REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Étude d'un problème aux limites de second ordre perturbé et singulier par la méthode variationnelle.

Présentée par :

M^{lle} : Djamila CHEIKHAOUI

Membres de jury :

Mr. Rabah MACHETER	M.C.B,	Université de M'sila	**Président**.
Mr. Dahmane BOUAFIA	M.C.A,	Université de M'sila	**Encadreur.**
Mr. Nour eddine DECHOUCHA	M.A.A,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2021/2022

Dedicace

Je dédie cette etude :

-À mes parents,

-À mon frère soufiane Allah yarhmo ,

-À tous les membres de l'association elbeit elsaide ,

-À toute la famille Cheikhaoui,

-À tous mes amis et toute ma famille de département

de Mathématiques et à toute la promotion 2021/2022

de L'EDP.

-À tous mes amis

toute ma vie ...

À vous cher lecteur.

Dj. CHEIKHAOUI

Remerciements

Le prophète que la paix soit sur lui que dit « il ne remercie pas les gens qui ne remercie pas Allah ».

Tout d'abord, je remercie Allah de m'avoir permis d'accomplir ce travail

Louange à Allah pour sa grâce et sa générosité.

Je remercie infiniment ***Mr : Dahmane BOUAFIA*** *pour ses précieux*

conseils et avis et pour diriger ce mémoire.

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait

l'honneur d'examiner ce travail.

Aussi mes remerciements à tous les enseignants de département de ma

thématiques et précisément, les enseignants de spécialité équations différentielle aux dérivées partielles et applications.

Enfin je tiens à remercier tout ceux qui m'ont soutenu pour mener à bien ce travail.

Table des matières

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

H	Espace de Hilbert.
E	Espace de Banach.
X'	Dual topologique de X.
Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}$.
$\partial\Omega$	Frontière de Ω.
$L^p(\Omega)$	$= \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable : $\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx \leq \infty$ avec $1 \leq p < \infty. \Big\}$
$\lVert u\rVert_{L^p}$	$= \big(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^p dx \big)^{\frac{1}{p}}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C : \lvert u(x)\rvert \leq C \; p.p \; sur \; \Omega\}$.
$\lVert u\rVert_{L^\infty}$	$= \inf\{C : \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω.
$D(A)$	Domaine de définition d'un opérateur borné A.
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.
$R(A)$	Image de A qui est noté aussi par ImA.
(X, d)	Espace métrique .
$< ., . >$	Définit un produit scalaire.
$\mathcal{L}(X, Y)$	Ensemble des applications linéaires continues.
$\hookrightarrow$	On écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	On écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est compacte.
p.p	Presque partout.
$\partial_v F$	Dérivée directionnelle de F dans la direction v.
dF	Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par F'.
$d_G F$	Dérivée au sens de Gâteaux.
EVP	Principe variationnel d'Ekeland .

s.c.i	Semi continue inférieur.
s.c.s	Semi continue supérieur.
f.s.c.i	Faiblement semi continue inférieur.
f.s.c.s	Faiblement semi continue supérieur .
$\mathcal{D}(J)$	Domaine de définition de J.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les méthodes variationnelles sont outil puissant dans la résolution des problèmes spécifiques aux limites non linéaires apparaissant dans de nombreux domaines. Au cours de la dernière décennie, ils ont été appliqués de manière intensive aux problèmes aux limites pour les équations différentielles. Ils ont motivés par la modélisation de certains problèmes non linéaires depuis les réseaux de neurones biologiques, des mécaniques élastiques, aux problèmes anisotropes, etc. Dans ce mémoire on va étudier l'existence et multiplicité de solutions positives pour un problème aux limites de second ordre perturbé et singulier sur l'interval borné fermé $[0, 1]$. La preuve du résultat principal repose sur un théorème de minimisation, le lemme du Col et le principe variationnel d'Ekeland .

Le principe de lemme du Col établit l'existence d'un point Col (point critique), l'intuition qui sous-tend ce lemme se trouve dans le mot « Col » lui-même. Supposons que I désigne l'altitude. Il existe alors deux points bas : l'origine, car $J(0) = 0$, et un autre point v où $J(v) \leq 0$. Entre ces deux points se situe une chaîne de montagnes (à distance $\|u\| = r$ de l'origine) où l'altitude est élevée (plus grande que $a > 0$). Pour aller de l'origine à v en suivant un chemin γ, il faut traverser les montagnes, c'est-à-dire d'abord monter, puis redescendre. Comme J est plus ou moins régulière, elle doit atteindre un point critique quelque part entre les deux. L'intuition suggère que si un tel point se situe sur un chemin qui traverse les montagnes à l'altitude la plus basse, ce sera presque toujours un point Col.

Dans ce travail, on présente le lemme du Col (en dimension infinie). Ce mémoire comprend trois chapitre.

Le première chapitre est consacré outils d'analyse fonctionnelle. On donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaire par la suite. Nous avons devise le chapitre par des sections, le premier section contient quelques notions sur les opérateurs de Banach comme la continuité et la compacité, injection continue et injection compact et les propriétés de semi-continuité de fonctionnelles. Nous avons présenté dans la deuxième section un rappel sur l'espace de Lebesgue et de Sobolev comme l'espace L^p et l'espace H^1, lemme de compacité.

Ensuite, dans la section troisième an va présent la méthode variationnelle et la fonctionnelle d'Euler, dans la section quatrième on donnons la théorie des points critiques comme points et valeurs critique, suite minimisante et infimum.

Dans la cinquième section on va présenté le principe variationnel d'EKeland.

Dans la sixième section on va présenté le lemme du Col de la montagne qui contient suite et condition de Palais-Smale et la condition de Cerami, lemme du Col en dimension infinie.

Ensuite, le deuxième chapitre, on va présenter le travaille de l'article de Pavi P, Agarwal, Kanishka Perera, et Donal O'regan qui a été publié en 2005, (voir [23]). Alors, nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions positives pour un problème aux limites singulier du second ordre suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), \quad x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

En fin, Nous étudierons la généralisation de certains des résultats étudiés dans le deuxième chapitre, à travers l'équation différentielle, où s'y ajoute une fonction e Lebesgue dominée c'est à dire $e \in L^1]0,1[$. Ce travail a été réalisé par les auteurs Jian Liu et Zengqin Zhao, dans l'article [35]. Le problème aux limite perturbé du seconde ordre :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)) + e(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, Nous avons trouvé que le résultat dit que sous les conditions sur la fonction f et les constants ou nous avons utilisé dans la démonstration dans le premier et le deuxième résultat théorème de coercitive.

Dans le troisième résultat, u_0 la premier solution de notre problème par une version de lemme du Col, u_1 la deuxième solution faible de notre problème par le principe variationnel d'Ekeland.

CHAPITRE 1

QUELQUES OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, on donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaire par la suite.

1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

Soit X et Y, deux espaces de Banach normés.

Définition 1.1. (Opérateur linéaire borné)[1] Soit A un opérateur linéaire, tel que $D(A) = X$ et $R(A) \subset Y$. On dit que A est borné, s'il est borné sur la boule unité $\bar{B}(0, 1)$. C'est-à-dire, si l'ensemble

$$\{\|Ax\|, \quad \|x\| \quad \leq 1\}$$

est borné.

Conformément à cette définition, si A est borné, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout x avec $\|x\| \leq 1$, on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c.$$

Théorème 1.1. *[1] A est borné, si est seulement si, il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

pour tout $x \in X$.

Définition 1.2. (Espace dual)[2] L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de l'espace X et on note $X^{'}$.

On munit $X^{'}$ de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} | \langle f, x\rangle |, \quad \forall f \in X^{'}.$$

$X^{'}$ muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X^{'}, \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.3. On dit qu'ne suite $(x_n) \in X$ converge faiblement vers x, si

$$\textit{pour tout } f \in X', \ \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle,$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.1. *[3] Soit (x_n) une suite de X. On a*

1. *Si $x_n \longrightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Proposition 1.2. *[3] Soit X est un espace de dimension finie, une suite (x_n) converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.*

Définition 1.4. (**Espace réflexif**) Soit X un espace de Banach et soit **i** l'injection canonique de X dans X''. On dit que X est réflexif, si $\mathbf{i}(X) = X''$, où X'' est le bidual de X.

Définition 1.5. (**Espace séparable**) Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est séparable si X admet une partie dénombrable et dense.

Théorème 1.2. *[3] On dit que X un espace de Banach est réflexif, si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.*

Lemme 1.1. *[3] Si X est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\| \leq M$ contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq M$.*

1.1.1 Continuité et compacité des opérateurs

On va considérer des opérateurs T de X dans Y et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T.

La notion plus simple est la suivante

Définition 1.6. L'opérateur $T : X \to Y$ est dit continu en X, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.
T est dit continu sur $\Omega \subset X$ si T est continu en tout point $x \in \Omega$.

Définition 1.7. Un opérateur $T : X \to Y$ est dit compact s'il est continu et a la propriété. Pour toute suite (x_n) bornée dans X, la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.

Définition 1.8. Soit $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \to Y$ est dit complètement continu s'il est continu et l'image de tout ensemble borné de X est relativement compact dans Y.

1.1.2 L'injection continu et compact)

L'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

Définition 1.9. Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit que X est injecté dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$, si pour tout $x \in X$ on a $x \in Y$ et $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, où la constante c ne dépend pas de $x \in X$. On définit l'opérateur d'injection $i : X \to Y$, qui nous permet de considérer le même élément $x \in X$ comme un élément de Y.
$X \hookrightarrow Y$ est équivalent à dire que l'opérateur d'injection $i : X \to Y$ est un opérateur linéaire continu.
Si $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, pour tout $x \in X$ alors $\|i(x)\|_Y \leq c$ si $\|x\|_X \leq 1$.

Définition 1.10. Si $X \hookrightarrow Y$ et l'opérateur d'injection $i : X \to Y$ est un opérateur compact, alors on dit que X est injecté de manière compacte dans Y, et on écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. La compacité de l'opérateur $i : X \to Y$ est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de X est un sous-ensemble compact de Y.

1.1.3 Semi-continuité

Définition 1.11. (Semi continuité fort)

1. On dit qu'une fonctionnelle $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement $(s.c.i)$ au point x_0, si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \to x_0$, on a
$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$
2. On dit que f est semi-continue supérieurement $(s.c.s.)$ au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \to x_0$, on a
$$f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Exemple 1.1. 1. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} -3 & si\ x \leq 0 \\ 3 & si\ x > 0. \end{cases}$$
Alors f est semi-continue inférieurement $(s.c.i.)$ à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue supérieurement.

2. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -3 & si\ x < 0 \\ 3 & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue supérieurement $(s.c.s.)$ à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue inférieurement.

Définition 1.12. (Semi continuité faible)

1. Une fonctionnelle $f : X \to \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement $(f.s.c.i.)$ au point x_0, si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est faiblement semi-continue supérieurement $(f.s.c.s.)$ au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Exemple 1.2. Soit la fonctionnelle J définie sur un espace de Hilbert H comme suit

$$J : u \to \|u\|^2,$$

alors J est faiblement semi-continue inférieure $(f.s.c.i.)$. En effet, soit (u_n), telle que $u_n \rightharpoonup u$, on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

et comme $\mathcal{H}' = H$ et $u_n \rightharpoonup u$, donc

$$\forall u \in H : (u_n, u) \to (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2.$$

Remarque 1.1.

