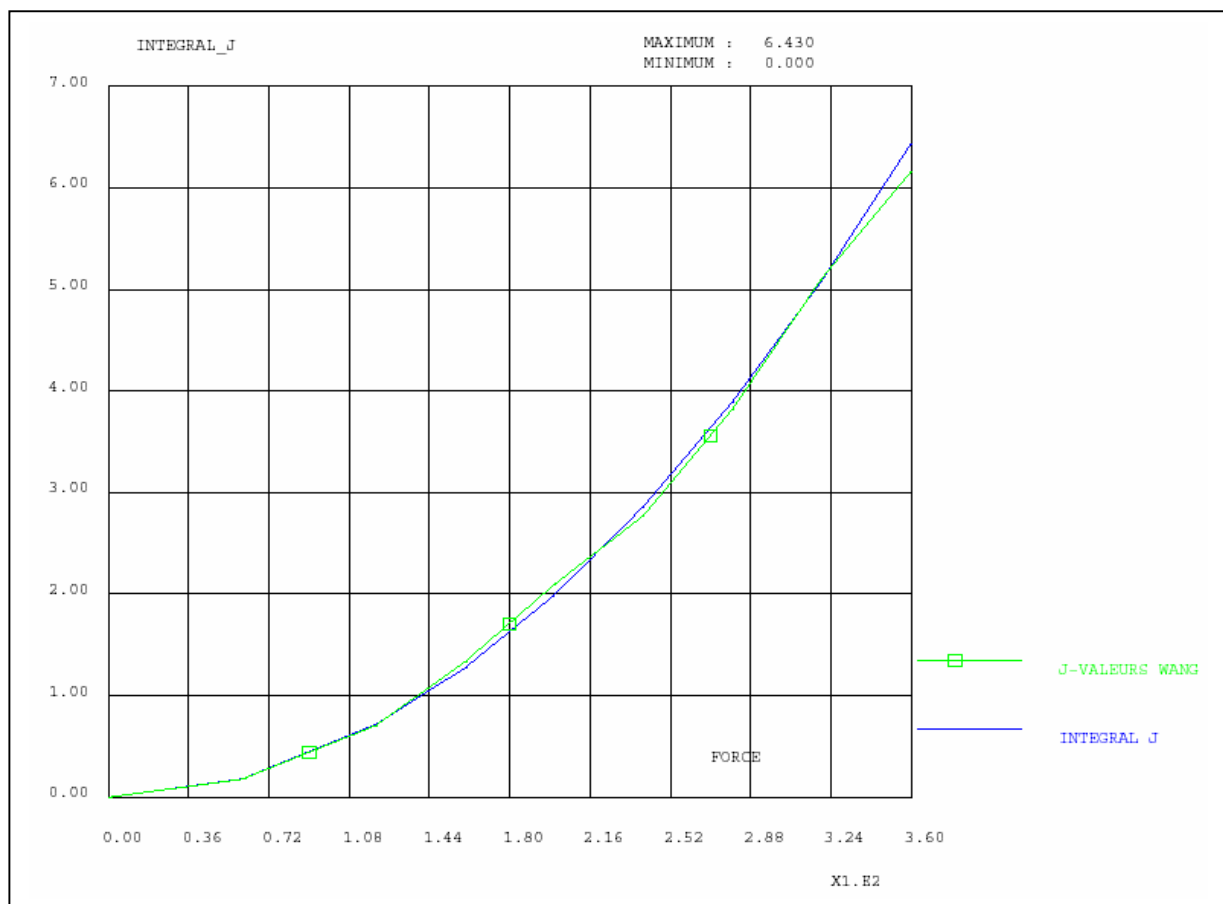


Figure 38. Comparaison des résultats de l'intégral-J (Nmm /mm<sup>2</sup>) calculé aux résultats de Wang [39]

En contraintes planes, les modèles théoriques de la zone plastique à fond de fissure prévoient une forme ressemblant à des ailes de papillon décrite dans la partie théorique dans les chapitres précédents. Pour un matériau élastoplastique, la forme de la zone plastique en pointe de fissure, devra se présenter selon la forme donnée sur la (figure 39).

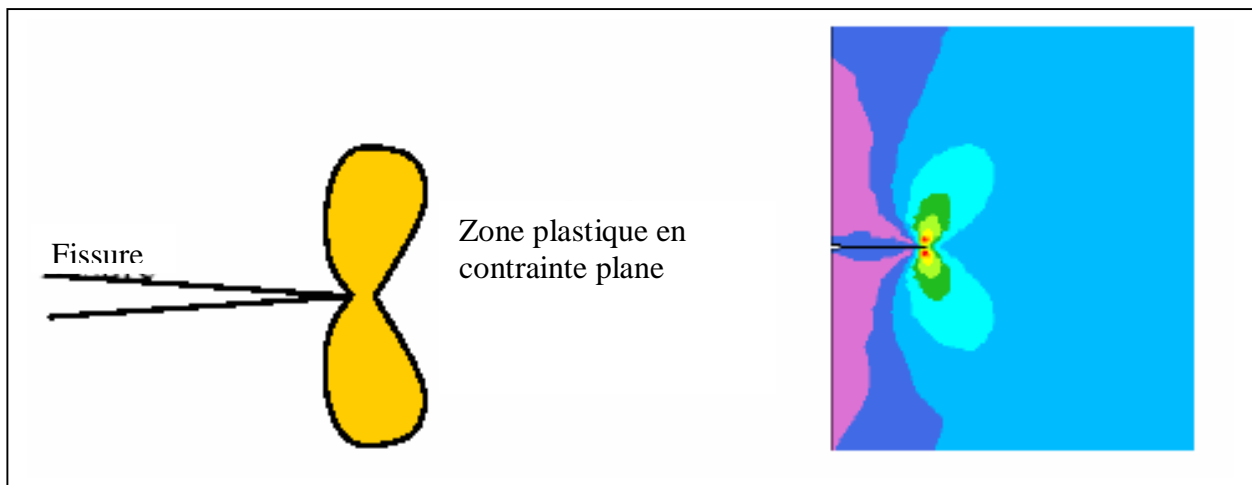


Figure 39. Forme de la zone plastique en pointe de fissure [39]

Lors de la simulation, nous retrouvons bien cette même forme en visualisant les déformations équivalentes (figure 40):

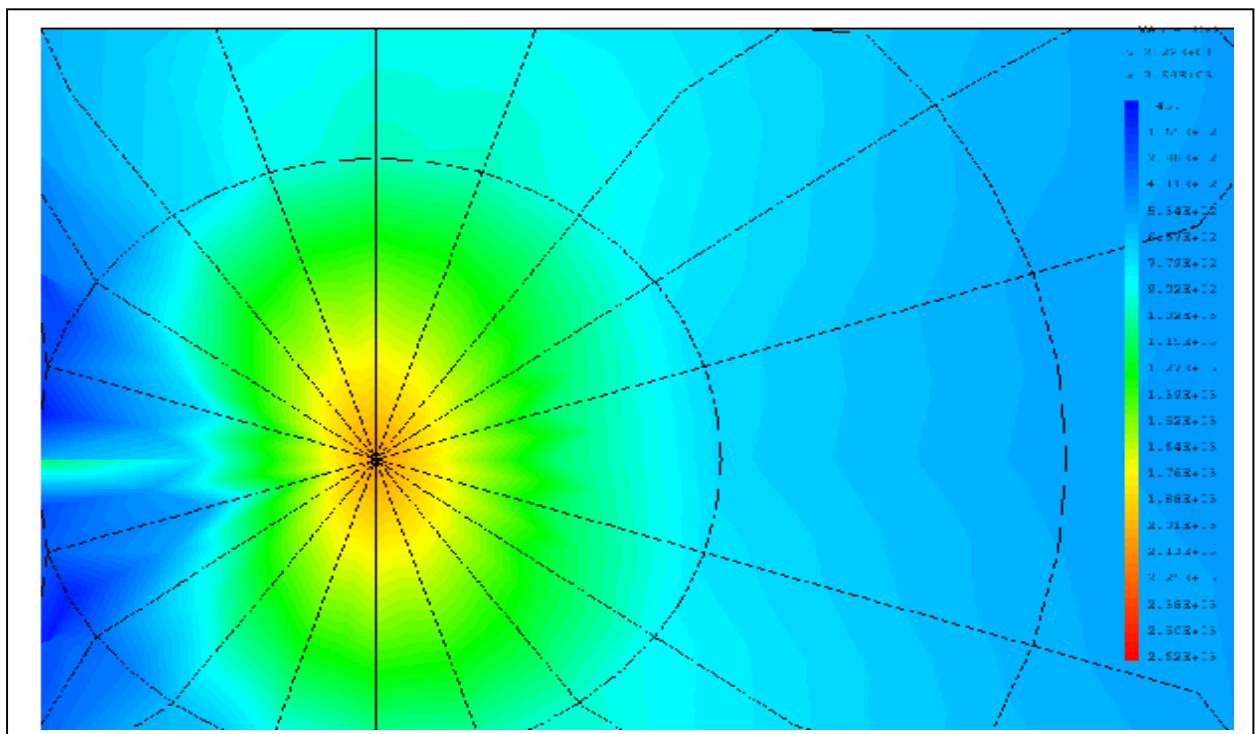


Figure 40. Forme de la zone plastique au voisinage de la pointe de la fissure calculée

