

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
Université Mohamed Boudiaf de M'sila



Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

## Thème

---

# Approximation numérique d'un problème non-linéaire en 2D

---

Présentée par :  
Marhoune wafia radia

Soutenu publiquement le :.../06/2022

le jury composé de :

A.Djerad	M.C.A	Université de M'sila	<b>Président.</b>
N.Bounab	M.C.B	Université de M'sila	<b>Encadreur .</b>
H.Mihoubi	M.C.B	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2021/2022

# Remerciements

Je remercie d'abord *Dieu* Dieu Tout Puissant, de m'avoir donnée la force et le courage et de la santé pour faire ce travail, malgré tous les obstacles.

Je remercie également mon encadreur, *M<sup>me</sup> Bounab Noura*, qui m'a aidé dans mon travail et a contribué au développement de cette modeste recherche, Je la remercie également pour la qualité du sujet proposé.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury ( *M<sup>r</sup>.Djerad* et *M<sup>r</sup>.Mihoubi* ) d'avoir accepté d'examiner et évaluer mon travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et de l'enrichir par leur propositions.

Je voudrais également remercier ma famille (*ma mère, mes frères, mes tantes et oncles*) pour leur soutien et leur assistance tout au long de mes études.

Je remercie aussi tous les professeurs et tous les étudiants de département de mathématiques.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicaces

Au sens de l'amour et de la compassion, pour le sourire de la vie et le secret de l'existence, à celle qui a été le secret de mon succès, à la plus précieuse ma Mère *Chaki Rachida* .

A mon cher pere *Djamal Marhoune* ,que Dieu lui fasse miséricorde.

Au cher dans mon coeur mon mari *kouchida bilal* .

A mon fils bien-aimé *kouchida Abd el Moneim* .

A mes très chers frères ...*Karima ...Karim ...Lokman*

Au coeurs purs et bons, mes amis et mes proches que j'ai dégusté avec eux les plus beaux moments

à tous mes professeurs honorés et à tous les compagnons de mon humble chemin.

Et je prie Allah d'en faire une source d'inspiration pour chaque étudiant.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>I</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>II</b>
<b>table des matières</b>	<b>II</b>
<b>Notation</b>	<b>IV</b>
<b>Table des figures</b>	<b>VII</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires et définitions</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Définition d'un fluide . . . . .	4
1.2.1 Description de Lagrange . . . . .	4
1.2.2 Description d'Euler . . . . .	5
1.2.3 Fluide parfait . . . . .	5
1.2.4 Fluide incompressible . . . . .	6
1.3 Statique des fluides . . . . .	6
1.4 Dynamique des fluide . . . . .	7
1.4.1 Le débit . . . . .	7
1.4.2 Les écoulements des fluides . . . . .	8
1.4.3 Équations de mouvement des fluides . . . . .	10
<b>2 Modélisation et simulation</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	15
2.2 La méthode des volumes finis . . . . .	15
2.2.1 Principe de méthode . . . . .	15
2.3 Procédure de résolution en utilisant le code Fluent . . . . .	18
2.4 La présentation des logiciels de calcul . . . . .	19
2.4.1 Le logiciel Gambit . . . . .	19
2.4.2 Le logiciel FLUENT . . . . .	21
2.5 Position du problème . . . . .	22
<b>3 Discussion des résultats</b>	<b>24</b>
3.1 Les résultats de probleme pour le premier cas ( $D=0.1m$ ) . . . . .	24
3.2 Les résultats de probleme pour le deuxième cas ( $D=0.2m$ ) . . . . .	28
3.3 Discussion des résultats . . . . .	32
<b>Conclusion générale</b>	<b>34</b>

<b>Annexe 01</b>	<b>35</b>
<b>Annexe 02</b>	<b>42</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>51</b>
<b>Résumé</b>	<b>53</b>

# Notation

$dm$  : masse élémentaire en (kg)  
 $T$  : température  
 $dm_1$  : masse élémentaire entrante comprise entre le section  $S_1$  et  $S'_1$   
 $dm_2$  : masse élémentaire sortante comprise entre le section  $S_2$  et  $S'_2$   
 $dt$  : intervalle de temps en (s)  
 $q_m$  : la masse de fluide par unité de temps en (kg/s)  
 $\rho$  : masse volumique en (kg/s)  
 $v$  : vitesse moyenne du fluide a travers  $S$  en (m/s)  
 $P$  : La pression  
 $u$  : la vitesse  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  : Le vecteur de la vitesse  
 $\phi(x, y)$  : la fonction potentielle  
 $g$  : accélération de la pesanteur en  $m/s^2$ .  
 $S$  : section de la veine fluide en ( $m^3$ )  
 $S_1$  et  $S_2$  : sections d'entrée et la sortie du fluide a  $t$   
 $l$  : la longueur du cylindre  
 $M$  : masse comprise entre  $S_1$  et  $S_2$   
 $t$  : l'instant le fluide compris entre  $S_1$  et  $S_2$  a une masse égale a ( $dm_1 + M$ )  
 $t + dt$  : l'instant le fluide compris entre  $S'_1$  et  $S'_2$  a une masse égale à ( $M + dm_2$ ).  
 $q_v$  : volume de fluide par unité de temps en ( $m^3/s$ )  
 $dv$  : volume élémentaire en ( $m^3$ )  
 $dv_1$  : volume élémentaire entrante comprise entre le section  $S_1$  et  $S'_1$   
 $dv_2$  : volume élémentaire sortante comprise entre le section  $S_2$  et  $S'_2$   
 $\bar{\omega}$  : poids volumique  
 $dS$  : la section droite du cylindre  
 $S_1$  et  $S_2$  : sections d'entrée et la sortie du fluide a  $t$   
 $S'_1$  et  $S'_2$  : les sections d'entrée et de sortie du fluide à  $t' = (t + dt)$   
 $dx_1$  et  $dx_2$  : les déplacements des section  $S_1$  et  $S_2$  pendant l'intervalle de  $dt$   
 $\vec{Z}$  : vertical dirigé vers le haut  
 $Z_1, Z_2$  et  $Z$  : allituides des centres de gravité des masses  $dm_1, dm_2$   
 $F_1, F_2$  : normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des section  $s_1$  et  $s_2$   
 $E_{cin}$  : d'énergie cinétique du fluide.  
 $E_{pot}$  : d'énergie potentielle du fluid.  
 $E_{mec}$  : d'énergie mécanique du fluide.  
 $x, y$  : coordonnées cartésiennes  
 $\vec{A}$  : L'accélération  
 $m$  : La masse  
 $S$  : La surface  
 $V$  : Le volume  $Dx$  : la distance du volume de contrôle suivant  $x$   
 $Dy$  la distance du volume de contrôle suivant  $y$   
 $dx_e, dx_w, dx_n, dx_s$  : sont respectivement les distances entre le noeud  $P$  et les noeuds voisins  $E, W, N, S$

$P$  : point au centre du volume fini

$E$  : point à l'est du point  $P$

$N$  : point au nord du point  $P$

$W$  : point à l'ouest du point

$S$  : point au sud du point  $P$

$\Gamma$  : coefficient de diffusion

$S_\phi$  : Terme source

$x, y$  : coordonnées cartésiennes

$\vec{dF}$  : la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire  $dS$  de normale  $\vec{n}$  entre le fluide et le milieu extérieur.

$\vec{dF}_T$  : une composante tangentielle à  $dS$ .

$\vec{dF}_N$  : une composante normale à  $dS$ .

# Table des figures

FIGURE 1.1 :fluide parfait

FIGURE 1.2 :Représentation les forces dans cylindre élémentaire

FIGURE 1.3 :Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme.

FIGURE 1.4 :une veine d'un fluide incompressible

FIGURE 2.1 :division du domaine de calcul en une série de volume de contrôle

FIGURE 2.2 :Discretisation en volumes finis du domaine d'étude dans le cas bidimensionnel.

FIGURE 2.3 :volume de contrôle typique.

FIGURE 2.4 :volume de contrôle décalé vers la droite.

FIGURE 2.5 :volume de contrôle décalé vers le haut.

FIGURE 2.6 :Schéma récapitulatif d'une simulation complète sous Gambit et Fluent.

FIGURE 2.7 :maillage structuré et non structuré.

FIGURE 2.8 :principaux d'element utilisé en 2D.

FIGURE 2.9 :Structure de base du code fluent.

FIGURE 2.10 :Description de problème.

FIGURE 2.11 :Vue globale de Gambit.

FIGURE 2.12 :Différentes opérations pour créer la géométrie.

FIGURE 2.13 :Outils pour créer la géométrie.

FIGURE 2.14 :Menu point.

FIGURE 2.15 :Menu ligne.

FIGURE 2.16 :Maillage sous Gambit.

FIGURE 2.17 :Conditions aux limites.

FIGURE 2.18 :Vue globale du Fluent.

FIGURE 2.19 :Ouvrir le fichier (msh).

FIGURE 2.20 :Définir le modèle mathématique, le type d'écoulement et le fluide.

FIGURE 2.21 :Fenêtre des conditions aux limites

FIGURE 2.22 :Initialisation des variables.

FIGURE 2.23 :Les fonctions de Post traitement.

FIGURE 2.24 :volume de contrôle dans le cas monodimensionnel.

FIGURE 3.1 :Le maillage.

FIGURE 3.2 :Contour Pression statique .

FIGURE 3.3 :Contour La pression dynamique.

FIGURE 3.4 :Contour La pression totale .

FIGURE 3.5 :La pression totale.

FIGURE 3.6 :La fonction de courant

FIGURE 3.7 :Le maillage (D=0.2m)

FIGURE 3.8 :Contour de La pression statique (D=0.2m)

FIGURE 3.9 :Contour de La pression dynamique (D=0.2m)

FIGURE 3.10 :Contour de Pression totale (D=0.2m)

FIGURE 3.11 :La Pression totale (D=0.2m)

FIGURE 3.12 :La fonction de courant (D=0.2m)



# Introduction générale

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre autour de différents objets sont considérés comme une branche fondamentale largement utilisée dans plusieurs applications industrielles et urbaines et surtout dans l'Hydraulique fluviale qui est nécessaire pour la conception, l'aménagement et la construction d'ouvrages hydrauliques tels que les digues, les seuils, les déversoirs et d'autres constructions tels que les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet, les réservoirs et particulièrement pour l'architecture des barrages.

Ce type des écoulements avait été l'objet d'une nombreuse études théoriques, expérimentales et numériques, les écoulements à surface libre désignent les écoulements dans lesquels le fluide qui s'écoule est en contact avec l'atmosphère.

Cette terminologie est un cas particulier des écoulements de deux fluides qui ne sont pas miscibles et qu'ils sont séparés par une interface. Dans le cas hydrostatique, l'interface est une surface plane horizontale. Dans le cas dynamique l'équation de cette interface est l'inconnue du problème étudié.

Les problèmes où les forces de la gravité et les effets de la tension de la surface libre sont considérés deviennent difficiles à résoudre analytiquement à cause des conditions non-linéaires sur la frontière libre de forme inconnue. Ces difficultés augmentent selon la géométrie du domaine de l'écoulement, les conditions aux limites d'une part et aux propriétés de fluide d'autre part.

Mais à partir des années soixante, la disponibilité et l'accès à des ordinateurs ont ouvert une nouvelle discipline de la mécanique des fluides : "Mécanique computationnelle des fluides". Grâce à cette dernière, des solutions asymptotiques sont tenues au voisinage d'un petit paramètre ( le nombre de Weber ou le nombre de Froude ou bien le nombre de Reynolds,...etc.)

Plusieurs travaux sont effectués dans ce domaine basés sur différentes méthodes comme la méthode Schwartz-Christoffel et quelques transformations conformes, Et d'autres comme la méthode de troncation de la séries et les différences finis.

Parmi ces travaux celle de Elcrat et Trefethen, Vanden-Broeck et Keller, E.O. Tuck, Ackerberg et Liu. Et aussi par plusieurs autres auteurs tels que : H. Mekias, Bouderah et Mekias, A. Gasmi et H. Mekias, Birkhoff et Zarantonello, N. Bounab et B. Bouderah.

Ce mémoire est contient trois chapitres :

Le premier chapitre : englobe quelques définitions concernant la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement de fluide.

Le deuxième chapitre : est consacré de donner une simple présentation de la méthode des

volumes finis ainsi que son principe et quelques schémas de décritisation, aussi une présentation de code de calcul Gambit-Fluent.

Et finalement il contient la position de notre problème qui est un écoulement potentiel bi-dimensionnel dans un canal devant un obstacle de forme demi-disque en négligeant les force de la gravité et la tension de la surface.

Dans le troisième chapitre, on fait une lecture et discussion des résultats trouvées dans le deuxième chapitre concernant la pression statique et dynamique, la fonction de courant pour quelques valeurs de diamètre de demi-disque obstacle de l'écoulement.

En fin, on termine par une conclusion générale et perspectives.  
Ce travail est complété par une présentation de deux annexes où on a présenter la méthode des volumes finis dans le cas unidimensionnel aussi avec l'équation de transport  
Et on a fait une simple présentation concernant le code de calcul Gambit-Fluent.

---

# Chapitre 01

---

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et concepts de base de la mécanique des fluides.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires et définitions

### 1.1 Introduction

On présente dans ce chapitre quelques définitions et propriétés des fluides : Cinématique et dynamique d'un fluide parfait incompressible.

### 1.2 Définition d'un fluide

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre des particules matérielles, très petites et libres qui se déplacent les unes par rapport aux autres.

Un fluide est donc un milieu matériel à contenu déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Le fluide peut être un liquide comme il peut être un gaz.

Soit  $\Omega$  un domaine occupé par un milieu continu rapporté à un référentiel  $R(O, x, y, z)$ .

En mécanique des milieux continus, il y a deux façons de décrire le mouvement des particules : description Eulerienne et description Lagrangienne, chacune est plus adaptée au milieu continu considéré.

#### 1.2.1 Description de Lagrange

Cette méthode consiste à étudier les différentes quantités ( $P, \rho$ , température  $T$  . . .etc) de chaque particule individuellement lors de son mouvement. Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées. L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position  $\vec{r} = \vec{r}(M_0, t)$  à tout instant pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \text{ ou } \vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t)$$

C'est-à-dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t)$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t), \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(M_0, t)$$

### 1.2.2 Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant les composants de la vecteur vitesse et autres quantités physique en chaque point de l'espace c'est -à-dire ,on fixe un point dans l'espace et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

A l'instant  $t_1$  , on détermine en  $M$  une particule  $p_1$  de vitesse  $\vec{u}$  et d'autres caractéristiques physique  $K$ .

Et à l'instant  $t_2 = t_1 + \partial t$  , on trouve au même point  $M$  de l'espace , une autre particule  $p_2$  de vitesse et des caractéristiques physiques différentes.

Donc, on a en  $M$  et à l'instant  $t_1$

$$\vec{u} = \vec{u}(p_1, t_1) = \vec{u}(x, y, z, t_1)$$

Et à l'instant  $t_2$  , on a au même point  $M$

$$\vec{u} = \vec{u}(p_2, t_2) = \vec{u}(x, y, z, t_2)$$

### 1.2.3 Fluide parfait

Est un fluide dont les molécules se déplacent sans aucun frottement les unes par rapport aux autres (viscosité nulle).

c à d :

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée  $\Sigma$  fictive ou non.