1. Il est facile de voir que si f est continue en x_0, alors f est $(s.c.s.)$ et $(s.c.i)$ et inversement.
2. Si f est faiblement continue en x_0, alors f est $(f.s.c.s.)$ et $(f.s.c.i.)$ et inversement.

Définition 1.13. (La dérivée au sens de Fréchet) Soit $u \in U$ et $F : U \to Y$. On dit que F est différentiable au point u s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que si on considère

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A.h, \text{ pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0 \text{ lorsque } \|h\| \to 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|h\|_X \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de F en u, ou encore application linéaire tangente à F en u. En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

Exemples 1.1.

1. Si $F(u) = c$. Alors F Fréchet différentiable et
$$dF(u) = 0, \ \forall u.$$
2. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $A(u+h) - A(u) = A.h$ et donc $dA(u) = A, \ \forall u \in X$.
3. La fonctionnelle $F : H \to \mathbb{R}^+$ telle que
$$F(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \langle u, u \rangle,$$
est Fréchet différentiable et
$$dF(u)h = \langle u, h \rangle.$$
4. La fonctionnelle $F : H \to \mathbb{R}^+$
$$F(u) = \frac{1}{2}\|u\|,$$
est Fréchet différentiable pour $u \neq 0$ et
$$dF(u)h = \frac{\langle u, h \rangle}{\|u\|}.$$
On a ensuite toutes les propriétés classiques.

Proposition 1.3. *[5]*

i) *Soit F et G deux applications de U vers Y. Si F et G sont différentiables en $u \in U$. Alors $\forall \lambda, \mu$ réels $\lambda F + \mu G$ est différentiable en u, et*

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) *Soit X, Y et Z trois espaces de Banach, U un ouvert de X, et V un ouvert de Y. Soit $F : U \to Y$ et $G : V \to Z$, tels que $F(U) \subset V$. Si F est différentiable en u et G est différentiable en $v = F(u)$, alors $G \circ F$ est différentiable en u et*

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$

c'est-à-dire

$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$

La différentielle de $G \circ F$ est donc la composition des applications linéaires continues $dF(u)$ et $dG(v)$, pour $v = F(u)$.

Définition 1.14. (Dérivée directionnelle) Soit $F : U \to Y$, $u \in U$. Soit $v \in X,\ v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle en u de F dans la direction v, notée $\partial_v F(u)$, la limite lorsqu'elle existe.

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si F est Fréchet différentiable, alors pour tout $v \in X$ la dérivée directionnelle dans la direction v est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

En effet,

$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$

Donc

$$\frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t},$$

$$\frac{R(tv)}{t} \to 0, \quad lorsque\ t \to 0.$$

Définition 1.15. (Différentiabilité au sens de Gâteaux) On dit que $F : U \to Y$ est Gâteaux différentiable en u (G-différentiable en u), s'il existe une application linéaire continue A de X vers Y, c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que pour tout $v \in X$, la dérivée directionnelle de F en u dans la direction v existe et est égale à $A(v)$, c'est-à-dire

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \to 0,\ \forall v \in X.$$

On vérifie alors que, si une telle application A existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u).$$

Proposition 1.4. *[5] Si F est Fréchet différentiable en u, elle est Gâteaux différentiable en u et*

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

La réciproque est fausse en général, même en dimension finie.

Exemple 1.3. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2, & si\ y \neq 0 \\ 0, & si\ y = 0. \end{cases}$$

est G-différentiable à $(0,0)$, mais pas différentiable au sens de Frechet à $(0,0)$.

Remarque 1.2. La G-différentiabilité n'implique pas la continuité de F.

Exemple 1.4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & si\ y = x^2 \\ 0, & si\ y \neq x^2. \end{cases}$$

est G-différentiable à $(0,0)$, mais n'est pas continue à $(0,0)$, (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).
Tandis que, si on sait que F est C^1 au sens de Gâteaux, alors F est Fréchet différentiable sur U et les deux notions coïncident et on a

Théorème 1.3. *[5] Soit $F : U \to Y$ une application G-différentiable (U ouvert de X). On suppose que l'application $v \mapsto d_G F(v)$ est continue sur U. Alors F est Fréchet différentiable sur U et*

$$dF(v) = d_G F(v), \quad \forall v \in U.$$

Démonstration - Soit $r \in (0,1]$ tel que $B_r(u) \subset U$. Puisque $d_G F : U \to X'$ est continue à u, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \in (0,1]$ tel que

$$\|d_G F(u+tv) - d_G F(u)\| < \varepsilon \quad \text{pour } \|v\| < \delta,\ |t| < 1. \tag{1.1}$$

D'autre par, pour chaque $v \in B_r(0)$ la fonction

$$t \in [0,1] \mapsto (d_G F(u+tv), v),$$

est la dérivée de la fonction

$$g(x) = F(u+tv) \quad t \in [0,1].$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (d_G F(u+tv), v)dt = g(1) - g(0) = F(u+v) - F(u).$$

Donc

$$F(u+v) - F(u) - (d_G F(u), v) = \int_0^1 (d_G F(u+tv) - d_G F(u), v)dt. \tag{1.2}$$

Soit

$$R(u,v) = \int_0^1 (d_G F(u+tv) - d_G F(u), v)dt.$$

D'après (1.1), pour tout $v \in B_\delta(0)$, nous avons que

$$\begin{aligned} \|R(u,v)\| &\leq \int_0^1 \|d_G F(u+tv) - d_G F(u)\| \|v\| dt \\ &\leq \varepsilon \|v\|. \end{aligned}$$

Pour cette raison $R(u,v) = o(\|v\|)$ quand $\|v\| \to 0$. Ensuite, (1.2) montre que $d_G F(u)$ est le dérivé de Fréchet de F à u. ∎

Remarque 1.3. En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que F est C^1, il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable $d_G F$ est continue.

1.2 Espace L^p et H^1

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

1.2.1 Espace L^p

Définition 1.16. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

Telle que $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, et $\|.\|_{L^p}$ est une norme.

Définition 1.17. On pose

$$L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C > 0 : |f(x)| \ \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^{\infty}} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.4. ***(La convergence dominée de Lebesgue)****[3] Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

(a) *$(f_n(x)) \to f(x)$ p.p. Sur Ω.*

(b) *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. Sur Ω. Alors*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0, \ n \to \infty.$$

Théorème 1.5. *[3] L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$, et son dual est L^q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1.2.2 Espace H^1

Définition 1.18. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \Big\{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ i = 1, ..., N\Big\}$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens distribution de v.
L'espace $H^1(\Omega)$ est équipé du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \Big(uv + \Sigma_X \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)dx$$

. et la norme correspondante

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \Big[\int_{\Omega} \Big(v^2 + \Sigma_X \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2\Big)dx\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.4. Par définition de la dérivée distributionnelle, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $v \in H^1(\Omega)$
2. $v \in L^2(\Omega)$ il existe $g_1, g_2, ..., g_N \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int\limits_{\Omega} v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = -\int\limits_{\Omega} g_i\varphi dx = \Sigma_i \varphi dx.$$

Alors, par définition, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = g_i$ au sens de la distribution.

Définition 1.19. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Notons ici que la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ est $H_0^1(\Omega)$ (avec en général $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$).
Alors que la fermeture de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.5. *Soit $u \in H^1(\Omega)$. La fonction u appartient à $H_0^1(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$. En particulier, si $\Omega =]0;1[$, et $u \in H_0^1(\Omega)$, Alors $u(0) = u(1) = 0$. Par ailleurs,*

$$H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Théorème 1.6. ***(Théorème de Rellich)****[3] Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Théorème 1.7. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)****[3] Soit f et $g \in L^2(\Omega)$. Alors, nous avons que*

$$\int\limits_\Omega |fg| \leq \Big(\int\limits_\Omega |f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_\Omega |g|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.8. ***(Inégalité de Hölder)****[3] Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on note q l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suppose que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors*

(i) $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

(ii) $\int\limits_\Omega |fg| \leq \Big(\int\limits_\Omega |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_\Omega |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q.$

Proposition 1.6. ***(Inégalité de Poincaré-Wirtinger)****[21] Soit Ω un intervalle borné, soit $u \in L^1(\Omega)$, on pose*

$$\tilde{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx.$$

Alors

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u'\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall u \in L^1(\Omega). \tag{1.3}$$

1.2.3 Théorème classique de compacité

Théorème 1.9. ***(Ascoli-Arzéla)****[2]*
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un espace métrique compact (X, d) et à valeurs réelles. On suppose que la suite (f_n) a les deux propriétés suivantes

(1) (f_n) *est équicontinue i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N} : d(x,y) < \eta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

(2) *La suite* $(f_n(x))_n$ *est bornée pour tout* $x \in X$.

Alors il existe une sous-suite de (f_n) *qui converge vers une fonction continue* f *dans* $C(X, \mathbb{R})$ *.*

Dans les sections suivantes, nous présenterons la théorie des points critiques et on va définies les points, valeures critiques et la suite minimisante. Puis, on vas donner le principe variationnel d'Ekeland et le Lemme du Col. Nous introduirons également une condition de compacité connue sous le nom de condition Palais-Smale $(P.S)$ et on va étudier aussi la condition de Cerami (**C**). Les deux condditions (**C**) et $(P.S)$ sont nécessaire pour montrer les résultats qui sont utilisant le Lemme du Col (de dimension infinie) d'Ambrosetti et de Rabinowitz (voir [5] et [18]).

1.3 Méthode variationnelle

Soit (E) une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles), on veut l'étudier par une méthode variationnelle. Les solutions sont alors cherchées comme points critiques d'une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach X bien précis telle que :

i) J est au moins Gateaux-différentiable.

ii) L'équation d'Euler correspondante : $d_G J(u) = 0$ est équivalente à (E).

Dans le cas où J est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint.

1.4 Points et valeurs critiques

Proposition 1.7. *[5] Soit* X *un espace de Banach, et* J *une application de* X *vers* $\mathbb{R}$, *soit* $u \in X$. *On suppose que*

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v),$$

c'est-à-dire

$$J(u) \leq J(v), \ \forall v \in X.$$

Alors, si J *est Gâteaux-différentiable en* u, *on a*

$$d_G J(u) = 0.$$

Démonstration - Sous l'hypothèse de ce proposition, supposons sans perte de généralité que u_0 est un point minimum (sinon considérons la fonction $-J$ au lieu de J).

Comme $u_0 \in U$ et U est ouvert, il existe un nombre réel positif r tel que la boule ouverte $B_r(u_0)$ est contenu dans U.
Maintenant, soit $h \in X \setminus \{0\}$. Alors, pour chaque t tel que

$$|t| \leq \frac{r}{\|h\|}, \quad \text{on a,} \quad J(u_0 + th) \geq J(u_0),$$

et ainsi par le Gâteaux différentiabilité de J à u_0, nous avons

$$d_G J(u_0)(h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[J(u_0 + th) - J(u_0)] \geq 0.$$

Il s'ensuit également que $d_G J(u_0)(-h) \geq 0$, i.e., $d_G J(u_0)(h) \leq 0$, par linéarité de $d_G J(u_0)$.
Par conséquent, on trouve $d_G J(u_0)(h) = 0$, pour tout $h \in X$. Ainsi $d_G J(u_0) = 0$. ■

Définition 1.20. Soit $u_0 \in X$. On dit que u_0 est un minimum local pour J si il existe $\delta > 0$ tel que

$$J(u_0) \leq J(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta), \quad v \neq u_0.$$

On a alors

Proposition 1.8. *[5] Soit $u_0 \in X$, un minimum local de J. Alors si J est Gâteaux différentiable en u_0, alors*

$$d_G J(u_0) = 0.$$

Définition 1.21. (Points critiques) Soit J une fonctionnelle différentiable de X vers $\mathbb{R}$. Un point $u \in X$ est dit critique pour J si et seulement si

$$dJ(u) = 0.$$

Définition 1.22. (Valeures critiques) On appelle valeur critique, de la fonctionnelle J, de classe C^1 définie sur X, un nombre $c \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $u \in X$, tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

Théorème 1.10. *[24] Soient X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X, telle que*

1. $\lim_{\|x\|_X \longrightarrow +\infty} J(x) = +\infty$ *(coercivité uniforme)*
2. *J est (f.s.c.i),*

alors J est bornée inférieurement sur X et atteint sa borne inférieure en un point x_0. De plus, si J est Gâteaux différentiable en x_0, alors $Grad\ J(x_0) = 0$.