## Chapitre IV –Simulation élastoplastique

La forme de la zone plastique qui s'est formée à l'extrémité de la fissure sollicitée en mode I est représentée sur la (figure n°40 )calculée par le critère de Von Mises, l'étendue de la zone plastifiée est plus importante en contraintes planes qu'en déformation plane (voir chapitre n°3 ), de même une zone plastique de forte concentration de contrainte se forme à l'extrémité de ligament non fissuré de la plaque (figure n°41 ), cela est dû à l'effet de l'ouverture maxi des lèvres de la fissure sous l'augmentation de la charge.

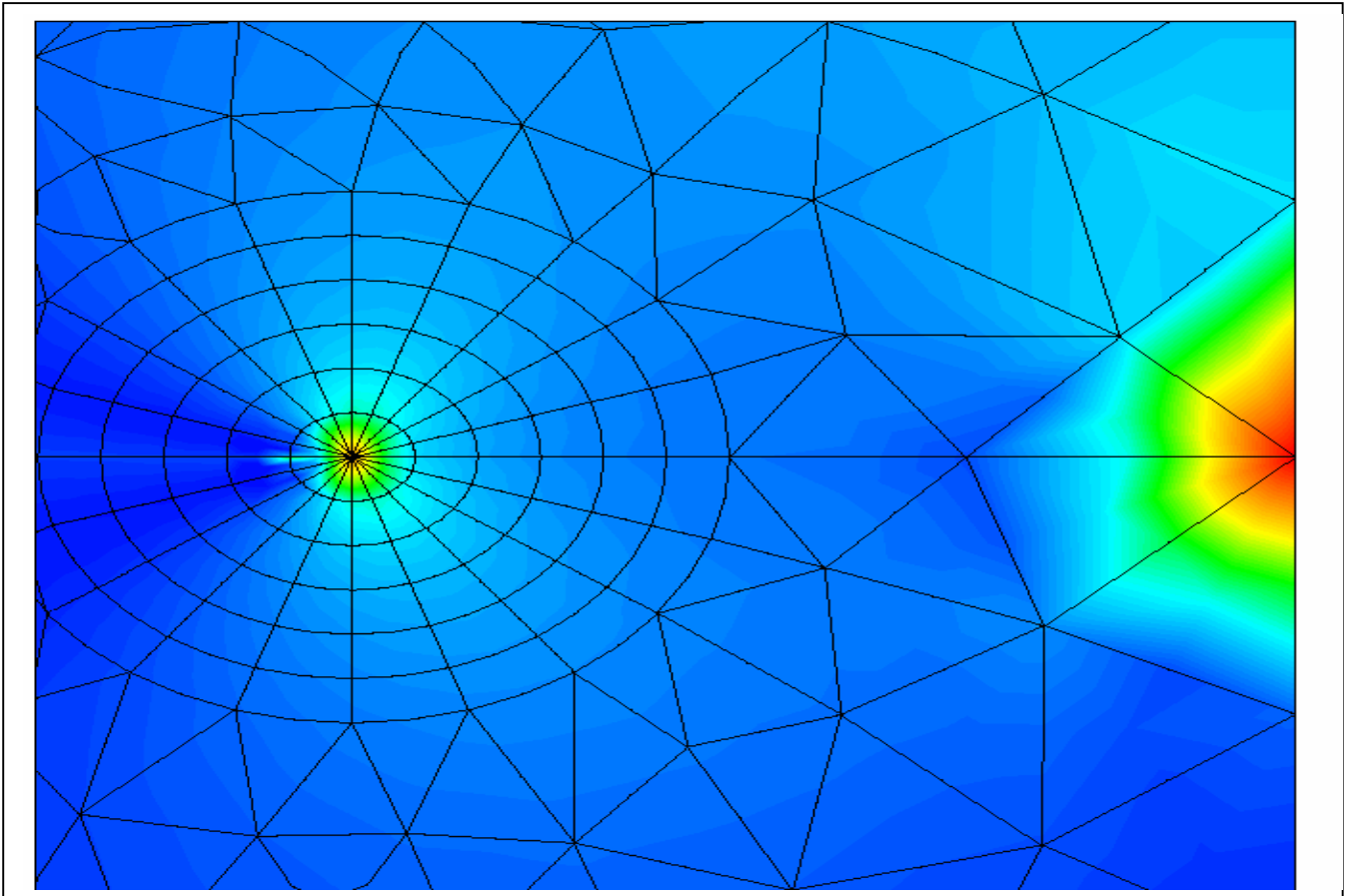


Figure n°41. Représentation des zones de déformation plastique sur la plaque

A partir de la visualisation des contraintes (figure 42), nous remarquons que les zones les plus chargées sont au voisinage de la pointe de la fissure et au bord de l'extrémité sur le ligament non fissuré. La contrainte « $\sigma_x$  », augmente au voisinage de la pointe de la fissure pour atteindre son maximum. Loin de la pointe de la fissure, elle décroît en conservant une certaine valeur à l'extrémité du ligament non fissuré. Il est de même en ce qui concerne la contrainte « $\sigma_y$  » dans la direction parallèle à la contrainte appliquée, elle augmente pour atteindre niveau maximal près de la pointe de la fissure, ensuite elle décroît.