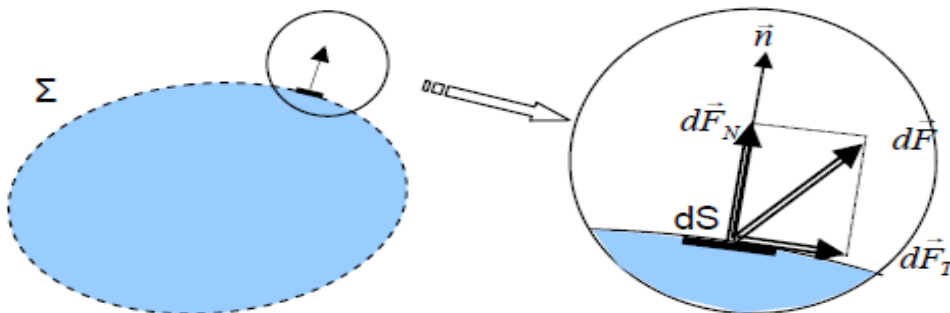


FIGURE 1.1 :fluide parfait

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante  $\vec{dF}_T$  est nulle. Autrement dit, la force  $\vec{dF}$  est normale à l'élément de surface  $dS$ .

### 1.2.4 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

## 1.3 Statique des fluides

Considérons un élément de volume d'un fluide incompressible (liquide homogène de  $\bar{\omega}$ ). Cet élément de volume a la forme d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{u})$  qui fait un angle  $\alpha$  avec l'axe vertical  $(O, \vec{Z})$  d'un repère  $R(O, \vec{X}, \vec{Z})$ .

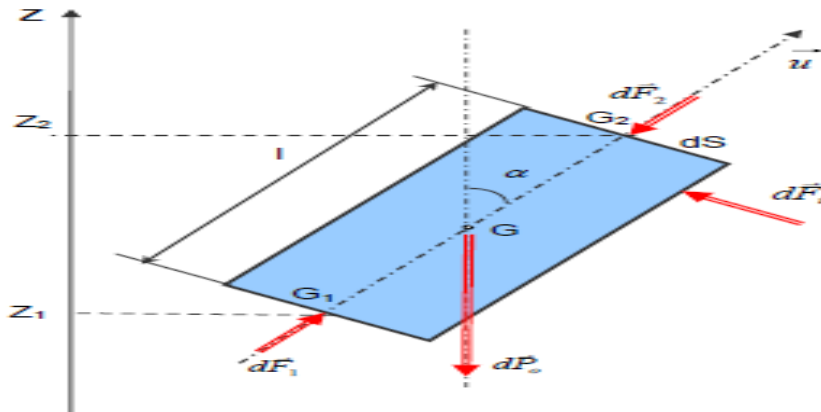


FIGURE 1.2 :Représentation les forces dans cylindre élémentaire

Soit  $G_1$  d'altitude  $Z_1$  et  $G_2$  d'altitude  $Z_2$ , les centres des sections droites extrêmes.

Etudions l'équilibre du cylindre élémentaire, celui-ci est soumis aux :

- actions à distance : son poids :  $\vec{dP}_0 = -\bar{\omega}l dS \vec{Z}$

- actions de contact : forces de pression s'exerçant sur :

◆ la surface latérale :  $\Sigma \vec{dF}_i$ .

◆ les deux surfaces planes extrêmes :  $\vec{dF}_1 = -P_1.dS.(-\vec{u}) = P_1.dS.\vec{u}$  et  $\vec{dF}_2 = -P_2.dS.\vec{u}$

avec  $P_1$  et  $P_2$  les pressions du fluide respectivement en  $G_1$  et en  $G_2$ .

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\vec{dP}_0 + \Sigma \vec{dF}_i + \vec{dF}_1 + \vec{dF}_2 = \vec{0}$$

En projection sur l'axe de symétrie  $(G, \vec{u})$  du cylindre,

$$-\bar{\omega}.l.dS.\cos(\alpha) + P_1.dS - P_2.dS = 0$$

Exprimons la différence de pression  $P_1 - P_2$  après avoir divisé par  $dS$  et remarqué que :

$$l.\cos(\alpha) = Z_2 - Z_1.$$

$P_1 - P_2 = \bar{\omega}(Z_2 - Z_1) = \rho g(Z_2 - Z_1)$  : Relation fondamentale de l'hydrostatique.

Autre forme plus générale :

En divisant les deux membres de la relation précédente par  $\bar{\omega}$  :

$$\frac{P_1}{\bar{\omega}} + Z_1 = \frac{P_2}{\bar{\omega}} + Z_2. \text{ Ou encore } \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

Comme  $G_1$  et  $G_2$  ont été choisis de façon arbitraire à l'intérieur d'un fluide de poids volumique  $\bar{\omega}$ , on peut écrire en un point quelconque d'altitude  $Z$ , ou règne la pression  $p$  :

$$\frac{P}{\bar{\omega}} + Z = \frac{P}{\rho g} + Z = Cte.$$

## 1.4 Dynamique des fluide

### 1.4.1 Le débit

Est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

#### Débit massique :

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport  $\frac{dm}{dt}$  quand  $dt$  tend vers 0 :

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

où :

en tenant compte des équations précédentes on obtient :

d'aprèe FIGURE 1.4

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho s_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho s_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Avec :

$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = \|\vec{v}_1\|$  vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide a travers  $S_1$  et  
 $\frac{dx_2}{dt} = v_2 = \|\vec{v}_2\|$  vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide a travers  $S_2$

Danc

$$q_m = \rho s_1 v_1 = \rho s_2 v_2$$

soit dans une section droit quelconque  $s$  de la veine fluide a travers loquelle le fluide s'écoule a la vitesse  $v$ .

$$q_m = \rho s v$$

### Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport  $\frac{dv}{dt}$  quand  $dt$  tend vers 0 :

$$q_v = \frac{dv}{dt}$$

telle que :

$dv$  :volume élémentaire en ( $m^3$ ) ayant traversé une surface  $S$  pendant un intervalle de temps  $dt$ .

On a

$$dv = \frac{dm}{\rho} \iff q_v = \frac{q_m}{\rho}$$

$$q_v = s \cdot v$$

### Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$q_m = \rho \cdot q_v$$

## 1.4.2 Les écoulements des fluides

Dans la vie quotidienne , dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements sont toujours présents.La circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine.

### Écoulement permanent

Un écoulement est dit permanent (ou stationnaire) lorsque toutes les grandeurs caractéristiques du mouvement sont invariables dans le temps (vitesse, masse volumique, pression ,température, etc...), ce qui se traduit symboliquement par :

$$\partial_t u = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t P = 0 .$$

### Écoulement irrotationnel

On dit qu'un l'écoulement est irrotationnel si :

$$rot \vec{v} = 0.$$

où  $v$  represente la vitesse de l'écoulement

### Écoulement potentiel

On dit que l'écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est dirivé d'un potentiel c'est-à-dire :

$$\vec{u} = \nabla \phi$$

$$u = \frac{d\phi}{dx}; v = \frac{d\phi}{dy}$$

La fonction  $\phi(x, t)$  est le potentiel des vitesses.

### Écoulement uniforme

Un écoulement bidimensionnel a surface libre est dit uniforme si l'écoulement est devitesse constante  $A1 = A2$ .

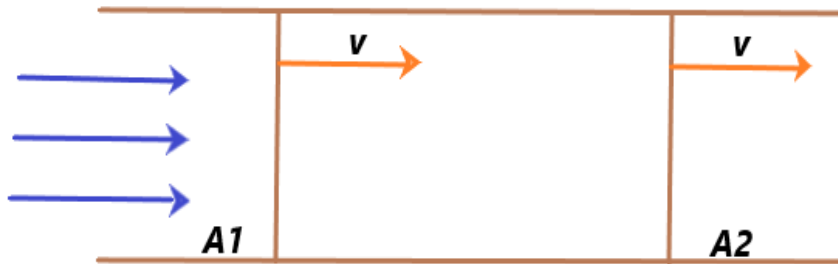


FIGURE 1.3 : Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme.

### Écoulement incompressibles

Un écoulement est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure sa masse volumique est constante.

$$\rho = cte.$$

### 1.4.3 Équations de mouvement des fluides

On s'intéresse aux quelques équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides en particulier :

- L'équation de continuité
- L'équation d' Euler
- Le théoreme de Bernoulli

#### L'équation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  aimée d'un écoulement permanent .

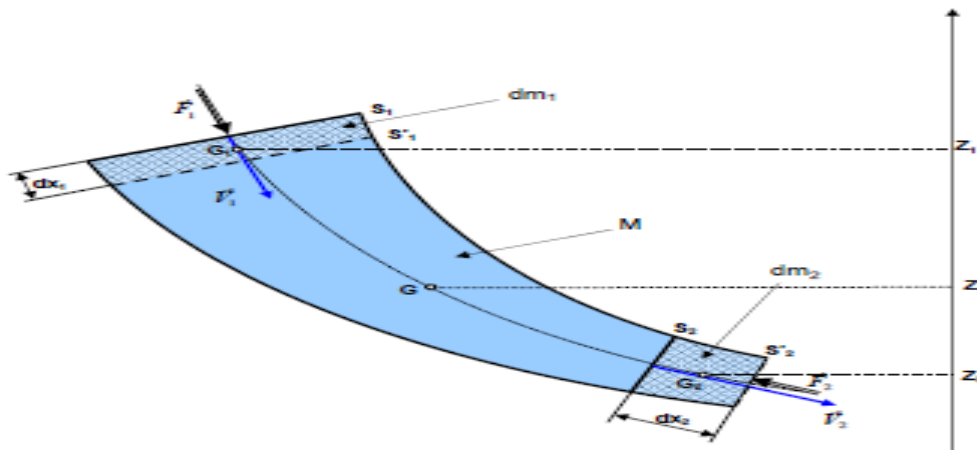


FIGURE 1.4 :une veine d'un fluide incompressible

par consevation de la masse :  $dm_1 + M = M + dm_2$

en simplifiant par  $M$  on aura :  $dm_1 = dm_2$

danc :  $\rho_1 dv_1 = \rho_2 dv_2$

ou encore :  $\rho_1 S_1 dx_1 = \rho_2 S_2 dx_2$

est on divisant par  $dt$  on abouti à :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \iff \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2$$

puisque le fluide est incompressible

$\rho_1 = \rho_2 = \rho$  : on obtient l'équation de continuite suivante :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2$$

**Cas1** : le fluide est **incompressible**

$$(\rho = cte) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

pour un écoulement stationnaire ou instationnaire, cet écoulement est dit isovolume.

**Cas2** : l'écoulement est **stationnaire**

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right) \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho$$

En dehors du **cas1**, il existe la possibilité d'un écoulement **isovolume** tels que :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0$$

où les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point au vecteur vitesse.

### Le principe de conservation de la quantité de mouvement

Si la force externe agissant sur un objet, ou sur un système d'objets (un système isolé) est nulle, alors la quantité de mouvement total de l'objet ou du système d'objet est de mesure constante.

### L'équation d'Euler

L'équation d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\Sigma \overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}; \text{ avec } \vec{P} = m \cdot \vec{V}_G : \text{ quantité de mouvement.}$$

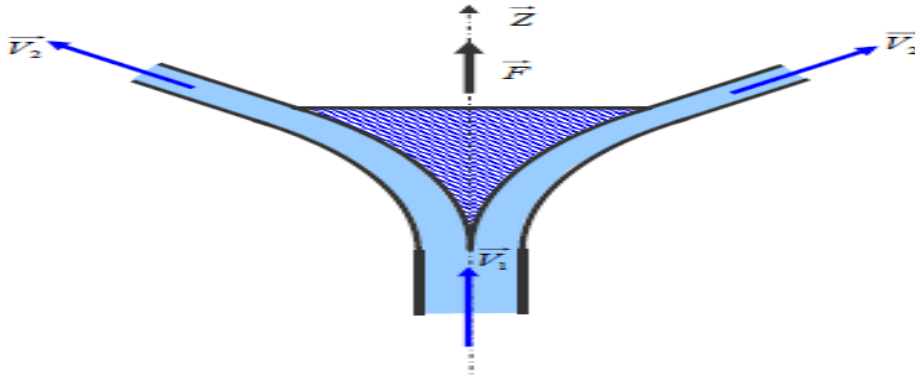
Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent. On peut dire que :

La résultante  $\Sigma \overrightarrow{F}_{ext}$  des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par  $S_1$  et  $S_2$ ) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en  $S_1$  à une vitesse  $\vec{V}_1$  et sort par  $S_2$  à une vitesse  $\vec{V}_2$ .

$$\Sigma \overrightarrow{F}_{ext} = q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

**Exemple**

Considérons un obstacle symétrique par rapport à l'axe  $\vec{Z}$ . Le jet d'un écoulement de débit massique  $q_m$ , de vitesse  $\vec{V}_1$  et de direction parallèle à l'axe  $\vec{Z}$ , percute l'obstacle qui le dévie d'un angle  $\beta$ . Le fluide quitte l'obstacle à une vitesse  $\vec{V}_2$  de direction faisant un angle  $\beta$  par rapport à l'axe  $\vec{Z}$



La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :  $q_m V_1$  porté par l'axe  $\vec{Z}$ .

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :  $q_m V_1 \cos(\beta)$  porté par l'axe  $\vec{Z}$ .

La force opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R = q_m V_2 \cos(\beta) - q_m V_1$$

La force  $F$  exercée sur l'obstacle en direction de  $\vec{Z}$  est égale et opposée à celle ci

$$F = q_m (V_1 - v_2 \cos(\beta))$$

**Théoreme de Bernoulli**

Reprenons le schéma de la veine fluide avec les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait et incompressible
- L'écoulement est permanent
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse

Pour (FIGURE 1.4) a l'instant  $t$  le fluide de masse  $(dm_1 + M)$  est compris entre  $S_1$  et  $S_2$ . alors l'énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 g Z_1 + M g Z) + \frac{1}{2} dm_1 V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$$

Pour a l'instant  $t'=(t+dt)$  le fluide de masse  $(M+dm_2)$  est compris entre  $S'1$  et  $S'2$  alors l'énergie mécanique est :

$$E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2gZ_2) + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dmV^2}{2} + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2$$

on applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre  $t$  et  $t'$  :

"la variation de l'énergie mécanique est égale la somme des travaux des forces extérieures".

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{forces \quad et \quad pressien} = F_1dx_1 - F_2dx_2 \iff E'_{mec} - E_{mec} = P_1S_1dx_1 - P_2S_2dx_2 = P_1dV_1 - P_2dV_2$$

$$\text{danc : } dm_2gZ_2 + \frac{1}{2}dm_2V_2^2 - dm_1gZ_1 - \frac{1}{2}dm_1V_1^2 = \frac{p_1}{\rho_1}dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}dm_2$$

par conservation de la masse :  $dm_1 = dm_2 = dm$  et puis les fluide incompressible :  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ .

donc l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0.$$

---

## Chapitre 02

---

Ce chapitre est consacré à présenter la méthode des volumes finis ainsi que son idée et ses principaux schémas, et aussi une simple présentation du code de calcul Gambit-Fluent. Et ce termine par la position de notre problème traiter .

# Chapitre 2

## Modélisation et simulation

### 2.1 Introduction

Le modèle mathématique constitué par des équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) ou par un système d'EDP est transformé, à l'aide d'une méthode de discrétisation à un système d'équations algébriques.