Pour les fonctionnelles convexes (ou espaces convexes), un résultat classique est donné par le théorème suivant

Théorème 1.11. *[2] Soit C un ensemble convexe fermé de X, Banach réflexif.*
Soit $J : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose

i) *J coercive et $J \neq +\infty$, c'est-à-dire*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty.$$

ii) *J $(s.c.i)$ pour la convergence faible. Alors il existe $u \in C$, tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v) \ \ (< +\infty).$$

Si de plus J est Gâteaux-différentiable en u, alors $d_G J(u) = 0$.

1.4.1 Suite minimisante et infimum

Définition 1.23. (Suite minimisante) Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est une suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x)$$

Théorème 1.12. *[5] Soit X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X, telle que*

1. *J est $(f.s.c.i)$,*
2. *la suite minimisante de J est bornée sur X,*

alors J atteint son infimum sur X.

1.5 Principe variationnel d'Ekeland

Soit X un espace métrique complet et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Si $(u_n)_n$ est une suite minimisante, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour $n > n_0$

$$J(u_n) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

On dit que $u = u_\varepsilon$ est un $\varepsilon-$ minimiseur de J si

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Le théorème d'Ekeland considère l'existence des points $\varepsilon-$ minimiseur.

Théorème 1.13. ***(Principe variationnel d'Ekeland, forme forte 1974)****([7], [8])*
Soit (X,d) un espace métrique complet et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement, et non identiquement égale à $+\infty$ ($J \not\equiv +\infty$).
Soit $\varepsilon > 0$ et $u = u_\varepsilon \in X$ qui donne tel que

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$ il existe $v = v_\varepsilon \in X$ tel que

(a) $J(v) \leq J(u)$,
(b) $d(u,v) \leq \lambda$, *et*
(c) $J(v) < J(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w,v)$, *pour tout* $w \in X \setminus \{v\}$.

Nous présentons un théorème et un corollaire dérivés de principe variationnel d'Ekeland.

Corollaire 1.1. *([9], [11])*
Soit X est un espace de Banach $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle $(s.c.i.)$, bornée inférieurement et Gâteaux différentiable. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute $u_\varepsilon \in X$ tel que

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

il existe un point v dans X satisfaisant

(1) $J(v) \leq J(u_\varepsilon)$,
(2) $\|v - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$, *et*
(3) $\|J'(v)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Remarque 1.5. Les relations (1) et (3) signifie que nous avons obtenu un (presque minimiseur) de J, qui est aussi un (presque point critique).

1.6 Lemme du Col de la Montagne

1.6.1 Suite et condition de Palais-Smale

Définition 1.24. [11] Soit E un espace Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On dit que J satisfait la condition de Palais-Smale, notée $(P.S)$, s'il y a une suite (u_n) dans E telle que

$$(J(u_n)) \text{ bornée, et } \; J'(u_n) \to 0, \text{quand } \; n \to +\infty \tag{1.4}$$

admet une sous-suite convergente.
Toute suite satisfaisante (1.4) est appelée suite de Palais-Smale.

Définition 1.25. On dit que M est borné et faible séquentiellement fermé, C'est-à-dire, Pour tout séquence (u_n) dans M telle que, $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to \infty$, Nous avons toujours $u \in M$.

1.6.2 Suite et condition de Cerami

Définition 1.26. [20] Soit E un espace Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On dit que J satisfait la condition de Cerami, notée $(\mathbf{C})$, s'il y a une suite (u_n) dans E telle que

$$(\mathbf{C}) : J(u_n) \text{ est bornée}, \quad (1 + ||u_n||)||J'(u_n)||_{E'} \to 0 \tag{1.5}$$

Remarque 1.6. — Cette condition est plus faible que la condition Plais-Smale, mais peut être utilisée à sa place lors de la construction de déformation d'ensembles de sous-niveaux via des flux pseudogradients négatifs, et donc aussi dans les théorèmes minimax et plus précisément dans le lemme de Col de montagne.

Théorème 1.14. *Soit $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une fonctionnelle coercitive, c'est-à-dire,*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty,$$

alors J satisfait $(P.S)$.

1.6.3 Lemme du Col en dimension infinie

Théorème 1.15. ***Lemme du Col**[5], [18],*

Soit E un espace de Banach réel et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfait $(P.S)_c$ la condition de Palais-Smale au niveau c, avec $J(0) = 0$. Supposons que

(a) *Il existe $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $J(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in E$ avec $\|u\| = \rho$;*

(b) *Il existe $e \in E$, $\|e\|_E > \rho$ tel que $J(e) < 0$.*

Alors J admet une valeur critique $c \geq \alpha$. De plus, c peut être caractérisée par

On définit

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], E) \mid \quad \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \tag{1.6}$$

Alors

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(x)) \geq \alpha \tag{1.7}$$

est une valeur critique de $J(u)$.

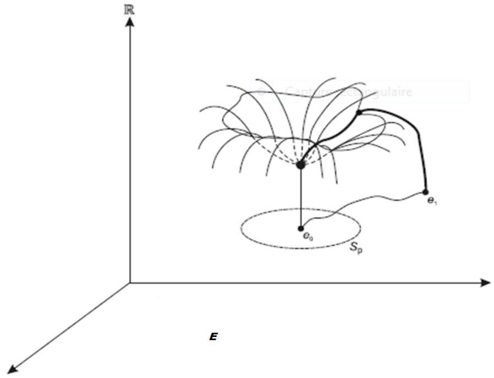
Remarque 1.7. Géométriquement, lorsque $E = \mathbb{R}^2$ les hypothèses (a) et (b) signifient que l'origine se situe dans une vallée entourée d'une montagne

$$\Gamma_\gamma = \{(x, \gamma(x)) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Il doit donc exister un Col de montagne joignant $(0, 0)$ et $(1, \gamma(1))$ qui contient une valeur critique (voir figure en-dessous).

Remarque 1.8. Notez que la condition $(P.S)$ est essentielle dans le théorème 1.15.

FIGURE 1.1 – Col de la montagne entre "villages" $e_0(0,0)$ et $e_1(1,e)$, qui illustration les conditions géométriques (a) et (b) de Lemme 1.15.



1.6.4 Autre version de lemme du Col

Théorème 1.16. *Soit E un espace de Banach réel et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfait (C) la condition de Cerami, avec $J(0) = 0$. Supposons que*

(a) *Il existe $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $J(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in E$ avec $\|u\| = \rho$;*

(b) *Il existe $e \in E,\ \|e\|_E > \rho$ tel que $J(e) < 0$.*

Alors J admet une valeur critique $c \geq \alpha$. De plus, c peut être caractérisée par

On définit

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], E) \mid \quad \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \tag{1.8}$$

Alors

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(x)) \geq \alpha \tag{1.9}$$

est une valeur critique de $J(u)$.

Lemme 1.2. *[22] Soit la fonctionnelle $J : M \subseteq E \to \mathbb{R}$ avec $M \neq \emptyset$, $\min_{u \in M} F(u) = \alpha$ a une solution lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *E est un espace de Banach réel réflexif.*

(ii) *M est borné et faible séquentiellement fermé.*

(iii) *J est faiblement semi-continue inférieurement sur M.*

CHAPITRE 2

MULTIPLICITÉS DES SOLUTIONS POSITIVES SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES DE SECOND ORDRE SINGULIER PAR MÉTHODE VARIATIONNELLES.

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions positives pour une classe d'équations du second ordre. Pour obtenir nos résultats, nous utiliserons la méthode variationnelle et la théorie de point critique, et aussi le lemme du Col. Par exemple, nous choisissons l'article qui a été publié par les auteurs Ravi P. Agarwal, Kanishka Perera, et Donal O'regan en 2005, (voir [23]).

2.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est d'obtenir au moins deux solutions positives au problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f(x,u), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où nous supposons seulement que $f \in C((0,1) \times (0,\infty), [0,\infty))$ satisfait

$$2\varepsilon \leq f(x,u) \leq Cu^{-\gamma}, \quad (x,u) \in (0,1) \times (0,\varepsilon). \tag{2.2}$$

Pour certains $\varepsilon, C > 0$ et $\gamma \in (0,1)$, de sorte qu'il puisse être singulier aù $u = 0$ (bien sûr C que pourrait dépend de ε).

Exemple 2.1. Un exemple modèle de non linéarité f est

$$f(x,u) = u^{-\gamma} + g(x,u) \leq Cu^{-\gamma} \tag{2.3}$$

Avec $g \in C((0,1) \times (0,\infty), [0,\infty))$.

2.1.1 Fonction de Green et le problème approché

On définit $f_\varepsilon \in C((0,1)\times\mathbb{R},[0,\infty))$ par,

$$f_\varepsilon(x,u) = f(x,(u-\varphi_\varepsilon(x))^+ + \varphi_\varepsilon(x)). \tag{2.4}$$

Proposition 2.1. *La fonction de Green $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon x(1-x)$ est une solution de*

$$\begin{cases} -u'' = 2\varepsilon, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Démonstration - D'aprés (2.5), on a L'équation suivant

$$-u'' = 2\varepsilon, \quad x \in (0,1)$$

Par intégration, on trouve,

$$\int u''\,du = -\int 2\varepsilon\,dx$$
$$u' = -2\varepsilon x + C_1$$

On intègre autre fois, donc,

$$\int u'\,du = \int (-2\varepsilon x + C_1)\,dx.$$

Alors, on obtient,

$$u(x) = -\varepsilon x^2 + C_1 x + C_2.$$

En appliquant les conditions au bords, on a

$$\begin{cases} u(0) = C_2 = 0 \\ u(1) = -\varepsilon + C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \varepsilon \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Finalement, $u(x) = -\varepsilon x^2 + \varepsilon x$, d'où $u(x) = \varepsilon x(1-x)$. ∎

Notation 2.1. On pose : $u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$. On considère le problème aux limites régulier et approximé suivant

$$\begin{cases} -u'' = f_\varepsilon(x,u), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Nous présentons maintenant l'espace de Hilbert $H_0^1(0,1)$ qui convient à l'étude de notre problème. Soit

$$H_0^1(0,1) = \Big\{u \text{ mesurable : } u,\ u' \in L^2(0,1),\ u(0) = u(1) = 0\Big\},$$

muni de la norme

$$\|u\| = \left(\int_0^1 |u'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

et associé au produit scalaire

$$(u,v)=\int\limits_0^1 u'(x).v'(x)dx.$$

Lemme 2.1. *[19] Soit*

$$K=\left\{\ u\in C[0,1]:u(x)\geq 0,\ x\in[0,1] \text{ et } u(x) \text{ est concave sur } [0,1]\ \right\}$$