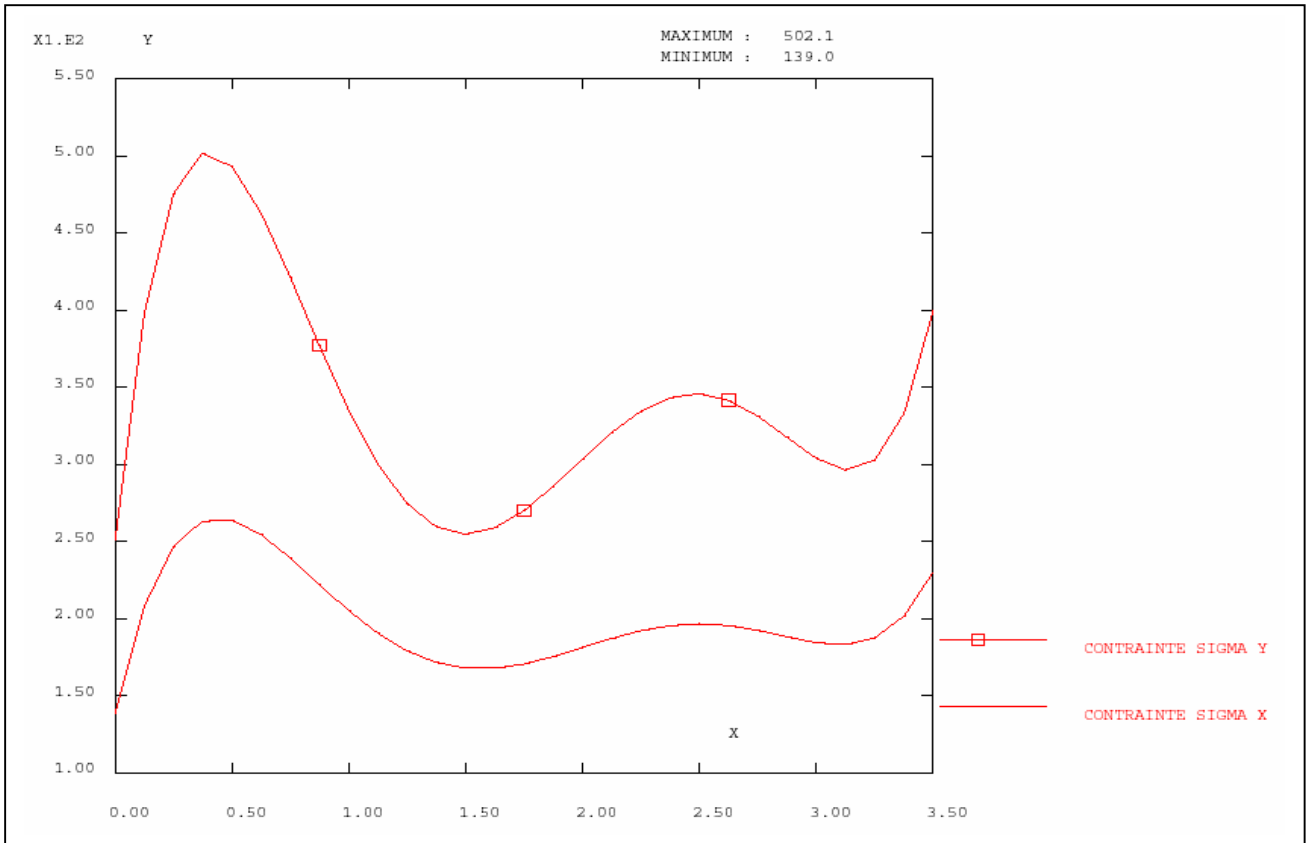


Figure 42. Variations des contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  ( $N/mm^2$ ) sur le ligament non fissuré en (mm)

La rupture des liaisons atomiques, entraîne l'ouverture des lèvres de la fissures sous l'effet de l'augmentation de la charge, la distance mesurée entre les deux lèvres supérieure et inférieure est déterminée par le CTOD ou écartement à fond de la fissure (figure n°44) en fonction de la charge, les deux lèvres s'écartent progressivement l'une de l'autre, la méthode de calcul du CTOD utilisé dans le programme est basé sur la définition, illustré sur la (figure n°43) qui consiste a utilisé le déplacement à l'extrémité de la fissure initiale A.ZEGHLOUL [18]

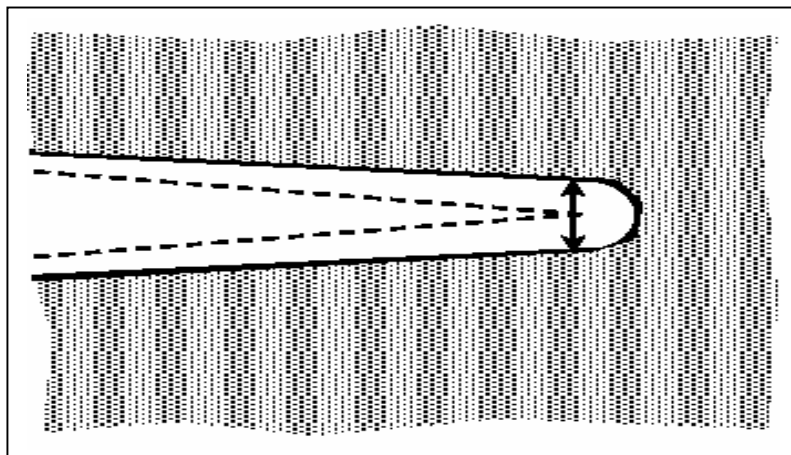


Figure n°43. Définition du CTOD- déplacement à l'extrémité initiale

Le maximum de l'ouverture (CTOD) est de 0,03502mm

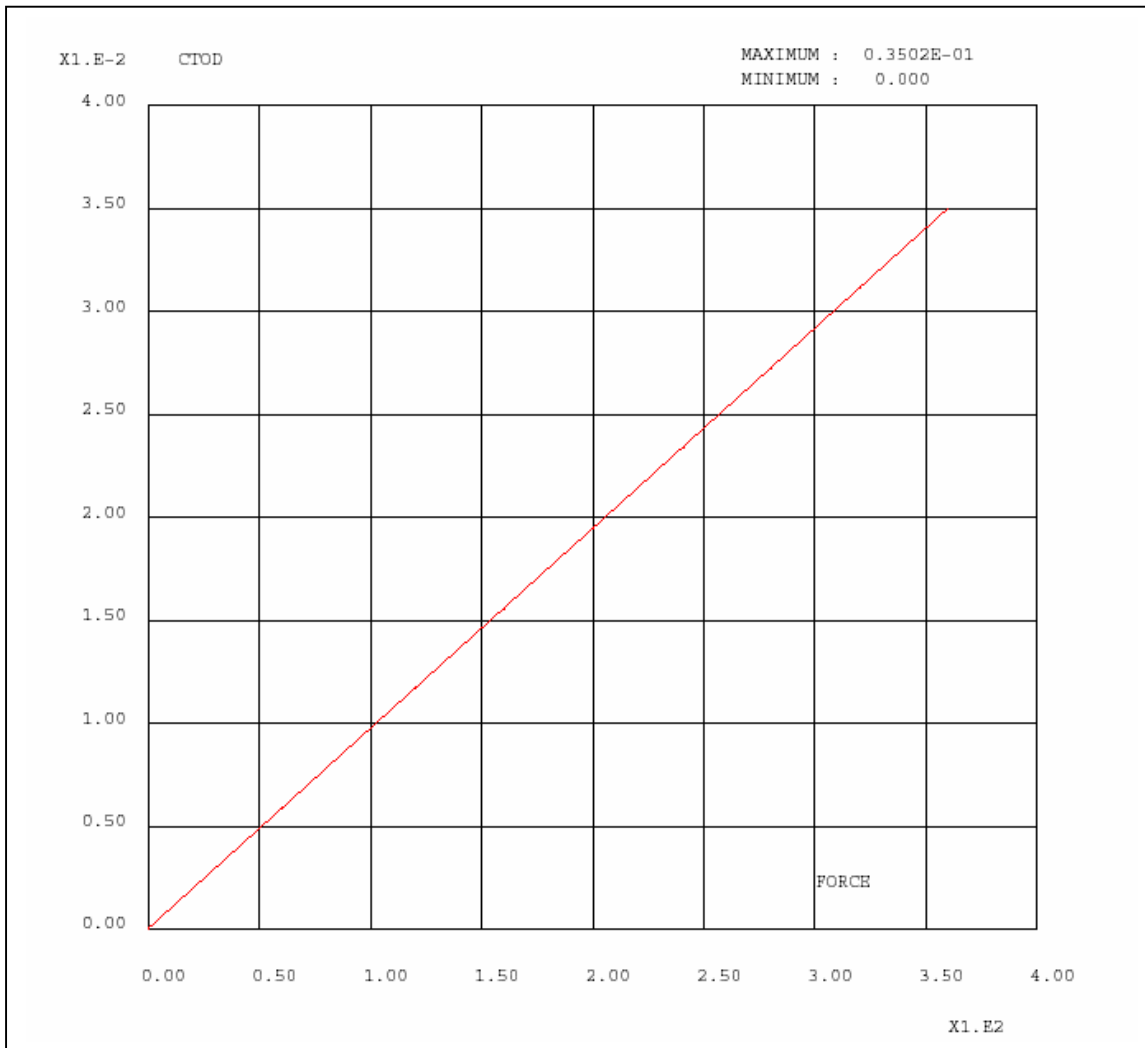


Figure n°44. Evolution du CTOD (mm)en fonction de la charge (N)

Tout les nœuds de la plaque se déplacent sous l'effet de la croissance de la charge (figure n°45,46 ) d'une quantité équivalente à  $u_y$  déduites de l'expression matricielle  $F=K.U \Rightarrow U=K^{-1}.F$  avec  $K$  :Rigidité et  $F$  :Force.

