Remerciement

Avant toute considération, je remercie le **GRAND DIEU** le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je remercie premièrement mon directeur de recherche, Monsieur, **GAGUI Bachir** pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux

conseils mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Mostefa NADIR, Professeur à l'Université de M'SIL

Abdelkader GASMI, Professeur à l'Université de M'SIL

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importancecertaine de ma formation et à tous

les membres du département des mathématiques.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

Table des matières

NOTATIONS

$C([a,b])$	L'espace des fonctions continus sur l'intervalle $[a,b]$.
$\mathrm{Im}(T)$	L'image de l'opérateur T, $\mathrm{Im}(T) = \{\psi;\ \psi = T\varphi\}$.
Ω	Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
I	Opérateur d'identité.
$\ker(T)$	Le noyau de l'opérateur T, $\ker(T) = \{\varphi;\ T\varphi = 0\}$.
$K(x,y)$	Noyau de l'intégrale.
L	Opérateur Linéaire ou $L = I - A$.
$\mathcal{M}$	Ensemble borné non vide.
N_f	Nemytskji opérateur associé à f.
$\mathcal{N}$	Sous famille qui consiste les ensemble relativement compact.
$\overline{U}$	La fermeture de U.
$\mathcal{W}$	Sous famille qui consiste tous les ensembles relativement faiblement compacts.

Introduction générale

Les équations intégrales jouent un rôle très important dans les domaines scientifiques, surtout le domaine d'analyse fonctionnelle, ainsi que dans la résolution des problèmes de la physique.

Ce travail est composé de deux parties. Dans la première partie, on va étudier la théorie des équation intégrale.i.e., une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, se produit sous signe intégral.

$$\int_{\Omega} k(x,y,\varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x)$$

Cette définition plutôt générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique beaucoup de types distincts surgissent. Dans la théorie classique d'équations intégrales on distingue les équations de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = f(x),$$

et les équations de Volterra .

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x),$$

dont l'équation de Fredholm les régions d'intégrations sont fixées, tandis que dans une équation de Volterra une région est variable.

Dans seconde partie on va étudier la notions de la mesure de non compacité, cette étude sur la théorie ayant plusieurs applications dans la topologie, l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs. Cette notion elle est appurue la première fois par le mathémaicien Kuratowski en 1930. notre objectif dans ce sujet comment utilisé la notion de la mesure de non compacité pour prouver l'existence d'une équation intégrale à l'aide d'une théorie importante, i.e, la théorie du point fixe notamment le théorème du point fixe de Schauder

Notre travail est divisé en trois chapitres:

Le premier chapitre, on rappels quelques définitions et des propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires (compacts,borné, continus, ...etc), et on présente une introduction sur les équations intégrales, en parlant de la théorie de Riesz, l'alternative de Fredholm pour l'existence et l'unicité .

Le deuxième chapitre, présente des notions et définitions préliminaire de la mesure de non compacité sur les ensembles bornés et les opérateurs, et on donne des exemples de cette mesure par exemple la mesure de Kuratowski, et la mesure de Hausdorff, avec quelques théorèmes. finalement, on parlerons à la mesure de non compacité faible et leurs propriétés.

Dans le troisième, on expose le but de notre travail, où on va faire une étude large sur la théorie du point fixe, et puis on va l'appliquer sur les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein. pour démontrer l'existence de la solution de cette équation. Avec la mesure de non compacité.

Chapitre 1

Introduction à la théorie des Equations Intégrales

Dans ce chapitre on a commencé par quelques définitions sur les opérateurs, et en suite on donne les définitions et les types des équations intégrales ainsi, et on oubliera pas la théorie de ces équations (La théorie de Riesz, la théorie du point fixe, ...etc).

1.1 Notions sur les opérateurs

Définition 1.1.1

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F et dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :
pour tout φ_1, φ_2 dans E et λ dans $\mathbb{k} = (\mathbb{R} ou\ \mathbb{C})$.

i) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$ on a, $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$.

$\forall \varphi \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{k}$ on a, $A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$.

Définition 1.1.2

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F et dite borné s'il existe une constante positive C, telle que :

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E \quad , \forall x \in E.$$

Définition 1.1.3

Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur linéaire qui admet une formulation de la forme suivante :

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x,y)\varphi(y))dy$$

Et la fonction K étant appelée noyau de l'opérateur A.

Théorème 1.1.1 (Arzela-Ascoli)

Un ensemble $U \subset C(\Omega)$ est relativement compact si et seulement s'il est borné et équicontinue i.e,

1. *S'il existe une constante $M > 0$ tel que:*

   $\mid \varphi(x) \mid < M$ *pour tout* $x \in \Omega$ *et* $\varphi \in U$.

2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall x, y \in \Omega \quad \mid x - y \mid \leq \gamma$*

   $\mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid < \varepsilon$ *pour tout* $\varphi \in U$.

Définition 1.1.4 (Opérateurs compacts)

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans Y.

Définition 1.1.5 (Équations intégrales)

On appelle équation intégrale toute équation de la forme

$$\int_{\Omega} k(x,y,\varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x) \tag{1.1.1}$$

où Ω est un domaine intégration, $f(x)$ un fonctions donnée, λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et $K(x,y,\varphi(y))$ appelée noyau de l'équation intégrale.
Avec toutes ces données, et φ est une fonction inconnue qui satisfait l'équation (1.1.1).

1.2 Classifications des équations intégrales

1.2.1 Équations intégrales linéaires et leurs types :

Définition 1.2.1 (Équation intégrale de Fredholm)

1. *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme:*

$$\lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = f(x).$$

i) *Si* $f(x) = 0$ *on appelle équation homogène.*

ii) *Si* $f(x) \neq 0$ *on appelle équation non homogène.*

2. *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce,*

une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = f(x),$$

i) *Si* $f(x) = 0$ *l'équation s'écrit :*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy$$

elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce homogène,

ii) *Si* $f(x) \neq 0$ *elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce non homogène.*

Définition 1.2.2 (Équation intégrale de Volterra)

1. *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce, une équation de la forme:*

$$\lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x).$$

   i) *Si* $f(x) = 0$ *On appelle équation intégrale linéaire homogène de Volterra de première espèce.*

   ii) *si* $f(x) \neq 0$ *On appelle équation intégrale linéaire non homogène de Volterra de première espèce.*

2. *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce, une équation de la forme :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = \quad f(x),$$

   i) *Si* $f(x) = 0$ *l'équation s'écrit :*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x \; k(x,y)\varphi(y)dy$$

elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce homogène,

   ii) *Si* $f(x) \neq 0$ *elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce, non homogène.*

1.2.2 Equations intégrales non linéaires et leurs types :

Définition 1.2.3 (Équation intégrale de Fredholm)

1. *On appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme*

$$\lambda \int_a^b k(x,y,\varphi(y))dy = f(x).$$

   i) *Si* $f(x) = 0$ *l'équation homogène,*

ii) *si $f(x) = 0$ l'équation non homogène.*

2. *On appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce, une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y, \varphi(y))dy = f\ (x).$$

i) *Si $f\ (x) = 0$ l'équation s'écrit :*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, y, \varphi(y))dy$$

elle est dite équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce homogène .

ii) *Si $f\ (x) \neq 0$ elle est dite équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce non homogène.*

Définition 1.2.4 (Équation intégrale de Volterra)

1. *On appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce, une équation de la forme*

$$\lambda \int_a^x k(x, y, \varphi(x) = f(x)$$

i) *Si $f(x) = 0$ l'équation homogène.*

ii) *Si f(x)≠0 l'équation non homogène*

2. *On appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de deuxième espèce, une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, y, \varphi(y))dy = f\ (x).$$

i) *Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, y, \varphi(y))dy$$

elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce homogène.

ii) *Si* $f\ (x) \neq 0$ *elle est dite équation intégrale non linéaire de Volterra de deuxième espèce, non homogène.*

Définition 1.2.5 (les équations intégrales de Uryson et Hammerstein)

1. *On appelle équation intégrale de Uryson une équation de la form*

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} F(x, y, \varphi(y)) = h(x), \quad y \in \Omega$$

   F *et* h *sont des fonctions arbitraires*

2. *On appelle équation intégrale de Hammerstein, une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(t)) = h(x), \quad y \in \Omega.$$

Remarque 1.2.1 *L'équation de Hammerstein est un cas particulier de l'équation de Uryson.*

1.3 Existence et unicité des solutions des équations intégrales

1.3.1 Théorie de Riesz

Dans cette partie, nous allons présenter la théorie de Reisz pour une équation de la forme $\varphi - A\varphi = f$,avec un opérateur linéaire compact $A : E \to E$ dans un espace normé E

On note $L = I - A$,

où I désigne l'opérateur identique.