Les méthodes de discrétisation les plus connues sont :

- La méthode des différences finies
- La méthode des éléments finis
- La méthodes spectrales (MS).
- La méthode des volumes finis

### 2.2 La méthode des volumes finis

De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur la méthode des volumes finis comme :

**Fluent, ANSYS, StarCD, CFX, FineTurbo, ...**

cette méthode est connue pour la première fois en 1971, est largement décrite par **PATANKAR** et **SPALDING** ou si publiée **en 1980 par PATANKAR**.

La méthode des volumes finis est adaptée aux équations de la mécanique des fluides

- Équation de conservation de la masse,
- Équation de conservation de la quantité de mouvement,
- Équation de conservation de l'énergie,

#### 2.2.1 Principe de méthode

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine de calcul en une série de sous-domaines appelés volumes de contrôle. Ces volumes de contrôle enveloppent tout le domaine de calcul, de telle façon que la somme de leurs volumes soit égale exactement au volume du domaine de calcul.

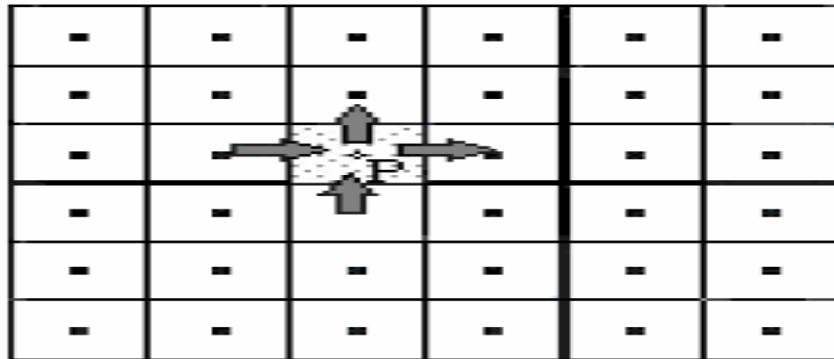


FIGURE 2.1 :division du domaine de calcul en une série de volume de contrôle

Telle que la formulation bidimensionnelle consiste à subdiviser le domaine d'étude  $\Omega$  en un nombre d'éléments finis. Chaque élément contient quatre noeuds. Un volume fini entoure chaque noeud.

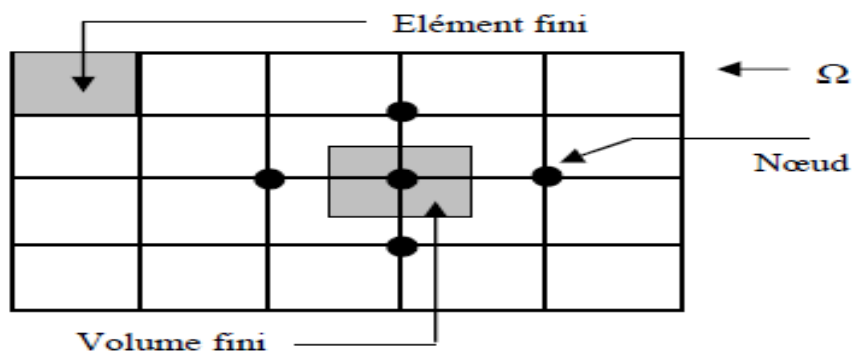


FIGURE 2.2 : Discrétisation en volumes finis du domaine d'étude dans le cas bidimensionnel.

Un point est positionné au centre de chaque volume et est appelé centre du volume de contrôle, il sera noté  $P$ . les noeuds des volumes voisins seront notés suivant leurs positions :

$E$  pour **Est**,  $W$  pour **West**,  $N$  pour **Nord** et  $S$  pour **Sud** et les interfaces **du volume de contrôle**, sont notés  $e, w, n, s$ .

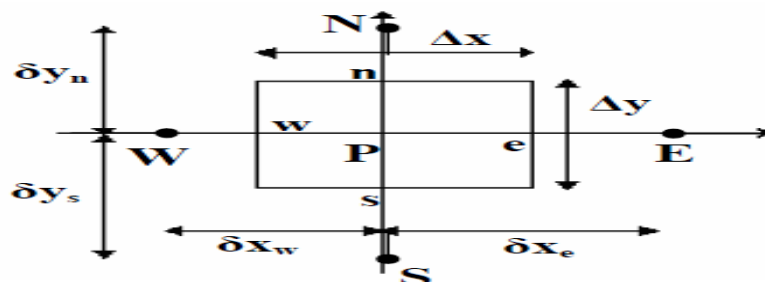


FIGURE 2.3 :volume de contrôle typique.

Il est préférable d'utiliser des grilles (**volumes de contrôles**) décalées, une grille principale est construite, sur laquelle nous calculons les variables scalaires, comme la pression, la température, etc...

Deux grilles décalées vers **la droite** et vers **le haut** respectivement sont utilisées pour le calcul des vitesses horizontale ( $u$ ) et verticale ( $v$ ), de sorte que les volumes de contrôle des vitesses sont centrés autour des interfaces des volumes de contrôle principaux.



FIGURE 2.4 :volume de contrôle décalé vers la droite.

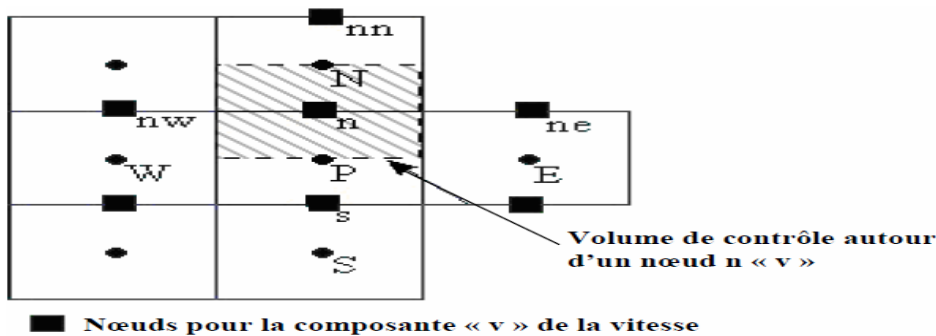


FIGURE 2.5 :volume de contrôle décalé vers le haut.

Dans tous ce chapitre, on utilise le logiciel "Fluent" qui est employé par différents chercheurs pour traiter plusieurs types de maillages très compliqués à l'aide de la contribution de quelques autres logiciels tel que le Gambit .

Le Fluent dans ses mécanismes internes indique les points avec les indices 1,..i, j,k..., et il donne quelques topologies de certaines grilles selon le problème posé.

Le Fluent utilise une technique qui fait l'intégration des équations différentielles sur chaque volume élémentaire ensuite les convertir sous forme des équations algébriques.

## 2.3 Procédure de résolution en utilisant le code Fluent

On présente dans ce paragraphe les différents schémas concernant l'équation de quantité de mouvement :

### *Schéma amont du premier ordre*

Pour le schéma amont de premier ordre le logiciel Fluent prend en considération la moyenne de toutes les valeurs d'une cellule comme la valeur stockée au centre de la même cellule. Et les valeurs aux faces sont égales à celles des cellules se trouvant au schéma amont.

### *Schéma amont de deuxième ordre*

Pour les valeurs aux centre des cellules, on fait un développement en série de Taylor. Mais pour la valeur sur la face sera :

$$\begin{aligned}\phi_f &= \phi + \nabla\phi\Delta S \\ \nabla\phi &+ \frac{1}{V}\sum_f^N\phi_f A\end{aligned}\quad (2.1)$$

L'équation (2.1) donne une autre approche basée sur le calcul de gradient,  $\phi$  et  $\nabla\phi$  représentent :

La valeur du scalaire dans la cellule centrale et son gradient respectivement et  $\Delta S$  désigne le vecteur de déplacement (cellule centrale sera avec amont une cellule face).

### *Schéma Quick*

Il est conseillé pour les maillages quadrilatéraux ou hexaédriques, on peut l'écrire sous la forme :

$$\phi = K\left(\frac{S_b}{S_c+S_b}\phi_m + \frac{S_c}{S_b+S_c}\phi_l\right) + (1-K)\left(\frac{S_d}{S_c+S_d}\phi_m + \frac{S_c}{S_d+S_c}\phi_E\right)\quad (2.2)$$

On peut écrire alors l'équation de la continuité  $\oint \rho U dA = 0$  sous forme discrétisée suivante :

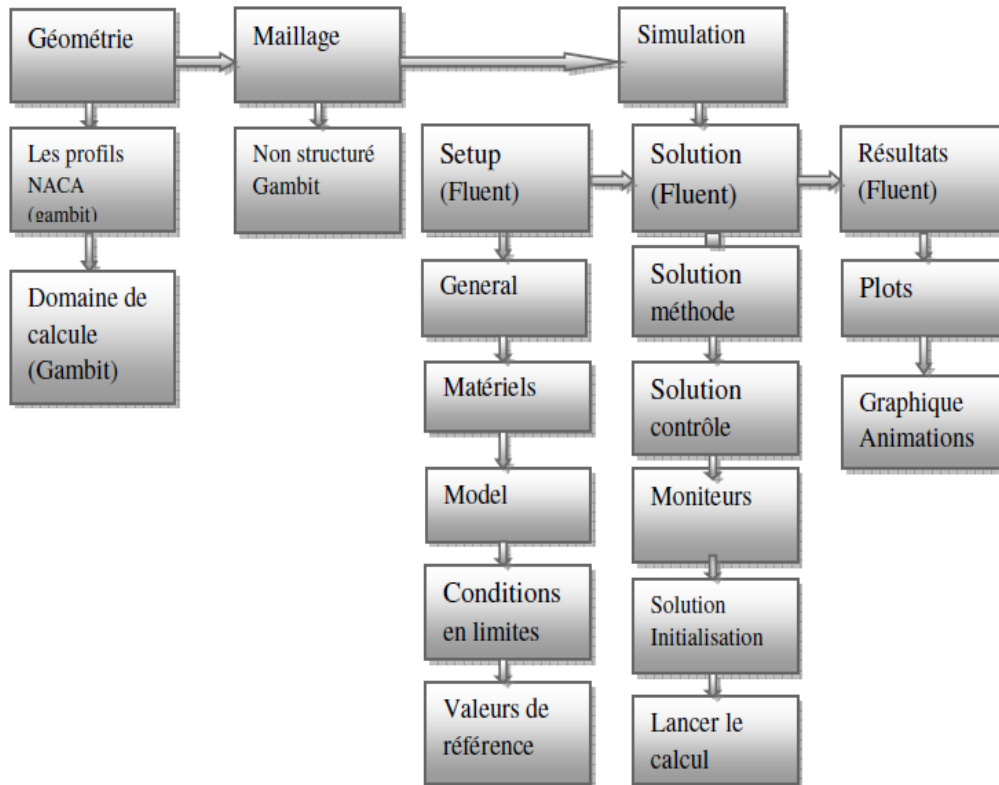
$$\sum_f^N J_f A_f = \sum_f^N \rho U_n A_f = 0\quad (2.3)$$

$U_n$  et  $A_f$  sont respectivement la composante normale de la vitesse sur une face et l'une des faces qui contient le volume de contrôle.

Pour la résolution, on a utilisé le code Fluent qui contient des fichiers concernant la lecture des données ( la nature de fluide, la gravité, la viscosité et la pression ...) et d'autres concernant les détails de la géométrie du problème posé ( les schémas de la discrétisation, les conditions aux limites , ...).

## 2.4 La présentation des logiciels de calcul

Gambit et Fluent sont des logiciels, sous licence commerciale, permettant de réaliser des simulations 2D ou 3D en mécanique des fluides allant de la construction du maillage avec Gambit à la résolution des équations et au post-traitement avec Fluent.



FIGURE

2.6 :Schéma récapitulatif d'une simulation complète sous Gambit et Fluent.

### 2.4.1 Le logiciel Gambit

GAMBIT est un logiciel qui permet de créer des maillages peuvent être utilisés en particulier sous FLUENT.

Le mailleur est un prétraitement au logiciel de simulation. Il permet de générer un maillage structuré ou non structuré en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindrique ou axisymétrique.

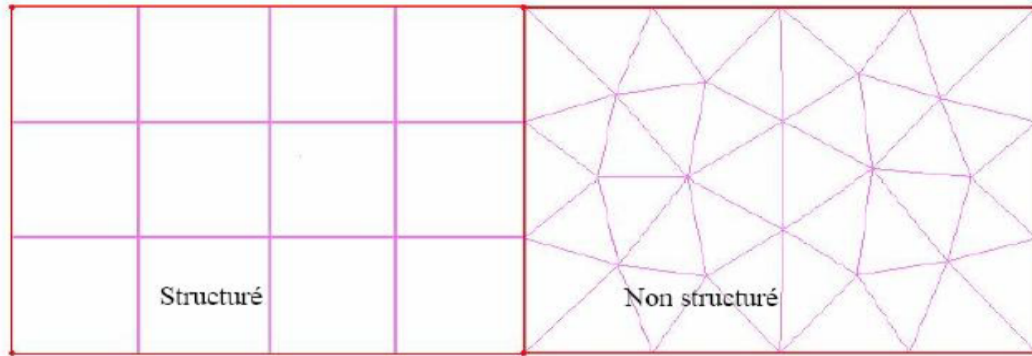


FIGURE 2.7 :maillage structuré et non structuré.

Il peut réaliser des maillages complexes en deux ou trois dimensions avec des mailles de type quadrilatère ou triangle.

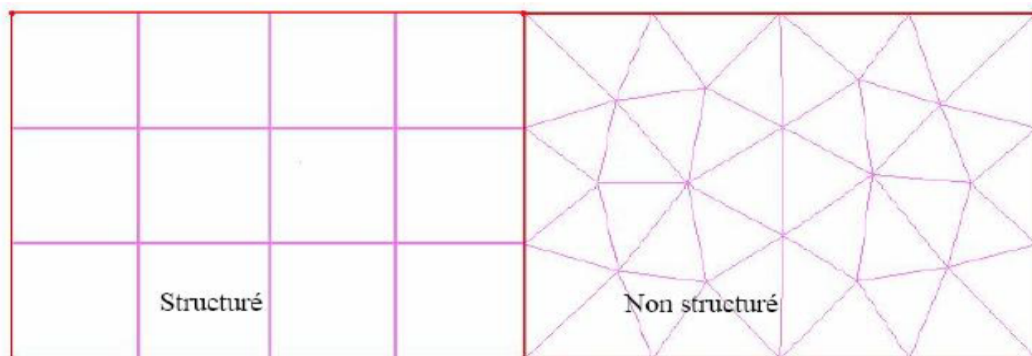


FIGURE 2.7 :maillage structuré et non structuré.

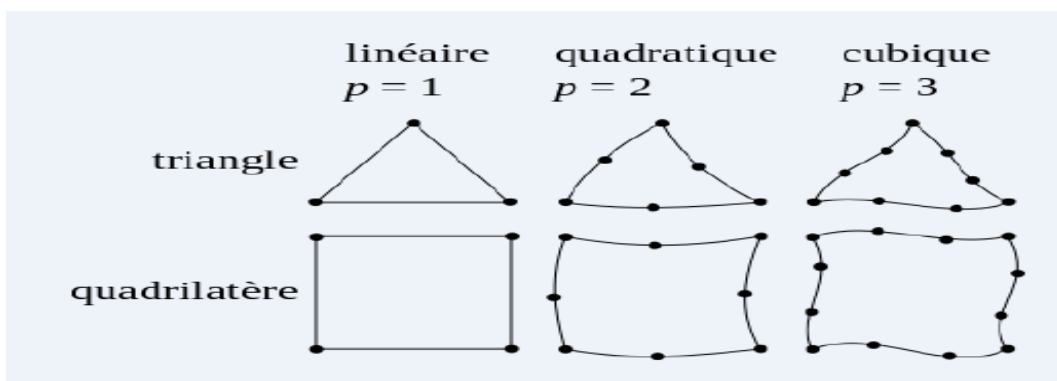


FIGURE 2.8 :principaux d'element utilisé en 2D.