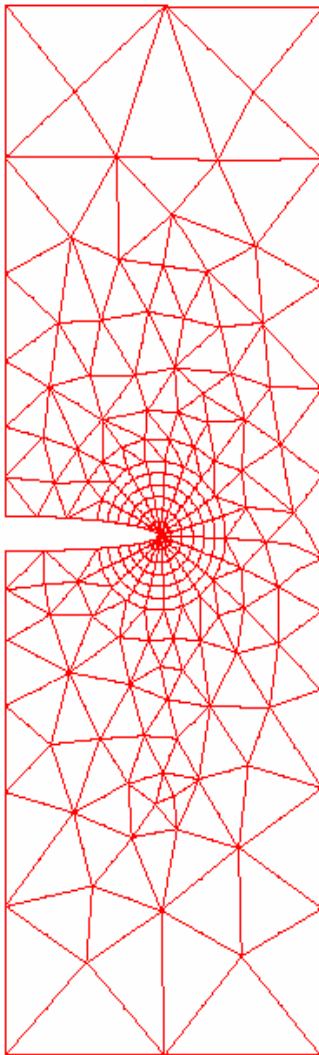


Figure n°46. Etat final de la plaque

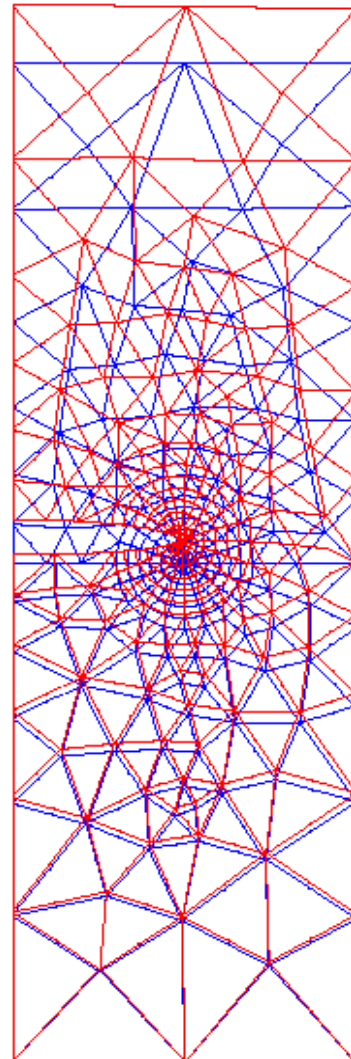


Figure 45. Visualisation des déplacements de la plaque

La figure n°47 représente l'évolution de l'intégral  $-J$  en fonction de l'écartement du fond de la fissure CTOD qui enregistre une valeur maximale d'ouverture des lèvres de fissure de 0,03502mm du fond de la fissure initiale

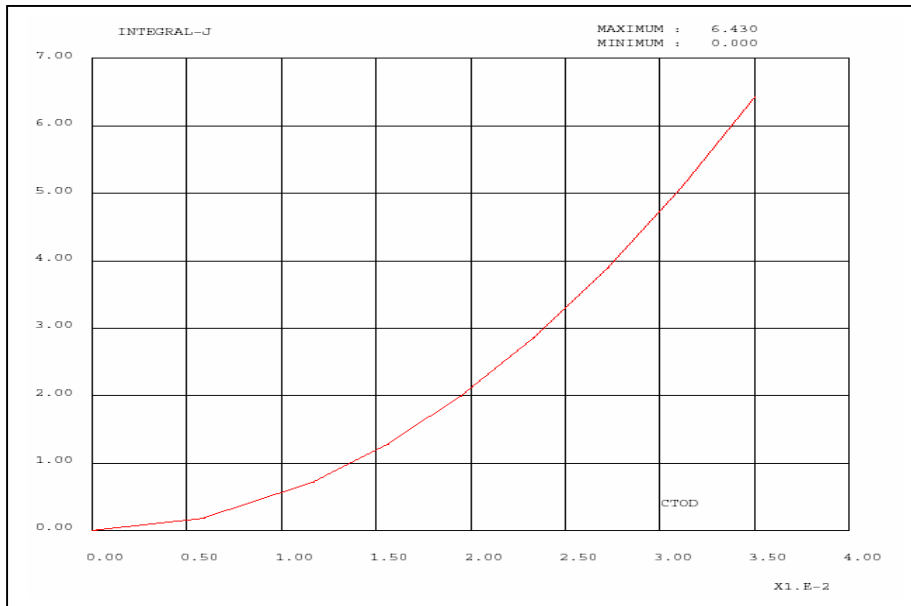


Figure n°47. Variation de l'intégral-J (Nmm/mm<sup>2</sup>) en fonction du CTOD (mm)

Une propagation de la fissure observée (figure n°48) déterminé proche du point P3 fond de la fissure en atteignant une valeur maximale de 0,004mm, cette évolution est liée au développement d'une fissuration stable avant la rupture

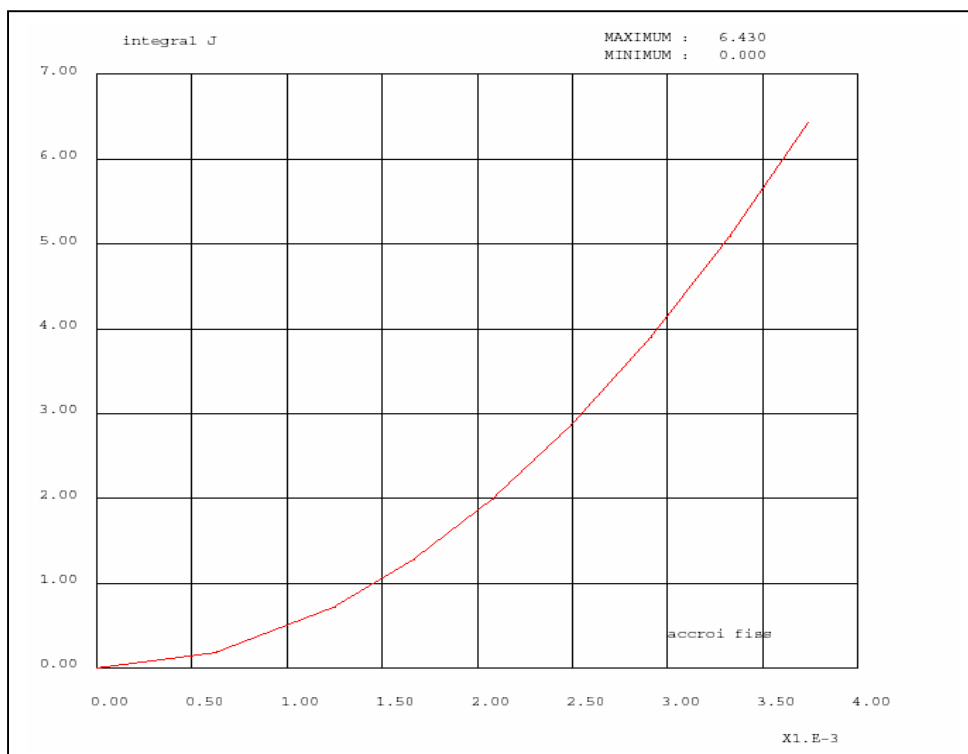


Figure n°48. Evolution de l'intégral -J (Nmm/mm<sup>2</sup>) en fonction de l'extension de la fissure (mm)

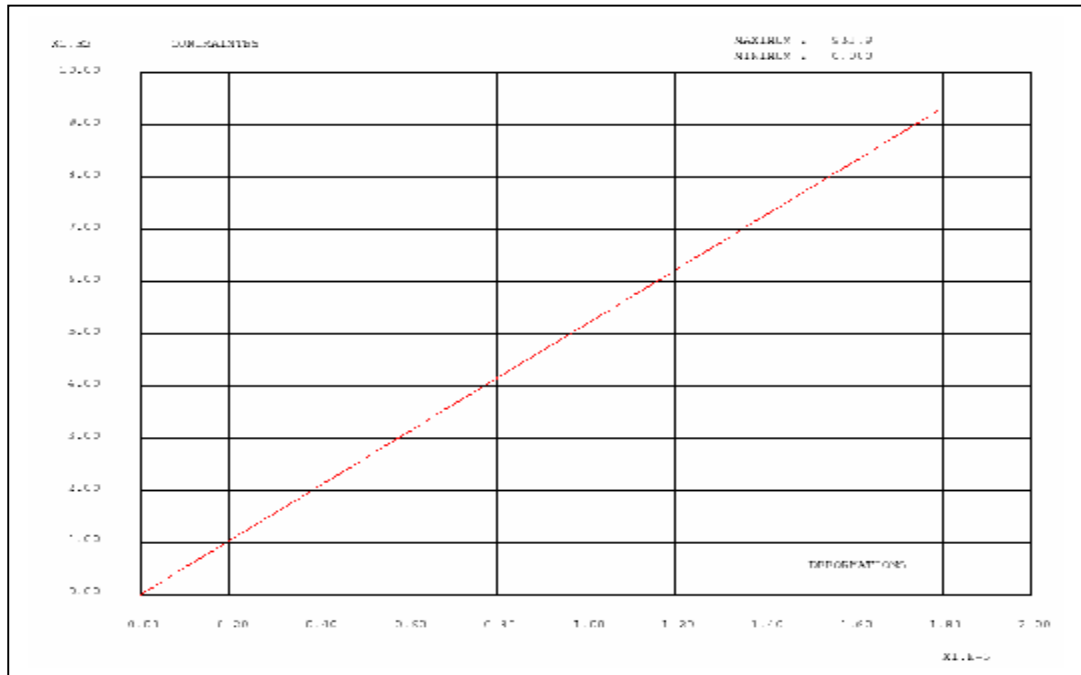


Figure n°49. Variation de la contrainte  $\sigma_x$  en fonction de la déformation au fond de la fissure

La figure n°49 détermine la variation de la contrainte  $\sigma_x$  au voisinage du fond de la fissure en fonction de la déformation, l'augmentation de la charge induit une déformation plastique irréversible au voisinage de l'extrémité de la fissure selon l'axe X.