Théorème 1.3.1 (Théorème de Riesz)

(i) Le noyau de l'opérateur L :

$$Ker(L) = \{\varphi \in E : L\varphi = 0\}$$

est un sous-espace de dimension fini,

(ii) L'image de l'opérateur L

$$Im(L) = \{L\varphi : \varphi \in E\}$$

est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension finie,

$iii)$Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur L tel que

$$\{0\} \subset Ker(L^0) \subset Ker(L^1) \subset ...... \subset Ker(L^r) = Ker(L^{r+1}) = Ker(L^{r+2}) = ...$$

et

$$... = \ Im(L^{r+2}) = \ Im(L^{r+1}) = \ Im(L^r) \subset .... \subset \ Im(L^1) \subset \ Im(L^0) \subset E$$

D'autre part, on a la somme directe

$$E = Ker(L^r) \oplus \ Im(L^r).$$

Théorème 1.3.2

De même conditions dans les théorèmes précédents, alors

i) *$I - A$ est injectif si et seulement s'il est surjectif*

ii) *Si $I - A$ est injectif, alors l'opérateur inverse $(I - A)^{-1} : E \to E$ est borné.*

Corollaire 1.3.1

1. *Si l'équation homogèn*

$$\varphi - A\varphi = 0 \tag{1.3.1}$$

   admet seulement la solution triviale $\varphi = 0$, *alors pour tout* $f \in E$ *l'équation*

$$\varphi - A\varphi = f \tag{1.3.2}$$

   admet une solution unique $\varphi \in E$ *et cette solution et dépend de la continuité de* f

2. *Si l'équation homogène* (1.3.1) *n'admet pas la solution triviale* $\varphi = 0$, *alors elle a seulement un nombre fini* $n \in \mathbb{N}$ *de solutions* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *de* E *sont linéairements indépendants et l'équation non homogène* (1.3.2) *est unsolvable ou sa solution est de la forme générale*

$$\varphi = \widetilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i$ *sont des nombres arbitraires complexes et* $\widetilde{\varphi}$ *est une solution particulière de l'équation non homogène.*

Théorème 1.3.3 (Alternative de Fredholm)

On considère les équations intégrales homogènes duals, l'une de l'autres, issues d'un noyau qui sont donc définies par

$$\text{trouver } \varphi \in C([a,b]); \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = 0 \tag{1.3.3}$$

$$\text{trouver } \psi \in C([a,b]); \qquad \psi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)\psi(y)dy = 0 \tag{1.3.4}$$

On considère pour $f \in C[a;b]$, $g \in C[a;b]$ les équations intégrales avec seconds membres

$$\text{trouver } \varphi \in C([a,b]); \quad \varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{1.3.5}$$

$$\text{trouver } \psi \in C([a,b]); \quad \psi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)\psi(y)dy = g(x) \tag{1.3.6}$$

alors on a l'alternative
- Ou bien les équations (1.3.3) et (1.3.4) n'ont que les solutions triviales $\varphi = 0$, $\psi = 0$ dans ces cas les équations (1.3.5) et (1.3.6) admettent une solution unique $\varphi \in C[a;b]$ et $\psi \in C[a;b]$ pour chaque $f \in C[a;b]$; $g \in C[a;b]$:
- Ou bien les équations (1.3.3) et (1.3.4) ont le même nombre fini n des solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (1.3.5) et (1.3.6) sont résolubles si et seulement si pour toute solution φ de (1.3.3) et toute solution ψ de (1.3.4) on a

$$\int f(x)\psi(x)dx = \int g(x)\varphi(x)dx.$$

Dans ces conditions, la solution générale de (1.3.5) *s'écrit sous la forme*

$$\varphi = \varphi + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

où φ est la solution particulière de (1.3.5) et les $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une famille libre de solutions de (1.3.3)

1.3.2 La théorie du point fixe

Introduction sur la théorie du point fixe

Définition 1.3.1

Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T.

Définition 1.3.2

Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même, T est une contraction (ou application contractante), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in E$, on ait

$$\| T(x) - T(y) \| \leq k \| x - y \| .$$

Théorème 1.3.4

Soit F un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et soit $T : F \to F$ une application contractante, alors

(a) *L'équation $Tx = x$, a une seule unique solution.*

(b) *La solution unique x peut être obtenu par la limite de la suite $\{x_n\}$ de F définie par*

$x_{n+1} = Tx_n$, n=1,2,..., où x_0 est un élément arbitraire de F,

$$x = \lim_{n \longrightarrow \infty} T^n x_0.$$

Théorème 1.3.5

Soit A un opérateur borné dans un espace de Banach E dans lui-même et u un élément de E, alors l'opérateur défini par

$$T\varphi = \alpha A\varphi + u$$

a un point fixe, pour $|\alpha|$ suffisamment petit, de plus, si k est une constante positive, telle que

$$\| A\varphi \| \leq k \| \varphi \| \ , \varphi \in E$$

alors $T\varphi = \varphi$ *admet une solution unique pour* $|\alpha| k < 1$.

Théorème 1.3.6

Soit l'équation suivante

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = \quad f\ (x)$$

admet une solution unique $\varphi \in L^2([a,b])$, *avec le noyau* k *est continu sur l'intervalle* $[a,b]$
$f \in L^2([a,b])$ *et* $| \alpha | \ k < 1$ *avec* $k = \sqrt{\int_a^b \int_a^b | k(x,y) |^2 \, dxdy}$.

Preuve.

On considère l'équation

$$T(\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \tag{1.3.7}$$

puisque $f \ \in L^2([a,b]), T\varphi \in L^2([a,b])$ si

$$\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \in L^2([a,b])$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, donc

$$| \ \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \ | \leq \ \int_a^b | \ k(x,y)\varphi(y) \ | \ dy$$

$$\leq \left(\int_a^b | \ k(x,y) \ |^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b | \ \varphi(y) \ |^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\mid \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \mid^2 \leq (\int_a^b \mid k(x,y) \mid^2 dy)(\int_a^b \mid \varphi(y) \mid^2 dy)$$

alors

$$\int_a^b \mid \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \mid^2 dx \leq \int_a^b (\int_a^b \mid k(x,y) \mid^2 dy \int_a^b \mid \varphi(y) \mid^2 dy)dx$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b \mid k(x,y) \mid^2 dydx \int_a^b \mid \varphi(y) \mid^2 dy$$

Puisque

$$\int_a^b \int_a^b \mid k(x,y) \mid^2 dydx < \infty \quad et \quad \int_a^b \mid \varphi(y) \mid^2 dy < \infty$$

alors l'équation (1.3.7) est satisfaisante et T de $L^2([a,b])$ dans lui-même
et on a l'opérateur défini par

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy$$

est borné (car le noyau k est continu sur l'intervalle $[a,b]$)
donc par le théorème (1.3.5) $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique, pour $|\alpha|k < 1$. ■

Théorème 1.3.7 *(Pour l'équation intégrale non linéaire de Fredholm)*
On suppose que le noyau k est continu ;$f \in L^2([a,b])$ et
(a) $\| \int_a^b k(x,y)\varphi(y) \| \leq M \| \varphi(y) \|$
(b) $\mid k(x,y,z_1) - k(x,y,z_2) \mid < N(x,y) \mid z_1 - z_2 \mid, \forall x,y,z_1,z_2 \in [a,b]$
(c) $\int_a^b \int_a^b \mid N(x,y) \mid^2 dydx = k^2 < \infty$
Alors l'équation non linéaire de type Fredholm

$$\varphi(x) - \alpha \int_a^b k(x,y,\varphi(y))dy = f(x)$$

admet une solution dans $L^2([a,b])$, avec $|\alpha|k < 1$.