Pour construire un maillage, il est bon de suivre la démarche suivante :

- Définir la géométrie.

- Réaliser le maillage.
- Définir les paramètres des zones de calcul.

### 2.4.2 Le logiciel FLUENT

Il existe un certain nombre de codes commerciaux, avec des pré-processeurs de maillage performants, permettant la prédiction d'écoulements de fluides (**FLUENT, CFX, PHOENICS, STAR-CD, TRIO, FEMLAB, CFD-ACE, FLOTRAN, N3S, CFDS-FLOW3D ...**).

Le code de calcul "FLUENT" est commercialisé par le groupe FLUENT. Ce groupe est actuellement l'un des pôles de compétence en mécanique des fluides numérique les plus importants. Il développe et commercialise une solution complète sous forme de logiciels de **CFD (Computational Fluid Dynamics)** généralistes qui simule tous les écoulements fluides, compressibles ou incompressibles, impliquant des phénomènes physiques complexes tels que la turbulence, le transfert thermique, les réactions chimiques, les écoulements multiphasiques pour toute l'industrie. Les produits et services proposés par le groupe "FLUENT" aident les ingénieurs à développer leurs produits, à optimiser leur conception et à réduire leurs risques.

Ce code est largement utilisé dans l'industrie aéronautique, automobile et offre une interface sophistiquée qui facilite son utilisation. Le logiciel "FLUENT" modélise par la méthode des volumes finis des écoulements très variés dans des configurations plus ou moins complexes.

Il est composé, comme tout logiciel de type CFD, de trois éléments clés qui sont : *le pré-processeur, le solveur et le post-processeur*. Nous détaillons ci-dessous ces trois éléments.

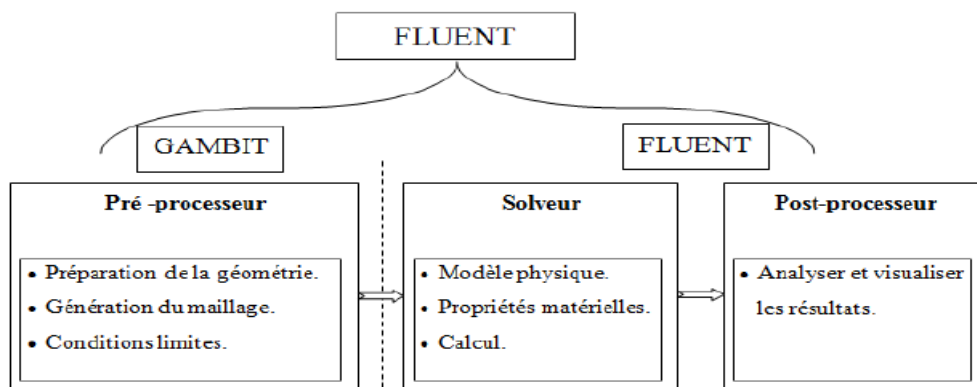


FIGURE 2.9 :Structure de base du code fluent.

## 2.5 Position du problème

On considère un écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible non visqueux, dans un canal (**ABCDE**) d'hauteur ( $h=0.5$  m) et de longueur ( $l=0.8$  m) avec un obstacle de la forme demi disque en haut de diamètre ( $D=0.1$  m).  
et une surface libre (**GF**) représenté dans la (FIGURE 2.10 )

On suppose que l'écoulement a l'infini est uniforme de vitesse  $U$  . Sur la surface libre, puisque la tension de surface et les forces de gravité sont négligées, l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cte$$

On a le problème suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{avec les conditions limite} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{P}{\rho} = cte & \text{sur la surface libre} \end{cases}$$

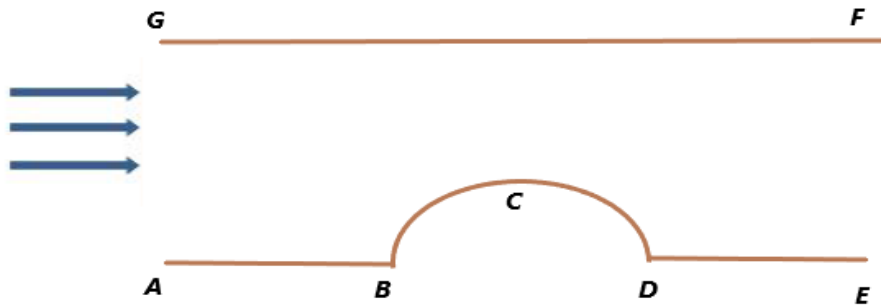


FIGURE 2.10 :Description de problème.

---

## Chapitre 03

---

Ce chapitre consiste à traiter le problème posé dans le chapitre précédent, d'un écoulement potentiel bidimensionnel dans un canal avec un obstacle de forme demi-disque, en utilisant le code de Gambit - Fluent

.

# Chapitre 3

## Discussion des résultats

### 3.1 Les résultats de probleme pour le premier cas ( $D=0.1\text{m}$ )

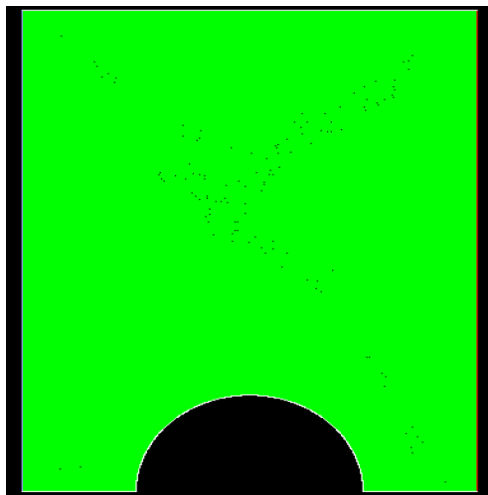


FIGURE 3.1 :Le maillage.

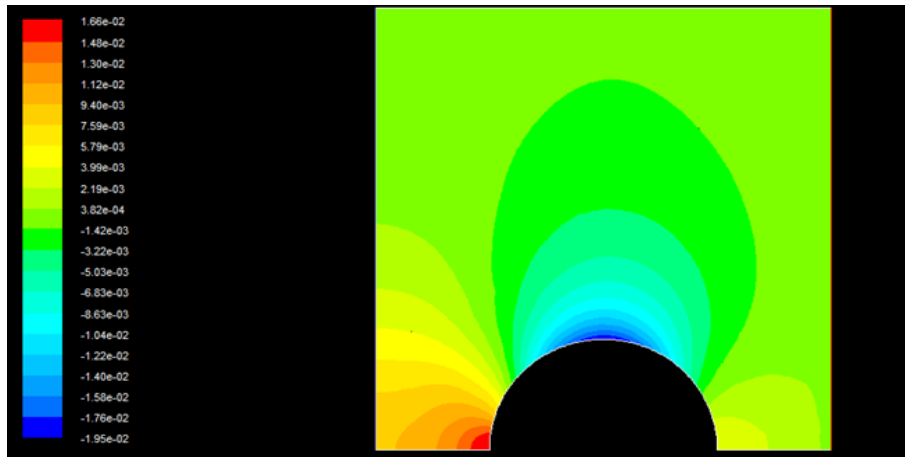


FIGURE 3.2 : Contour de La pression statique.

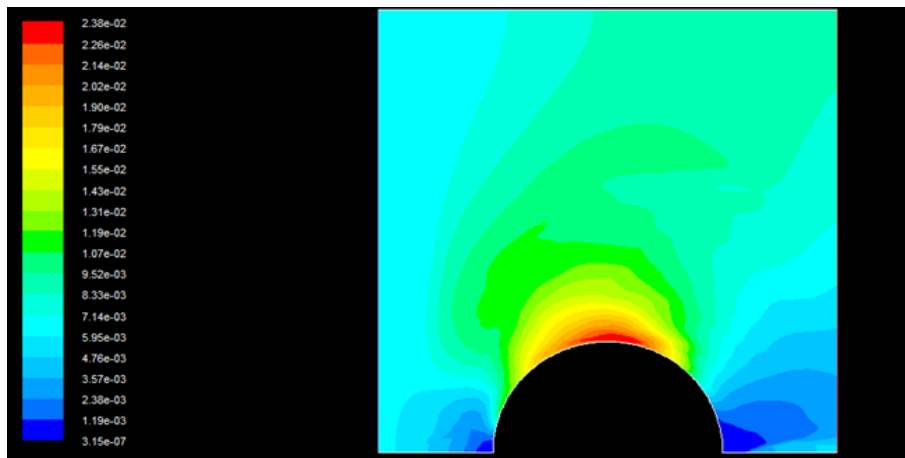


FIGURE 3.3 : Contour de La pression dynamique.

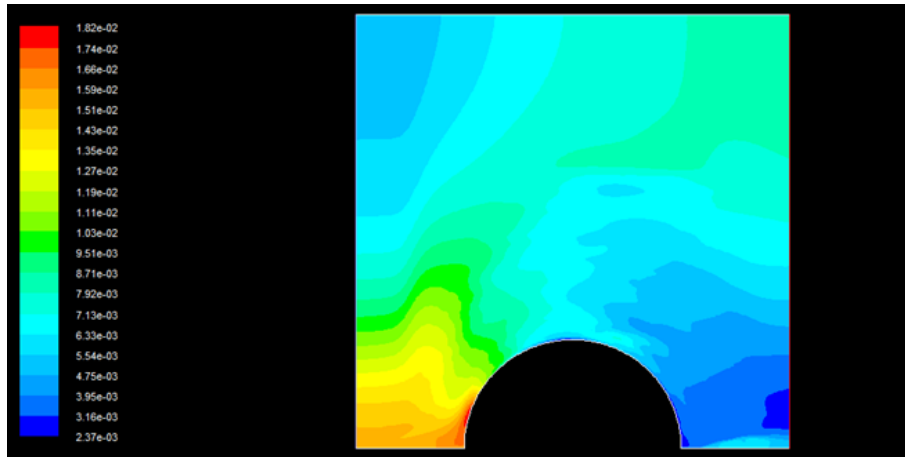


FIGURE 3.4 : Contour de Pression totale.

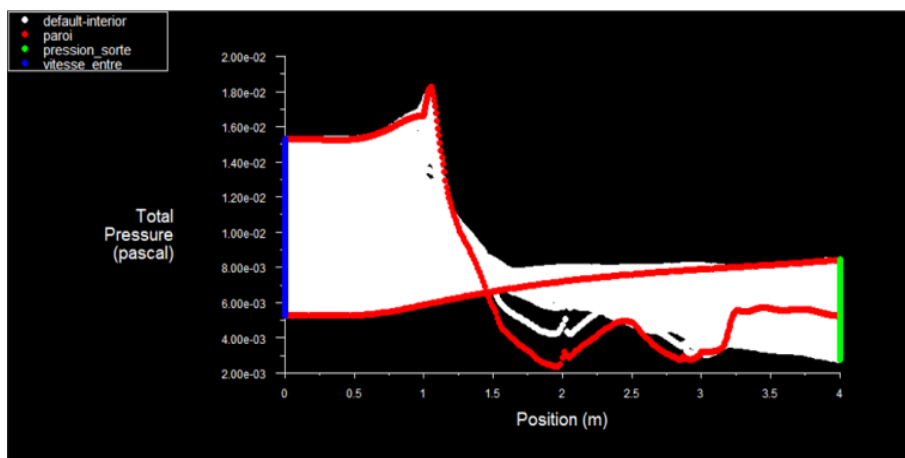


FIGURE 3.5 : La pression totale.

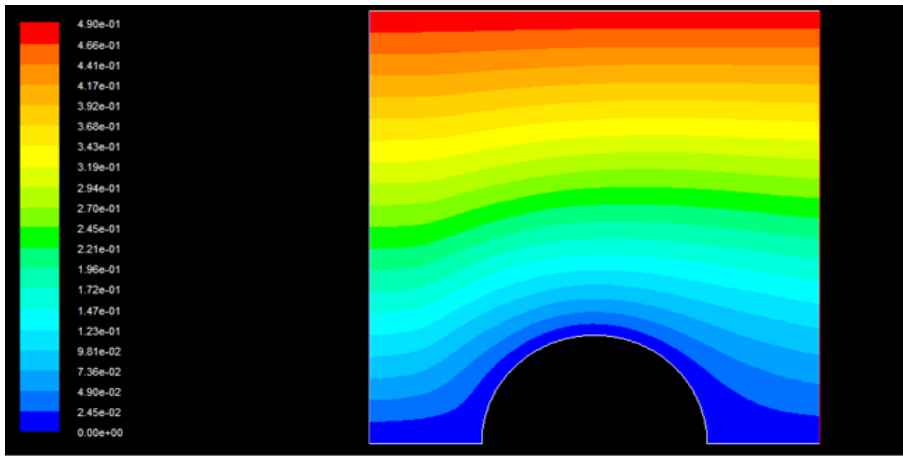


FIGURE 3.6 :La fonction de courant.

### 3.2 Les résultats de probleme pour le deuxième cas ( $D=0.2m$ )

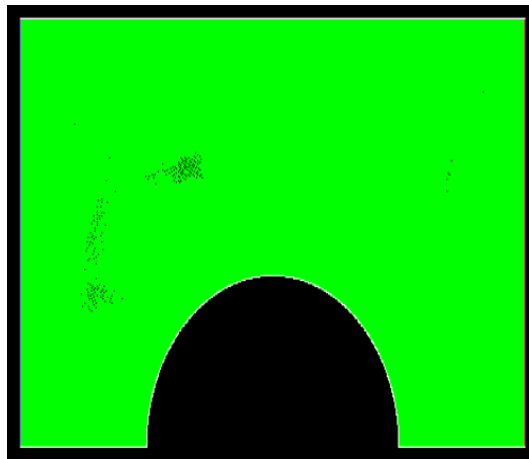


FIGURE 3.7 :Le maillage ( $D=0.2m$ )

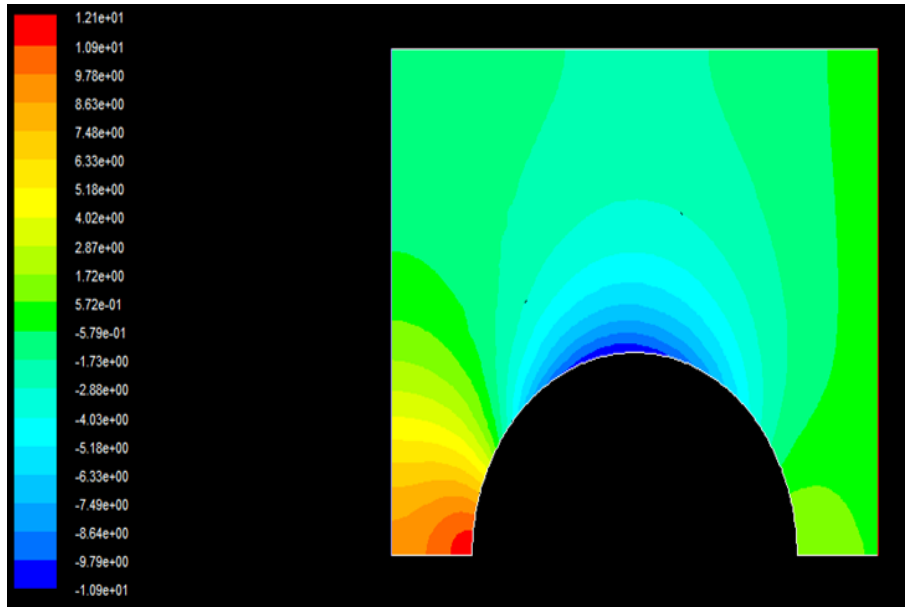


FIGURE 3.8 :Contour de la pression statique (D=0.2m).