### Conclusion générale

Le choix d'un matériau pour la conception et la fabrication des produits industriels à applications structurelles, a toujours été au centre des préoccupations des concepteurs. Les développements technologiques nouveaux dans des domaines très variés, sont à l'origine de l'émergence de produits qui doivent répondre à des fonctionnalités nouvelles et variées et à des règles de sécurité de plus en plus stricte.

La grande majorité des aciers à basse et moyenne limite d'élasticité utilisés dans des grandes structures, telles que navires, ponts, réservoirs sous pression etc. ont en épaisseurs trop faibles. Dans ce cadre, nous nous sommes intéressés dans cette étude à une analyse élasto plastique, sur un modèle de simulation ayant une faible épaisseur, bidimensionnel. L'analyse présentée, concernant le matériau qui a un comportement ductile. Ces matériaux ont la caractéristique de se déformer avant de se rompre, c'est-à-dire, qu'ils développent une zone de déformation plastique au voisinage des défauts.

A partir des équations de l'élasticité linéaire, nous avons développé les équations fondamentales qui régissent la mécanique élasto plastique de la rupture. Ces équations sont déduites à partir de la théorie de la mécanique linéaire élastique de la rupture qui demeure une approche valable tant que le comportement du matériau est élastique et linéaire, mais aussi lorsque la plastification reste confinée dans une zone de faible taille par rapport aux dimensions des fissures. Le choix de la solution de Westergaard a permis de résoudre l'équation biharmonique et la formulation mathématique des contraintes et des déplacements à l'aide des potentiels complexes, déduisant des expressions en coordonnées cylindrique et polaire au voisinage de l'extrémité de la fissure.

La formulation énergétique développée, est limitée sur la constatation qui découle de la théorie de Griffith sur une plaque de matériau présentant une fissure, où deux phénomènes se produisent en rapport avec l'énergie : La relaxation des contraintes autour de la fissure, entraîne une diminution de l'énergie potentielle et la création des nouvelles surfaces, entraîne une augmentation de l'énergie potentielle de la plaque.

Dans les matériaux ductiles, l'énergie nécessaire pour la création des nouvelles surfaces est très importante à cause de l'écoulement plastique au voisinage des extrémités de la fissure ; dès que la plastification est excessive, des corrections sont portées sur le paramètre de ténacité FIC, par deux modèles IRWIN, DUGDDALE en modifiant le FIC à un FIC effectif ; Si la plasticité de la zone à l'extrémité de la fissure reste petite par rapport aux dimensions de la fissure.

## Conclusion générale

---

Au-delà, la plastification étendue prend naissance, deux paramètres viennent s'ajouter, l'intégral de contour ou intégral- J et l'ouverture en fond de la fissure CTOD, pour caractériser le champ de contrainte et déplacement au fond de la fissure. L'étude théorique de ces deux paramètres nous a permis de les définir.

L'intégral- J, qui est l'objet de notre étude, est utilisé comme un paramètre caractéristique de l'état de contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure, dans les matériaux dont le comportement est non linéaire. L'intégral -J peut être considéré à la fois comme un paramètre d'énergie et un paramètre d'intensité de contrainte.

L'étude énergétique d'une pièce fissurée, dont le comportement est non linéaire, s'effectue à l'aide du taux de restitution d'énergie non linéaire ou intégrale -J nommé par Rice. Ce paramètre caractérise, de façon unique les champs des contraintes et de déformation au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau non linéaire montré par Hutchinson, Rice et Rosengreen (A.ZEGHLOUL ) [18].

Le choix du modèle que nous avons pris en considération pour la simulation, répond à l'objectif de notre étude. La simulation a porté sur une plaque pré entaillée sollicitée en traction (mode I de rupture ), la modélisation d'un milieu fissuré permet d'une part de caractériser la singularité du champ de contrainte en fond de la fissure à travers l'intégral-J et d'autre part d'étudier de façon énergétique le corps fissurée ; ce paramètre qui gouverne la fissuration permettent également de prédire l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure

L'évolution d'une fissure dépend de plusieurs paramètres intrinsèques au matériau, tel que les propriétés géométriques et mécaniques de la structure ou extrinsèques comme l'étendue de cette fissure ou la nature des charges appliquées.

Durant l'étude, un programme de calcul a été élaboré sur le code CASTEM 2000, basé sur la méthode des éléments finis disposant des outils offrant de nombreuse perspective d'application dans plusieurs domaine. Une discrétisation en élément finis a été appliquée sur la plaque ayant un comportement élasto plastique parfait du matériau.

Une attention particulière a été portée sur la technique de maillage et en particulier autour de la pointe de la fissure, où des contours autour de la pointe de la fissure ont été utilisés par l'opérateur @rayonnant disposant deux types d'éléments finis triangle à six nœuds et un quadrilatère à huit nœuds pour pouvoir implanter la méthode Gthéta. Ces contours d'élément serviront de surface d'intégration pour le calcul du taux de restitution d'énergie non linéaire J. Cette méthode Gthéta qui est disponible dans le code de calcul est rapide, précise et facilement généralisable

## Conclusion générale

---

Lors de la simulation, les valeurs calculées en fonction de la charge montrent une croissance de  $J$  durant l'augmentation de la charge et une zone plastique se développe à l'extrémité de la fissure déterminée par le critère de Von Mises. La déformation engendrée, proche du fond de la fissure entraîne une relaxation des contraintes et les valeurs maximales des contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont proches du fond de la fissure. Le phénomène de relaxation se manifeste dans le matériau par une diminution de la contrainte en fonction du temps lorsqu'on applique instantanément une déformation. Cependant une zone de forte concentration de contrainte prend naissance par suite de l'écartement important des lèvres de la fissures ; Cette ouverture qui est caractérisée par le paramètre CTOD (Crack Tip Opening Displacement) donne une valeur maximale de 0,03502mm à l'extrémité initiale du fond de la fissure et d'une avancée de la fissure enregistrée sur le point initial de fond de la fissure, atteignant une valeur maximale de 0,00355mm.

## Références Bibliographiques

- [ 1 ] : Dimitris Kosteas, “**Applied Fracture Mechanics**”.© EAA - European Aluminium Association. 1994.Technische Universität München, **TALAT 2403**. Training in Aluminium Application Technologies.
- [ 2 ] : Kenji Machida & Masanori Kikuchi science university of Tokoyo, Noda-shi ,278 Chiba, Japan “ **J-integral evaluation of small specimens**”.Elsevier Science Limited ,Printed in Northern Ireland 0308-0361/95/509\_50 (1995).
- [ 3 ] : S. DHAR, RAJU SETHURAMANt and P. M. DIXIT  
“**A CONTINUUM DAMAGE MECHANICS MODEL FOR VOID GROWTH AND MICRO CRACK INITIATION**”. Indian Institute of Technology, Kanpur 208016, India **Pergamon Presse** 0013-7944(95)00151-4 (1996).
- [ 4 ] : Li-Sha Niu .Hui-Ji Shi .Claude Robin .Guy Pluvinage .”**Elastic and elastic-plastic fields on circular rings containing a V-notch under inclined loads**”, **Pergamon Engineering Fracture Mechanics** 68 (2001) 949-962.
- [ 5 ] : Georges Cailletaud « **ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE DE LA RUPTURE** ». <http://mms.ensmp.fr/Notes/Mecarup.pdf> .2003
- [ 6 ] : *Dr Majid Mirzaei*, “**Fracture Mechanics** ”, Dept. of Mechanical Eng., TMU <http://www.modares.ac.ir/eng/mmirzaei/FM.htm> . 1996
- [ 7 ] : LIN XIA,1\_ C. FONG SHIH and JOHN W. HUTCHINSON. “**A COMPUTATIONAL APPROACH TO DUCTILE CRACK GROWTH UNDER LARGE SCALE YIELDING CONDITIONS**”. Providence, RI 02912, U.S.A. and Division of Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, MA 02138, U.S.A.Pergamon Presse 0022-5096(94)00069-7. revised, 1994.
- [ 8 ] : Hervé Oudin - « **Lois de comportement** » LMM division Structures. Université de Nante 2002.
- [ 9 ] : Administrateur “**THEORETICAL SURVEY –RELEVANT THEORY OF ELASTICITY**”.Document.htm, Structure Integrity Assessment of a LP Turbine with Transverse Cracks.2002
- [ 10 ] : CCMR -“ **Elastic Plastic Fracture Mechanics**”  
*Applies to materials that exhibit “time independent” nonlinear behavior.*2003  
<http://www.ncat.edu/~ccmrads/Dr/.20homepage/meen-860/chapitre9.pdf>.
- [ 11 ] : Hamid R. Ghorbani, Prof. J. K. Spelt « **REVIEW OF FRACTURE MECHANICS ; CLASSICAL APPROCH** » Case Studies in Mechanical Engineering Part I-Section I I Engineering University of Toronto. MIE2004
- [ 12 ] : *Dr Majid Mirzaei* , “**Fracture Mechanics. Elasto-Plastic Fracture Mechanics (EPFM)**”. Dept. of Mechanical Eng., <http://www.modares.ac.ir/eng/mmirzaei/FM.htm> TMU.2005.