Preuve.

On considère l'opérateur

$$T\varphi = f + \alpha A\varphi$$

où

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, y, \varphi(y))dy$$

alors

$$\| T\varphi_1 - T\varphi_2 \| = | \alpha | \left\| \int_a^b (k(x, y, \varphi_1(y)) - k(x, y, \varphi_2(y)))dy \right\|$$

$$\leq | \alpha | \left(\int_a^b \left(\int_a^b | k(x, y, \varphi_1(y)) - k(x, y, \varphi_2(y)) | dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq | \alpha | \left(\int_a^b \left(\int_a^b N(x, y) | \varphi_1 - \varphi_2 | dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq | \alpha | \, k \, \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$$

il est clair ,si $|\alpha|k < 1, T$ est un opérateur contractant ,donc admet un point fixe ,ce point c'est la solution de l'équation non linéaire. ■

Théorème 1.3.8

On considère l'équation suivante

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x k(x, y)\varphi(y)dy \quad x \in [0, 1] \tag{1.3.8}$$

qui admet seulement la solution triviale $\varphi = 0$.

Preuve.

Soit l'équation homogène de deuxième espèce de Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x k(x, y)\varphi(y)dy \quad x \in [0, 1]$$

Alors

$$| \quad \varphi(x) |=| \lambda | \int_0^x | k(x,y)\varphi(y) | dy \leq | \lambda | Mp \tag{1.3.9}$$

où

$$p = \int_0^1 \quad | \quad \varphi(x) | dy$$

et

$$| k(x,y) | \leq M, pour x, y \in [0,1]$$

par conséquent , et si remplace la relation (1.3.9) dans (1.3.8) on obtient

$$| \quad \varphi(x) |=| \lambda | \int_0^x | k(x,y) | \lambda | Mpdy \leq | \lambda |^2 M^2 px$$

En continuant le processus, on obtient

$$| \quad \varphi(x) | \leq | \lambda |^n M^n p \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{| \lambda |^n M^n p}{(n-1)!} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

ceci montre que $\varphi = 0$, pour tout $x \in [0,1]$. ■

Chapitre 2

Mesure de non compacité

Dans ce chapitre on présente quelque définitions et notions préliminaire sur la mesure de non compacité comme la mesure de Kuratowski et Hausdorff sur les ensembles borné et les opérateurs ,nous présenterons également quelques propriétés fondamentales ainsi que quelques théorème associes à la mesure de non compacité.

2.1 Mesure de non compacité d'un ensemble borné

Soient $(X, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach, $\mathcal{M}$ sous-ensemble borné non vide dans X, $\mathcal{N}$ sous famille qui consiste les ensembles relativement compact ,et l'enveloppement convexe de $A \subset X$, notons $conv(A)$.

2.1.1 La mesure de non compacité en générale

Définition 2.1.1

Soit l'application $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty[$ On dit que μ est mesure de non compacité (MNC) dans l'espace de Banach X, si elle satisfait les conditions suivantes:

1. *l'ensemble $ker(\mu) = \{A \in \mathcal{M}$ telle que : $\mu(A) = 0\}$ est une ensemble non vide et* $\ker(\mu) \subset \mathcal{N}$

   $\forall A, B_1, B_2 \in \mathcal{M}$ *on a les propriétés suivantes*

2. *Si* $A \subset B$, *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$.

4. $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B \leq \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B) \quad ,\forall \lambda \in [0,1]$

5. $\mu(conv(A)) = \mu(A)$.

6. $\mu(B_1 \cup B_2) = \max\{\mu(B_1), \mu(B_2)\}$.

7. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un ensemble des suites de* $\mathcal{M}$ *telle que* $A_{n+1} \subset A_n, \overline{A_n} = A_n(n = 1, 2, ...)$

et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0, alors \quad A_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$ *et* $A_\infty \in \ker(\mu)$.

Définition 2.1.2

On dit que la mesure de non compacité μ *sublinéaire, si* $\forall A, B \in \mathcal{M}$ *,si elle satisfait les deux conditions suivantes:*

1. $\mu(\lambda A) =\mid \lambda \mid \mu(A) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

2. $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

2.1.2 La mesure de kuratowski

Définition 2.1.3

Soit (X, d) *un espace métrique ,et* Q *un sous ensemble borné de* X *,alors la mesure de non compacité de Kuratowski de* Q *noté par* $\alpha(Q)$ *,avec* $\alpha(Q)$ *est la borne inférieure de l'ensemble de tous les nombres* $\epsilon \geq 0$*, tels que l'ensemble* Q *admet un recouvrement fini par des ensembles* (S_i) *avec le diamètre* $\leq \epsilon$

où

$$\alpha(Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i : S_i \subset X, diam(S_i) < \epsilon(i = 1, ..., n); n \in \mathbb{N}\}$$

la fonctions α *est dit mesure de non compacité de kuratowski .*

Remarque 2.1.1

1. *On appelle diamètre d'un ensemble Q est le nombre*

$$sup\{d(x,y) : x \in Q, y \in Q\}$$

noté par $diam(Q)$,ou $\delta(Q)$

avec $diam(\emptyset) = 0$, Il est clair que

$$0 \leq \alpha(Q) \leq diam(Q) < +\infty \ .$$

pour chaque ensemble Q borné et non vide dans l'espace de Banach X et $diam(Q) = 0$ si seulement si Q est un

ensemble vide ou se compose exactement d'un point ,et on a aussi les propriétés du diamètre suivantes :

- *Si $Q_1 \subset Q_2$ alors $diam(Q_1) \leq diam(Q_2)$.*
- *$diam(\overline{Q}) = diam(Q)$.*
- *$diam(Q_1 + Q_2) \leq diam(Q_1) + diam(Q_2)$.*
- *$diam(x + Q) = diam(Q) \ , \quad \forall x \in X$.*
- *$diam(\lambda Q) =\mid \lambda \mid diam(Q) \ , \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

2. *Soit X espace de Banach ,ensemble finie $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\varphi_n\}$ dans X, on dit que $\epsilon - net$ de l'ensemble B, si pou tout point $\psi \in B$ il existe φ_j tel que*

$$\parallel \psi - \varphi_j \parallel < \epsilon.$$

Proposition 2.1.1

soinet Q, Q_1 et Q_2 des sous ensembles bornés dans un espace métrique (X, d) alors

- *$\alpha(Q) = 0$ si seulement si $\overline{Q}$ est compact.*
- *$\alpha(Q) = \alpha(\overline{Q})$.*

- $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_2)$.
- $\alpha(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$.
- $\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$.

Lemme 2.1.1

Soient Q ,Q_1 et Q_2 des sous ensembles borné dans un espace normé $(X, \|.\|)$ alors

1. $\alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$.
2. $\alpha(Q_1 + x) = \alpha(Q_1) \quad ,\forall x \in X$.
3. $\alpha(\lambda Q_1) = \lambda\ \alpha(Q_1) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\alpha(Q_1) = \alpha(conv(Q_1))$.