Si $u\in K,\exists x_0\in[0,1]$ *tel que*

$$u(x_0)=\|u\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|u(x)|,$$

et $u(x)\geq\theta(x,x_0)\|u\|_\infty$, *pour tout* $x\in[0,1]$, *telle que*

$$\theta(x,s)=\begin{cases}\frac{x}{s} & si\quad 0\leq x\leq s,\\ \frac{(1-x)}{(1-s)} & si\quad s\leq x\leq 1.\end{cases}$$

Démonstration - L'existence de x_0 est immédiate. Maintenant si $0\leq x\leq x_0$. Alors depuis $u(x)$ est concave sur $[0,1]$. On a

$$u(x)=u\left(\left(1-\frac{x}{x_0}\right)0+\frac{x}{x_0}x_0\right)\geq\left(1-\frac{x}{x_0}\right)u(0)+\frac{x}{x_0}u(x_0).$$

C'est à dire,

$$u(x)\geq\frac{x}{x_0}u(x_0)=\theta(x,x_0)\|u\|_\infty\geq x(1-x)\|u\|_\infty.$$

Car,

$$\frac{x}{x_0}-x(1-x)=x\Big(\frac{1-x_0+xx_0}{x_0}\Big)\geq 0.$$

Un argument similaire établit le résultat si $x_0\leq x\leq 1$. ∎

Lemme 2.2. *Par (2.2), on a*

$$2\varepsilon\leq f(x,u)\leq C\varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma},\quad (x,u)\in(0,1)\times(-\infty,\varepsilon).$$

Démonstration - On observe que si u est une solution de (2.6), alors $u\geq\varphi_\varepsilon(x)$ et donc aussi une solution de (2.1). Pour voir cela on suppose que

$$u(x)<\varphi_\varepsilon(x),\quad \text{pour certains } x. \tag{2.7}$$

Par lemme 2.1 de Agarwal et O'Regan, (voir [19])

$$u(x)\geq x(1-x)\|u\|_\infty,\quad x\in[0,1], \tag{2.8}$$

Où $\|u\|_\infty=\max_{x\in[0,1]}|u(x)|$, alors (2.7) implique $\|u\|_\infty<\varepsilon$. Mais alors $-u''\geq 2\varepsilon=-\varphi_\varepsilon''$ par lemme 2.2, alors $u\geq\varphi_\varepsilon$, contredisant (2.7). ∎

Remarque 2.1. Inversement, toute solution de (2.1) est une solution de (2.6).

2.2 La fonctionnelle d'Euler-Lagrange

Nous définissons maintenant la fonction d'Euler-Lagrange associée au problème (2.1). Soit $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 F_\varepsilon(x,u)\,dx.$$

Telle que $F_\varepsilon(x,u) = \int\limits_0^u f_\varepsilon(x,s)ds$.

Proposition 2.2. *La fonctionnelle J est continuement différentiable et la dérivée de Fréchet de J écrit sous la forme*

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u)v\,dx.$$

pour toute $v \in H_0^1(0,1)$.

Démonstration - En utilisant la même idée que dans les articles [25] et [27].

Etape 1 : J est Gâteaux-différentiable.

Pour toute $v \in H_0^1(0,1)$, et pour tout $0 < t < 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
J(u+tv) - J(u) &= \frac{1}{2}\int_0^1 |(u+tv)'|^2\,dx - \int_0^1 F_\varepsilon(u+tv)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2\,dx + \int_0^1 F_\varepsilon(u)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2\,dx + \frac{1}{2}t^2\int_0^1 |v'|^2\,dx + t\int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 F_\varepsilon(u+tv)\,dx \\
&\qquad -\frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2\,dx + \int_0^1 F_\varepsilon(u)\,dx \\
&= \frac{t^2}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx + t\int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 \left[F_\varepsilon(u+tv) - F_\varepsilon(u)\right]\,dx \\
&= \frac{t^2}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx + t\int_0^1 u'v'\,dx - t\int_0^1 f_\varepsilon(u+t\theta v)v\,dx.
\end{aligned}$$

Où $\quad 0 < \theta < 1, \quad$ et puis

$$\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \frac{t}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx + \int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 f_\varepsilon(u+t\theta v)v\,dx.$$

Pour $t \to 0$, On trouve

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u)v\,dx.$$

Etape 2 : J' est continue.

Soit $(u_n) \subset H_0^1(0,1)$ avec $u_n \to u$, quand $n \to +\infty$, donc il existe $R > 0$ tel que $\|u_n\| \leq R$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle = \int_0^1 (u'_n - u')v'\,dx - \int_0^1 (f_\varepsilon(u_n) - f_\varepsilon(u))v\,dx. \quad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

D'aprés lemme 2.2, on a

$$f_\varepsilon(x,u) \leq C\varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}$$

Et comme $\varphi(x)^{-\gamma} \in L^1(0,1)$. Alors,

$$\int_0^1 f_\varepsilon(x,u)\,dx < +\infty.$$

à partir du théorème de convergence dominé de Lebesgue 1.4, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_\varepsilon(u_n)v\,dx &= \int_0^1 f_\varepsilon(u)v\,dx.\\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u'_n v\,dx &= \int_0^1 u'v\,dx.\end{aligned}$$

Et d'aprés la continuité de f ; passant à la limite dans $\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle$ quand $n \to +\infty$ nous obtenons que $J'(u_n) \to J(u)$ dans $H^{-1}(0,1)$. Donc J' est continue.

Finalement, J est Gâteaux-différentiable et continue. Alors J est continument différentiable.

■

Définition 2.1. On dit que $u \in H_0^1(0,1)$ est une solution faible du problème (2.1), si pour tout $v \in H_0^1(0,1)$, on a

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 f_\varepsilon(u)v\,dx = 0.$$

Lemme 2.3. *Par un argument standard, il suffit de montrer que (u_n) est bornée lors de la vérification de $(\boldsymbol{C})$ (voir la condition de Cerami (1.5)). D'autre part on prend la suite (u_n) telle que,*

$$\{u_n\} = \{u_n^+\} - \{u_n^-\}.$$

Démonstration - On monter que (u_n^-) est bornée. D'aprés la proposition 2.2, lemme 2.2 et puisque $\|.\|_\infty \leq \|.\|$. Alors, on a,

$$\begin{aligned}\langle J'(u_n), u_n^-\rangle &= \int_0^1 u'_n(u_n^-)'dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u_n)u_n^- dx\\ &= \int_{u_n<0} u'_n(u_n^-)'dx + \int_{u_n\geq 0} u'_n(u_n^-)'dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u_n)u_n^- dx\\ &= \int_{u_n<0} u'_n(u_n^-)'dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u_n)u_n^- dt\\ &= -\int_0^1 (u_n^-)'(u_n^-)'dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u_n)u_n^- dx.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\|u_n^-\|^2 &= -\langle J'(u_n), u_n^-\rangle - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u_n)u_n^- dx\\ &\leq \langle J'(u_n), u_n^-\rangle + \int_0^1 f_\varepsilon(x,u_n)u_n^- dx\\ &\leq \|J'(u_n)\|\|u_n^-\| + \|u_n^-\|_\infty \int_{u_n<0} f_\varepsilon(x,u_n)dx\\ &\leq \|J'(u_n)\|\|u_n^-\| + C\|u_n^-\| \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}dx,\end{aligned}$$

et puis, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \|u_n^-\| \leq \|J'(u_n)\|(1+\|u_n^-\|)$, on a, donc,

$$\begin{aligned}\|u_n^-\| &\leq \|J'(u_n)\| + C\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}dx\\ &\leq \|J'(u_n)\|(1+\|u_n^-\|) + C\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}dx.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Par conséquent,

$$\left\|u_n^-\right\| \leq C\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}dx + o(1). \tag{2.10}$$

D'où la bornitude de (u_n^-). Donc, nous n'aurons donc qu'à vérifier que (u_n^+) est bornée. Nous renvoyons le lecteur à Agarwal et O'egan [19] pour une large introduction aux problèmes singuliers et à Rabinowitz [5] pour les méthodes variationnelles. ■

2.3 Un principe d'existence

On suppose que

(H_1) : Il ya une constante $M > 0$, indépendant de λ, tel que $\|u\| \neq M$ pour chaque solution $u > 0$ à

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(x,u), \quad x \in (0,1),\\ u(0) = u(1) = 0.\end{cases} \tag{2.11}$$

Pour chaque $\lambda \in (0,1)$.

Notons que (H_1) est vraie s'il existe une borne a priori de la norme des solutions du problème.

Proposition 2.3. *Si (2.2) et (H_1) sont vérifiées, alors (2.1) a une solution positive.*

Démonstration - Nous allons montrer que J atteint son infimum sur la boule

$$B = \{\ u \in H : \|u\| \leq M\ \} \tag{2.12}$$

D'après le principe variationnel d'Ekeland, (voir théorème 1.13 dans chapitre II), à un moment donné $u_0 \in B$, qui est alors un minimeaux local, si ε est choisi assez petit.
Clairement, $\inf J(B) > -\infty$. Soit (u_n) une suite de minimisation. En passant à une sous-suite, et nous pouvons supposer que $u_n \rightharpoonup u_0 \quad$ dans $H_0^1(0,1)$. Alors, d'aprés le théorème 1.6 (voir chapitre I), on a

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0, & dans\ H(0,1), \\ u_n \to u_0, & dans\ L^2(0,1), \\ u_n(x) \to u_0(x), & p.p.\ dans\ (0,1). \end{cases}$$

Comme $\|u\|^2 \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|^2$, (voir exemple 1.2), on a

$$\begin{aligned} J(u_0) =& \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \int_0^1 F_\varepsilon(x, u_0(x))\, dx \\ \leq& \frac{1}{2}\liminf \|u_n\|^2 - \lim \int_0^1 F_\varepsilon(x, u_0(x))\, dx \\ =& \lim J(u_n) = \inf_{u\in B} J(u). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Alors, $J(u_0) = \inf J(B)$.
On suppose que $u_0 \in \partial B$. Alors, c'est aussi un minimiseur de $J|_{\partial B}$, donc le gradient de J à le point u_0 de la direction de la normale vers l'intérieur à ∂B, i.e.,

$$J'(u_0) = -vu_0 \tag{2.14}$$

Où

$$-u_0'' = \frac{1}{1+v} f_\varepsilon(x, u_0), \tag{2.15}$$

pour certains $v \geq 0$. Si $u_0 \geq \phi_\varepsilon$, (2.15) se réduit à (2.11) avec $\lambda = \frac{1}{1+v} \in (0,1)$, alors comme l'introduction, il s'ensuit que $u_0 < \varepsilon$. Mais ensuite multiplier (2.15) par u_0 et l'intégration par partie donne

$$M^2 = \frac{1}{1+v}\int_0^1 u_0(x) f_\varepsilon(x, u_0(x))\, dx \leq C\varepsilon \int_0^1 \phi_\varepsilon(x)^{-\gamma}\, dx = C\varepsilon^{1-\gamma}. \tag{2.16}$$

Par lemme 2.2, où C est une constante positive générique, ce qui impossible si ε est suffisamment petit. ■

Exemple 2.2. On considère

$$\begin{cases} -u'' = \mu f(x,u), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Où $\mu > 0$ est un paramètre et $f \in C((0,1)\times(0,\infty), [0,\infty))$ satisfait (2.2). Si $u > 0$ est une solution de

$$\begin{cases} -u'' = \lambda\mu f(x,u), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

avec $\|u\| = M$,

$$M^2 = \lambda\mu \int_0^1 u(x) f(x, u(x))\, dx \leq \mu \sup_{(x,u)\in(0,1)\times(0,M]} uf(x,u), \tag{2.19}$$

Donc (2.17) a une solution positive pour

$$\mu < \sup_{M>0} \frac{M^2}{\sup_{(x,u)\in(0,1)\times(0,M]} uf(x,u)}. \tag{2.20}$$

De la même manière,

$$\begin{cases} -u'' = u^{-\gamma} + \mu g(x,u), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Où $\gamma \in (0,1)$,$\mu > 0$ est un paramètre, et $g \in C((0,1) \times [0,\infty), [0,\infty))$ a une solution positive pour

$$\mu < \sup_{M>0} \frac{M^{1-\gamma}(M^{1+\gamma} - 1)}{\sup_{(x,u)\in(0,1)\times(0,M]} ug(x,u)}. \tag{2.22}$$

2.4 Cas Asymptotiquement linéaire

On suppose que

$$f(x,u) \leq Cu, \quad (x,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty), \tag{2.23}$$

Pour certains $C > 0$. Nous disons que (2.1) et résonnant si

$$\frac{f(x,u)}{u} \to \lambda_1 \quad \text{quand } u \to \infty \tag{2.24}$$

Où $\lambda_1 = \pi^2$ est une première valeur propre de

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

On note par

$$H(x,u) = F_\varepsilon(x,u) - \frac{1}{2} uf_\varepsilon(x,u) \tag{2.26}$$

La partie non quadratique de F_ε.