## Référence Bibliographiques

---

- [ 13 ] : M. Janssen J. Zuidema R.J.H. Wanhill **fracture mechanics “EPFM TESTING “**.  
[www.ocp.tudelft.nl/wbmt/fac/Abet/appendix-wb.pdf](http://www.ocp.tudelft.nl/wbmt/fac/Abet/appendix-wb.pdf)
- [ 14 ] : C.Guedes Soares, J. M. Gordo & A. P. “**Elasto-Plastic Behaviour of Plates Subjected to Heat Loads**” Teixeira Unit of Marine Technology and Engineering ,Instituto Superior Tecnico Universidale Tecnica de Lisboa.Av.Rovisco Pals 1096Lisboa Portugal Elsevier Science Ltd.(1998),PII:S0143-974X(97)00062-X.
- [ 15 ] : G.Pluinage and S.Jallouf . « **CONCEPTS OF FRACTURE MECHANICS** ». Laboratoire de Fiabilité de Mécanique .Université de Metz , France ,University of Aleppa, Syria .2005 . [www.lfm.univ-metz.fr/jhz/Livret-1.pdf](http://www.lfm.univ-metz.fr/jhz/Livret-1.pdf)
- [ 16 ] : Takamoto Itoh , “**J-integral estimate for biaxially stressed Mode I cracks based on COD strain**”.Deprt of Mechanical Engineering ,Faculty of Engineering Fukui University. Japan . 2003 <http://mech.mech.fukui-u.ac.jp/~itoh/pub1/j.COD.pdf>
- [ 17 ] :Nobuyuki ISHIKAWA,David M. PARKS and Masayoshi KURIHARA . «**Micromechanism of Ductile Crack Initiation in Structural Steels Based onVoid Nucleation and Growth** ». Deprt of Mechanical Engineering,Massachusetts Institute of Technology ,Cambridge, Kawasaki-ku,Kawasaki, 210-0855 Japan. ISIJ International, (2000), No. 5,
- [ 18 ]: A.ZEGHLOUL **CONCEPTS FONDAMENTAUX DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE** Université de METZ.[www.ipmm.univ-metz.fr/deammsp/TC6.pdf](http://www.ipmm.univ-metz.fr/deammsp/TC6.pdf).2001
- [ 19 ] : JEAN-BAPTISTE LEBLOND, **Mécanique de la rupture fragile et ductile** Etude en mécanique des matériaux et des structures. Lavoisier,2003, Livre.
- [ 20 ] : Author: Dr. Bahram Farahmand, Boeing Technical Fellow.**THE FRACTURE MECHANICS OF DUCTILE METALS THEORY**. Reference: Fatigue and Fracture Mechanics of High Risk Parts. [www.alphastarcop-genoa.com/publications/chapitre5.pdf](http://www.alphastarcop-genoa.com/publications/chapitre5.pdf)
- [21]: Viggo Tvergaard. **NUMERICAL MODELLING IN NONLINEAR FRACTURE MECHANICS**. Dept. of Mechanical Engineering, Solid mechanics Technical University of Denmark. [http://www.esisweb.org/Documents/Newsletter/Invited\\_Nlo5.pdf](http://www.esisweb.org/Documents/Newsletter/Invited_Nlo5.pdf) . ESIS Newsletter # 41-2005.
- [ 22 ]: Document htm **EN222 Mechanics of Solids** 1996  
<http://www.engin.brown.edu/courses/EN222/notes/Fracturemechs/Fracturemechs.htm>
- [ 23 ] : **Jean-Luc ENGERAND . Mécanique de la rupture** *Ingénieur de l'École Polytechnique et de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace Chef du Département Technique à la société Messier-Bugatti -*
- [ 24 ] : J. A. NAIRN “**Simulation of Crack Growth in Ductile Materials**”.Material Science and Engineering, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112, USA Engr. Fract. Mech., submitted (2003). [www.mse.utah.edu/~nairn/papers/Dugdale.pdf](http://www.mse.utah.edu/~nairn/papers/Dugdale.pdf)
- [ 25 ]: H. El Minora, A. Kifanib, M. Louaha, Z. Azaric, G. Pluinage  
**Fracture toughness of high strength steel—using the notch stress intensity factor and volumetric approach**. Structural Safety 25 (2003) 35–45, 2002 Elsevier Science Ltd.
- [ 26 ]: Bouchard. **ANALYSE MECANIQUE D'UNE PIECE FISSUREE**  
[http://pastel.paristech.org/archive/00001395/01/Chapitre\\_2.pdf](http://pastel.paristech.org/archive/00001395/01/Chapitre_2.pdf).2004

## Référence Bibliographiques

---

- [ 27 ] : N.G.AWADALLA, R.L.SINDELAR, G.A. ABRAMCZYK, 773-41A  
**REACTOR MATERIALS PROGRAM FRACTURE TOUGHNESS OF TYPE  
304 STAINLESS STEEL**. TECHNICAL DIVISION.DPST-86-695 Q.A.REVIEW.1986
- [28] : M.D.Heywood , G.H . **Aspects of Dynamic Behaviour of Steel Members**.Littelle article  
PERGMON.Computers and structures 79 (2001) 2369-2389.2001.Civil-Comp Ltd and Elsevier  
Science Ltd.
- [ 29 ]: J.-P. Henry F.Parsy - **COURS D'ELASTICITE**. Dunod.1982;BORDAS.Livre
- [30] :MARK A.JAMES- **A Plane Stress Finite Element Model for Elastic-Plastic Mode I/II  
Crack Growth**. Departement of Mechanical and Nuclear Engineering . Applied Computation  
Labortory 1998 Kansas State University. <http://ww2.mne.ksu.edu/~frame2d/papers/epReport.pdf>
- [31]: D.M KULKARNI, RAVI PRAKASH and A N KUMAR **Experimental and finite element  
analysis of fracture criterion in general yielding fracture mechanics**. Sadhana Presse, Part 6,  
December 2002, Vol. 27, Printed in India.
- [32]: CLEMENT LEMAIGNAN- **La rupture des matériaux** ©EDP SCIENCES 2003. Livre
- [33] :JEAN LEMAITRE, JEAN-LOUIS CHABOCHE, Préface de Paul Germain **MECANIQUE  
DES MATERIAUX SOLIDES**. 2éme Edition Bordas .1988.livre
- [34] :GUY PLUVINAGE **120 EXERCISES DE MECANIQUE ÉLASTOPLASTIQUE DE LA  
RUPTURE**. Edition CEPADUES 1995. Livre.
- [35] : BERNARD BARTHELEMY. **Notions Pratiques De Mécanique De La Rupture** –édition  
EYROLLES.1980 Livre.
- [36] : CETIM. **Mécanique de la rupture Seuil de propagation- Propagation des fissures par  
fatigue**. Cahier de formation CETIM du centre Technique des Industries Mécaniques, 1989
- [ 37 ] : DOMINIQUE François ; ANDRE Pineau ; ANDRE Zaoui – **COMPORTEMENT  
MECANIQUE DES MATERIAUX** viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture,  
mécanique de contact Editions **HERMES**. 1995 livre.
- [ 38 ] : Jean-Luc ENGERAND. **Mécanique de la rupture** Ingénieur de l'école polytechnique et de  
l'école nationale supérieure de l'aéronautique; © Techniques de l'Ingénieur, traité Génie  
mécanique **B 5 060**.
- [39] : F.Wang , H.P.Lee , C.Lu -**Relations between structural intensity and J-integral**.  
Engineering Fracture Mechanics 72 (2005) 1197–1202. 2004 Elsevier Ltd.
- [40]: Masounave.J, Bathias.C, Dickson.I .**RUPTURE CONTROLE SÛRETÉ**. NR16-12/1985  
S ;Livre Editeurs scientifiques Canada.
- [41] : DOMINIQUE François –« **Essai de rupture** ». Directeur adjoint du laboratoire de  
mécanique, sols structure, Ecole centrale de Paris.©Techniques de l'Ingénieur, traité Génie  
mécanique **M126**.