Lemme 2.1.2

Soit (X, d) un espace métrique complet, si (F_n) est une suite décroissante d'un ensemble non vide, fermé et borné dans X tels que $\lim_{n\to\infty} \alpha(F_n) = 0$,alors l'intersection $F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ sous-ensemble non vide et compacte dans X.

2.1.3 La mesure de Hausdorff

Définition 2.1.4

Soit $(X, \|.\|)$ espace métrique et Q un sous ensemble bonré de X ,alors la mesure de non compacité de Hausdorff de l'ensemble Q, noté par $\chi(Q)$, i.e, $\chi(Q)$ la borne inférieure de l'ensemble de tous les nombres $\epsilon \geq 0$, tel que l'ensemble Q admet un recouvrement fini par des boules de rayon $r \leq \epsilon$

autrement dit:

$$\chi(Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon(i = 1, ..., n)n \in \mathbb{N}\}$$

Proposition 2.1.2

Soinet Q, Q_1 et Q_2 des sous ensembles bornés dans un espace métrique (X, d) alors :

1. $\chi(Q) = 0$ *si seulement si* Q *est totalement borné.*
2. $\chi(Q) = \chi(\overline{Q})$.
3. $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$.
4. $\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$.
5. $\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$.

Proposition 2.1.3

Soient Q, Q_1 et Q_2 des sous ensembles borné dans un espace normé $(X, \|.\|)$ alors

1. $\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$.
2. $\chi(Q_1 + x) = \chi(Q_1) \quad ,\forall x \in X$.
3. $\chi(\lambda Q_1) = \lambda\ \chi(Q_1) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\chi(Q_1) = \chi(conv(Q_1))$.

Théorème 2.1.1

Soient $(X, \|.\|)$ un espace métrique, Q un sous-ensemble borné de X, alors

$$\chi(Q) \leq \alpha(Q) \leq 2\chi(Q). \tag{2.1.1}$$

Dans la classe de tous les espaces de Banach de dimension infinie, ces inégalités sont les meilleur possible.

Preuve.

1. On a $\epsilon > 0$ si $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ est un $\epsilon - net$ alors $\{Q \cap B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^n$ est un recouvrement de Q et diamètre de les ensemble $< 2\epsilon$ alors $\alpha(Q) < 2\chi(Q)$.

2. On suppose que $\{S_i\}_{i=1}^k$ est un recouvrement de Q et $diam S_i < \epsilon$ on pose $y_i \in S_i$ pour tout $i = 1...k$ donc $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ est un $\epsilon - net$ de Q est une preuve de $\chi(Q) < \alpha(Q)$

   finalement (1) et (2) .

$$\chi(Q) \leq \alpha(Q) \leq 2\chi(Q).$$

■

Théorème 2.1.2

Soit B la boule unitaire $(B(0,1))$ dans l'espace de Banach E, alors $\alpha(B) = \chi(B) = 0$, si E de dimension finie, et $\alpha(B) = 2, \chi(B) = 1$ si E de dimension infinie.

2.1.4 La mesure de Hausdorff dans C[a,b]

Théorème 2.1.3

Soit Q ensemble borné dans $C[a,b]$ alors :

$$\chi(Q) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \left\{ \sup_{x \in Q} \left[\max_{0 \leq r \leq \delta} \| x - x_r \| \right] \right\}$$

où

$$x_r(t) = \begin{cases} x(t+r), a \leq t \leq b - r \\ x(b) \qquad ,b \ -r \leq t \leq b \end{cases}.$$

Preuve. *Soit $\epsilon > 0$, on construire un fini de $[\chi(Q) + \epsilon] - net$ E de l'ensemble Q, soit $x \in Q$ et $y \in E$ tel que $\| x - y \| \leq \chi(Q) + \epsilon$,*

on pose $\delta > 0$ tel que $r \in [0, \delta]$ alors

$$\| x - x_r \| \leq \| x - y \| + \| y - y_r \| + \| y - x_r \|$$

$$\leq 2 \parallel x-y \parallel + \parallel y-y_r \parallel$$
$$\leq 2\chi(Q)+2\epsilon+\max_{y\in E}\left[\max_{0\leq r\leq\delta} \parallel y-y_r \parallel\right]$$

par conséquent

$$\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq\delta} \parallel x-x_r \parallel\right] \leq 2\chi(Q)+2\epsilon+\max_{y\in E}\left[\max_{0\leq r\leq\delta} \parallel y-y_r \parallel\right]$$

lorsque $\delta \to 0$ *et comme E famille finie et équicontinue, on obtient*

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq\delta} \parallel x-x_r \parallel\right]\right\} \leq 2\chi(Q)+2\epsilon,$$

donc

$$\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq\delta} \parallel x-x_r \parallel\right]\right\} \leq \chi(Q)+\epsilon,$$

ϵ *étant arbitraire on a l'inégalité*

$$\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq\delta} \parallel x-x_r \parallel\right]\right\} \leq \chi(Q)\ . \tag{2.1.2}$$

Pour l'inégalité inverse, nous assurerons que les fonctions $x \in Q$ *sont prolongées du segment [a,b] de* $\mathbb{R}$ *par*

$$x_r(t) = \begin{cases} x(a), t \leq a \\ x(b)\ , b \leq t \end{cases}$$

définissons les opérateurs R_h *et* P_h $(h>0)$ *par les formules respectives*

$$(R_h x)(t) = \frac{1}{2}(\max\{x(s) : s \in [t-h, t+h]\} + \min\{x(s) : s \in [t-h, t+h]\}$$

et

$$(P_h x)(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(s)ds$$

alors l'ensemble $P_h R_h(Q)$ *est relativement compact en* $C([a,b])$, *nous prétendons que il constitue un* $(q_{2h}/2)-$ *net de l'ensemble Q*

où

$$q_{2h} = \sup_{x\in Q}(\max_{0\leq r\leq\delta} \parallel x-x_r \parallel$$

en fait

$$\parallel P_h R_h(Q) \parallel = \max_{a \leq x \leq b} \mid \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} (R_h x)(s) ds - \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(t) ds \mid$$

$$\leq \frac{1}{2h} \max_{a \leq x \leq b} \int_{t-h}^{t+h} \mid (R_h x)(s) - x(t) \mid ds \tag{2.1.3}$$

Si $\mid t - s \mid \leq h$, *alors on a :*

$$\min\{x(r) : r \in [t-s, t+s]\} \leq x(t) \leq \max\{x(r) : r \in [t-s, t+s]\}$$

par conséquent

$$\mid (R_h x)(s) - x(t) \mid \leq \frac{1}{2h} \max_{0 \leq r \leq 2h} \parallel x - x_r \parallel \leq q_{2h}$$

De ceci (2.1.3), *il s'ensuit que* $\chi(Q) \leq \frac{q_{2h}}{2}$ *lorsque* $h \to 0$

$$\chi(Q) \leq \frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \left\{ \sup_{x \in Q} \left[\max_{0 \leq r \leq \delta} \parallel x - x_r \parallel \right] \right\} \tag{2.1.4}$$

cela la preuve est complète ■

2.1.5 La mesure de non compacité dans l'espace $\mathbf{L}^p[a, b]$

Théorème 2.1.4

Soit Q un ensemble borné dans l'espace $L^p[a, b]$, alors la mesure de non compacité de Hausdorff définie par

$$\chi(Q) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \left\{ \sup_{x \in Q} \left[\max_{0 \leq r \leq \delta} \parallel x - x_r \parallel \right] \right\},$$

où

$$x_r(t) = \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} x(s) ds.$$

2.2 Mesure de non compacité sur les opérateurs

2.2.1 Mesure de kuratowski et Hausdorff

Définition 2.2.1

- *Soit* $T : D(T) \subseteq X \to X$ *un opérateur continu et* $\alpha(.)$ *la mesure de non compacité de kuratowski dans* X*, pour tout* $k \geq 0$