Théorème 2.1. *Si (2.2) et (2.23) sont vérifiées. Alors (2.1) a une solution positive dans les cas suivants :*

(i) Non-résonance ci-dessous λ_1 :

$$f(x,u) \leq au + C, \quad (x,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty), \tag{2.27}$$

Pour certains $0 < a < 1 < \lambda_1$ and $C > 0$, *(ii) Résonance : (2.24) est satisfaite et,*

$$H(x,u) \leq C, \quad (x,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty), \tag{2.28}$$

Pour certains $C > 0$, et

$$H(x,u) \to -\infty \quad \text{comme } u \to \infty \tag{2.29}$$

Démonstration - (i) Cas non-résonance :
Par (2.27) et lemme 2.2,

$$F_\varepsilon(x,u) \leq \begin{cases} 0, & u < \varepsilon, \\ \frac{a}{2}u^2 + Cu, & u \geq \varepsilon, \end{cases} \tag{2.30}$$

Et puisque $a < \lambda_1$, il découle de l'inégalité de wirtinger (1.3) que J est borné inférieurement et coercive, et admet un minimum global, c'est-à-dire :

1. J est coercive car
$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 F_\varepsilon(x,u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 \frac{a}{2}u^2 + Cu\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{a}{2}\int_0^1 u^2\,dx - C\int_0^1 u\,dx \\ &= \frac{1}{2}(1-a)\|u\|^2 - C\|u\| \end{aligned}$$
Comme $0 < a < 1 < \lambda_1$. Alors,
$$\lim_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty.$$

2. J est faiblement semi-continue inférieurement $(f.s.c.i)$.
Comme J est coercive, alors elle est bornée inférieurement. Puis par un preuve similaire à celle dans la proposition 2.3, on trouve J est $(f.s.c.i)$. Alors, d'après le théorème 1.10, J est atteint son infiniment sur $H_0^1(0,1)$.

(ii) Cas résonance :
Pour $u \geq \varepsilon$, on a
$$F_\varepsilon(x,u) = \int_\varepsilon^u f_\varepsilon(x,s)\,ds.$$
On devise cette équation par u^2 $(u \neq 0)$. Donc,
$$\frac{F_\varepsilon(x,u)}{u^2} = \int_\varepsilon^u \frac{f_\varepsilon(x,s)}{u^2}\,ds$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F_\varepsilon(x,u)}{u^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\int_\varepsilon^u \frac{f_\varepsilon(x,s)}{u^2}\,ds\right) \\
&= \frac{f(x,u)u^2 - 2uF(x,u)}{u^4} \\
&= \frac{f(x,u)u - 2F(x,u)}{u^3} \\
&= \frac{-2\left(\frac{1}{2}uf(x,u) + F(x,u)\right)}{u^3} \\
&= \frac{-2H(x,u)}{u^3}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Et on a,

$$
\frac{F_\varepsilon(x,u)}{u^2} \to \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{quand } u \to \infty \tag{2.32}
$$

Car, d'après (2.28). On a

$$
H(x,u) = F_\varepsilon(x,u) - \frac{1}{2}uf_\varepsilon(x,u) \leq C
$$

Donc, d'après (2.24), quand $u \to +\infty$, on trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{F_\varepsilon(x,u)}{u^2} &\leq \frac{1}{2u}f_\varepsilon(x,u) + \frac{C}{u^2} \\
&\leq \frac{f_\varepsilon(x,u)}{2u} + \frac{C}{u^2} \\
&\leq \frac{\lambda_1}{2}
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Avec,

$$
\lambda_1 = \lim_{u\to+\infty} \frac{f_\varepsilon(x,u)}{u}.
$$

Par (2.24), on a, donc

$$
F_\varepsilon(x,u) = \left(\frac{\lambda_1}{2} + 2\int_u^\infty \frac{H(x,s)}{s^3}\,dx\right)u^2 \leq \frac{\lambda_1}{2}u^2 + C. \tag{2.34}
$$

Par (2.31), (2.33), et l'inégalité de wirtinger (1.3) implique que J est bornée inférieurement.

Pour vérifier la condition (C) , soit (u_n) satisfait (1.5) et on suppose que $\rho_n = \|u_n\| \to \infty$. Depuis (u_n^-) est bornée, par le théorème 1.6, et pour une sous-suite $\tilde{u_n} = \frac{u_n}{\rho_n}$, nous avons

$$
\begin{cases}
\tilde{u_n} \rightharpoonup \tilde{u}, \quad dans\ H(0,1), \\
\tilde{u_n} \to \tilde{u}, \quad dans\ L^2(0,1), \\
\tilde{u_n}(x) \to \tilde{u}(x), \quad p.p.\ dans\ (0,1).
\end{cases}
$$

Par conséquent, d'après la proposition 2.2, On a

$$
\langle J'(u_n), \tilde{u_n} - \tilde{u}\rangle = \int_0^1 \tilde{u_n}'(\tilde{u_n}' - \tilde{u}')\,dx - \int_0^1 f(x,u_n)(\tilde{u_n} - \tilde{u})\,dx.
$$

On devise cette équation par ρ_n, on trouve

$$\frac{\langle J'(u_n), \tilde{u_n} - \tilde{u}\rangle}{\rho_n} = \int_0^1 \frac{\tilde{u_n}'}{\rho_n}(\tilde{u_n}' - \tilde{u}')\,dx - \int_0^1 \frac{f(x,u_n)}{\rho_n}(\tilde{u_n} - \tilde{u})\,dx.$$

Alors

$$\int_0^1 \frac{\tilde{u_n}'}{\rho_n}(\tilde{u_n}' - \tilde{u}')\,dx = \int_0^1 \frac{f(x,u_n)}{\rho_n}(\tilde{u_n} - \tilde{u})\,dx + \frac{\langle J'(u_n), \tilde{u_n} - \tilde{u}\rangle}{\rho_n}. \tag{2.35}$$

On suppose que

$$g_n(x) = \frac{f(x,u_n(x))}{\rho_n}(\tilde{u_n}(x) - \tilde{u}(x)).$$

D'aprés lemme 2.2 et (2.23),

$$|g_n(x)| \leq C(\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma} + 1)|\tilde{u_m}(x) - \tilde{u}(x)| \tag{2.36}$$

Et donc $g_n \to 0$ et $|g_n| \leq (\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma} + 1) \in L^1(0.1)$, alors par passage à la limite de (2.36) donne $\|\tilde{u}\| = 1,$ en particulier, $\tilde{u} \neq 0$. D'aprés (2.28) et lemme 2.2, on a

$$H(x,u) \leq \begin{cases} C\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma}\,|u|\,, & u < 0, \\ 0, & 0 \leq u < \varepsilon, \\ C, & u \geq \varepsilon, \end{cases} \tag{2.37}$$

et $\|u_n^-\|$ est bornée, donc

$$\int_{\tilde{u}>0} H(x,u_n(x))\,dx \to -\infty \tag{2.38}$$

Par (2.29) et $\int_{\tilde{u}=0} H(x,u_n(x))\,dx$ est bornée supérieurement. D'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle J'(u_n), u_n\rangle - J(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2}f_\varepsilon(x,u_n(x))u_n\,dx - \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \int_0^1 F_\varepsilon(x,u_n(x))\,dx \\
&= \int_0^1 F_\varepsilon(x,u_n(x))\,dx - \frac{1}{2}u_n f_\varepsilon(x,u_n(x)) \\
&= \int_0^1 H(x,u_n(x))\,dx. \\
&= \int_{\tilde{u}>0} H(x,u_n(x))\,dx + \int_{\tilde{u}=0} H(x,u_n(x))\,dx \to -\infty
\end{aligned}$$

D'après la condition de Cerami, il existe $\bar{C} > 0$ telle que $\|J(u_n)\| \leq \bar{C}$, alors, pour $n \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
-\bar{C} \leq -\|J'(u_n)\|(1+\|u_n\|) - \|J(u_n)\| &\leq \frac{1}{2}\langle J'(u_n), u_n\rangle - J(u_n) \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2}f_\varepsilon(x,u_n(x))u_n\,dx - \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \int_0^1 F_\varepsilon(x,u_n(x))\,dx \\
&= \int_{\tilde{u}>0} H(x,u_n(x))\,dx + \int_{\tilde{u}=0} H(x,u_n(x))\,dx \to -\infty
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Contrairement à l'hypothèse. D'où la bornitude de la suite (u_n). ■

Théorème 2.2. *Si (2.2), (2.23) et f sont satisfaites. Alors (2.1) a deux solutions positives dans les cas suivants :*

(i) Résonance : (2.24) est satisfaite, et

$$H(x,u) \geq -C, \quad (x,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty), \tag{2.40}$$

Pour certains $C > 0$, et

$$H(x,u) \to +\infty \quad \textit{quand } u \to \infty, \tag{2.41}$$

(ii) Non résonance ci-dessus λ_1 :

$$f(x,u) \geq bu - C, \quad (x,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty), \tag{2.42}$$

Pour certains $b > \lambda_1$ et $C > 0$.

Démonstration - Par la preuve de la proposition 2.3, (par principe variationnel d'Eklend), J a un minimiser $u_0 \in B$ et $\inf J(\partial B) \geq J(u_0)$, (voir [26]). Nous allons montrer que $J(R\phi_1) \geq \inf J(\partial B)$ si $R > M$ est suffisamment grand, où $\phi_1 > 0$ est la fonction propre normalisée associée à λ_1, et nous vérifierons (C), (1.5). Ensuite le lemme du Col de montagne donnera un deuxième point critique au niveau c tel que,

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} J(u), \tag{2.43}$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = R\phi_1\}, \tag{2.44}$$

est la classe des chemins joignant u_0 et $R\phi_1$.