## ANNEXE

### Programme de simulation

```
*****
*****
*      Validation des valeurs de F.Wang et al.      *
*      Article publié par la revue  SCIENCE@DIRECT  *
*****
*****
*                                                    I
*      SIMULATION ELASTOPLASTIQUE DES ACIERS      I
*      DE CONSTRUCTION SUR UNE PLAQUE  EN TRACTION  I
*      PLAQUE EN TRACTION  AVEC                    I
*      CHARGEMENT 'f(t)'                          I
*-----I
* GEOMETRIE :                                     I
* Longueur de la plaque : 30 mm                   I
* Largeur de la plaque  : 10 mm                   I
* Longueur de la fissure : 5 mm                   I
*                                                    I
* MATERIAU :                                       I
* Module d'Young      : 230 MPa                   I
* Coefficient de poisson : 0,293                  I
* Limite d'élasticité  : 670 MPa                  I
*                                                    I
*****

OPTI ECHO 1 ;
OPTION DIME 2 ELEM TRI6 MODE PLAN CONTRAINTES ;
graph='O';
*-----*
* CONSTRUCTION DU MAILLAGE (RAYONANT) *
*-----*
A = 0. 0. ; B = 10. 0. ;
C = 10. 30. ; D = 0. 30. ;
P1 = 0. 15. ; P2 = 0. 15. ;
```

Annexe

---

**P3 = 5. 15. ; P5 = 10. 15. ;**

**P4 = 3. 15. ;**

**\***

**SS COUR1 11 12 13 14 LVD LVG = @rayo P3 P4 6 ;**

**P4 = L1 POINT INITIAL ;**

**P6 = L4 POIN 'INITIAL' ;**

**P7 = L3 POIN 'INITIAL' ;**

**P7 = L2 POIN 'INITIAL' ;trac (ss et cour1);**

**\*1ER CONTOUR**

**AB = DROI A B 'DINI' 5. 'DFINI' 5. ;**

**BP5 = DROI B P5 'DINI' 5. 'DFINI' 2. ;**

**P5P7 = DROI P5 P7 'DINI' 2. 'DFINI' 1. ;**

**P4P2 = DROI P4 P2 'DINI' 2. 'DFINI' 1. ;**

**P2A = DROI P2 A 'DINI' 1. 'DFINI' 5. ;**

**\*2EM CONTOUR**

**P1D = DROI P1 D 'DINI' 1. 'DFINI' 5. ;**

**DC = DROI D C 'DINI' 5. 'DFINI' 5. ;**

**CP5 = DROI C P5 'DINI' 5. 'DFINI' 2. ;**

**P6P1 = DROI P6 P1 'DINI' 1. 'DFINI' 1. ;**

**\***

**CT2 = P4P2 ET P2A ET AB ET BP5 ET P5P7 ET L2 ET L1 ;**

**CT3 = P6P1 ET P1D ET DC ET CP5 ET P5P7 ET L3 ET L4 ;**

**MAIL1 = SURF CT2 PLANE ;**

**MAIL2 = SURF CT3 PLANE ;**

**MAIL = MAIL1 ET MAIL2 ET SS ;**

**SI ( ega graph 'O');**

**TRAC MAIL ;**

**finsi;**

**\* LEVRES SUP ET INF DE LA FISSURE**

**LSUP = LVD ;**

**LINF = LVG ;**

**\*-----\***

**\* CONSTRUCTION DU MODEL**

**\*-----\***

**YOU1 = 230E03 ;**

**NU1 = 0.293 ;**

**SGM = 670E03 ;**

**MO = MODEL MAIL MECANIQUE ELASTIQUE PLASTIQUE PARFAIT ;**

**MAT = MATERIAU MO YOUN YOU1 NU NU1 SIGY SGM ;**

**\*-----\***

**\* RIGIDITE**

**\*-----\***

**RIG1 = RIGIDITE MO MAT;**

**\*-----\***

**\*-----\***

**\* CONDITIONS AUX LIMITES ;**

Annexe

```
*-----*
cl1 = bloque UX P1D ;
cl2 = bloque UX P2A ;
cl4 = bloque UX CP5 ;
cl5 = bloque UX BP5 ;
CL3 = BLOQUE UY P5 ;CL6 =BLOQ 'DEPL' 'ROTA' AB;
CLT = CL1 ET CL2 ET CL3 ET CL4 ET CL5 ET CL6 ;
*-----*
*      I              I      *
*      I Pcedure De Calcul  I      *
*      I  De l'integral "J"  I      *
*      I ===== I      *
*      I              I      *
*-----*
* Matrices de rigidite et de masse
RIGT = RIG1 ET CLT ;
*-----*
*      Instant de calcul
*-----*
TITRE ' CHARGEMENT' : ;
*-----*
F_CHAR = PROG 0 60 120 160 200 240 280 320 360 ;
L_TEMPS = PROG 0 'PAS' 1 8 ;
*
EVO_FOR = EVOL MANU 'temps' L_TEMPS 'f(t)' F_CHAR ;
DESS EVO_FOR;
CH_FORC = PRES 'MASS' MO -1. DC ;
CHARG_T = CHARG 'MECA' CH_FORC EVO_FOR;
*-----*
*      Calcul PASAPAS      *
*-----*
*****
TAB1 = TABLE ;
TAB1.MODELE = MO;
TAB1.CARACTERISTIQUES = MAT;
TAB1.BLOCAGES_MECAIQUES = CLT;
TAB1.CHARGEMENT = CHARG_T;
TAB1.TEMPS_CALCULES = L_TEMPS;
PASAPAS TAB1 ;

*=====*
*
*      CALCUL DE G PAR LA METHODE G_THETA      *
```

Annexe

```
*
*=====*
*
SUPTAB = TABLE ;
SUPTAB.'OBJECTIF' = MOT 'J';
SUPTAB.'LEVRE_SUPERIEURE' = LSUP;

SUPTAB.'LEVRE_INFERIEURE' = LINF;
SUPTAB.'FRONT_FISSURE' = P3 ;
SUPTAB.'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1 ;
SUPTAB.'COUCHE' = 5 ;
*=====*

*          Appel DE la procedure G_THETA          *
*=====*

G_THETA SUPTAB;
*=====*

*          Evolution de J en fonction du temps.          *
*=====*

SI ( ega graph 'O');
DESS SUPTAB.EVOLUTION_RESULTATS ;
finsi;
*
*=====*
*          LA COURBE          *
*          INTEGRAL-J AVEC LA CHARGE          *
*=====*
*

T= TABLE ;
T.'TITRE'=TABLE;
T.'TITRE'. 1 = MOT 'INTEGRAL J ';
T.'TITRE'. 2= MOT 'J-VALEURS WANG';
T.2 =' MARQ CARR REGU TITR NOM_COURBE ';
*
EXT_JJ = EXTR (SUPTAB.EVOLUTION_RESULTATS) ORDO;
EXT_PP = EXTR EVO_FOR ORDO ;
EV1 =EVOL JAUN MANU 'FORCE' EXT_PP 'INTEGRAL_J' EXT_JJ ;
TITR 'INTEGRAL J EN FONCTION DE F';
DESS EV1 T GRIL ;
*
*-----*
*

EX_J1 = PROG 0 0.1767 0.7042 1.3297 2.0893 2.7680 3.8164 5.1006 6.1521 ;
LIST EXT_PP;

EV2 =EVOL VERT MANU 'FORCE' EXT_PP 'J-Val WANG' EX_J1 ;DESS EV2;
TITRE 'INTEGRAL J EN FONCTION FORCE';
DESS (EV1 ET EV2) MIMA LEGE T GRIL CARR xbor 0 360 ;
```