  1. *On dit que* T *est un* $k-ensemble-contraction$ *(opérateur contractive),* *si pour tout ensemble borné* A *de* $D(T)$, $T(A)$ *est un sous-ensemble borné de* X

  $$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A),$$

  2. *On dit que* T *est non expansive, si pour tout sous-ensemble* *borné* A *de*$D(T)$*, tel que* $\alpha(A) > 0$, $T(A)$ *est une sous ensemble borné de* X*, et*

  $$\alpha(T(A)) \leq \alpha(A).$$

- *Soit* $T : D(T) \subseteq X \to X$ *un opérateur continu, et soit* $\chi(.)$ *la mesure de non compacité de Hausdorff dans* X*, pour tout* $k \geq 0$,

  On dit que T *est* $k-boule-contraction$ *,si pour tout sous ensemble borné* A *de* $D(T)$, $T(A)$ *est un sous-ensemble borné dans* X*, et*

  $$\chi(T(A)) \leq k\chi(A).$$

Remarque 2.2.1

- *Soient* μ_1 *et* μ_2 *deux mesure de non compacité définie dans deux espace de Banach* E *et* F *respectivement*

  et soit $L : E \to F$ *est un opérateur alors :*

1. *Si L est un opérateur contractant ,alors le nombre* $\| L \|_{\mu_1,\mu_2}$ *définie par :*

$$\| L \|_{\mu_1,\mu_2} = \inf\{k \geq 0 : \mu_2(T(A)) \leq k\mu_2(A) \text{ pour tout } A \tag{2.2.1}$$

   on dit que (μ_1, μ_2)*-opérateur normé de L ,ou* (μ_1, μ_2)*-mesure de non compacité de L*

2. *Si* $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ *donc on écrit* $\| L \|_\mu$*, et on dit que* $\mu -$ *opérateur normé de L*

- *Soient E et F desux espaces de dimension infinie, pour toute mesure de non compacité* μ *arbitraire, alors la formule de* $\| L \|_\mu$ *est :*

$$\| L \|_\mu = \sup\left\{\frac{\mu(L(A))}{\mu(A)} : \ A \in M, \ \mu(A) > 0\right\}$$

Lemme 2.2.1

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ *et* X *un espace de Banach, on définit*$\alpha(A)$*, par :*

$$\alpha(A) = \inf\{k, \ \textit{telle que } T \textit{ est un } k - \textit{ensemble} - \textit{contraction}\}$$

et $\chi(A)$ *par :*

$$\chi(A) = \inf\{k, \ \textit{telle que } T \textit{ est un } k - \textit{boule} - \textit{contraction}\}$$

alors les propriétés suivantes sont importantes et satisfaisantes :

1. $\frac{1}{2}\alpha(A) \leq \chi(A) \leq 2\alpha(A)$.
2. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \chi(A) = 0 \Leftrightarrow T$ *est compact .*
3. *Si* T *et* $S \in \mathcal{L}(X)$ *alors* $\alpha(ST) \leq \alpha(S)\alpha(T)$*.et* $\chi(ST) \leq \chi(S)\chi(T)$.
4. *si* $k \in K(X)$ *, alors* $\alpha(T + k) = \alpha(T)$*, et* $\chi(T + K) = \chi(T)$.
5. *si* B *est un ensemble borné dans* X*, alors* $\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$.

Théorème 2.2.1

Soit E espace de Banach, $M \subset E$ est un ensemble non vide, fermé ,convexe et borné, et

$T : M \to M$, *opérateur non expansive et μ mesure de non compacité arbitraire*

$$\parallel T \parallel_{\mu} = k < 1$$

alors T possède au moins un point fixe,et l'ensemble des points fixes de T appartient à $ker(\mu)$.

Preuve.

Soit M_n une suite dans l'ensemble M avec :
$M_0 = M$, $M_1 = conv(T(M))$, $M_2 = conv(T(M_1))$ .....$M_{n+1} = conv(T(M_n))$
on a

$$\mu(M_{n+1}) = \mu(conv(T(M_n))) = \mu(T(M_n)) \leq k\mu(M_n)$$

et $\mu(M_n) \leq k^n(M_0)$ Par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_n) = 0$
apparemment ,$M_{n+1} \subset M_n$ et $T : M_n \to M_n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ ainsi par lemme (3.2.1)
$M_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ est un sous-ensemble non vide est compacte dans X donc le théorème de point fixe de Schauder implique que T admit un point fixe dans $M_\infty \subseteq M$.

■

2.3 Mesure de non compacité faible

Définition 2.3.1

Soient X espace de Banach, on dit que $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty[$ mesure de non compacité faible dans X, si pour tout A, $B \in \mathcal{M}$, et $\mathcal{W}$ satisfit les conditions suivantes :

(i) $\mu(A) = 0 \Longleftrightarrow A \in \mathcal{W}$.

(ii)$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(iii) $\mu(\lambda A) =| \lambda | \mu(A)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(iv)$\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

(v)$\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$.

(vi)$\mu(conv(A)) = \mu(A)$.

Rappelons que chaque mesure de non compacité faible satisfait également le condition d'intersection de Cantor

si $F_n \in \mathcal{W}$,$F_n = \overline{F}_n$ *et* $F_{n+1} \subset F_n$ *pour tous* $n = 1, 2, ...$ *et si* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F) = 0$,*alors* $F_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} F_n \neq \emptyset$

par exemple d'une mesure régulière dans un espace de Banach X, nous avons la mesure de non compacité faible

défini par Blasi dans la formule suivante:

$$\omega(A) = \inf\{t > 0 : \exists C \in \mathcal{W} telsque A \subset C + t\overline{B}\}, \forall A \in \mathcal{M}.$$

Chapitre 3

Application sur les équations intégrales

Dans ce chapitre on essaye d'appliquer les notions quand déja etudier dans le chapitre précédent.

Soit $(X, \| \,.\, \|)$ espace de Banach ,et soit μ mesure de non compacité faible.

3.1 préliminaires

Définition 3.1.1

Soit $T : C \subseteq X \to X$ on dit que T est $\phi-$ contraction s'il existe une fonction non décroissante, continue $\phi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, telle que $\phi(0) = 0$, $\phi(r) < r$,

pour tout $r > 0$ et pour tout $x, y \in C$

$$\| Tx - Ty \| \leq \phi(\| x - y \|)$$

Définition 3.1.2

1. *Soit $T : D(T) \subseteq X \to X$, on dit que T,nonexpansive, si pour tout $x, y \in D(T)$.*

$$\| Tx - Ty \| \leq (\| x - y \|)$$

2. *On dit que T pseudocontractive ,si pour tout $x, y \in D(T)$, et $\forall r > 0$, donc il existe l'inégalité suivante est verifiée:*

$$\| x - y \| \leq \| (1 + r)(x - y) + r(Ty - Tx) \|$$

Définition 3.1.3

Soit $T : D(T) \subseteq X \to X$ une application, on dit que $\psi -$ expansive, s'il existe une fonction $\psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ Satisfaisant les conditions suivantes:

1. *$\psi(0) = 0$.*
2. *$\psi(r) > 0 \quad \forall r > 0$.*
3. *soit ψ est continue ou non décroissantes.*

telle que pour chaque $x, y \in D(T)$, on ait l'inégalité $\| Tx - Ty \| \leq \psi(\| x - y \|)$ tient

Remarque 3.1.1

Soit T un opérateur non linéaire dans un espace de Banach X dans lui-même, nous présentons les conditions suivantes :

($\mathcal{A}_1$) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ est une suite faiblement convergente dans X, alors $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite fortement convergente dans X.