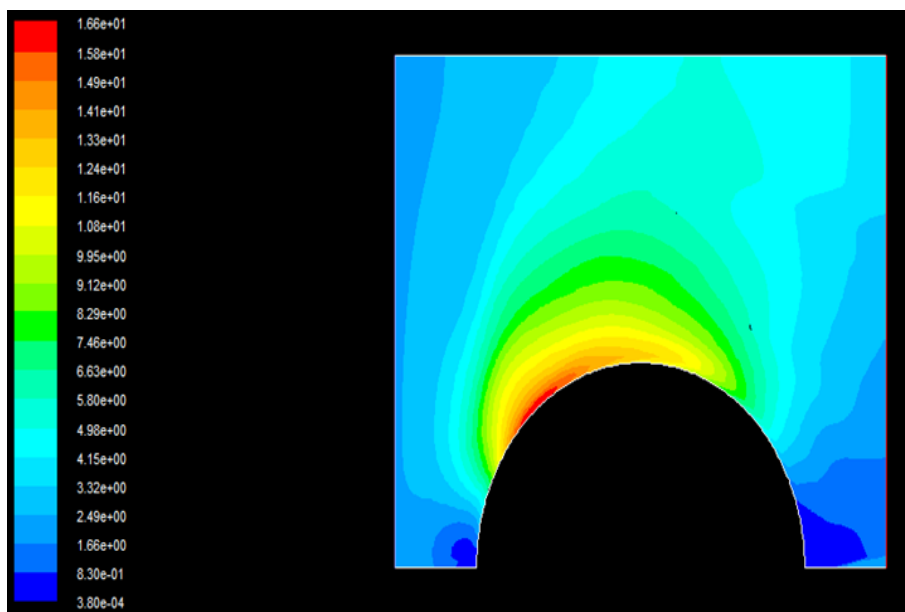


FIGURE 3.9 :Contour de la pression dynamique (D=0.2m)

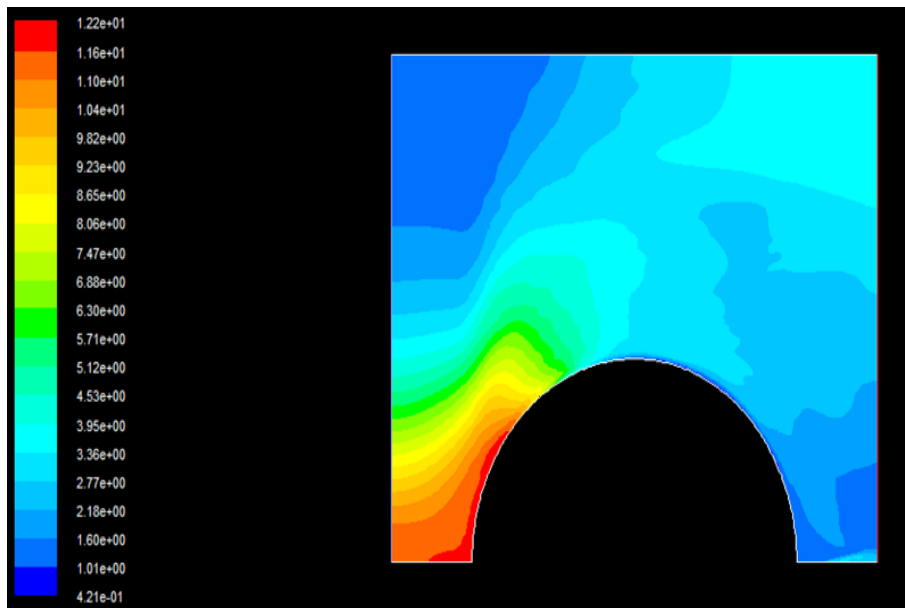


FIGURE 3.10 : Contour de pression totale (D=0.2m)

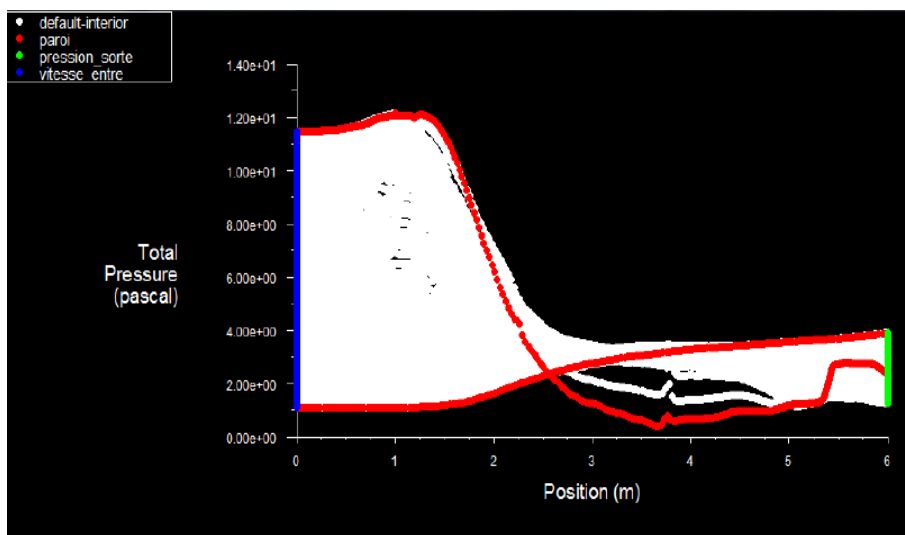


FIGURE 3.11 : La pression totale (D=0.2m)

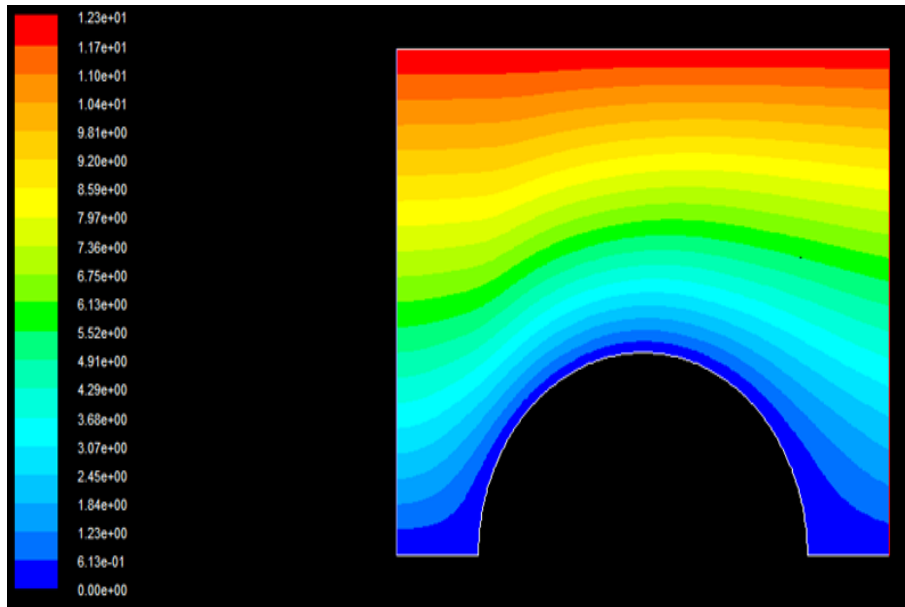


FIGURE 3.12 : :La fonction de courant (D=0.2m)

### 3.3 Discussion des résultats

#### La pression statique

D'après les figures (3.4) et (3.8) de contour de la pression statique, On remarque que

Dans les deux cas la pression statique est presque nulle au point  $C$  (le point d'intersection de la tangente avec disque).

Dans le premier cas où le diamètre de disque ( $D = 0.1m$ ) elle prend sa grande valeur (maximum) ( $1.66 * 10^{-2}pa$ ) au point  $B$  (le point d'intersection de l'axe  $OX$  avec le disque) à l'entrée.

Mais dans le 2<sup>me</sup> cas si on change le diamètre ( $D = 0.2m$ ), on trouve que la grande valeur de la pression statique sera ( $1.21 * 10^{+01}pa$ ) au même point  $B$ .

#### La pression dynamique

Pour la pression dynamique, les figures (3.3) et (3.9), On remarque que dans les deux cas la pression dynamique est presque nulle au point de l'intersection de l'axe  $OX$  avec le demi disque

pour le premier cas La pression dynamique atteint sa valeur (maximum) ( $1.66 * 10^{+01}pa$ ) juste au point  $C$  (en haut de l'obstacle)

Mais dans le deuxième cas elle prend sa valeur (maximum) ( $2.38 * 10^{-2}pa$ ) au près du point  $C$  (juste avant le point  $C$ ) est elle diminue peu à peu juste en haut de domaine.

#### La pression totale

D'après les figures (3.4), (3.5), (3.10) et (3.11) On remarque que

Dans les deux cas la pression totale elle prend sa valeur (minimum) au point  $D$  le point d'intersection de l'axe  $OX$  avec le demi disque à la sortie,

Mais elle prend si grandes valeurs (maximum) au point  $B$  et diminué peu à peu juste au bords des parois de sortie et l'entrée.

#### La fonction de courant

Concernant la fonction de courant, sur les figures (3.6) et (3.12), elle est nulle au près des parois rigides (ABCDE)

En suit elle s'augmente peu à peu jusqu'au elle atteint son maximum sur la partie superieur des domaine jusqu'à la valeur  $(4.90 * 10^{-1}kg/s)$

Mais pour le deuxième cas sa valeur (maximum) est  $(1.23 * 10^{+01}kg/s)$  .

# Conclusion générale

Dans ce modeste travail, on a traité un écoulement potentiel bidimensionnel dans un canal avec un obstacle de forme demi-disque, en appliquant la méthode des volumes finis à l'aide de logiciel de calcul FLUENT,

Où on a aboutit à des bons résultats concernant la pression, la vitesse et la fonction de courant.

Aussi on a remarqué que les résultats obtenus diffèrent en fonction de la valeur de diamètre du demi-disque obstacle utilisé, qui nous permet de conclure que les résultats peuvent être changer d'après plusieurs paramètres tels que : la géométrie du modèle proposé, les conditions aux limites...etc...

Nous envisagerons les perspectives, qu'ils ouvrent d'un point de vue, des futures travaux comme celle du changement de l'état de l'écoulement (rotationnel, tridimensionnel...) ou la géométrie du domaine étudié.

Aussi l'application d'autres techniques sur ce type des écoulements.

# Annexe 01

## Méthode des Volumes Finis dans le cas unidimensionnel

**Principe de méthode** A une dimension, l'équation de la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + S_\phi = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) \quad (4.1)$$

Dans le cas d'une étude à une dimension de l'espace, le maillage est constitué d'une droite subdivisée en un nombre fini de segments réguliers.

Ceux-ci constituent les volumes de contrôle dans le cas unidimensionnel. Ci-dessous, nous donnons l'exemple d'un maillage comprenant cinq volumes de contrôle qu'on peut adopter pour la discrétisation l'équation (5.1)

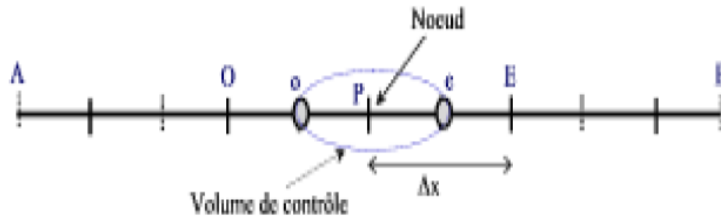


FIGURE 2.24 : volume de contrôle dans le cas unidimensionnel.

La valeur de  $\phi$  est maintenue constante aux frontières.

$E$  et  $O$  sont appelés « Est » et « Ouest ».

$P$ ,  $E$  et  $O$  sont appelés noeuds et  $\Delta x$  le pas.

Dans cette première étape, on divise le domaine de calcul en un nombre fini et discret de volumes de contrôle. Le centre de chaque volume est placé exactement au milieu du segment correspondant. Par commodité, on s'arrange pour que les facettes des noeuds de frontières coïncident exactement avec les valeurs aux frontières du domaine de calcul.

**Discrétisation** L'intégration de l'équation (4.1) sur le volume de contrôle de centre  $P$  donne :

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) dv + \int_{vc} S_\phi dv = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) dv \quad (4.2)$$

$$\int_o^e \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) dv + \int_o^e S_\phi dv = \int_o^e \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) dv \quad (4.3)$$

$$[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}]_e - [\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}]_o + \bar{S} \Delta v = [\rho u \phi]_e - [\rho u \phi]_o \quad (4.4)$$

Où :  $\bar{S}$  est la valeur moyenne de la source et  $\Delta v$  le volume de contrôle correspondant.

En général, le terme source peut dépendre de la fonction  $\phi$  elle-même. C'est pourquoi on l'écrit :

$$\bar{S}\Delta v = S_u + S_p\phi_p \quad (4.5)$$

Le coefficient de diffusivité n'est pas toujours constant.

Ses valeurs sur les facettes "e" et "o" du volume de contrôle sont exprimées en fonction des valeurs aux points nodaux  $P, O$  et  $E$  par les relations suivantes :

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_E + \Gamma_O}{2} \quad \Gamma_o = \frac{\Gamma_P + \Gamma_O}{2} \quad (4.6)$$

Par application d'un schéma centré d'ordre deux, on remplace les dérivées premières sur les facettes du volume de contrôle par les relations :

$$[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}]_e = \Gamma_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \right) \quad (4.7)$$

$$[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}]_o = \Gamma_o \left( \frac{\phi_P - \phi_O}{\Delta x} \right) \quad (4.8)$$

On pose :  $F = (\rho u)$ , le flux massique par convection et on approxime la fonction  $\phi$  aux noeuds  $e$  et  $o$  par une différence centrée, il vient :

$$\phi_e = \frac{(\phi_P + \phi_E)}{2} \quad (4.9)$$

$$\phi_o = \frac{(\phi_P + \phi_O)}{2} \quad (4.10)$$

En substituant les équations (4.10), (4.9), (4.8), (4.7), (4.6) et (4.5) dans l'équation (4.4) on obtient :

$$\Gamma_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \right) - \Gamma_o \left( \frac{\phi_P - \phi_O}{\Delta x} \right) + S_u + S_p\phi_p = F_e \left( \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - F_o \left( \frac{\phi_P + \phi_O}{2} \right) \quad (4.11)$$

Et après arrangement on trouve :

$$a_p\phi_p = a_E\phi_E + a_O\phi_O + S_u \quad (4.12)$$

Avec :

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} + \frac{F_e}{2}$$

$$a_O = \frac{\Gamma_o}{\Delta x} + \frac{F_o}{2}$$

et :

$$a_P = a_E + a_O + F_e - F_o + S_p$$

**Discrétisation d'un problème en 2D** On généralement écrit sous forme d'équations aux dérivées partielles du type conservatif, Pour une variable  $\phi$

$$\nabla \cdot (\rho u \phi) - \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) = S_\phi \quad (5.1)$$

Chacune de ces équations met en jeu une quantité physique et des variables associées.