## Annexe

---

```
*
*****
***RECUPERATION DU RESULTAT ET COMPARAISONS ***
*****
*****Calcul de l'erreur *****

*****
nfois =Dime EX_J1 ;
I = 1 ;
REPETER BOU1 (nfois-1);
I = I + 1 ;
MESS I;
J_CAL = extr EXT_JJ I ;
Jwang = extr EX_J1 I;
MESS ' JWang = ' JWang ;
MESS 'JCalcul = ' J_CAL ;
ERR1 = abs ((JWang - J_CAL)/J_CAL);
MESS ' Erreur relative =' ERR1;
SI (ERR1 < 5.E-2);
    ERRE 0;
*SINO;
* ERRE 5;
FINSI;
FIN BOU1;
*****

*=====*
*      VISUALISATION DES DEPLACEMENTS      *
*      DE LA PLAQUE                          *
*=====*

PLQ_TOT =EXTR TAB1.'MODELE' 'MAIL' ;
DEPL1 =TAB1.DEPLACEMENTS.0 ;
DEPL2 =TAB1.DEPLACEMENTS.8 ;
TITR 'DEPLACEMENT DE LA PLAQUE';
DEF1 =DEFO PLQ_TOT DEPL1 0. BLEU ;
DEF2 =DEFO PLQ_TOT DEPL2 40. ROUG ;
TRAC MAIL (DEF1 ET DEF2) ;TRAC MAIL DEF2 ;
*=====*

*      CONTRAINTE DE VON MISES      *
*=====*

SIGMA =TAB1.CONTRAINTE.8 ;
SIGMAV =VMIS SIGMA TAB1.MODELE ;
SIGMAV =CHAN CHPO SIGMAV TAB1.MODELE ;
TITR 'CONTRAINTE DE VON MISES';
TRAC SIGMAV MAIL ;
*

*=====*
*      DETERMINATION DE L'ACCROISSEMENT      *
*      DE LA POINTE DE LA FISSURE P3        *
*=====*
```

Annexe

```
*=====*
```

\*  
TITR 'INTEGRAL J EN FONCTION ACCROI FISSURE AU POINT P3';  
DD =DIME (TAB1.TEMPS);  
TB\_Depl =PROG;  
TB\_COD =PROG ;  
\*  
I =0 ;  
REPETER BOUCL1 DD ;  
DEPL11 =TAB1.DEPLACEMENTS.I ;  
PF\_XX =EXTR DEPL11 UX P3; MESS PF\_XX;  
TB\_Depl =TB\_Depl ET (PROG (ABS(PF\_XX)));  
COD\_CAL =EXTR DEPL11 UY P3;  
TB\_COD =TB\_COD ET (PROG COD\_CAL );  
S\_XX =EXCO 'SMXX' SIGMA ;  
S\_YY = EXCO 'SMYY' SIGMA ;  
I =I+1 ;  
FIN BOUCL1 ;  
EV\_PF\_J=EVOL ROUG MANU 'accroi fiss P3' TB\_Depl 'integral J'EXT\_JJ;  
\*  
DESS EV\_PF\_J MIMA T GRIL CARR ;  
TITR 'CONTRAINTES SMXX ET SMYY';  
TRAC MO (S\_XX ET S\_YY) ;  
\*  
\*=====\*

\*                    CALCUL DU CTOD                    \*

\*=====\*

TITR 'CTOD EN FONCTION DU FORCE AU POINT INITIAL P3 '  
TB\_COD =2\* TB\_COD ;  
EV\_COD =EVOL MANU 'FORCE' EXT\_PP 'CTOD' TB\_COD;  
DESS T EV\_COD MIMA GRIL CARR ;  
\*  
\*=====\*

\*    Représentation de l'intégral-J en fonction du CTOD    \*

\*=====\*

TITR 'Integral-J EN FONCTION DU CTOD '  
EVVV =EVOL MANU 'CTOD' TB\_COD 'INTEGRAL-J' EXT\_JJ;  
DESS T EVVV MIMA GRIL CARR ;  
\*  
\*=====\*

\*                    Courbe Contraintes- Déformations                    \*  
\*                    au point P3 font de fissure                    \*  
\*=====\*

TB\_Cont =PROG;

TB\_Def =PROG;  
I =0 ;

Annexe

---

```
REPETER BOUCL2 DD ;
DEPL11 =TAB1.DEPLACEMENTS.I ;
DEFO1 = EPSI DEPL11 MO ;
DEFO1 =CHAN CHPO MO DEFO1 ;
CONTR11 =TAB1.CONTRAINTE.S.I ;
CONTR11 =CHAN CHPO MO CONTR11 ;
SIGMA =EXTR CONTR11 'SMXX' P3 ;
EPSXX =EXTR DEFO1 'EPXX' P3 ;

TB_CONT =TB_CONT ET (PROG SIGMA ) ;

TB_Def =TB_Def ET (PROG EPSXX);
I=I+1 ;
FIN BOUCL2 ;
TITR 'COURBE CONTRAINTE-DEFORMATIONS' ;
EVSG_DEF=EVOL 'MANU' 'DEFORMATIONS' TB_Def 'CONTRAINTE' TB_CONT ;
DESS T EVSG_DEF MIMA GRIL ;
*
*=====
* VISUALISATION DE LA VARIATION DES CONTRAINTE DANS *
* LE LIGAMENT NON FISSURE SIGMA-X ET SIGMA-Y *
*=====
TB_LARG =PROG 0 PAS 0.5 3.5 ;
TB_TRIAX =PROG ;
TB_TRIAY =PROG ;
NFOIS =DIME TB_LARG ;
I2=1 ;
REPETER BOUCL3 NFOIS ;
LX =EXTRAIRE TB_LARG I2 ;MESS LX ;
lx =entier lx;MESS LX ;
LX =MAIL POIN 'PROC' ((5+LX) 15) ;
CONTR12 =TAB1.CONTRAINTE.I2 ;
CONTR12 =CHAN CHPO MO CONTR12 ;
SIGMX =EXTR CONTR12 'SMXX' LX ;
SIGMY =EXTR CONTR12 'SMYY' LX ;
*
TB_TRIAY =TB_TRIAY ET (PROG SIGMY);
TB_TRIAX =TB_TRIAX ET (PROG SIGMX);I2 =I2 + 1 ;
FIN BOUCL3 ;
EVTRX =EVOL MANU 'LARGEUR X' TB_LARG 'CONTRAINTE-XX' TB_TRIAX ;
EVTRY =EVOL VERT MANU 'LARGEUR X' TB_LARG 'CONTRAINTE-YY'
TB_TRIAY ;
ta f1 = @POMI EVTRX 5 ;
ta f2 = @POMI EVTRY 5 ;
TITRE 'VARIATION DE LA CONTRAINTE SIGMA X ET Y';
T.'TITRE'. 1 = MOT 'CONTRAINTE SIGMA X ';
T.'TITRE'. 2 = MOT 'CONTRAINTE SIGMA Y ';

DESS (EVTRX ET EVTRY ) MIMA LEGE T;
DESS (f1 ET f2) MIMA LEGE T;
DESS f1 MIMA LEGE T;
```

Annexe

---

```
DESS f2 MIMA LEGE T;
*
*
*=====
II=0 ;
NPAS=DIME L_TEMPS ;
LEXX = PROG 0.;
LSXX = PROG 0.;
REPETER AFFICHE (NPAS-1) ;
II=II + 1 ;
T =EXTRAIRE L_TEMPS II ;MESS T;
T =ENTIER T;MESS T;
SIGM =TAB1.CONTRAINTE.S.T ;
D =TAB1.DEPLACEMENTS.T ;
ETOT =EPSI MO D ;
EXX =EXTRAIRE ETOT EPXX 1 1 1 ;
LEXX =LEXX ET (PROG (ABS (EXX)));
SXX =EXTRAIRE SIGM SMXX 1 1 1 ;
LSXX =LSXX ET (PROG (ABS(SXX)));
FIN AFFICHE ;
TITRE 'VARIATION CONTRAINTE SIG-X DEFORMATIONS EPS-X ' ;
EVSE=EVOL MANU 'EPSILON-XX' LEXX 'SIGMA-XX' LSXX ;
DESS EVSE;
*
OPTI SAUV 'FORMAT' 'SIMULATION.doc' ;
SAUV 'FORMAT' RESULTATS ;
SAUV 'FORMAT' COURBE;
sauv 'tab1';sauv 'subtab';
*FIN;
```