(i) Cas résonance :

Par (2.37), (2.41), et (2.42), nous avons,

$$\frac{\lambda_1}{2}u^2 - F_\varepsilon(x,u) = -2u^2 \int_u^\infty \frac{H(x,s)}{s^3}\, ds \leq C, \quad u \geq \varepsilon \tag{2.45}$$

Et $H(x,u) \to -\infty$ quand $u \to +\infty$,

et par lemme 2.2,

$$\frac{\lambda_1}{2}u^2 - F_\varepsilon(x,u) \leq C(\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma} + 1), \quad 0 \leq u < \varepsilon, \tag{2.46}$$

Donc

$$J(R\phi_1) = \int_0^1 \left(\frac{\lambda_1}{2} R^2 \phi_1(x)^2 - F_\varepsilon(x, R\phi_1(x)) \right) dx \to -\infty \quad \text{quand } R \to +\infty. \tag{2.47}$$

la vérification de (C) est similaire à celle de la preuve du théorème 2.1.

(ii) Cas non-résonance :

Par (2.43) et lemme 2.2, on a

$$F_\varepsilon(x,u) \geq \begin{cases} -C\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma}, & 0 \leq u < 0, \\ \frac{b}{2}u^2 - Cu, & u \geq \varepsilon, \end{cases} \tag{2.48}$$

Puisque $b > \lambda_1$, il s'ensuite $J(R\phi_1) \to -\infty \quad$ quand $\; R \to \infty$.

Si (2.7) est satisfaite et $\rho_n = \|u_n\| \to \infty$, par passage à une sous suite $\tilde{u_n} = \frac{u_n}{\rho_n}$ convergente à non trivial $\tilde{u} \geq 0$ faiblement dans $H(0,1)$, fortement dans $L^2(0,1)$, et p.p. dans $(0,1)$ comme dans la preuve du théorème 2.1. Alors

$$\begin{aligned} (b-\lambda_1)\int_0^1 \tilde{u_n}(x)\phi_1(x)\,dx &= \frac{1}{\rho_n}\int_0^1 (bu_n(x)\phi_1(x) - u_n'(x)\phi_1'(x))\,dx \\ &= \frac{1}{\rho_n}\left(\int_0^1 (bu_n(x) - f_\varepsilon(x,u_n(x)))\phi_1(x)\,dx - \langle J'(u_n),\phi_1\rangle\right) \\ &\leq \frac{1}{\rho_n}\left(\int_{u_n\geq\varepsilon} C\phi_1(x)\,dx + \int_{u_n<\varepsilon} bu_n(x)\phi_1(x)\,dx + \|J'(u_n)\|\right) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Par (2.43), et $\|u_n^-\|$ est bornée, alors

$$(b-\lambda_1)\int_0^1 \tilde{u}(x)\phi_1(x)\,dx \leq 0, \tag{2.50}$$

Ce qui est impossible. ∎

Exemple 2.3. Le problème

$$\begin{cases} -u'' = u^{-\gamma} + \mu e^u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.51}$$

Où $\gamma \in (0,1)$, admet deux solutions positives pour

$$0 < \mu < \sup_{M>0} \frac{M^{1+\gamma} - 1}{M^\gamma e^M} \tag{2.52}$$

Pour plus détail (voir (2.22)).

CHAPITRE 3

THÉORIE DES POINTS CRITIQUES, ET MULTIPLICITÉS DES SOLUTIONS POSITIVES SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES DE SECOND ORDRE PERTURBÉ SINGULIER.

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions positives pour une classe d'équations du second ordre. Pour obtenir nos résultats, nous utiliserons la méthode variationnelle et la théorie de point critique, et aussi le lemme du Col. Nous choisissons comme applications l'article qui a été publié par les auteurs Jian Liu, Zengqin Zhao en 2014, (voir [35]). A savoir, ce travail est généralise quelques résultats qui sont a publié par les auteurs Ravi P. Agarwal, Kanishka Perera, et Donal O'regan en 2005, dans l'article [23], (voir le chapitre 2).

3.1 Introduction

Agawal et al [23] ont étudié le problème aux limites singulière via méthodes variationnelles.

$$- u''(x) = f(x, y), \quad x \in (0, 1), u(0) = y(1) = 0, \tag{3.1}$$

où $f \in C((0, 1) \times (0, \infty), [0, \infty))$ satisfait

$$2\varepsilon \leq f(x, y) \leq Cu^{-\gamma}, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, \varepsilon). \tag{3.2}$$

pour certains $\varepsilon, C > 0$ et $\gamma \in (0, 1)$, les auteurs ont introduit une formulation variationnelle pour le problème aux limites de Dirichlet singulier. Motivées par les travaux montionnés ci-dessus, dans [35] nous considérons le problème de aux limites singulier.

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)) + e(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $f \in C((0,1)\times(0,\infty),[0,\infty))$, $e(x) \in L^1(0,1)$ satisfaire

$$2\varepsilon - e(x) \leq f(x,u) \leq Cu^{-\gamma}, (x,u) \in (0,1)\times(0,\varepsilon). \tag{3.4}$$

Pour certains $\varepsilon, C > 0$ et $\gamma \in (0,1)$. On considérons l'existence de solution faible pour (3.3) et obtenons de nouveaux théorèmes d'existence des solutions en utilisant des méthodes variationnels. Il est à noter qu'il existe jusqu'à présent quelques travaux concernant les résultats des solutions positives a des problèmes singulier.

3.1.1 Fonction de Green et le problème approché

On définit $f_\varepsilon \in C((0,1)\times\mathbb{R},[0,\infty))$ par

$$f_\varepsilon(x,u) = f(x,(u-\phi_\varepsilon(x))^+ + \phi_\varepsilon(x)), \tag{3.5}$$

Notation 3.1. On pose $u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$ et $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon x(1-x)$

Considérer, le problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(x) = f_\varepsilon(x,u) + e(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Lemme 3.1. *Par* (3.5) *et* (3.4), *on a*

$$2\varepsilon - e(x) \leq f_\varepsilon(x,u) \leq C\phi_\varepsilon^{-\gamma}, \quad (x,u) \in (0,1)\times(-\infty,\varepsilon), \tag{3.7}$$

$$f_\varepsilon(x,u) = f(x,u), \quad (x,u) \in (0,1)\times[\varepsilon,\infty). \tag{3.8}$$

Démonstration - La démonstration comme lemme 2.2.

Multiple la première équation de (3.6) par $v \in H$ des deux cotés, et intégrer l'égalité sur l'intervalle $(0,1)$ et combiner la condition aux limites $u(0) = u(1) = 0$ pour obtenir

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f_\varepsilon(t,u)v(x)dx + \int_0^1 e(x)v(x)dx; \tag{3.9}$$

Ainsi, une solution faible du problème aux limites singulières (3.6) est une fonction $u \in H$ tel que (3.9) tient pour tout $v \in H$. Posons

$$F_\varepsilon(x,u) = \int_\varepsilon^u f_\varepsilon(x,s)ds.$$

pour tout $u \in H$, en notant que $u(0) = u(1) = 0 < \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |F_\varepsilon(x,u)|dx &= \int_{u\geq\varepsilon} |\int_\varepsilon^u f_\varepsilon(x,s)ds|dx + \int_{u<\varepsilon} |\int_\varepsilon^u f_\varepsilon(x,s)ds|dx \\
&\leq \int_{u\geq\varepsilon} |\int_\varepsilon^u f_\varepsilon(x,s)ds|dx + C \max_{x\in[0,1]} (\varepsilon - u(x)) \int_0^1 |\phi_\varepsilon^{-\gamma}(x)|dx \\
&\leq \int_{u\geq\varepsilon} |\int_\varepsilon^u f_\varepsilon(t,s)ds|dx + C(\varepsilon + \|u\|_\infty) \int_0^1 |\phi_\varepsilon^{-\gamma}(x)|dx.
\end{aligned}$$

Il est clair qu'il existe une constant $C_1 > 0$ tel que $\int_{u\geq\varepsilon} | \int_\varepsilon^u f_\varepsilon(x,s)ds|dx \leq C_1$, et en outre, $|\phi_\varepsilon^{-\gamma}| = \phi_\varepsilon^{-\gamma} \in L^1(0,1)$, ainsi on obtient $\int_0^1 |F_\varepsilon(x,u)|dx < +\infty$. ■

3.2 Les résultats principaux d'existence

Nous définissons maintenant la fonction d'Euler-Lagrange associée au problème (3.6). Soit $J_e : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J_e(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2 dx - \int_0^1 F_\varepsilon(x,u)dx - \int_0^1 e(x)u(x)dx. \tag{3.10}$$

Telle que $F_\varepsilon(x,u) = \int\limits_0^u f_\varepsilon(x,s)ds.$

Proposition 3.1. *La fonctionnelle J_e est continuement différentiable et la dérivée de Fréchet de J_e écrit sous la forme*

$$\langle J_e'(u), v\rangle = \int_0^1 u'v' - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u)v - \int_0^1 e(x)vdx.$$

pour toute $v \in H_0^1(0,1)$.

Démonstration - En utilisant la même démonstration dans le chapiter 2.

pour montré J_e est continument différentiable. C'est à dire

Etape 1 : J_e est Gâteaux-différentiable.

Etape 2 : J_e' est continue.

■

Lemme 3.2. *Soit E est un espace de Banach $J_e \in C^1(E,R)$ satisfaire la condition de Palais-Smale. Supposons qu'il existe $x_0, x_1 \in E$, et un voisinage ouvert bornnée Ω de x_0 tel que $x_1 \notin \overline{\Omega}$ et*

$$\max\{J_e(x_0), J_e(x_1)\} < \inf_{x\in\partial\Omega} J_e(x).$$

Alors il existe une valeurs critique de J_e, c'est à dire, qu'il existe $u \in E$ tel que $J'_e(u) = 0$ et $J_e(u) > \max\{J_e(x_0), J_e(x_1)\}$.

Lemme 3.3. *Si $u \in H$, alors $\|u\|_\infty \le \|u\|$, où $\|u\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$.*

Démonstration - Il découle de l'inégalité de Hölder,

$$|u(x)| = |\int_0^x u'(s)ds| \le \int_0^x |u'(s)|ds \le \int_0^1 |u'(x)|dx \le (\int_0^1 |u'(x)|^2 dx)^{1/2} = \|u\|.$$

∎

Lemme 3.4. *La fonctionnelle J_e est continue, continuement dérivable, et faiblement semi-continue inférieurement .*

Démonstration - Par la continuité de f et il est facile de vérifier que la fonctionnelle J_e est continue, continument différentiable, et $J'_e(u)$ est définie par

$$\langle J'_e(u), v\rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x,u)v(x)dx - \int_0^1 e(x)v(x)dx. \tag{3.11}$$

Pour montrer que J_e est semi-continu faiblement inférieur, soit $\{u_n\}$ une suite faiblement convergente vers u dans H, alors $\|u\| \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$, et $\{u_n\}$ converge uniformément vers u dans $C[0,1]$, donc quand $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J_e(u_n) &= \frac{1}{2}\int_0^1 |u'_n(x)|^2 dx - \int_0^1 F_\varepsilon(x,u_n)dx - \int_0^1 e(x)u_n(x)dx \\
&\ge \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2 dx - \int_0^1 F_\varepsilon(x,u)dx - \int_0^1 e(x)u(x)dx \\
&= J_e(u).
\end{aligned}$$

Donc, par Définition 1.12 , J_e est faiblement semi-continue inférieurement. ∎

Définition 3.1. Soit E un espace Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On dit que J satisfait la condition de Ambrosetti-Rabinowitz, s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $r > \varepsilon$ tel que

$$0 < \mu F_\varepsilon(x,u) \leq f_\varepsilon(x,u)u, \quad u > r, \ \forall x \in (0,1), \tag{3.12}$$