L'équation aux dérivées partielles traduit un équilibre dans lequel plusieurs phénomènes interviennent. Nous distinguons :

$\nabla \cdot (\rho u \phi)$  le terme convectif

$\nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi)$  le terme diffusif

cette L'équation (5.1) peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}) + S_\phi \quad (5.2)$$

Le tableau ci dessous représente les différentes valeurs de la variable  $\phi$  et ses coefficients pour chaque équation de transport.

Equation	Variable $\phi$	Coefficient de diffusion $\Gamma_\phi$	Termes sources $S_\phi$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant x	u	$\mu$	$-\frac{\partial P}{\partial x}$
Quantité de mouvement suivant y	v	$\mu$	$-\frac{\partial P}{\partial y}$
Energie	T	$\lambda/C_p$	0

Tableau 1 : coefficients de différents variables et leurs termes source

En intégrant l'équation (2.2) sur un volume de contrôle CV, nous obtenons :

$$\int_{cv} [\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi)] dv = \int_{cv} [\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})] dv + \int_{cv} S_{\phi} dv \quad (5.3)$$

Nous utilisons le théorème de Gauss qui permet de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface.

L'équation (5.3) s'écrit :

$$\int_s^n \int_w^e [\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi)] dx dy = \int_s^n \int_w^e [\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})] dx dy + \int_s^n \int_w^e S_{\phi} dx dy \quad (5.4)$$

L'intégration de terme convectif sur le volume de contrôle :

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e [\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi)] dx dy &= \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) dx dy \\ &= \int_s^n [(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w] dy + \int_w^e [(\rho v \phi)_n - (\rho v \phi)_s] dx \\ &= [(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w] \Delta y + [(\rho v \phi)_n - (\rho v \phi)_s] \Delta x \\ &= [(\rho u)_e(\phi)_e - (\rho u)_w(\phi)_w] \Delta y + [(\rho v)_n(\phi)_n - (\rho v)_s(\phi)_s] \Delta x \end{aligned} \quad (5.5)$$

L'intégration de terme diffusif sur le volume de contrôle :

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e [\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})] dx dy &= \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}) dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}) dx dy \\ &= \int_s^n [(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x})_e - (\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x})_w] dy + \int_w^e [(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})_n - (\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})_s] dx \\ &= [(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x})_e - (\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x})_w] \Delta y + [(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})_n - (\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})_s] \Delta x \\ &= [(\Gamma_{\phi})_e(\frac{\partial \phi}{\partial x})_e - (\Gamma_{\phi})_w(\frac{\partial \phi}{\partial x})_w] \Delta y + [(\Gamma_{\phi})_n(\frac{\partial \phi}{\partial y})_n - (\Gamma_{\phi})_s(\frac{\partial \phi}{\partial y})_s] \Delta x \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'équation (5.4) s'écrit encore sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_s^n [(\rho u \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x})_e - (\rho u \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x})_w] dy + \int_w^e [(\rho v \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})_n - (\rho v \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y})_s] dx \\ = \int_{cv} S_{\phi} dv \end{aligned} \quad (5.7)$$

Cette équation décrit l'équilibre entre les flux convectifs et diffusifs entrant et sortant des surfaces du volume de contrôle et les termes sources qui se trouvent dans le volume de contrôle. L'intégration de l'équation (5.7) donne :

$$\begin{aligned}
& [(\rho u)_e \phi_e - \Gamma_{\phi,e} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e] \Delta y - [(\rho u)_w \phi_w - \Gamma_{\phi,w} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w] \Delta y \\
& + [(\rho v)_n \phi_n - \Gamma_{\phi,n} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n] \Delta x - [(\rho v)_s \phi_s - \Gamma_{\phi,s} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s] \Delta x \\
& = \int_{cv} S_\phi dv
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Pour évaluer  $(\rho u)_e, (\rho u)_w, (\rho v)_n, (\rho v)_s$ , nous choisissons une interpolation entre les noeuds voisins, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\rho u)_e &= \rho_e \frac{U_P + U_E}{2} \\
(\rho u)_w &= \rho_w \frac{U_W + U_P}{2}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
(\rho v)_n &= \rho_n \frac{V_P + V_N}{2} \\
(\rho v)_s &= \rho_s \frac{V_S + V_P}{2}
\end{aligned}$$

De même pour les gradients  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e, \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w, \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n, \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s$  une interpolation linéaire nous donne :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} \\
\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_n} \\
\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_s}
\end{aligned}$$

La relation (2.8), en tenant compte des relations (5.9) et (5.10), devient :

$$\begin{aligned}
& \rho_e \frac{u_P + u_E}{2} \phi_e \cdot \Delta y - \Gamma_{\phi,e} \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} \Delta y - \rho_w \frac{u_W + u_P}{2} \phi_w \cdot \Delta y + \Gamma_{\phi,w} \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w} \Delta y \\
& + \rho_n \frac{v_N + v_P}{2} \phi_n \cdot \Delta x - \Gamma_{\phi,n} \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta x_n} \Delta x - \rho_p \frac{v_P + v_S}{2} \phi_s \cdot \Delta x + \Gamma_{\phi,s} \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta x_s} \Delta x \\
& = \overline{S_\phi} \cdot \Delta V
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Où  $\bar{S}$  est la valeur moyenne  $S$  sur le volume de contrôle Généralement le terme source  $S$  peut aussi dépendre de la fonction  $\phi$  elle-même.

Dans une telle situation nous écrivons :

$$\bar{S}_\phi = S_c + S_p \cdot \phi_p \quad (5.12)$$

La principale condition à respecter, en vue d'assurer la dominance diagonale de la matrice résultante est que le coefficient  $S_p$  doit toujours être négatif.

Finalement, nous obtenons une équation discrétisée, sous la forme générale suivante, pour la variable  $\phi$ .

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (5.13)$$

Où

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \Delta x \Delta y \quad (5.14)$$

$$b = S_p \Delta x \Delta y$$

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \text{MAX}(-F_e, 0)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \text{MAX}(F_w, 0)$$

(5.15)

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \text{MAX}(-F_n, 0)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \text{MAX}(F_s, 0)$$

Les coefficients de l'équation (5.13) contiennent une combinaison du flux convectif  $F$  et diffusif  $D$  aux interfaces des volumes de contrôle.

Les valeurs de  $F$  et  $D$  pour chaque interface  $e, w, n, s$  du volume de contrôle sont données par les relations suivantes :

$$F_e = (\rho u)_e \cdot \Delta y$$

$$F_w = (\rho u)_w \cdot \Delta y$$

(5.16)

$$F_n = (\rho v)_n \cdot \Delta x$$

$$F_s = (\rho v)_s \cdot \Delta x$$

et

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x_w}$$

(5.17)

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y_s}$$

$P_e$  est le nombre de Peclet qui caractérise le rapport entre le flux convectif et le flux diffusif.

$$P_e = \frac{F_e}{D_e}; P_w = \frac{F_w}{D_w}; P_n = \frac{F_n}{D_n}; P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (5.18)$$

Et  $A(|P|)$  pour le schéma puissance s'écrit comme suit :

$$A(|P|) = \text{MAX}(0, (1 - 0.1|P|)^5) \quad (2.19)$$

L'équation résultant des étapes précédentes est mise sous la forme condensée suivante :

$$a_p \phi_p = \sum a_{nv} \phi_{nv} + b \quad (5.20)$$

Où le terme de sommation indique tous les noeuds voisins de « P ».

# Annexe 02

*Présentation du logiciel Gambit :*

Les étapes d'utilisation de Gambit

♣ Lancement du logiciel

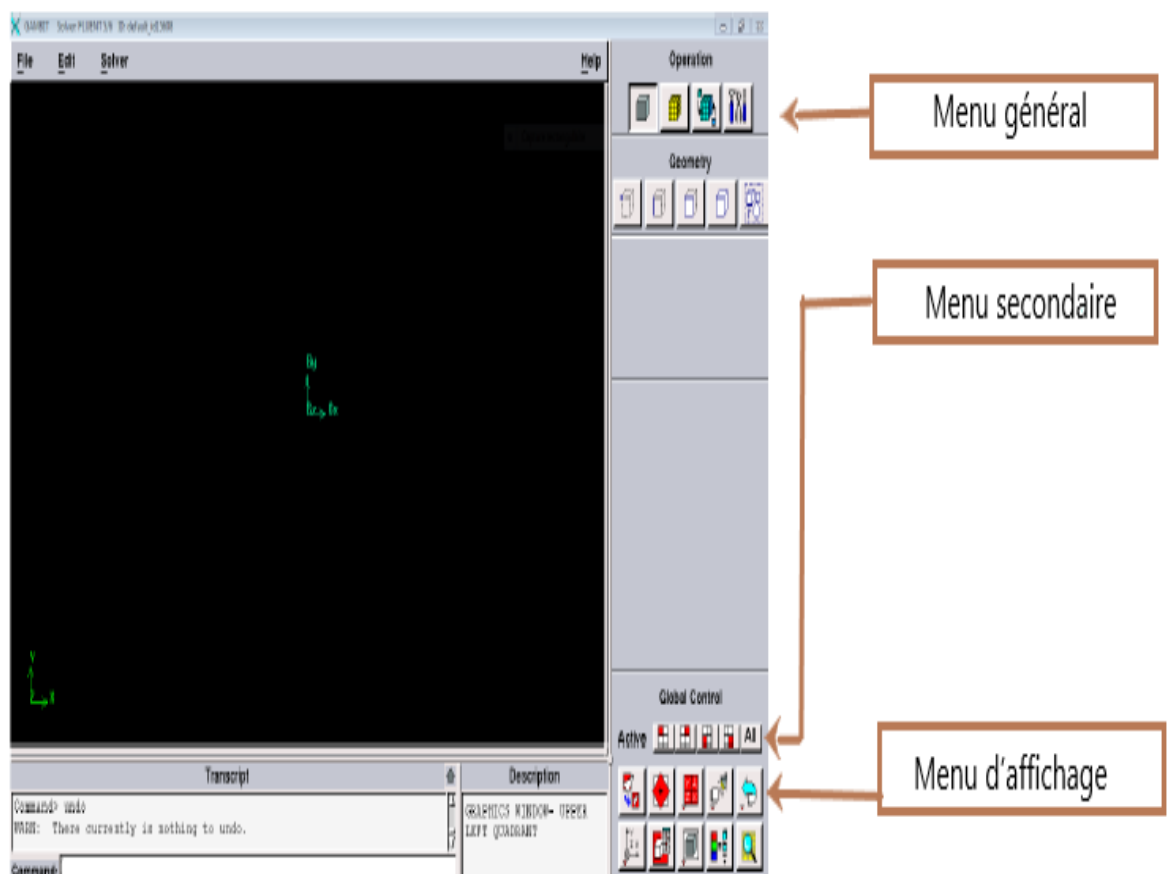


FIGURE 2.11 :Vue globale de Gambit.

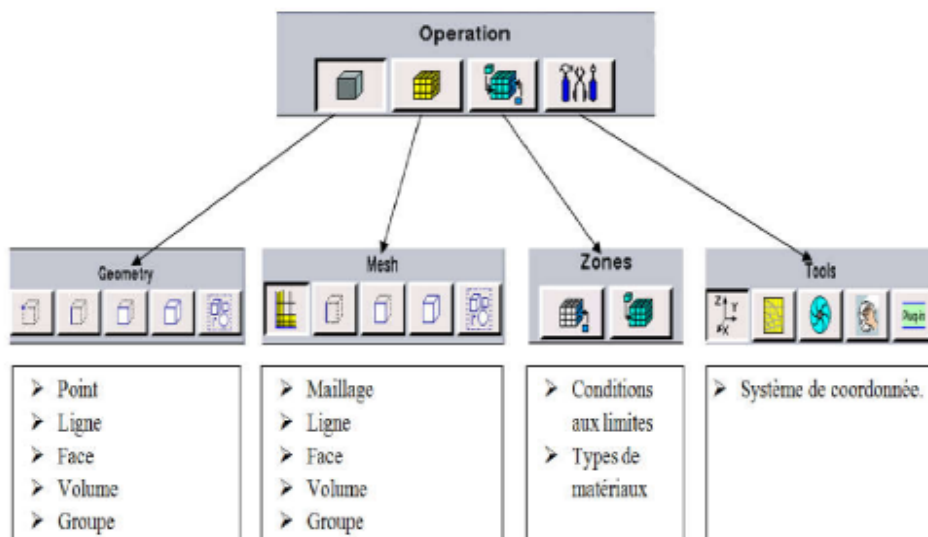


FIGURE 2.12 :Différentes opérations pour créer la géométrie.

### ♣ Création de la géométrie

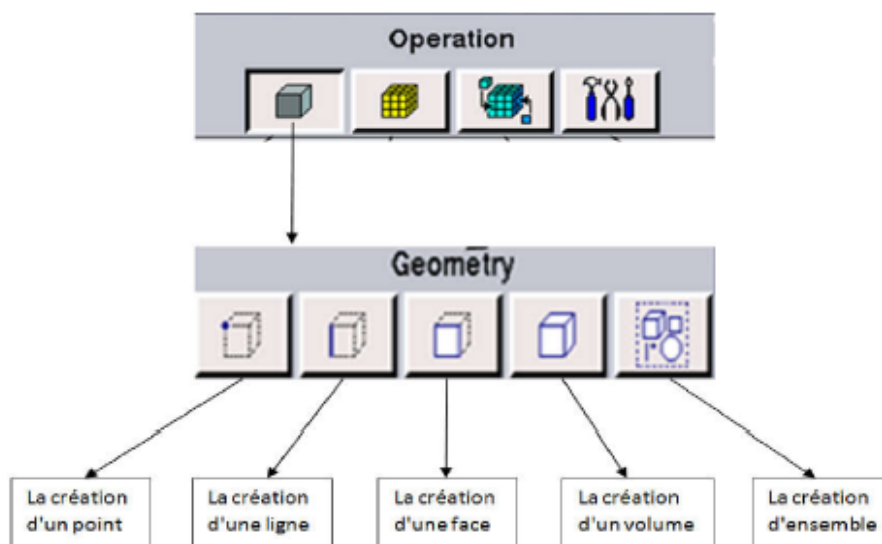


FIGURE 2.13 :Outils pour créer la géométrie.