($\mathcal{A}_2$) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$est une suite faiblement convergente dans X,alors $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite faiblement convergente dans X.

Théorème 3.1.1 (théorème de schauder)

Soit M un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dansun espace de Banach X, suppose que $A : M \to M$ est une application continue, et satisfait le condition $(\mathcal{A}_1)$, si $A(M)$ relativement faiblement compact, alors il existe $x \in M$ telle que $Ax = x$

Remarque 3.1.2 ([5] *Lemme* 2.1)

Appel et De Pascale a montré que μ devient la forme simple suivante dans les espaces L^1:

$$\mu(M) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup \left\{ \sup_{\varphi \in M} \left[\int_D \| \varphi(t) \|_X \, dt, D \subset \Omega \ mes(D) < \epsilon \right] \right\}$$

Pour tous $M \subset L^1(\Omega, X)$ bornés, où X un espace de Banach de dimension finie, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et $mes(.)$ noté par la mesure de lebesgue .

3.2 Théorèmes de points fixes

3.2.1 Domaine borné

Théorème 3.2.1

Soit M un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe dans espace de Banach X et soit $A : M \to X$, $B : X \to X$

deux applications continues, si A et B satisfaisant les conditions suivantes:

1. *A satisfait la condition $(\mathcal{A}_1)$.*
2. *B est pseudocontractive et $I - B$ est $\psi-$expansive .*
3. *$\mu(A(S) + B(S)) < \mu(S)$ pour tout $S \subseteq M$, telle que $\mu(S) > 0$.*
4. *$[x = Bx + Ay, \ \ y \in M] \Rightarrow x \in M$.*

   alors l'équation $A(x) + B(x) = x$ admet une solution

Théorème 3.2.2

Soit M un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe dans un espace de Banach X, soit $A : M \to X$, $B : M \to X$ deux applications continues, si A et B satisfait les condition suivantes :

1. *$A(M)$ est faiblement relativement compact .*
2. *A satisfait le condiction $(\mathcal{A}_1)$.*

3. B est non expansive et $\mu-$consending.

4. $I-B$ est $\psi-$non expansive.

5. $A(M)+B(M)\subseteq M$.

alors il existe $x\in M$, tel que $x=A(x)+B(x)$

Théorème 3.2.3

Soit M sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe dans espace de Banach X,

soit $A: M\to X$, $B: X\to X$ deux applications continues, si A et B satisfait les condition suivantes :

(i) A est continue, $A(M)$ faiblement relativement compact et satisfaitle condition $(\mathcal{A}_1)$.

(ii) B est un application contractant et satisfaite la condition $(\mathcal{A}_2)$.

(iii) $[x=Bx+Ay, y\in M]\Rightarrow x\in M$.

alors $x\in M$ tel que $Ax+By=x$

Lemme 3.2.1

1. Soit X un espace de Banach, on pose que $B: X\to X$

un $k-$contraction et satisfait $(\mathcal{A}_2)$; alors B est un $\mu-k-$contraction

2. Si $B: X\to X$ est un $\phi-$contraction et satisfait $(\mathcal{A}_2)$; alors B est un $\mu-$contraction

Théorème 3.2.4

Soit M sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe dans un espace de Banach X, soit $A: M\to X$, $B: X\to X$ deux applications continues, si A et B satisfait les condition suivantes :

(i) B est $\mu-k-$contraction pour tout $k\in[0,1]$.

(ii) B est pseudocontractive et $B-I$ est $\psi-$expansive.

(iii) A satisfait $(\mathcal{A}_1)$ et A est $\mu-s-$contraction pour tout $s\in[0,1-k[$.

(iv) $[x = Bx + Ay, y \in M] \Rightarrow x \in M.$

donc l'équation $A(x) + B(x)$ *admet une solution*

Remarque 3.2.1

Quand B *est* $k-$*contraction et satisfait* $(\mathcal{A}_2)$, *par lemme (3.2.1)on avoir que* B *est aussi* $\mu - k-$*contraction, il es facile que* B *est pseudocontractive, et* $I - B$ *est un* $\psi-$*expansive où* $\psi(r) = (1-k)r$ *pour tout* $r \geq 0$, *d'autre part si* $A(M)$ *est relativement compact faible, On obtient facilement cela* A *est* $\mu - s-$*contraction pour tout* $s \in [0, 1-k[$. *Par conséquent, le théorème (3.2.4) améliore le théorème(3.2.3)*

Lemme 3.2.2

Soit M *sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe dans un espace de Banach* X, *soit* $A : M \to X$, *une application continue, satisfait* $(\mathcal{A}_1)$, *si* A *est* $\mu-$*condensing, alors il existe* $x \in M$ *tel que* $x = A(x)$.

Théorème 3.2.5

Soient X *espace de Banach,* M *sous-ensemble fermé, borné,et convexe dans* X, *telle que* $0 \in M$, *soit* $A : M \to X$ *et* $B : M \to X$ *deux applications continues, si* A *et* B *satisfait les condition suivantes :*

1. B *est pseudocontractive .*
2. A *satisfait* $(\mathcal{A}_1)$.
3. $\mu(A(S) + B(S)) < \mu(S)$ $\forall S \subseteq M$ *et* $\mu(S) > 0$.
4. $[x = \lambda(Ax + By), y \in M, \lambda \in]0,1[\ ] \Longrightarrow x \in M.$
5. $I - (A + B) : M \to X$ *est demi-fermé on* 0.

Alors $A + B$ *admet un point fixe dans* M

3.2.2 Domaine non borné

Lemme 3.2.3

Soit M un sous-ensemble non vide, convexe et fermé dans l'espace de Banach X, et on considère ψ la mesure de non compacité faible dans X. On suppose que $A : M \to M$ une application avec les propriétés suivantes :

(1) *$\psi(A(C)) < \psi(C)$ quand C un sous-ensemble borné dans M, qui n'est pas faiblement relativement compact.*

(2) *A continue avec propriété $(\mathcal{A}_1)$.*

(3) *Il existe $x_0 \in M$ et $R > 0$ tels que $Ax - x_0 \neq \lambda(x - x_0)$, $\forall\lambda > 1$, et pour tout $x \in M \cap S_R(x_0)$.*

Alors A admet un point fixe.

Corollaire 3.2.1

Soit X espace de Banach, si $A : M \to M$ est continue, $\mu-$condensing et satisfait la condition $(\mathcal{A}_1)$,

1. *L'équation $x = \lambda A(x)$ admet une solution pour $\lambda = 1$.*
2. *L'ensemble de tout solutions x, pour $\lambda \in]0, 1[$, est un ensemble non borné.*

Théorème 3.2.6

Soit X espace de Banach, soit $A, B : X \to X$ deux applications continues, si A, B satisfait les conditions suivantes

(i) *A application définie sur un sous-ensemble borné dans un ensemble faiblement relativment compact*

(ii) *A satisfait la condition $(\mathcal{A}_1)$.*

(iii) *B est pseudocontractive, et $\mu-$condensing.*

(iv) *$I - B$ $\psi-$expansive, si ψ est strictement croissante ou $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(r) = \infty$. Alors*

(a) *l'équation* $x = B(x) + A(x)$ *admet une solution ,ou.*

(b) *l'ensemble* $\{x \in X : x = B(\frac{x}{\lambda}) + \lambda A(x)\}$ *non borné pour* $\lambda \in]0,1[$

Théorème 3.2.7 *(*[5], *théorème* 2.2)

Soit C *un ensemble non vide, fermé, et convexe dans l'espace de Banach* X*, et* $U \subset C$ *un sous-ensemble ouvert avec* $p \in U$*. Soit* $F : \overline{U} \to C$ *une application continue est satisfait la condition* $(\mathcal{A}_1)$*, si* $F(\overline{U})$ *est faiblement relativement compact, alors :*

1. *l'équation* $Fu = u$ *admet une solution dans* $\overline{U}$*,ou.*

2. *il existe un élément* $u \in \partial U$ *tel que* $u = \lambda Fu + (1-\lambda)p$ *pour tout* $\lambda \in]0,1[$.