Lemme 3.5. *Supposons que la condition Ambrosetti-Rabinowitz soit vérifiée, alors la fonctionnelle J_e satisfait la condition Palais-Smale.*

Démonstration - Soit $\{u_k\}$ une suite dans H tel que $\{J_e(u_k)\}$ est borné $J'_e(u_k) \to 0$, comme $k \to +\infty$, alors on va prouver que $\{u_k\}$ possède une sous suite convergente. D'abord $\{u_k\}$ est bornée. Par la condition Ambrosetti-Rabinowitz, on a

$$\begin{aligned}
&\mu J_e(u_k) - \langle J'_e(u_k), u_k\rangle \\
&= \frac{\mu}{2}\int_0^1 |u'_k|^2 dx - \mu\int_0^1 F_\varepsilon(x,u_k)dx - \mu\int_0^1 e(x)u_k dx \\
&\quad - \int_0^1 u'_k u'_k dx + \int_0^1 f_\varepsilon(x,u_k)u_k dx + \int_0^1 e(x)u_k dx \\
&\geq (\frac{\mu}{2} - 1)\|u_k\|^2 - \int_0^1 (\mu F_\varepsilon(x,u_k) - f_\varepsilon(t,u_k)u_k)dx + (1-\mu)\|u_k\|_\infty \|e\|_{L^1} \\
&\geq (\frac{\mu}{2} - 1)\|u_k\|^2 - \int_{u_k<\varepsilon} (\mu F_\varepsilon(x,u_k) - f_\varepsilon(x,u_k)u_k)dx \\
&\quad - \int_{\varepsilon \leq u_k \leq r} (\mu F_\varepsilon(x,u_k) - f_\varepsilon(x,u_k)u_k)dx \\
&\quad - \int_{u_k>r} (\mu F_\varepsilon(x,u_k) - f_\varepsilon(t,u_k)u_k)dx + (1-\mu)\|u_k\|_\infty \|e\|_{L^1} \\
&\geq (\frac{\mu}{2} - 1)\|u_k\|^2 - C\int_{u_k<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}|u_k|dx - \mu\int_{\varepsilon \leq u_k \leq r} F_\varepsilon(t,u_k)dx \\
&\quad + (1-\mu)\|u_k\|\|e\|_{L^1} \\
&\geq (\frac{\mu}{2} - 1)\|u_k\|^2 - C\|u_k^-\|_\infty \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}dx + (1-\mu)\|u_k\|\|e\|_{L^1} - C_2,
\end{aligned}$$

où $C_2 = \mu\int_{\varepsilon \leq u_k \leq r} F_\varepsilon(x,u_k)dx$.

Il suffit de montrer que $\|u_k^-\|_\infty$ est bornée. En effet, d'après (3.11), on a

$$\begin{aligned}
&\langle J_e'(u_k), u_k^-\rangle \\
&= \int_0^1 u_k'(u_k^-)'dx - \int_0^1 f_\varepsilon(t,u_k)u_k^- dx - \int_0^1 e(x)u_k^-(x)dx \\
&= \int_{u_k<0} u_k'(u_k^-)'dx + \int_{u_k\geq 0} u_k'(u_k^-)'dx - \int_0^1 f_\varepsilon(t,u_k)u_k^- dx - \int_0^1 e(x)u_k^- dx \\
&= \int_{u_k<0} u_k'(u_k^-)'dx - \int_0^1 f_\varepsilon(t,u_k)u_k^- dx - \int_0^1 e(x)u_k^- dx \\
&= -\int_0^1 (u_k^-)'(u_k^-)'dx - \int_0^1 f_\varepsilon(t,u_k)u_k^- dx - \int_0^1 e(x)u_k^- dx.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|u_k^-\|^2 &= -\langle J_e'(u_k), u_k^-\rangle - \int_0^1 f_\varepsilon(t,u_k)u_k^- dx - \int_0^1 e(x)u_k^- dx \\
&\leq -\langle J_e'(u_k), u_k^-\rangle + \int_0^1 f_\varepsilon(x,u_k)u_k^- dx + \int_0^1 e(x)u_k^- dx \\
&\leq \|J_e'(u_k)\|\|u_k^-\| + C\|u_k^-\|_\infty \int_{u_k<0} f_\varepsilon(x,u_k)dx + \|u_k^-\|_\infty \|e\|_{L^1} \\
&\leq \|J_e'(u_k)\|\|u_k^-\| + C\|u_k^-\| \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}dx + \|u_k^-\|\|e\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Par conséquence,

$$\|u_k^-\| \leq o(1) + C\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}dx + \|e\|_{L^1},$$

Ce qui implique que $\|u_k^-\|$ est bornée. Par le Lemme 3.3, on a $\|u_k^-\|_\infty$ est également bornée. Ainsi nous avons prouvé que $\{u_k\}$ est bornée. Puisque H est de Banach réflexif, il existe une sous suite de $\{u_k\}$ (pour simplifier encore notée par $\{u_k\}$) telle que $\{u_k\}$ converge faiblement vers certains u dans H. Alors la suite $\{u_k\}$ converges uniformément vers u dans $[0,1]$. Ainsi,

$$(J_e'(u_k) - J_e'(u))(u_k - u) \to 0,$$
$$\int_0^1 (f_\varepsilon(x,u) - f_\varepsilon(x,u_k))(u_k - u)dx \to 0,$$

comme $k \to +\infty$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
(J_e'(u_k) - J_e'(u))(u_k - u) &= J_e'(u_k)(u_k - u) - J_e'(u)(u_k - u) \\
&= \int_0^1 (u_k' - u')^2 dx + \int_0^1 (f_\varepsilon(x,u) - f_\varepsilon(x,u_k))(u_k - u)dx \\
&= \|u_k - u\|^2 + \int_0^1 (f_\varepsilon(x,u) - f_\varepsilon(x,u_k))(u_k - u)dx,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\|u_k - u\| \to 0$, quand $k \to +\infty$. C'est à dire, $\{u_k\}$ converge fortement de u dans H. ■

Nos résultats principaux sont les trois théorème suivante.

Théorème 3.1. *On supposantqu'il existe* $L > 0$ *telle que*

$$f(x,u) \leq L, \quad (x,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty). \tag{3.13}$$

Alors (3.3) *a aux moins une solution faible positive.*

Démonstration - Par (3.7) et (3.13), on a

$$F_\varepsilon(x,u) \leq \begin{cases} 0, & u < \varepsilon, \\ L(u-\varepsilon), & u \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Pour tout $u \in H$, on a

$$\begin{aligned} J_e(u) &= \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2 dx - \int_0^1 F_\varepsilon(x,u)dx - \int_0^1 e(x)u(x)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{u\geq\varepsilon} F_\varepsilon(x,u)dx - \|u\|_\infty \|e\|_{L^1} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - L\|u\| - \|u\|\|e\|_{L^1}, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\liminf_{\|u\|\to\infty} J_e(u) = +\infty$, ainsi, J_e est coercive. D'où, par [32, Lemma 2.4 et Theorem 1.1], J_e on a minimum, qui est un point critique de J_e, alors (3.3) a au moins une solution faible positive. ■

De manière analogue nous avons le résultat suivante.

Théorème 3.2. *Supposons qu'il existe* $a, b > 0$ *et* $\theta \in (0,1)$ *tel que*

$$f(t,u) \leq au^\theta + b, \quad (t,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty). \tag{3.14}$$

Alors (3.3) *admet au moins une solution faible positive.*

Démonstration - En utilisant les mêmes méthodes de la preuve ci-dessus du Théorème 3.1, il existe $\eta > 0$ telle que

$$J_e(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - a\|u\|^{\theta+1} - \eta\|u\|,$$

ce qui implique que $\liminf_{\|u\|\to\infty} J_e(u) = +\infty$, donc, J_e est coercive. D'où, par [32, Lemma 2.4 et Theorem 1.1], J_e on a minimum, qui est un point critique de J_e, alors (3.3) a au moins une solution faible positive. ∎

Théorème 3.3. *Supposons que* (3.12) *vérifié, et il'existe* $\delta > 0$, $\alpha > 2$ *tel que* $F_\varepsilon(t,u) \leq \delta u^\alpha$, $(t,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty)$. *Alors* (3.3) *a au moins deux solutions faibles positives.*

Démonstration - Dans premier temps, nous montrons qu'il existe $\rho > 0$, qui ce ra déterminé plus tard, tel que la fonctionnelle J_e a un minimum locale $u_0 \in B_\rho = \{u \in H : \|u\| < \rho\}$. Par les mêmes méthodes utilisées dans [34] montrent que $\overline{B}_\rho$ est un borné et faiblement fermé séquentiellement. Notant que J_e est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement sur $\overline{B}_\rho$ et H est un espace de Banach réflexive. Alors par lemme 1.2, on sait que J_e admet un minimum local $u_0 \in B_\rho$; c'est à dire, $J_e(u_0) = \min_{u\in B_\rho} J_e(u)$.

En suite, montrons que $J_e(u_0) < \inf_{u\in\partial B_\rho} J_e(u)$. Choisissez $\rho > 0$ tel que

$$\frac{1}{2}\rho^2 - \delta\rho^\alpha - \rho\|e\|_{L^1} > -2\varepsilon^2. \tag{3.15}$$

Pour tout $u = \rho\omega$, $\omega \in H$ avec $\|\omega\| = 1$, alors $\|u\| = \|\rho\omega\| = \rho\|\omega\| = \rho$, donc $u \in \partial B_\rho$. Par Lemme 3.3 et $F_\varepsilon(t,u) \leq \delta u^\alpha$ et $(t,u) \in (0,1) \times [\varepsilon, \infty)$, on a

$$\begin{aligned}
J_e(u) &= J_e(\rho\omega)\\
&= \frac{1}{2}\rho^2 - \int_0^1 F_\varepsilon(x,\rho\omega)dx - \int_0^1 e(x)\rho\omega(x)dx\\
&\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \int_{u\geq\varepsilon} F_\varepsilon(x,\rho\omega)dx - \rho\|\omega\|_\infty\|e\|_{L^1}\\
&\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \int_{u\geq\varepsilon} F_\varepsilon(t,\rho\omega)dx - \rho\|\omega\|\|e\|_{L^1}\\
&\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \delta\int_0^1 |\rho\omega|^\alpha dx - \rho\|\omega\|\|e\|_{L^1}\\
&\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \delta\rho^\alpha - \rho\|e\|_{L^1}\\
&> -2\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Par (3.7), on a

$$F_\varepsilon(t,u) = \int_\varepsilon^u f(t,s)ds \geq \int_\varepsilon^u (2\varepsilon - e(x))ds = (2\varepsilon - e(x))(u-\varepsilon).$$

Ainsi, $F_\varepsilon(t,0) \geq -\varepsilon(2\varepsilon - e(x)) \geq -2\varepsilon^2$, et on obtient $J_e(u) > -2\varepsilon^2 \geq J_e(0) = -F_\varepsilon(t,0) \geq J_e(u_0)$ pour $u \in \partial B_\rho$, ce qui implique $J_e(u_0) < \inf_{u\in\partial B_\rho} J_e(u)$.