• **Menu point**

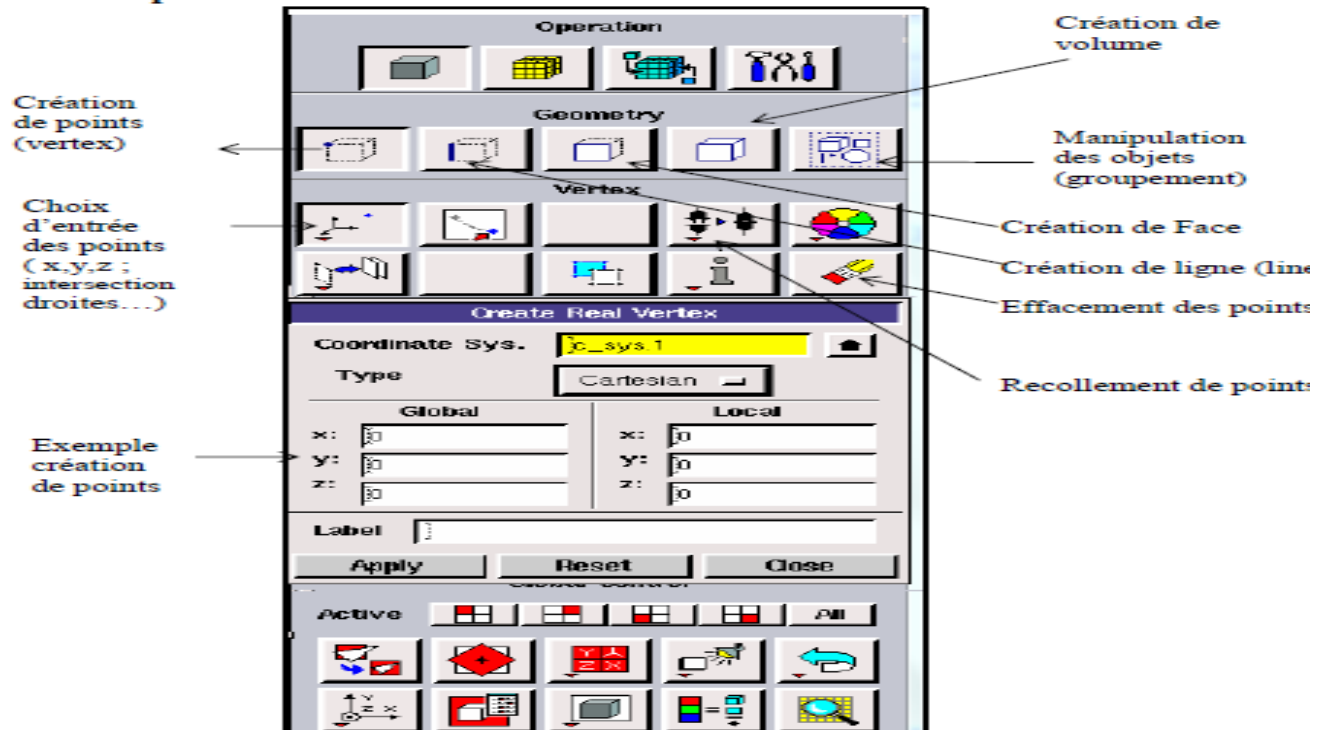


FIGURE 2.14 :Menu point.

- **Menu ligne**

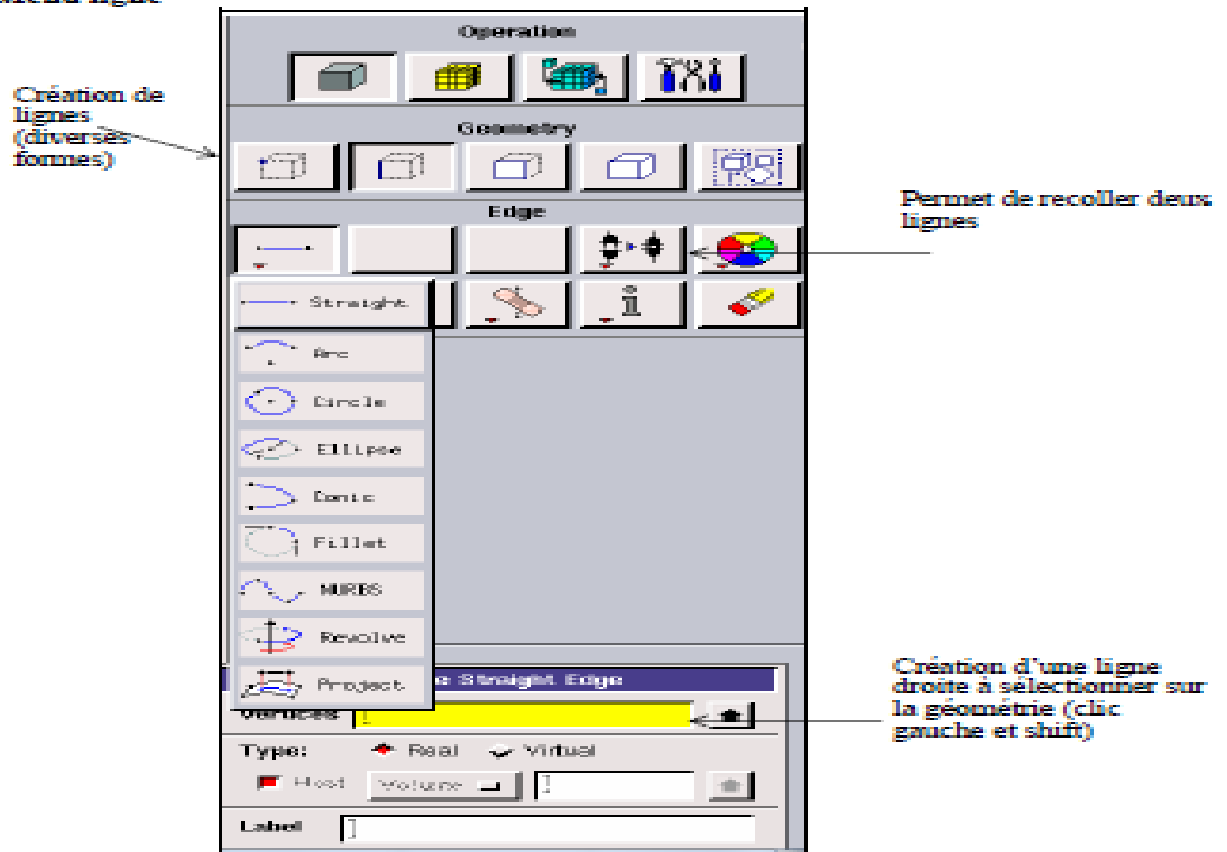


FIGURE 2.15 :Menu ligne.

## ♣ Générer un maillage

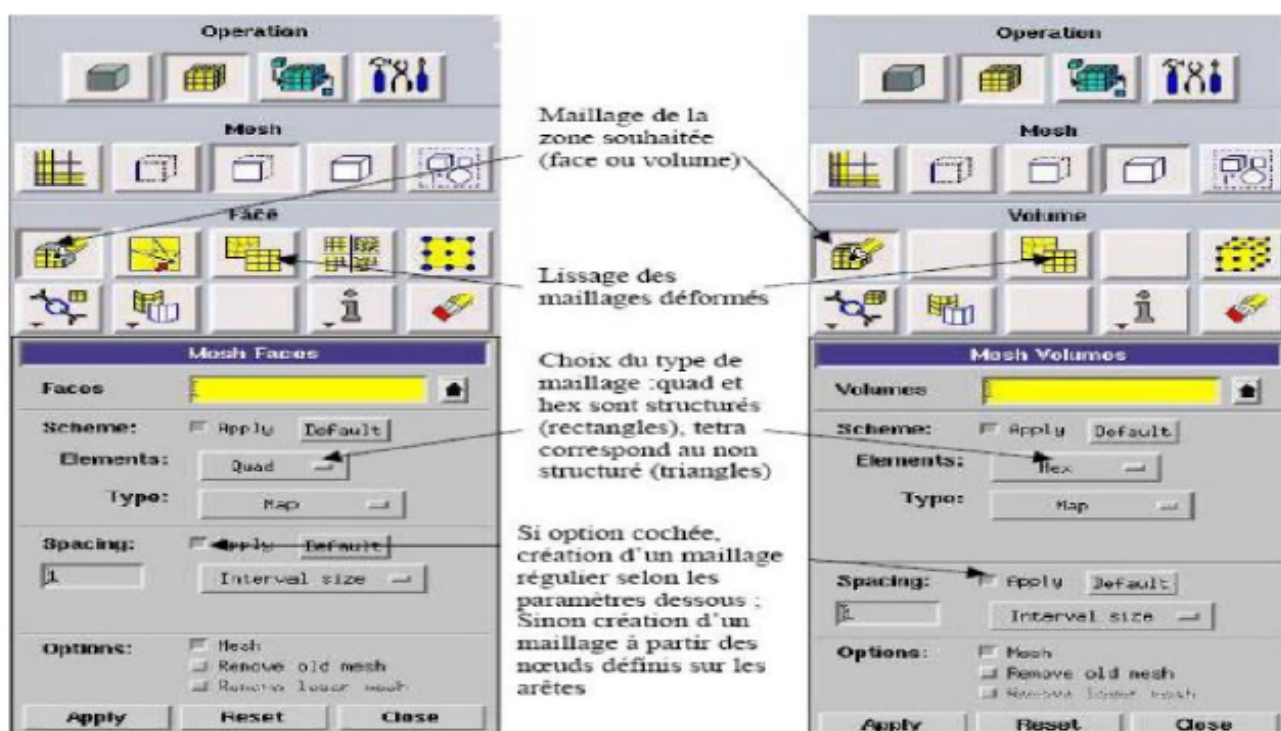


FIGURE 2.16 :Maillage sous Gambit.

## ♣ Conditions aux limites

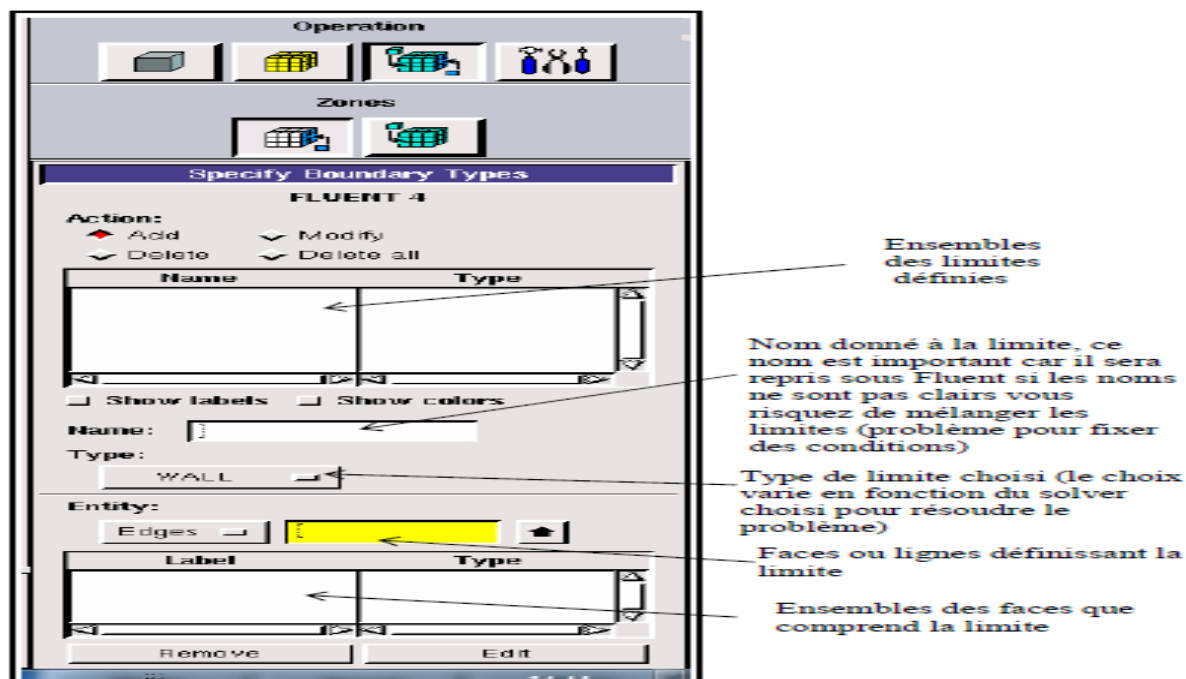


FIGURE 2.17 :Conditions aux limites.

*Présentation du logiciel Fluent :*

## Les étapes d'utilisation du logiciel Fluent

### ♣ Ouvrir le fichier crée par Fluent

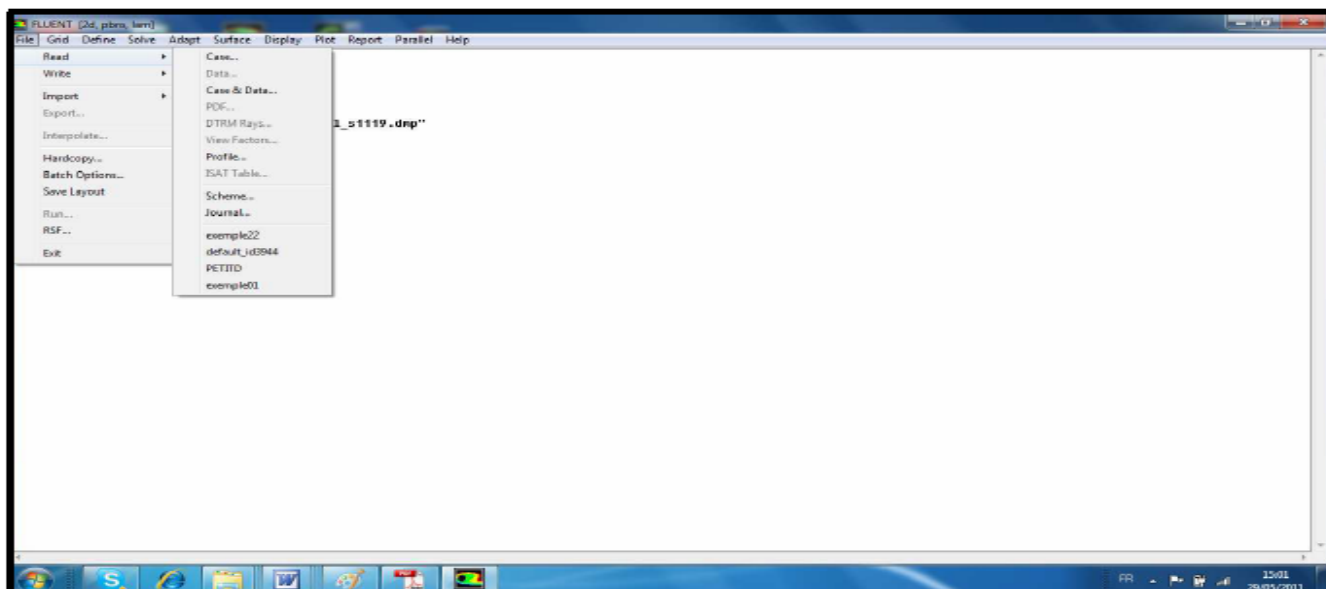


FIGURE 2.18 :Vue globale du Fluent.

### ♣ Définition des dimensions du modèle

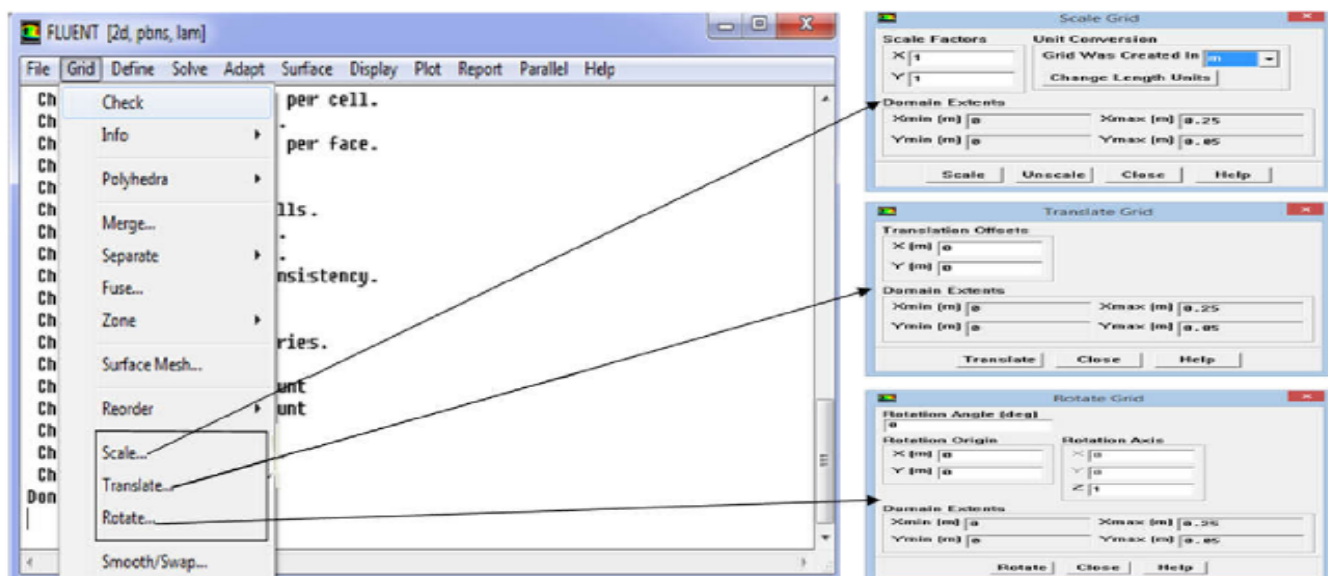


FIGURE 2.19 :Ouvrir le fichier (msh).