Théorème 3.2.8 *(*[4] *théorème 3.22)*

Soit $U \ni 0$ *un sous-ensemble ouvert dans l'espace de Banach* X *et* $\overline{U}$ *la fermeture de* U*, soit* $A : \overline{U} \to X$ *et* $B : X \to X$ *deux applications continues satisfaisant :*

1. $A(\overline{U}\ )$ *faiblement relativement compact et vérifie la condition* $(\mathcal{A}_1)$

2. B *pseudocontractive et* $I - B$ *est* $\psi-$*expansive où* ψ *strictement croissante ou*

$$\lim_{r\to\infty} \psi(r) = \infty$$

3. B *est* $\mu-$*condensing.*

Alors

(i) *l'équation* $Au + Bu = u$ *admet une solution dans* $\overline{U}$*,ou.*

(ii) *il existe un élément* $u \in \partial U$ *tel que* $u = \lambda Au + \lambda B(\frac{u}{\lambda})$*, pour tout* $\lambda \in]0,1[$.

Corollaire 3.2.2 *(*[4] *corollaire 3.23)*

Soit $U \ni 0$ *un sous-ensemble ouvert. dans un espace de Banach* X *, soient* $A : \overline{U} \to X$ *et* $B : X \to X$ *deux applications satisfaisant :*

(1) *A continue ,* $A(\overline{U})$ *relativement faiblement compact et* A *vérifie* $(\mathcal{A}_1)$.

(2) *B $\phi-$contraction et vérifie $(\mathcal{A}_2)$.*

(3) *$I - B$ $\psi-$expansive, où ψ strictement croissante ou $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(r) = \infty$.*

Alors

1. *l'équation $Au + Bu = u$ admet un solution dans $\overline{U}$.*

2. *ou il existe un élément $u \in \partial U$ tel que $u = \lambda Au + \lambda B(\frac{u}{\lambda})$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$.*

3.2.3 Application sur l'équation intégrale non linéare

Soient Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ et X, Y deux espaces de Banach

Définition 3.2.1

Soit la fonction $f : \Omega \times X \to Y$. on dit que f vérifie la condition carathéodory si :

- *pour tout $y \in X$, l'application $x \to f(x, y)$ est mesurable de Ω à Y.*

- *presque tous les $x \in \Omega$, l'application $y \to f(x, y)$ est continue dans X à Y.*

Si f une fonction de carathéodory, alors on définit l'opérateur

$$N_f : \mathcal{M}(\Omega, X) \to \mathcal{M}(\Omega, Y) \quad par \quad N_f\psi(t) = f(t, \psi(t)),$$

dit opérateur de Nemytskji associé à f

Lemme 3.2.4

Soient X et Y deux espace de Banach, et $f : X \to Y$. une fonction de Carathéodory, alors l'opérateur de Nemytskij

$N_f : L^1(\Omega, X) \to L^1(\Omega, Y)$, vérifé l'inégalité

$$\| f(t, x) \|_Y \leq \xi(t) + \eta \| x \|_X$$

tel que $\eta > 0$ et la fonction $\xi \in L^1_+(\Omega)$, avec l'espace $L^1_+(\Omega)$ noté par le cône positif de l'espace $L^1(\Omega)$

Lemme 3.2.5

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimensions finies, soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, si $f : \Omega \times X \to Y$ la fonction de Carathéodory et $N_f : L^1(\Omega, X) \to L^1(\Omega, Y)$,alors N_f satisfait la condition $(\mathcal{A}_2)$.

Maintenant, nous étudions l'existence de solutions pour l'équation intégrale Hammerstein généralisée suivante:

$$\varphi(t) = g(t, \varphi(t)) + \lambda \int_\Omega k(t,s) f(s, \varphi(s)) ds \qquad t \in \Omega \tag{3.2.1}$$

où les fonctions f, g et k satisfaisant les hypothèses suivantes:

1. *La fonction $g : \Omega \times X \to X$ fonction mesurable, $g(.,0) \in L^1(\Omega, X)$, et g est une $\phi-$contraction par rapport à la deuxième variable i,e, s'il existe une fonction non décroissante, continue $\phi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $\phi(0) = 0$, $\phi(r) < r$, pour tout $r > 0$ et*

   $$\| g(t,x) - g(t,y) \|_X \leq \phi(\| x - y \|_X), \ \| g(t,x) - g(t,y) \|_{L^1(\Omega,X)} \leq \phi(\| x - y \|_{L^1(\Omega,X)})$$

   pour tout $t \in \Omega$ et $\forall\ x, y \in X$.

2. *$f : \Omega \times X \to X$ est une fonction de Carathéodory et $N_f : L^1(\Omega, X) \to L^1(\Omega, X)$.*

3. *La fonction $k : \Omega \times \Omega \to L^1(\Omega, X)$ est une fonction mesurable où $\mathcal{L}(Y, X)$.*

4. *Pour tout $t \in \Omega$, la fonction $\rho(t) : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X), s \to \rho(t)(s) = k(t,s)$ appartient à $L^\infty(\Omega, X)$, et la fonction $\rho : \Omega \to L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(Y, X))$, $t \to \rho(t)$ appartient à $L^1(\Omega, L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(Y, X))$.*

5. *Il existe un constante $M > 0$ indépendent de $\lambda^* \in]0,1[$ telle que toute solution de l'équation intégrale*

   $$\varphi(t) = \lambda^* g(t, \frac{1}{\lambda^*}\varphi(t)) + \lambda^* \int_\Omega k(s,t) f(s, \varphi(s)) ds\ , \ \ t \in \Omega$$

   satisfait $\| \varphi \|_{L^1(\Omega,X)} \neq M$

   on noté cette équation (3.2.1) peut être écrite sous la forme abstraite:

$$\varphi = A\varphi + B\varphi$$

où B l'opérateur de Nemytskji associe à la fonction g

$$\begin{aligned} B \quad &: \quad L^1(\Omega, X) \to L^1(\Omega, X) \\ \varphi \quad &\to \quad B\varphi : \Omega \to X; \qquad B\varphi(t) = g(t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

et A apparaît comme la composition de l'opérateur Nemytskij associé à f avec opérateur intégrale linéare λC où C est un opérateur de Fredholm défini par

$$\begin{aligned} B \quad &: \quad L^1(\Omega, Y) \to L^1(\Omega, X) \\ \psi \quad &\to \quad C\psi : \Omega \to X, \quad C\psi(t) = \int_\Omega k(t,s)\psi(s)ds \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2

(i) *si $\phi(t) = \alpha t$,pour tout $\alpha \in [0, 1]$ dans la condition (1) alors*

$\| g(t, x) - g(t, y) \|_X \leq \phi(\| x - y \|_X)$,*implique* $\| g(t, x) - g(t, y) \|_{L^1(\Omega,X)} \leq \phi(\| x - y \|_{L^1(\Omega,X)})$ *et*

$\| g(t, x) - g(t, y) \|_X \leq \phi(\| x - y \|_X)$ *devient* $\| g(t, x) - g(t, y) \|_X \leq \alpha \| x - y \|_X$.