Dans un deuxième temps, nous montrerons qu'il existe u_1 avec $\|u_1\| > \rho$ telle que $J_e(u_1) < \inf_{u\in\partial B_\rho} J_e(u)$. Par (3.7) et en notant que la fonctionnelle $(0,\infty) \ni \xi \to F_\varepsilon(t, \frac{u}{\xi})\xi^\mu$ est décroissante quand $u \neq 0$, voir les références [33], on a

$$F_\varepsilon(t,u) \geq F_\varepsilon(t,r)(\frac{u}{r})^\mu, \quad u \geq r.$$

Donc, on peut choisir u_1 avec $\|u_1\|$ suffisamment grand telle que $J_e(u_1) < -2\varepsilon^2$. Donc on a

$$\max\{J_e(u_0), J_e(u_1)\} < \inf_{x\in\partial B_\rho} J_e(x).$$

Lemme 3.5 montre que J_e satisfait condition Palais-Smale. Par conséquence,par lemme3.2 il existe un point critique $\hat{u}$. Donc, u_0 et $\hat{u}$ sont deux points critiques J_e, et sont aussi deux solutions faibles positives de (3.3). ∎

3.3 Exemples

Exemple 3.1. Prenons $\varepsilon = 1, e(x) = 2\sin t$, $f(t,u) = 2(1+|\sin\frac{1}{t(1-t)}|)u^{-1/3}$, et considérons l'équation

$$-u''(x) = f(t,u) + e(x), \quad t \in (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

L'équation est admet des solutions selon les théorèmes 3.1 ou 3.2.

Exemple 3.2. Prenons $\varepsilon = 1$, $e(x) = 2\sin t$,

$$f(t,u) = \begin{cases} 2(1+|\sin\frac{1}{t(1-t)}|)u^{-1/3}, & 0 < u < 1, \\ 2(1+|\sin\frac{1}{t(1-t)}|)u^2, & u \geq 1, \end{cases}$$

et considérons l'équation

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u) + e(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Il est facile se vérifier les conditions du théorème 3.3, donc, cette équation admet au moins deux solutions faibles positives.

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié quelques théories des points critiques, ainsi le principe variationnel d'Ekeland et on a étudié un problème aux limites d'ordre deux singulier posés sur l'intervalle borné $(0,1)$ par des méthodes variationnelles, théorème de minimisation et le lemme du Col ainsi que le principe variationnel d'Ekeland.

Dans le premier chapitre, on a donné quelques outils de base, qui sont nécessaires pour ce travail, comme la théorie des points critiques, la différentiabilité d'un opérateur dans l'espace de Banach et un lemme de compacité (Ascoli-Arzéla), et le théorème de Col (le lemme du Col), et aussi nous avons donner quelques théorèmes de minimisation et le principe variationnel d'Ekeland. On a introduit également des conditions de compacité connues sous le nom Palais-Smale et de Cerami respectivement.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'existence et la multiplicité de solutions pour le problèmes aux limites singulier suivant,

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u(x)), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Où $f \in C((0,1) \times (0,\infty), [0,\infty))$.

Notre approche est variationnelle, nous avons utilisé les théorèmes de minimisation et le lemme du Col. Les solutions sont obtenues comme des minimums ou des points critiques d'une certaine fonctionnelle.

Enfin, on a généralisé de certains des résultats étudiés dans le deuxième chapitre. dans un problème aux limites d'ordre deux singulier et perturbé suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u(x)) + e(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Bibliographie

[1] V. TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition, Mir. Moscou **(1985).**

[2] S. FORMINE ET A. KOLMOGOROV. *Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction français, Edition Mir. Moscou **(1977).**

[3] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris **(1983).**

[4] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN. *Existence of solutions for a second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle*, Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36 (2016)** 131-140.

[5] P. H. RABINOWITZ. *Minimax methods in critical point theory with applications to differntial equations*. CBMS regional conferece series in mathematics, vol. 65, American mathematical society, providence, RI **(1986).**

[6] M. BADIALE, E. SERRA. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach*. Springer-Verlag London Limited (2011).

[7] M. D. R. GROSSINHO AND S. A. TERSIAN. *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations.* Springer Science. **(2001).**

[8] I. EKELAND. *On the variational principle.* J. Math. Anal. Appl. **47(1974)**, 324-353 .

[9] J. M. BORWEIN AND Q. J. ZHU. *Techniques of Variational Analysis*. Springer. **(2005).**

[10] J. BAPTISTE AND H. URRUTY. *Bases, Outils et Principes pour L'Analyse Variationnelle.* Springer. **(1966).**

[11] Y. JABRI. *The Mountan Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications.* Cambridge University Press, New York. **(2003).**

[12] D. CAROLINE. *Théorèmes de Point Fixe et Principe Variationnel D'Ekeland.* Mémoire. Université de Montréal **(2010).**

[13] H. K. PATHAK. *An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory.* Springer **(2018).**

[14] P. V. SUBRAHMANYAM. *Elementary Fixed Point Theorems.* Springer **(2018).**

[15] N.S. PAPAGEORGIOU, S.K. YIALLOUROU. *Handbook of Applied Analysis.* Springer, New-York. **(2009).**

[16] D. O'REGAN, B. YAN AND R. P. AGARWAL. *Nonlinear boundary value problems on semi-infinite intervals using weighted spaces : An upper and lower solution approach.* Positivity. **11 (2007)** 171-189.

[17] C. O. ALVES. *Multiple positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent in* $\mathbb{R}^N$. Electron. J. Differential Equations. **13 (1997)** 1-10.

[18] M. WILLEM. *Minimax Theorems*. Birkhauser, **(1986)**.

[19] RAVI P.AGARWAL AND DONAL O'REGAN.. *Singular differential and integral equations with application*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht **(2003).**

[20] GIOVANNA CERAMI. *An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds*. Istit. Lombardo Accad. Sci.Lett.Rend, **(1979)** 332-336.

[21] PIERRE LE BARBENCHON.*Introduction aux équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*.

[22] ZEIDLER. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Vol III, Springer-Verlag, Berlin,**(1985).**

[23] RAVI P. AGARWAL, KANISHKA PERERA AND DONAL O'REGAN. *Multiple positive solutions of singular problems by variational methods*. PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. V 134, **3 (2005),** 817-824.

[24] O. KAVIAN. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* World Scientific. **2006**.

[25] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN, *Existance of solutions for a second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle,* Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36(2016),** 131-140.

[26] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN, *Multiplicity of positive solutions for second order quasilinear equation,* MATHEMATICA BOHEMICA, **(2019), 20 pp.**

[27] D. BOUAFIA, JOHN R. GRAEF AND T. MOUSSAOUI, *Existence of solutions for a perturbed second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle,* Communications in Applied Analysis, **22, No. 3 (2018),** 383-399.

[28] D. BOUAFIA AND T. MOUSSAOUI, *Existence results for a sublinear second order Dirichlet boundary value problem on the half-line*. Opuscula Math. **40, no. 5 (2020),** 537-548.

[29] R. P. AGARWAL, K. PERERA, D. O'REGAN, *Multiple positive solutions of singular and non-singular discrete problems via variational methods*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, **58, no. 1-2 (2004)**, 69-73.

[30] J. Á. CID, Ó. L. POUSO, R. L. POUSO, *Existence of infinitely many solutions for second-order singular initial value problems with an application to nonlinear massive gravity*, Nonlinear Analysis, Real World Application, **12, no. 5 (2011)**, 2596-2606.

[31] X. HE, W. ZOU, *Infinitely many solutions for a singular elliptic equation involving critical sobolev-Hardy exponents in R^N*, Acta Mathematica Scientia,Series B, **30, no. 3 (2010)**, 830-840.

[32] J. MAWHIN, M. WILLEM, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, **(1989)**.

[33] Z. ZHANG, R. YUAN, *An application of variational methods to Dirichlet boundary value problem with impulses*. Nonlinear Analysis, Real World Application, **11 (2010)**, 155-162.

[34] D. ZHANG, *Multiple solutions of nonlinear impulsive differential equations with Dirichlet boundary conditions via variational method*, Results in Mathematics, **63 (2013)**, 611-628.

[35] JIAN LIU, ZENGQIN ZHAO, *Existence of positive solutions to a sinqular boundary value problem using variational methods*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2014 (2014)**, No. 135, pp. 1-9.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème aux limites de second ordre singulier, sur un intervalle borné $(0,1)$, et ainsi que la théorie de point critiques, le principe variationnel d'Ekeland et lemme du Col. Notre objectif dans cette étude était d'appliquer le théorie de point critiques et lemme du Col pour étudier l'existence et multiplicité des solutions pour un problème aux limites de second ordre singulier suivant :

$$\begin{cases} -u^{''} = f(x,u), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Enfin, nous avons généralisé certains résultats qui a étudié dans le problème précédent, dans un problème aux limites de second ordre perturbé et singulier suivant :

$$\begin{cases} -u^{''}(x) = f(x,u(x)) + e(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Lorsque nous avons utilisé la méthode variationnelle et lemme du Col, Il s'avère que la solution du problème consiste à définir les points minimum ou critiques d'une fonctionnel d'énergie.

Mots clés : méthode variationnelle, point critique, principe variationnel d'Ekeland, théorème du Col de la montagne, théorème de minimisation, théorème de coercivité, condition de Cerami, condition de Palais-Smale, perturbé, singulier, solution positive.

ملخّص

في هَذه المذكرة قمنَا بدرَاسة مسأَلة حديّة فردية من الدرجة الثَانية علَى **مجَال محدود** $(0,1)$ ، و كَذلك نظرية النّقطة الحرجة، مَبدَأ التّغَاير لإِكلَاند و نظرية مَمرّ الجبل. و لقد كَان هدفنَا من هذه الدرَاسة تطبيق نظرية النّقطة الحرجة و نظرية مَمرّ الجبل لدرَاسة وجود و تعدَد الحلول لمشكلة الحدود المتفرّدة من الدّرجة الثَانية التَاليّة :

$$\begin{cases} -u^{''} = f(x,u), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

وَ أَخيرًا قمنَا بِتعميِم بَعض النّتَائِج الَتي تَمت دِرَاسَتهَا في المسأَلة السَابِقَة علَى مسأَلة حديّة متفرّدة مُضطربة من الدرجة الثَانية من الشكل :

$$
\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)) + e(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}
$$

حيث إستخدمنا طريقة التّغاير و نظرية مَمرّ الجبل، فَأتضح أنّ حلول المسأَلتَين هو الحدّ الأَدنَى لدَالة الطّاقة.

كلمَات مفتاحيّة : طريقة التّغاير، نظرية النّقطة الحرجة، توطئِة المَمرّ الجبلي، نظرية الشرط النّاقصي، مَبدَأ التّغاير لإِكلاند، شرط سيرَامي، شرط بَالي – سمَايل، مُضطرب، اَلتّفرّد، اَلحل الموجب.

Abstract

In this memory, we have studied a singular second-order boundary problem, on a bounded interval $(0, 1)$, and as well as the critical point theory, the variational principle of Ekeland and Col lemma (Mountain pass lemma). Our objective in this study was to apply the critical point theory and mountain pass lemma to study the existence and multiplicity of solutions for the following singular second-order boundary value problem :

$$
\begin{cases} -u'' = f(x, u), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}
$$

Finally, we have generalized some result which studied in the previous problem in a singular perturbud second-order boundary problem in the forme :

$$
\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)) + e(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}
$$

When we used the variational method, it turns out that the problem's solution consists of defining the minimum or critical points of an energy function.

Keywords : variational method, critical point, Ekeland variational principle, mountain pass theorem, minimization theorem, coercivity theorem, Cerami condition, Palais-Smale condition, perturbed, singular, positive solution.