### ♣ Définir le modèle mathématique

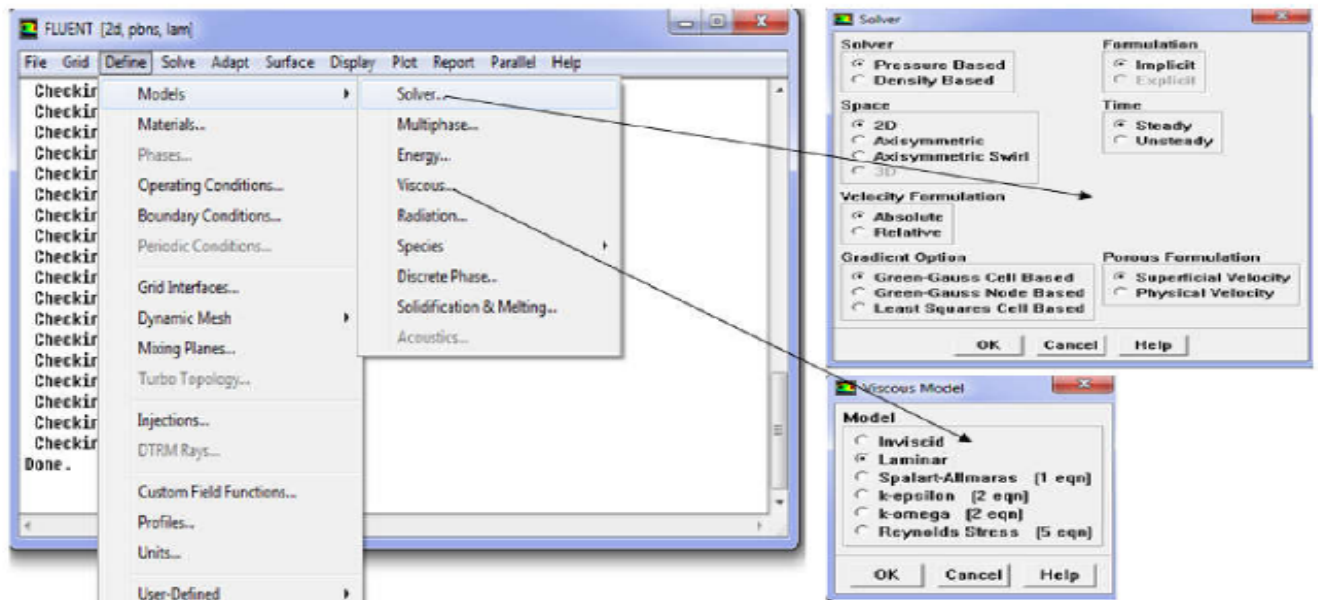


FIGURE 2.20 : Définir le modèle mathématique, le type d'écoulement et le fluide.

### ♣ Définir les conditions aux limites

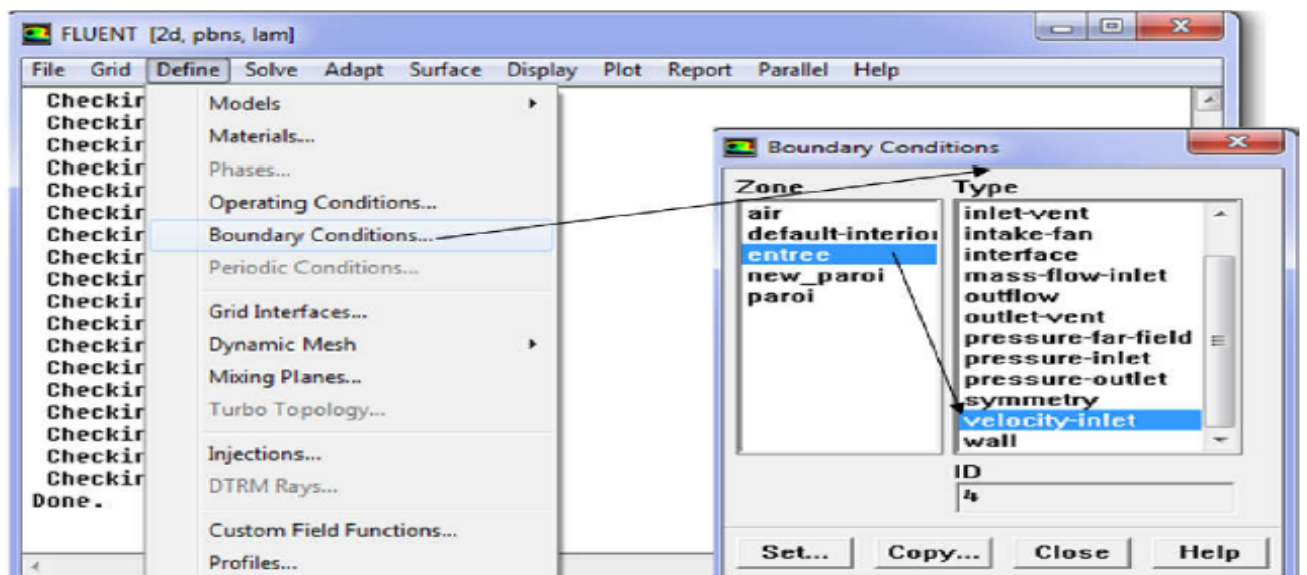


FIGURE 2.21 : Fenêtre des conditions aux limites

## ♣ Initialisation

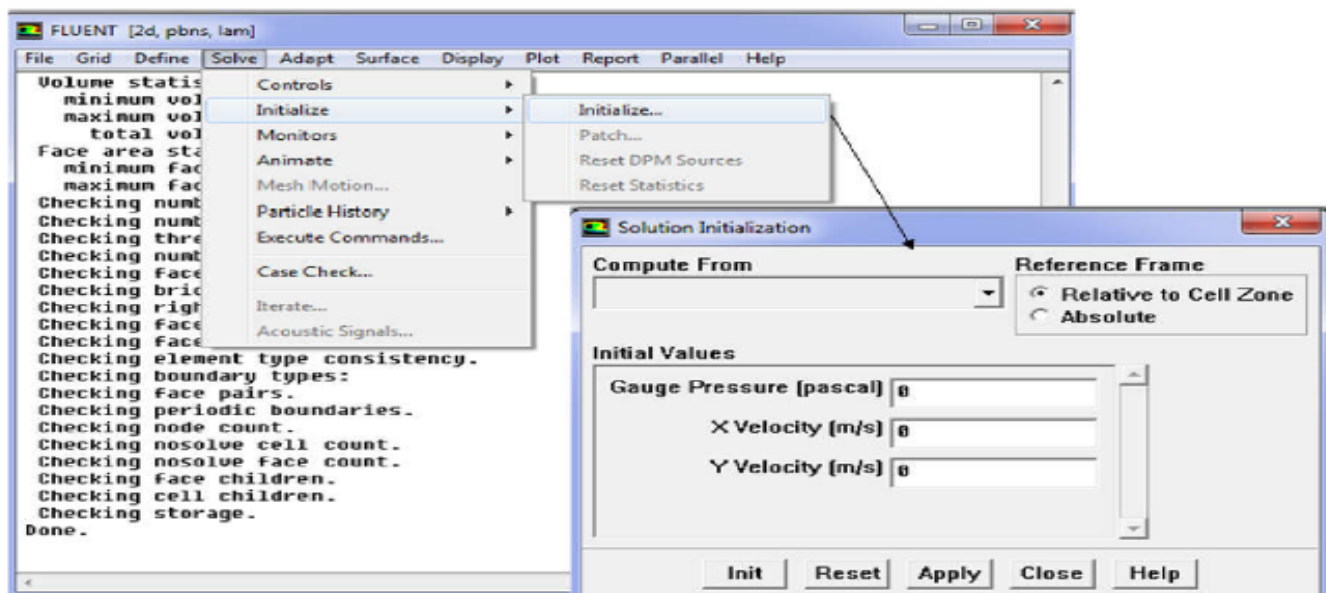


FIGURE 2.22 :Initialisation des variables.

## ♣ Post traitement

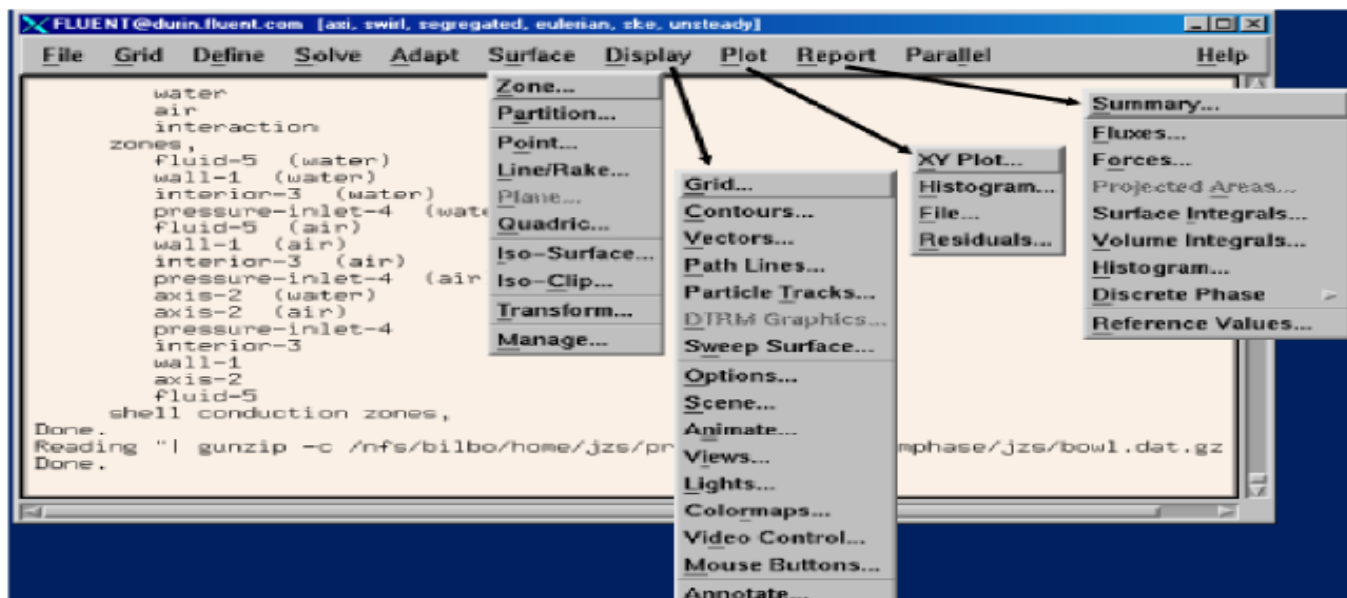


FIGURE 2.23 :Les fonctions de Post traitement.

# Bibliographie

[1] **A. Gasmi**, Ecoulement potentiel et bidimensionnel issu d'un orifice d'un réservoir, Thèse de Magister ,1997.(Université de constantine).

[2] **A. Stoukov**, Introduction à la Mécanique des Fluides Numérique :Méthode " Volumes Finis",

[3] **B.J. Binder, J-M. Vanden-Broeck**, Free surface flows past surfboards and sluice gates. J. Appl. Math. 619.

[4] **CANDEL. S**, "Mécanique des fluides –cours", 2<sup>eme</sup> édition, Dunod, paris 1995

[5] **C. Grossetête**, Mécanique des Fluides, Ellipses, Paris, 1991.

[6] **FLUENT 6.0** Documentation. User's guide. Fluent. Inc. (2001).

[7] **GAMBIT 2.0** Documentation : User's guide. Modeling guide. Tutorial guide. Fluent. Inc. (2001).

[8] **G. K. Batchelor**, An introduction to fluid dynamics, Combridge (1967).

[9] **H. Mekias et J- M. Vanden-Broeck**, Supercritical free-surface flow with a stagnation point due to a submerged source, Phys. Fluids A, 1(10) (1989), 1694-1699.

[10] **J. François Sini**, Cours de Mécanique des Fluides, Engineering school, France, 2006.

[11] **J. Roussel-E. N. S. C. R.** Mécanique des fluides (2010).

[12] **J. M. Vanden-Broeck**, Flow under a gate, Phys. Fluids, 29 (10) (1986), 3148-3151.

[13] **J.M. Vanden-Broeck and J. B. Keller**, Weir flows, J. Fluid Mech. 176 (1987), 283-293.

[14] **M. Damou**. Mécanique des fluides, (O. P. U), (1993).

[15] **N. Bounab**, Simulation Numérique de Quelques écoulements potentiels en 2D "Curved Nozzle" Thèse de doctorat, Université Mohamed Boudiaf M'sila , (2015).

[16] **P. Le Quéré et B. Podvin**, Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles, 2010.

[17] **P. Emmanuel à Mines Nancy** ,Mécanique des fluides, Version du 21 octobre 2016.

[18] **T.Tayebi**, Cours Gambit et Fluent, Université Mohamed Boudiaf M'sila, 2017/2018.

[19] **W. Peng and D.F. Parker**, An ideal fluid jet impinging an unneven wall, J. Fluid Mech.333 (1997), 231-255.

# Résumé

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو الدراسة العددية لمشكلة غير خطية ناشئة عن تدفق ثنائي الابعاد على السطح الحر لسائل غير قابل للضغط وغير لزج من حيث خصائصه (السرعة المحتملة. الضغط الديناميكي...).

وذلك باستعمال طريقة الحجوم المنتهية بالاعتماد على برنامج لفليانت

## الكلمات المفتاحية :

سائل ميثالي ,سطح حر ,الاحجام المنتهية ,برنامج الفليانت

## *Abstract :*

the aim of this work is a numerically study of non linear problem arising from a two – dimensional flow with a free surface of an incompressible and non – viscous fluid ginsic a characteristics (potential speed, dynamic pressure, ..).

using the method volume with the application of fluent code.

**Keywords :** Perfect fluid, Free surface ,Finite volumes , Gambit ,Fluent.

## *Résumé :*

le but de ce travail est d'étudier numériquement un problème non – linéaire provenant d'un écoulement bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non viscos ,ainsi que ses caractéristiques (vitesse potentiel, pression dynamique , ...).

En utilisant la méthode des volumes finis à l'aide du code Fluent.

**Mots clés :**Fluide parfait , Surface libre , Volumes finit , Gambit , Fluent.