(ii) *Par les hypothèses (3) et (4), on a pour tout $\psi \in L^1(\Omega, X)$*

$$\left\| \int_\Omega k(s,t)\psi(s)ds \right\|_X \leq \| \rho(t) \|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{L}(Y,X))} \| \psi \|_{L^1(\Omega,X)}$$

donc

$$\| C\psi \|_{L^1(\Omega,X)} = \int_\Omega \left\| \int_\Omega k(s,t)\psi(s)ds \right\|_X dt \leq \| \rho(t) \|_{L^1(\Omega,L^\infty)} \| \psi \|_{L^1(\Omega,X)}$$

Ceci implique que l'opérateur linéaire C *est continu, donc faiblement continu de* $L^1(\Omega, Y)$ *dans* $L^1(\Omega, X)$ *et cela* $\| C \| \leq \| \rho \|_{L^1(\Omega, L^\infty)}$.

(iii) *De l'hypothèse* (1), *on obtient*

$$\| g(t,u) \|_X \leq \| g(t,0) \|_X + \| g(t,u) - g(t,0) \|_X$$

$$\leq \| g(t,0) \|_X + \phi(\| u \|_X)$$

$$\leq \| g(t,0) \|_X + \| u \|_X$$

pour tout $u \in X$, *et* $t \in \Omega$, *telle que* $\| g(t,0) \|_{L^1_+(\Omega)}$.

Théorème 3.2.9

Soient X, Y *deux espaces de Banach de dimensions finies, et* Ω *un domaine borné dans* $\mathbb{R}^n$. *Supposons que les hypothèses* $(1) - (5)$ *sont valides, alors l'équation (3.2.1) admet une solution dans* $L^1(\Omega, X)$

Preuve.

- *On applique le corollaire (3.2.2), avec*

$$U = \{\varphi \in L^1(\Omega, X) : \| \varphi \|_{L^1(\Omega,X)} < M\}$$

Soient ψ,$\theta \in L^1(\Omega, X)$, *il suit l'hypothèse* (1) *alors*

$$\| B(\psi) - B(\theta) \|_{L^1(\Omega,X)} = \int_\Omega \| g(t,\psi(t)) - g(t,\theta(t)) \|_X \, dt$$

$$= \| g(t,\psi(t)) - g(t,\theta(t)) \|_{L^1(\Omega,X)}$$

$$\leq \phi(\| \psi - \theta \|_{L^1(\Omega,X)}),$$

Ce qui implique que B *est un* $\phi-$*contration dans* $L^1(\Omega, X)$, *par la remarque 3.2.2 (iii),* B *est satisfait la condition* $(\mathcal{A}_2)$.

- *par le lemme 3.2.5 et la remarque 3.2.2(ii), Nous savons que* A *est continue, ensuite nous montrons que* A *satisfait la condition* $(\mathcal{A}_1)$.

  en effet,soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite faiblement convergente de* $L^1(\Omega, X)$.

  en utilisant que N_f *satisfait la condition* $(\mathcal{A}_2)$, $(N_f(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$, *est une sous-suite faiblement convergente, noté par* $(N_f(\varphi_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$.

de plus la continuité de l'opérateur linéare C implique sa continuité faible dans $L^1(\Omega, X)$, ainsi, la suite $((C \circ N_f)(\varphi_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire

$(A(\varphi_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque pour tout $t \in \Omega$,

en utilisant, le théorème de convergence de Vitali

On conclusion, que $(A(\varphi_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ fortment convergent dans $L^1(\Omega, X)$, alors A satisfait la condition $(\mathcal{A}_1)$

- *Enfin, nous prouvons que $A(\overline{U})$ faiblement relativement compact, il suffit de montrer que*

$$\mu(A(\overline{U})) = \lim_{\epsilon\to 0}\sup\left\{\sup_{\varphi\in\overline{U}}\left[\int_D \| A\varphi(t) \|_X \, dt, mes(D) < \epsilon\right]\right\} = 0$$

pour tout $D \subseteq \Omega$ et pour tout $\varphi \in U$, on a

$$\int_D \| A\varphi(t) \|_X \, dt = \int_D \| \lambda \int_\Omega k(t,s) f(s,\varphi(s)) ds \|_X \, dt$$

$$\leq |\lambda| \left[\int_\Omega \| f(s,\varphi(s)) \|_Y \, ds\right] \int_D \| \rho(t) \|_{L^\infty} \, dt$$

$$\leq l \int_D \| \rho(t) \|_{L^\infty} \, dt$$

avec $l = |\lambda| \left[\| \xi \|_{L^1_+(\Omega)} + \eta M\right]$ et la fonction ξ définie dans le lemme (3.2.5), depuis $\rho \in L^1(\Omega, L^\infty(\Omega, L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(Y,X))))$.

Il est bien connu que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup\left\{\int_D \| \rho(t) \|_{L^\infty} \, dt, \quad mes(D) < \epsilon\right\} = 0$$

d'où $A(\overline{U})$ relativement faiblement compact, par conséquent, toutes les conditions de corollaire (3.2.2) sont satisfaisnt grâce à l'hypothèse (5), la possibilité (2) dans le corollaire (3.2.2) ne tient pas.

Donc la somme $A+B$ *admet un point fixe dans* $\overline{U}$, *alors l'équation (3.2.1).admet un solution dans* $\overline{U}$.

■

Conclusion

Pour résoudre une équation intégrale

$$\varphi - A\varphi = f \tag{1}$$

il est obligé de faire suivre à la théorie alternative de Fredholm .

Dans le cas, A est linéaire on montre que si A est compacte et $(I - A)$ est de Fredholm donc l'équation admet une solution .

La théorie de Riesz montre que l'opérateur $(I - A)$ quand il est injective, il est surjective $(I - A)$ est inversible .

Notre travail est consiste de résoudre même type de ces équations mais utilisons la mesure de non compacité au lieu des propriétés topologique (plusieurs définitions mais elles déficils d'applique)

Dans le cas non linéaire, on étude l'équation de Hammertein, où la forme

$$\varphi - AN = f \tag{2}$$

telle que N l'opérateur de Nemytskji

On trouve la solution à l'aide de la théorie du point fixe de Schauder, et montre contraction en utilisant la mesure de non compacité.

Bibliographie

[1] R.R.Akhmerov, et M.I.Kamenskii, Measure of nncompacteness and condensing operators,birkhäuser verlag basel, 1992.

[2] J.M. Ayerbe ,T. Dominguez ,G. Lopez Acedo ,Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Springer BaselAG, 1997.

[3] J. Banas's et M.Mursaleen, Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations , Springer India, 2014.

[4] Gang.Cai, et Shangquan Bu, Krasnoselskii-type fixed point theorems with applications to Hammerstein integral equations in L^1 spaces, Math. Nachr,1–14 (2013).

[5] S.Djebali, Z,Sahnoun, Nonlinear alternatives of Schauder and Krasnoselskii types with applications to Hammerstein integral equations in L1 spaces, J. Differential Equations vol 249 (2010) 2061–2075.

[6] B.Gagui, Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz ,Mémoire de Doctorat, université de M'sila, 2015.

http://www.univ-msila.dz/fr/

[7] A. Jeribi,Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices, Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[8] R.P,Kanwal. Linear Integral Equations, Theory and Technique. Academic Press, New York 1971.

[9] A.Khirani, résolution des équations intégrales non lineare type volterra, Mémoire de Magistère, université de M'sila ,2011.

http://www.univ-msila.dz/fr/

[10] R,Kress. Linear Integral Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.

[11] M.Nadir, Cours sur les équations intégrales, université de M'sila, 2016.

http://www.mostefanadir.com/Integral%20Equations.htm

[12] O.E.H.Remili, equation integrales de frontiere exemples de resolution numerique, Mémoire de Magistère, l'Université d'oran es-senia.

[13] L.Seymour, Schaum's outline of theory and problems of general topology, l'Université du Michigan, 1965.